



СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. К. АММОСОВА

ISSN 2411-9326

Математические заметки СВФУ

Том 31
№ 3. 2024

Редакционный совет

Главный редактор: Егоров И. Е., д.ф.-м.н., профессор, СВФУ

Зам. главного редактора: Кожанов А. И., д.ф.-м.н., профессор, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Зам. главного редактора: Попов С. В., д.ф.-м.н., профессор, СВФУ

Ответственный секретарь: Евсеев З. И., СВФУ

Члены редакционного совета:

Бородин О. В., д.ф.-м.н., профессор, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Вабищевич П. Н., д.ф.-м.н., профессор, Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН

Васильев В. И., д.ф.-м.н., профессор, СВФУ

Зикиров О. С., д.ф.-м.н., профессор, Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Узбекистан

Морозов А. С., д.ф.-м.н., профессор, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Пятков С. Г., д.ф.-м.н., профессор, Югорский государственный университет

Хлуднев А. М., д.ф.-м.н., профессор, Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

Itou H., Ph.D., Professor, Tokyo University of Science, Japan

Ruzhansky M., Professor, Ghent University, Belgium

Tani A., Professor, Keio University, Japan

СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М. К. АММОСОВА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ СВФУ

ОСНОВАН В 1994 ГОДУ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ВЫХОДИТ 4 РАЗА В ГОД

Том 31, № 3 (123)

Июль—сентябрь, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Кожанов А. И., Спиридонова Н. Р. Краевые задачи для специального класса вырождающихся гиперболических уравнений	3
A. I. Kozhanov, N. R. Spiridonova Boundary problems for a special class of degenerate hyperbolic equations	13
Кононенко Л. И., Волокитин Е. П. Качественный анализ одной сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений с малым параметром	15
L. I. Kononenko, E. P. Volokitin Qualitative analysis of one singularly perturbed system of differential equations with a small parameter	26
Ошоров Б. Б., Булгатова Е. Н., Васильева Е. Г. Обобщенная разрешимость неклассических краевых задач для систем уравнений в частных производных	28
B. B. Oshorov, E. N. Bulgatova, E. G. Vasilyeva Generalized solvability of non-classical boundary-value problems for systems of partial differential equations	37
Попов Н. С. О нелокальных интегродифференциальных краевых задачах многомерных псевдопараболических уравнений	39
N. S. Popov On nonlocal integro-differential boundary value problems for multidimensional pseudoparabolic equations	51
Федоров В. Е., Плеханова М. В., Сагимбаева А. О. Нелинейные обратные задачи со стационарным неизвестным элементом для уравнений с производными Джрабашяна — Нерсесяна	53

V. E. Fedorov, M. V. Plekhanova, A. O. Sagimbaeva	<i>Nonlinear inverse problems with a stationary unknown element for equations with Dzhrbashyan–Nersesyan derivatives</i>	70
R. F. Shamoyan, E. B. Tomashevskaya	<i>On Bergman type projections in new analytic spaces in tubular domains over symmetric cones</i>	73
Математическое моделирование		
Имомназаров Х. Х., Михайлов А. А., Искандаров И. К.		
<i>Моделирование влияния строения и физических свойств среды на характер распространения сейсмических волн от землетрясений</i>		82
Kh. Kh. Imomnazarov, A. A. Mikhailov, K. Iskandarov	<i>Modeling the influence of structure and physical properties of a medium on the nature of propagation of seismic waves from earthquakes</i>	91
Попова Т. С.	<i>Численное решение задачи о Т-образном сопряжении двух тонких включений Тимошенко в двумерном упругом теле</i>	93
T. S. Popova	<i>Numerical solution of the problem of T-shaped junction of two thin Timoshenko inclusions in a two-dimentional elastic body</i>	118

АДРЕС ИЗДАТЕЛЯ:
СВФУ, ул. Белинского, 58, Якутск, 677000

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
СВФУ, ул. Кулаковского, 48, каб. 543, Якутск, 677000
Телефон: 8(4112)32-14-99, Факс: 8(4112)36-43-47;
<http://mzsvfu.ru>
e-mail: prokopevav85@gmail.com; yktmatzam@gmail.com;
ivanegorov51@mail.ru

© Северо-Восточный федеральный университет
имени М. К. Аммосова, 2024

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОГО
КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ
ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
А. И. Кожанов, Н. Р. Спиридонова

Аннотация. Исследуется разрешимость новых краевых задач для специального класса вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка. В изучаемых задачах имеются две особенности. Первая из них — наличие в уравнении двух переменных, каждая из которых может считаться временной. Эта особенность означает, что для изучаемых уравнений могут быть корректными задачи с принципиально разными носителями граничных условий. Второй особенностью является наличие в уравнении вырождения. Эта особенность также означает, что в зависимости от характера вырождения постановка краевых задач может существенно меняться.

Для всех изучаемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений — решений, имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-3-3-14

Ключевые слова: гиперболические уравнения, вырождение, краевые задачи, регулярные решения, существование, единственность.

Введение

Работа посвящена исследованию разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений

$$\varphi(t)u_{xt} + \psi(t)u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u = f(x, t) \quad (*)$$

с неотрицательной функцией $\psi(t)$ и с функцией $\varphi(t)$, знак которой будет уточнен ниже. Подобные уравнения возникают в газовой динамике [1, 2], с математической точки зрения они изучались в работах [3–8]. Отметим, что задачи, изученные в настоящей работе, ранее исследованы не были.

Уравнения (*) являются гиперболическими как в случае $\varphi(t)\psi(t) > 0$, так и в случае $\varphi(t)\psi(t) < 0$. Это означает, с одной стороны, что в них каждая из переменных x или t может считаться временной и в зависимости от выбора направления времени может измениться постановка краевых задач, с другой — что направление гиперболичности в разных точках области определения может быть разным и тогда постановка краевых задач также может измениться в зависимости от свойств функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, соглашение от 28.02.2024 № 075-02-2024-1441.

Целью работы является определение достаточных условий, гарантирующих существование и единственность регулярных решений изучаемых ниже краевых задач (регулярными решениями мы называем решения, имеющие все обобщенные по С. Л. Соболеву [9] производные, входящие в соответствующее уравнение).

1. Постановка задач

Пусть Ω — интервал $(0, 1)$ оси Ox , Q — прямоугольник $\Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$. Далее, пусть $b(x, t)$, $c(x, t)$, $f(x, t)$, $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0, T]$, L — дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x, t)$ определяется равенством

$$Lv = \varphi(t)v_{xt} + \psi(t)v_{xx} + b(x, t)v_x + c(x, t)v.$$

Краевая задача I. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$Lu = f(x, t) \quad (1)$$

и такую, что для нее выполняется условие

$$u(0, t) = u_x(0, t) = 0, \quad 0 < t < T. \quad (2)$$

Краевая задача II. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условие (2), а также условие

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (3)$$

Краевая задача III. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняется условие (2), а также условие

$$u(x, 0) = u(x, T) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (4)$$

Краевая задача IV. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условие (3), а также условие

$$u(0, t) = u_x(1, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (5)$$

Определим линейное пространство V :

$$V = \{v(x, t) : v(x, t) \in W_2^1(Q), v_x(x, t) \in W_2^1(Q)\}.$$

Снабдим это пространство нормой

$$\|v\|_V = (\|v\|_{W_2^1(Q)}^2 + \|v_x\|_{W_2^1(Q)}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Основной целью работы является доказательство существования и единственности решений краевых задач I–IV, принадлежащих пространству V . Основным отличием настоящей работы от работ предшественников (которых не

так много) является то, что у нас уравнение (1) может существенно вырождаться — функция $\varphi(t)$ может обращаться в нуль на множествах ненулевой меры из отрезка $[0, T]$, функция $\varphi(t)$ в задачах I–III может менять знак сколько угодно раз.

Некоторые аналоги линеаризованного уравнения Линя — Рейснера — Цзяня (т. е. уравнения (1) в случае $\varphi(t) \equiv \psi(t) \equiv 1$) с вырождением изучались в работах [4, 5], но характер вырождения в этих работах был иной, нежели в настоящей работе.

Уточним также, что, с одной стороны, постановки задач I–III близки к постановкам работ [3, 4], постановка задачи IV близка к постановке работы [5], с другой стороны, все задачи I–IV являются новыми для рассматриваемых в основной части работы уравнений.

2. Разрешимость краевых задач I–III

Рассмотрим вначале случай строго положительной на отрезке $[0, T]$ функции $\psi(t)$.

Исследование разрешимости краевых задач I–III будет проведено с помощью метода регуляризации и метода продолжения по параметру. Поскольку методы доказательства разрешимости задач I–III будут лишь незначительно различаться, сведем все соответствующие результаты в одну теорему.

Теорема 1. Пусть выполняются условия

$$\varphi(t) \in C^1([0, T]), \quad \psi(t) \in C^1([0, T]), \quad b(x, t) \in C(\overline{Q}),$$

$$c(x, t) \in C(\overline{Q}), \quad b_t(x, t) \in C(\overline{Q}), \quad c_t(x, t) \in C(\overline{Q});$$

$$\psi(t) \geq \bar{\psi}_0 > 0 \quad \text{при } t \in [0, T],$$

а также одно из условий

- (i) $\varphi(0) \leq 0, \varphi(T) \geq 0, f(x, t) \in L_2(Q), f_t(x, t) \in L_2(Q);$
- (ii) $\varphi(0) > 0, \varphi(T) \geq 0, f(x, t) \in L_2(Q), f_t(x, t) \in L_2(Q), f(x, 0) = 0$ при $x \in \overline{\Omega};$
- (iii) $\varphi(0) > 0, \varphi(T) < 0, f(x, t) \in L_2(Q), f_t(x, t) \in L_2(Q), f(x, 0) = f(x, T) = 0$ при $x \in \overline{\Omega}.$

Тогда краевая задача I, II или III при выполнении соответствующих условий (i), (ii) или (iii) разрешима в пространстве V , причем единственным образом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ε — положительное число, L_ε — дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x, t)$ определяется равенством

$$L_\varepsilon v = -\varepsilon v_{xxtt} + Lv.$$

Рассмотрим следующие три вспомогательные краевые задачи.

Задача I_ε. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$L_\varepsilon u = f(x, t) \quad (6)$$

и такую, что для нее выполняются условие (2), а также условие

$$u_t(x, 0) = u_t(x, T) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (7)$$

Задача II_ε. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (6) и такую, что для нее выполняются условие (2), а также условие

$$u_t(x, T) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (8)$$

Задача III_ε. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (6) и такую, что для нее выполняются условия (2) и (4).

Определим пространство V_1 :

$$V_1 = \{v(x, t) : v(x, t) \in V, v_{xtt}(x, t) \in L_2(Q)\}.$$

Разрешимость вспомогательных краевых задач I_ε–III_ε, а также самих задач I–III будем устанавливать с помощью априорных оценок. Установим их наличие.

При получении оценок индекс « ε » у решений уравнения (6) опустим. Более того, через $u(x, t)$ будем обозначать решение любой задачи I_ε, II_ε или III_ε.

Анализируя последовательно равенства

$$\int_0^x \int_0^T L_\varepsilon u(y, t) u_y(y, t) dt dy = \int_0^x \int_0^T f(y, t) u_y(y, t) dt dy, \quad (9)$$

$$-\int_0^x \int_0^T \frac{1}{\psi(t)} L_\varepsilon u(y, t) u_{ytt}(y, t) dt dy = -\int_0^x \int_0^T \frac{1}{\psi(t)} f(y, t) u_{ytt}(y, t) dt dy, \quad (10)$$

т. е. интегрируя по частям, используя положительность функции $\psi(t)$, условия соответствующих задач I_ε, II_ε или III_ε, и, наконец, применяя лемму Гронуолла, получим, что выполняется оценка

$$\varepsilon \int_0^x \int_0^T u_{yt}^2 dt dy + \int_0^T [u_x^2(x, t) + u_{xt}^2(x, t)] dt \leq M_1 \int_Q f^2 dt dx, \quad (11)$$

постоянная M_1 в которой определяется функциями $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $c(x, t)$, а также числом ε .

Еще одна оценка

$$\int_0^x \int_0^T u_{xx}^2 dt dx \leq M_2 \int_Q f^2 dt dx \quad (12)$$

очевидным образом вытекает из оценки (11); постоянная M_2 в этой оценке также определяется функциями $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $c(x, t)$ и числом ε .

Оценок (11) и (12) вполне достаточно для доказательства разрешимости в пространстве V_1 краевых задач I_ε , Π_ε или Π_{ε} . Действительно, определим семейство операторов $L_{\varepsilon, \lambda}$, $0 \leq \lambda \leq 1$:

$$L_{\varepsilon, \lambda} v = -\varepsilon v_{xtt} + \psi(t)v_{xx} + \lambda[v_{xt} + cv].$$

При $\lambda = 0$ и при фиксированном ε каждая из задач I_ε , Π_ε или Π_{ε} для этого оператора разрешима в пространстве V_1 (см. [10, 11]). Далее, для решений этих же задач с оператором $L_{\varepsilon, \lambda}$ имеют место равномерные по λ априорные оценки (11), (12). Согласно теореме о методе продолжения по параметру [12, гл. III, § 14] приведенных выше фактов достаточно для существования в пространстве V_1 решений краевых задач I_ε , Π_ε или Π_{ε} для оператора $L_{\varepsilon, \lambda}$ при всех λ из отрезка $[0, 1]$ при фиксированном ε и при принадлежности функции $f(x, t)$ пространству $L_2(Q)$. Поскольку $L_{\varepsilon, 1} = L_\varepsilon$, тем самым получаем, что каждая из задач I_ε , Π_ε или Π_{ε} при фиксированном ε разрешима в пространстве V_1 .

Пусть $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^\infty$ — последовательность положительных чисел, сходящаяся к 0, $u_m(x, t)$ — решение одной из задач I_{ε_m} , Π_{ε_m} или Π_{ε_m} . Полагая в равенстве (10) $\varepsilon = \varepsilon_m$, $u = u_m$, повторяя выкладки, которые позволили получить оценки (11), (12), но при этом дополнительно в правой части (12) выполняя интегрирование по переменной t и используя условия (i), (ii) или (iii), получим, что для семейства $\{u_m(x, t)\}_{m=1}^\infty$ выполняется априорная оценка

$$\begin{aligned} & \varepsilon_m \int_0^x \int_0^T u_{mytt}^2(y, t) dt dy + \int_0^T [u_{mx}^2(x, t) + u_{mxt}^2(x, t)] dt \\ & + \int_0^x \int_0^T u_{myy}^2(y, t) dt dy \leq M_3 \int_Q (f^2 + f_t^2) dx dt, \quad (13) \end{aligned}$$

постоянная M_3 в которой определяется лишь функциями $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $c(x, t)$.

Используя классическую теорему о рефлексивности гильбертова пространства (см., например, [10]), нетрудно показать, что существует подпоследовательность $\{u_{m_k}(x, t)\}_{k=1}^\infty$, слабо сходящаяся в пространстве V к некоторой функции $u(x, t)$, такая, что $\varepsilon_{m_k} u_{m_k xtt}(x, t) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Эта функция $u(x, t)$ и будет искомым решением либо задачи I, либо задачи II, либо задачи III.

Единственность решений для всех трех задач очевидно следует, например, из оценки (11), справедливой и при $\varepsilon = 0$.

Теорема полностью доказана.

Пусть теперь функция $\psi(t)$ неотрицательна на отрезке $[0, T]$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия

$$\varphi(t) \in C^1([0, T]), \quad \psi(t) \in C^1([0, T]), \quad b(x, t) \in C^1(\overline{Q}), \quad c(x, t) \in C^1(\overline{Q});$$

$$\begin{aligned} \psi(t) &> 0 \quad \text{при } t \in (0, T), \quad \psi(0) \geq 0, \quad \psi(T) \geq 0; \\ b(x, t) - \frac{1}{2}\varphi'(t) &\geq b_0 > 0, \quad b(x, t) + \frac{1}{2}\varphi'(t) \geq b_1 > 0 \quad \text{при } (x, t) \in \bar{\Omega}; \\ f_x(x, t) &\in L_2(Q), \quad f_{xt}(x, t) \in L_2(Q), \quad f(0, t) = 0 \quad \text{при } t \in [0, T]; \end{aligned}$$

а также одно из условий (i), (ii) или (iii) теоремы 1. Тогда соответствующая задача I, II или III разрешима в пространстве V , причем единственным образом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\psi_\varepsilon(t) = \psi(t) + \varepsilon$, и пусть ε — произвольное положительное число. Рассмотрим уравнение

$$\varphi(t)u_{xt} + \psi_\varepsilon(t)u_{xx} - \varepsilon u_{xtt} + b(x, t)u_x + c(x, t)u = f(x, t) \quad (14)$$

и краевую задачу для него с условиями (2), (3) и (7) либо с условиями (2), (3) и (4), либо с условиями (2) и (8).

Для решений $u(x, t)$ каждой из этих задач выполняются равномерные по ε оценки

$$\int_0^x \int_0^T u_y^2 dt dy + \varepsilon \int_0^x \int_0^T u_{yt}^2 dt dy \leq R_1 \int_Q f^2 dt dy, \quad (15)$$

$$\int_0^x \int_0^T u_{yy}^2 dt dy + \varepsilon \int_0^x \int_0^T u_{ytt}^2 dt dy \leq R_2 \int_Q (f^2 + f_y^2) dt dy. \quad (16)$$

Первая из этих оценок доказывается умножением уравнения (14) с текущей пространственной переменной y на функцию $u_y(y, t)$ и интегрированием по прямоугольнику $\{0 < y < x \leq 1, 0 < t < T\}$, вторая — дифференцированием уравнения (14) по пространственной переменной и повторением предыдущей процедуры (уточним лишь, что вследствие условия $f(0, t) = 0$ функция $u_{xx}(0, t)$ будет тождественно нулевой на отрезке $[0, T]$).

Умножим уравнение (14) на функцию $u_{xtt}(x, t)$ и проинтегрируем по прямоугольнику Q . Используя оценки (15), (16) и учитывая условия теоремы, получим, что для решений $u(x, t)$ каждой из задач I, II или III будет выполняться оценка

$$\int_Q u_{xt}^2 dt dx + \varepsilon \int_Q u_{xtt}^2 dt dx \leq R_3 \int_Q (f^2 + f_x^2 + f_t^2 + f_{xt}^2) dt dx, \quad (17)$$

постоянная R_3 в которой определяется лишь функциями $b(x, t)$, $c(x, t)$, $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. Оценок (15)–(17) вполне достаточно для организации процедуры предельного перехода (с выбором последовательности $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^\infty$ такой, что $\varepsilon_m > 0$, $\varepsilon_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, и с использованием свойства рефлексивности гильбертова пространства). Предельная функция в каждом из соответствующих случаев (i), (ii) или (iii) даст решение из пространства V соответствующей задачи I, II или III.

Теорема доказана.

3. Разрешимость краевой задачи IV

Теорема 3. Пусть выполняются условия

$$\varphi(t) \in C([0, T]), \quad [\varphi(t)]^{-1} \in L_2([0, T]), \quad \psi(t) \in C^1([0, T]);$$

$$\varphi(t) > 0 \quad \text{при } t \in (0, T), \quad \varphi(0) \geq 0, \quad \varphi(T) \geq 0;$$

$$\psi(t) \leq \psi_0 < 0 \quad \text{при } t \in [0, T];$$

$$b(x, t) \in C(\overline{Q}), \quad b_x(x, t) \in C(\overline{Q}), \quad c(x, t) \in C(\overline{Q}), \quad c_x(x, t) \in C(\overline{Q});$$

$$|b(x, t)| + |b_x(x, t)| + |c(x, t)| + |c_x(x, t)| \leq N_0 \varphi^{1/2}(t) \quad \text{при } (x, t) \in \overline{Q}.$$

Тогда для любой функции $f(x, t)$ такой, что $f(x, t) \in L_2(Q)$, $f_t(x, t) \in L_2(Q)$, $f(x, 0) = 0$ при $x \in \overline{\Omega}$, краевая задача IV имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству V , причем ровно одно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вновь воспользуемся методом регуляризации.

Пусть ε — положительное число, L_ε — оператор, действие которого на заданной функции $v(x, t)$ определяется равенством

$$L_\varepsilon = \varepsilon \psi(t) v_{xxt} + Lv.$$

Как показано в [10, 11], краевая задача с условиями (3) и (5) для уравнения $L_\varepsilon u = f$ при фиксированном ε и при выполнении условий теоремы имеет решение $u(x, t)$ такое, что $u(x, t) \in V$, $u_{xxt}(x, t) \in L_2(Q)$. Докажем, что для семейства этих решений имеют место нужные равномерные по ε априорные оценки.

Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_{\Omega} \frac{A_0 + x}{\psi(t)} L_\varepsilon u \cdot u_{xxt} dx d\tau = \int_0^t \int_{\Omega} \frac{A_0 + x}{\psi(t)} f u_{xxt} dx d\tau,$$

в котором A_0 — фиксированное положительное число. После несложных выкладок это равенство преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (A_0 + x) u_{xxt}^2 dx d\tau - \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)} u_{x\tau}^2 dx d\tau - \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)} u_{x\tau}^2(0, \tau) d\tau \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_{xx}^2(x, t) dx = \int_0^t \int_{\Omega} \frac{(A_0 + x)b}{\psi(\tau)} u_{xx} u_{x\tau} dx d\tau \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} \frac{((A_0 + x)b)_x}{\psi(\tau)} u_x u_{x\tau} dx d\tau + A_0 \int_0^t \int_{\Omega} \frac{b(0, \tau)}{\psi(\tau)} u_x(0, \tau) u_{x\tau}(0, \tau) d\tau \\ & - \int_0^t \int_{\Omega} (A_0 + x) \left(\frac{1}{\psi(\tau)} \right)_\tau u_{xx} dx d\tau + \int_{\Omega} \frac{A_0 + x}{\psi(t)} f(x, t) u_{xx}(x, t) dx. \end{aligned} \quad (18)$$

Оценивая каждое слагаемое правой части равенства (18) с помощью неравенства Юнга и условий теоремы, дополнительно используя неравенство

$$u_x^2(x, \tau) \leq \int_{\Omega} u_{xx}^2(x, \tau) dx \quad (19)$$

и, наконец, применяя лемму Гронуолла, получим, что следствием равенства (18) будет априорная оценка

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} u_{xxt}^2 dx d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} \varphi(\tau) u_{x\tau}^2 dx d\tau + \int_0^t \varphi(\tau) u_{x\tau}^2(0, \tau) d\tau \\ & + \int_{\Omega} u_{xx}^2(x, t) dx \leq N_1 \int_Q (f^2 + f_t^2) dx dt, \end{aligned} \quad (20)$$

постоянная N_1 в которой определяется функциями $\psi(t)$, $b(x, t)$ и $c(x, t)$, а также числом T .

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$\int_{Q_d} \frac{1}{\varphi(t)} L_\varepsilon u \cdot u_{xt} dx dt = \int_{Q_d} \frac{1}{\varphi(t)} f u_{xt} dx dt,$$

в котором d есть число такое, что $0 < d < T - d$, а Q_d — область $\{(x, t) : 0 < x < 1, d < t < T - d\}$. Это равенство нетрудно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon}{2} \int_d^{T-d} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} u_{xt}^2 dx dt + \int_{Q_d} u_{xt}^2 dx dt = - \int_{Q_d} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} u_{xt} u_{xx} dx dt \\ & - \int_{Q_d} \frac{b}{\varphi(t)} u_{xt} u_x dx dt - \int_{Q_d} \frac{c}{\varphi(t)} u_{xt} u dx dt + \int_{Q_d} \frac{f}{\varphi(t)} u_{xt} dx dt. \end{aligned} \quad (21)$$

Оценим первое слагаемое правой части этого равенства с помощью неравенства Гельдера и Юнга, а также оценки (20):

$$\begin{aligned} & \left| \int_{Q_d} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} u_{xt} u_{xx} dx dt \right| \leq N_2 \int_d^{T-d} \frac{1}{\varphi(t)} \left(\int_{\Omega} u_{xt}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} u_{xx}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \\ & \leq N_3 \int_d^{T-d} \frac{1}{\varphi(t)} \left(\int_{\Omega} u_{xt}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \leq \frac{\delta^2}{2} \int_{Q_d} u_{xt}^2 dx dt + \frac{N_3}{2\delta^2} \int_d^{T-d} \frac{dt}{\varphi^2(t)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Числа N_2 и N_3 здесь определяются функциями $\psi(t)$, $b(x, t)$ и $c(x, t)$, а также числом T , число δ лишь произвольное положительное число.

Второе и третье слагаемые правой части (21) оцениваются аналогичным образом с дополнительным использованием неравенства (19) и аналогичного неравенства для функции $u(x, t)$, четвертое слагаемое правой части (21) оценивается с помощью неравенства Юнга. Поскольку последний интеграл в правой

части неравенства (22) конечен и конечны аналогичные интегралы, получаемые при оценке второго, третьего и четвертого слагаемых правой части (22) (конечность этих интегралов имеет место вследствие условий теоремы на функции $\varphi(t)$ и $f(x, t)$), то после подбора числа δ малым из неравенства (21) можно вывести неравенство

$$\int_{Q_d} u_{xt}^2 dxdt \leq N_4$$

с постоянной N_4 , определяемой функциями $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $b(x, t)$, $c(x, t)$ и $f(x, t)$, а также числом T . Из этого неравенства вследствие произвольности числа d следует априорная оценка

$$\int_Q u_{xt}^2 dxdt \leq N_4. \quad (23)$$

Оценки (20) и (23) означают, что семейство решений краевой задачи для уравнения $L_\varepsilon u = f$ с условиями (3) и (5) равномерно по ε ограничено в пространстве V и что семейство функций $\sqrt{\varepsilon}u_{xxt}(x, t)$ равномерно по ε ограничено в пространстве $L_2(Q)$. Используя далее свойство рефлексивности гильбертова пространства (т. е. используя возможность выбора соответствующих слабо сходящихся последовательностей), нетрудно установить существование требуемого решения краевой задачи IV.

Теорема доказана.

4. Замечания и дополнения

4.1. В разд. 1 отсутствует постановка краевой задачи с одним условием при $t = T$. Очевидно, что эта задача сводится к задаче III.

4.2. В уравнении (1) функции φ и ψ вполне могут быть функциями, зависящими от обоих переменных x и t . Соответствующие условия теорем 1–3 для этих функций должны быть «равномерными» по переменной x .

4.3. Функция $\varphi(t)$ в теореме 3 может обращаться в нуль при $t = 0$ и при $t = T$. Нетрудно показать, что аналогичную теорему существования решения краевой задачи IV можно получить и в случае обращения функции $\varphi(t)$ в нуль в любом конечном множестве точек из отрезка $[0, T]$.

4.4. Если в уравнении (1) присутствует диссипативное слагаемое $a(x, t)u_t$, то разрешимость краевой задачи IV можно будет доказать при значительно более слабых ограничениях на входные данные.

4.5. В краевой задаче IV условие $u_x(1, t) = 0$ можно заменить условием $u_x(1, t) + \gamma(t)u(1, t) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

- Lin C. C., Reissner E., Tsien H. S. On two-dimensional nonsteady motion of a slender body in a compressible fluid // J. Math. Phys. 1948. V. 27, N 3. P. 220–231.

2. Мамонтов Е. В. Об уравнениях малых возмущений в нестационарном околозвуковом потоке газа // Нестационарные проблемы механики: сб. науч. тр. Новосибирск: Сиб. отд-е АН СССР, Ин-т гидродинамики, 1978. № 37. С. 139–143.
3. Ларькин Н. А. К теории линеаризованного уравнения Линя — Рейсснера — Цзяня // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики: сб. науч. тр. Новосибирск: Сиб. отд-е АН СССР, Ин-т математики, 1980. С. 126–131.
4. Ларькин Н. А. О линеаризованном уравнении нестационарной газовой динамики // Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа: сб. науч. тр. Новосибирск: Сиб. отд-е АН СССР, Ин-т математики, 1983. С. 107–118.
5. Кожанов А. И. О постановке и разрешимости краевой задачи для одного класса уравнений, не разрешимых относительно временной производной // Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики: сб. науч. тр. Новосибирск: Сиб. отд-е АН СССР, Ин-т математики, 1987. С. 84–98.
6. Глазатов С. Н. Задача с данными на характеристике для линеаризованного уравнения трансзвуковой газовой динамики // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 5. С. 1019–1029.
7. Глазатов С. Н. О разрешимости пространственно-периодической задачи для уравнения Линя — Рейсснера — Цзяня трансзвуковой газовой динамики // Мат. заметки. 2010. Т. 87, вып. 1. С. 137–140.
8. Варламова Г. А., Кожанов А. И. Нелокальные задачи с интегральными условиями для гиперболических уравнений с двумя временными переменными // Мат. заметки СВФУ. 2023. Т. 30, № 3. С. 12–26.
9. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1973.
10. Якубов С. Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985.
11. Kozhanov A. I. Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
12. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию 13 сентября 2024 г.

После доработки 13 сентября 2024 г.

Принята к публикации 1 октября 2024 г.

Кожанов Александр Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
kozhanov@math.nsc.ru

Спиридонова Нарыйа Руслановна
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
nariya@yandex.ru

BOUNDARY PROBLEMS FOR A SPECIAL CLASS OF DEGENERATE HYPERBOLIC EQUATIONS

A. I. Kozhanov and N. R. Spiridonova

Abstract: We study the solvability of new boundary problems for a special class of degenerate second-order hyperbolic equations. These problems have two features. The first is the presence of two variables in the equation, each of which can be considered as a time variable. This means that problems with fundamentally different boundary conditions can be correct for these equations. The second feature is the presence of degeneracy. This means that the boundary problems formulation can change depending on the nature of degeneration.

For the problems under study, we prove theorems of existence and uniqueness for regular solutions are proven, i.e. solutions that have all generalized according to Sobolev derivatives included in the equation.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-3-3-14

Keywords: hyperbolic equation, degeneration, boundary problem, regular solution, existence, uniqueness.

REFERENCES

1. Lin C. C., Reissner E., and Tsien H. S., “On two-dimensional nonsteady motion of a slender body in a compressible fluid,” J. Math. Phys., **27**, No. 3, 220–231 (1948).
2. Mamontov E. V., “On the equations of small disturbances in a non-stationary transonic gas flow [in Russian],” in: Non-Stationary Problems of Mechanics, No. 37, pp. 139–143, Inst. Gidrodin., Novosibirsk (1978).
3. Larkin N. A., “To the theory of the linearized Lin–Reissner–Tsien equation [in Russian],” in: Correct Boundary Value Problems for Non-Classical Equations of Mathematical Physics, pp. 126–131, Inst. Mat., Novosibirsk (1980).
4. Larkin N. A., “On the linearized equations of non-stationary gas dynamics [in Russian],” in: Non-Classical Equations and Equations of Mixed Type, pp. 107–118, Inst. Mat., Novosibirsk (1983).
5. Kozhanov A. I., “On the formulation and solvability of a boundary value problem for one class of equations not solved with respect to the time derivative [in Russian],” in: Boundary Value Problems for Non-Classical Equations of Mathematical Physics, pp. 84–98, Inst. Mat., Novosibirsk (1987).
6. Glazatov S. N., “A problem with data on a characteristic for a linearized equation of transonic gas dynamics,” Sib. Math. J., **37**, No. 5, 898–906 (1996).
7. Glazatov S. N., “On solvability of a spatial periodic problem for the Lin–Reissner–Tsien equation of transonic gas dynamics,” Math. Notes, **87**, No. 1–2, 130–134 (2010).
8. Varlamova G. A. and Kozhanov A. I., “Nonlocal problems with integral conditions for hyperbolic equations with two time variables [in Russian],” Mat. Zametki SVFU, **30**, No. 3, 12–26 (2023).
9. Sobolev S. L., Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1991) (Transl. Math. Monogr.; vol. 90).

10. Yakubov S. Ya., Linear Differential-Operator Equations and Their Applications [in Russian], Elm, Baku (1985).
11. Kozhanov A. I., Composite Type Equations and Inverse Problems, VSP, Utrecht (1999).
12. Trenogin V. A., Functional Analysis [in Russian], Nauka, Moscow (1980).

Submitted September 13, 2024

Revised September 13, 2024

Accepted October 1, 2024

Alexandr I. Kozhanov
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Avenue, Novosibirsk 630090, Russia
kozhanov@math.nsc.ru

Naryia R. Spiridonova
Ammosov North-Eastern Federal University,
Institute of Mathematics and Informatics,
48 Kulakovskiy Street, Yakutsk 677000, Russia
nariya@yandex.ru

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ОДНОЙ
СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ
СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ
Л. И. Кононенко, Е. П. Волокитин

Аннотация. Рассматривается сингулярно возмущенная система обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром, в которой участвуют разномасштабные переменные. Излагаются необходимые сведения о методе интегральных многообразий, такие как медленная поверхность ($\varepsilon = 0$), листы медленной поверхности, интегральное многообразие ($\varepsilon \neq 0$), его листы, асимптотическое разложение медленного интегрального многообразия по степеням ε . В качестве примера в работе проводится качественный анализ одной системы, являющейся сингулярно возмущенной системой с малым параметром.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-3-15-27

Ключевые слова: сингулярно возмущенные системы, интегральные многообразия, листы медленной поверхности, малый параметр.

Введение

Настоящая работа основана на исследованиях [1–7]. Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с малым параметром вида

$$\dot{x}(t) = f(x(t), y(t), t, \varepsilon), \quad \varepsilon \dot{y}(t) = g(x(t), y(t), t, \varepsilon), \quad (1)$$

$x \in \mathbb{R}^m$ — медленные переменные, $y \in \mathbb{R}^n$ — быстрые переменные, $t \in \mathbb{R}$, f, g — достаточно гладкие функции, $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Первое уравнение системы (1) называется *медленной подсистемой*, второе — *быстрой подсистемой*.

Работа имеет следующую структуру.

В разд. 1 кратко изложены элементы теории интегральных многообразий медленных и быстрых движений сингулярно возмущенных дифференциальных систем. В разд. 2 дано описание схемы алгоритма качественного анализа системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром [3]. В разд. 3 в качестве примера проведен анализ конкретной системы с разномасштабными переменными, взятой из [8]. В приложении эта система исследована

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН проект FWNF-2022-0005.

с применением традиционных методов качественной теории плоских динамических систем при произвольных значениях параметров.

1. Существование интегрального многообразия медленных движений

Для приближенного качественного анализа системы (1) предлагается сначала изучить строение, форму и особенности интегрального многообразия при помощи асимптотических разложений по ε .

Гладкая поверхность S в $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ называется *интегральным многообразием* системы (1), если любая интегральная кривая этой системы, имеющая хотя бы одну общую точку с S , целиком лежит на поверхности S . Формально если при $t = t_0$ точка $(x(t_0), y(t_0), t_0)$ принадлежит S , то интегральная кривая $(x(t), y(t), t)$ целиком находится на S [8].

Для автономных систем вместо термина «интегральное многообразие» иногда используется термин «инвариантное многообразие» [8].

Простейшим примером интегрального многообразия является интегральная кривая системы. Примером интегрального многообразия являются фазовые траектории системы, в том числе стационарные состояния и предельные циклы. Расширенное фазовое пространство $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ тоже является интегральным многообразием.

Приведем необходимые сведения о методе интегральных многообразий применительно к системе (1).

Если в системе (1) положить $\varepsilon = 0$, получим *пороождающую* или *вырожденную* систему

$$\dot{x} = f(x, y, t, 0), \quad (2)$$

$$0 = g(x, y, t, 0). \quad (3)$$

Уравнение $g(x, y, t, 0) = 0$ задает *медленную поверхность*. Это уравнение медленной поверхности может иметь одно или несколько решений вида $y = \varphi(x, t)$, каждое из которых задает *лист медленной поверхности*.

Листы интегрального многообразия медленных движений (или медленного интегрального многообразия) являются уточнением при учете малого параметра ε листов медленной поверхности и получаются из них с помощью асимптотического разложения по степеням ε :

$$h(x, t, \varepsilon) = h_0(x, t) + \varepsilon h_1(x, t) + \cdots + \varepsilon^k h_k(x, t) + \cdots, \quad (4)$$

где $h_0(x, t) = \varphi(x, t)$ и коэффициенты в разложении $h_k(x, t)$ подсчитываются по рекуррентной формуле, приведенной, например, в [3]:

$$h_k = -B^{-1} \left[g^{(k)} - \frac{\partial h_{k-1}}{\partial t} - \sum_{p=0}^{k-1} \frac{\partial h_p}{\partial x} f^{k-1-p} \right]_\varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

$$B = \det \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x, h_0(x, t), t, 0) \right) \neq 0.$$

Среди интегральных многообразий системы (1) нас интересуют $(m + 1)$ -мерные интегральные многообразия (m — размерность медленных переменных), которые представимы в виде графика вектор-функции $y = h(x, t, \varepsilon)$ и для которых выполняется соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(x, t, \varepsilon) = h_0(x, t),$$

где $h_0(x, t) = \varphi(x, t)$ — функция, график которой является листом медленной поверхности.

Нахождение решения системы (1) сводится к отысканию решения вырожденной системы (2), (3), получаемой из исходной, если параметр ε формально положить равным нулю. Этот факт следует из работ А. Н. Тихонова (см., например, [9]), в которых доказаны теоремы о предельном переходе к решению вырожденной задачи при стремлении малого параметра к нулю. Правые части системы (1) f, g являются достаточно гладкими функциями, поэтому удовлетворяют требуемым условиям, в частности, обеспечивают единственность решения.

В [3] было доказано существование интегрального многообразия для системы (1). Приведем соответствующую теорему.

Пусть для системы выполнены следующие условия.

I. Уравнение $g(x, y, t, 0) = 0$ имеет изолированное решение $y = h_0(x, t)$ при $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^m$.

II. В области

$$\Omega_0 = \{(x, y, t, \varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}^m, \|y - h_0(x, t)\| < \rho, t \in \mathbb{R}, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$$

функции f, g и h_0 равномерно непрерывны и ограничены вместе с частными производными по переменным до $(k + 2)$ -го порядка включительно ($k \geq 0$).

III. Собственные значения $\lambda_i(x, t)$ ($i = 1, \dots, n$) матрицы $\frac{\partial g}{\partial y}(x, h_0(x, t), t, 0)$ подчиняются неравенству $\operatorname{Re} \lambda_i(x, t) \leq -2\gamma < 0$.

Теорема [3]. Пусть выполняются условия I–III. Тогда существует такое ε_1 ($0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$), $\varepsilon_0 \ll 1$, — формальный параметр, что для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ система (1) имеет интегральное многообразие медленных движений $y = h(x, t, \varepsilon)$, представленное формулой (4) с коэффициентами (5), движение по которому описывается уравнением

$$\dot{x} = f(x, h(x, t, \varepsilon), t, \varepsilon).$$

2. Описание схемы алгоритма качественного исследования системы ОДУ с малым параметром

Как указано выше, исследование сингулярно возмущенной системы (1) обыкновенных дифференциальных уравнений будем проводить на основе алгоритма, предложенного в [3]. Напомним вкратце схему этого алгоритма.

ШАГ I. Описание листов интегрального многообразия. Интегральное многообразие в нулевом приближении ($\varepsilon = 0$) задается уравнением $g(x(t), y(t), t, 0) = 0$, называемым уравнением медленной поверхности. Оно может иметь несколько решений $y = \varphi_i(x, t)$, $i = 1, \dots, l$, задающих листы медленной поверхности.

ШАГ II. Нахождение границ листов медленной поверхности. Граница листа находится как пересечение медленной поверхности $g(x(t), y(t), t, 0) = 0$ с поверхностью, заданной уравнением

$$\det\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x(t), y(t), t, 0)\right) = 0.$$

ШАГ III. Выяснение характера устойчивости листов медленной поверхности. Для листа $y = \varphi_i(x, t)$ характер устойчивости зависит от знака собственных чисел матрицы

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x(t), \varphi_i(x, t), t, 0), \quad i = 1, 2, \dots, l.$$

Лист устойчив, если действительные числа всех собственных чисел отрицательны. Лист неустойчив, если действительные части всех собственных чисел положительны. Лист условно устойчив, если среди действительных чисел имеются и положительные, и отрицательные (но нет нулевых). В случае нулевых действительных частей собственных чисел необходимо рассматривать первое приближение по ε медленной поверхности.

ШАГ IV. Качественный анализ динамики медленной подсистемы на каждом из листов медленной поверхности с выяснением следующих основных особенностей динамики: нахождение стационарных состояний, их типа, условий множественности, колебаний разных видов, в том числе релаксационных, решений-уток. Если траектория содержит постоянно чередующиеся медленные и быстрые участки, она описывает релаксационные колебания. Решения-утки — это траектории, переходящие с притягивающего участка медленной кривой на отталкивающий участок. Подробно решения-утки и релаксационные колебания описываются в [10–14].

ШАГ V. Качественный анализ системы в целом. Заметим, что по этой схеме был проведен качественный анализ динамических свойств, например, двух следующих моделей: каталитического изотермического реактора идеального перемешивания и реакции каталитического окисления [6].

3. Пример применения качественного анализа к исследованию конкретной системы ОДУ с малым параметром

Рассмотрим систему, которая является примером, иллюстрирующим эффективность метода качественного анализа сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых присутствуют разномасштабные переменные [8].

Для упрощения исследования рассматривается система, для которой выполнены следующие условия:

- 1) качественный анализ проводим для системы при $\varepsilon = 0$, т. е. для вырожденной системы (2), (3) (на медленной поверхности); тесная связь с вырожденной системой мотивирует рассмотрение этого случая;
- 2) рассматривается система с одной медленной и одной быстрой переменными, т. е. $m = n = 1$;
- 3) функцию $g(x, y, t, \varepsilon)$ считаем удовлетворяющей условиям теоремы о неявной функции, в частности, $\frac{\partial g(x, y, t, 0)}{\partial y} \neq 0$ в надлежащих точках.

Имеем

$$\dot{x} = y, \quad \varepsilon \dot{y} = x^2 + y^2 - a, \quad a > 0, \quad (6)$$

где $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, ε — положительный малый параметр.

Уравнение $\dot{x} = y$ — медленная подсистема системы (6), уравнение $\varepsilon \dot{y} = x^2 + y^2 - a$ — быстрая подсистема (x — медленная переменная, y — быстрая).

Шаг 1. Найдем листы медленной поверхности системы (6). Уравнение медленной поверхности, т. е. интегрального многообразия при $\varepsilon = 0$,

$$x^2 + y^2 - a = 0. \quad (7)$$

Это окружность с центром в точке $(0, 0)$ радиуса \sqrt{a} . Заметим, что уравнение (7) — это неявное задание окружности. Но мы можем свести его к явному заданию [15] (рис. 1).

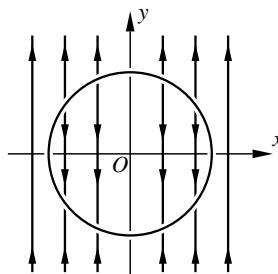


Рис. 1. Система (6) при $\varepsilon = 0$.

Окружность имеет два листа:

$$S_1 : y_1 = \sqrt{a - x^2}, \quad S_2 : y_2 = -\sqrt{a - x^2}, \quad |x| < a. \quad (8)$$

Для приближенного вычисления используется асимптотическое разложение функции $h(x, t, \varepsilon)$ по степеням малого параметра, описанного формулами (4), (5).

Чаще всего качественное исследование поведения медленной подсистемы ограничивается анализом на листах медленной поверхности. В нулевом приближении поведение решений на многообразии медленных движений задается порождающей системой дифференциальных уравнений (2), (3). Если возникает

необходимость иметь следующие приближения интегрального многообразия, то для их получения дифференцируют функцию $g(x, y, t, \varepsilon)$ по переменной t [8].

Для системы (6) имеем:

- a) нулевое приближение интегрального многообразия (медленной поверхности) имеет вид $x^2 + y^2 = a$;
- b) первое приближение для интегрального многообразия имеет вид

$$\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + y^2 = a + \frac{\varepsilon^2}{4};$$

c) второе приближение имеет вид

$$\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + y^2 = a - \frac{\varepsilon^2}{4},$$

заметим, что оно совпадает со всеми последующими и дает точное уравнение для медленного интегрального многообразия [8].

Вернемся к дальнейшему исследованию по шагам системы (1).

ШАГИ 2, 3. Найдем границы листов S_1 и S_2 . Как сказано в разд. 2, границы листа находятся как пересечение медленной поверхности с поверхностью, заданной уравнением

$$\det\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) = 0,$$

т. е. в нашем случае рассматриваем систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ \frac{y}{\sqrt{a-x^2}} = 0 \end{cases} \quad \text{на листе } S_1$$

и систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ \frac{-y}{\sqrt{a-x^2}} = 0 \end{cases} \quad \text{на листе } S_2.$$

У обоих листов границами являются точки $(\sqrt{a}, 0), (-\sqrt{a}, 0)$.

Так как размерность переменных x, y равна 1, устойчивость листов S_1 и S_2 зависит от знака $\frac{\partial g}{\partial y}$, и видим, что лист S_1 неустойчивый, а лист S_2 устойчивый.

Мы не исследуем систему (2) на неустойчивом листе, т. е. на листе S_1 , так как поведение на неустойчивых листах мало отражается на поведении системы в целом, по крайней мере для того круга динамического поведения, который мы исследуем.

ШАГ 4. Проведем качественный анализ системы (6) на устойчивом листе S_2 . Медленная подсистема на листе S_2 после выражения быстрой переменной y через медленную x имеет вид

$$\dot{x} = \sqrt{a - x^2}.$$

Особые точки данной системы — это граничные точки $x_1 = \sqrt{a}, x_2 = -\sqrt{a}$. Они являются точками срыва. На устойчивом листе S_2 в силу простоты системы нет сложной динамики. Мы выбрали эту систему для демонстрации метода

интегральных многообразий из-за ее простоты, нам важно, чтобы шаги исследования не сильно загромождались формулами. Конечно, есть примеры систем, в которых картина поведения решений сложная, динамика интересная.

Как мы уже упоминали, в [6, 7] подробно рассматриваются сингулярно возмущенные системы ОДУ с малым параметром, описывающие модели из химической кинетики: первая модель — изотермического реактора смешения, вторая модель — реакции окисления CO_2 .

Шаг 5. Качественная картина поведения решений системы (6) на устойчивом листе S_2 будет похожа на поведение решений медленной подсистемы на том же листе.

Приложение

Исследуем качественную картину поведения решений системы (6) в целом при произвольных значениях параметров $a > 0$, $\varepsilon > 0$.

Запишем систему (6) в виде

$$\dot{x} = y \equiv P(x, y), \quad \dot{y} = \frac{x^2 + y^2 - a}{\varepsilon} \equiv Q(x, y). \quad (9)$$

Как установлено в [8], функция

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 + \varepsilon x - a + \frac{\varepsilon^2}{2}$$

задает медленное интегральное многообразие системы (6) $f_1(x, y) = 0$, которое представляет собой окружность радиуса $\sqrt{a - \varepsilon^2/4}$ с центром в точке $(-\varepsilon/2, 0)$ и состоит из устойчивого и неустойчивого листов (нижняя и верхняя полуокружности).

Функция $f_1(x, y)$ является инвариантом системы (9) с кофактором $k_1 = 2y/\varepsilon$:

$$\frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} P(x, y) + \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} Q(x, y) = \frac{2y}{\varepsilon} f_1(x, y).$$

Функция

$$f_2(x, y) = \exp x$$

является инвариантом системы (9) (инвариантный экспоненциальный множитель) с кофактором $k_2 = y$:

$$\frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} P(x, y) + \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} Q(x, y) = y f_2(x, y).$$

Имеем $k_1 - \frac{2}{\varepsilon} k_2 = 0$. В таком случае функция

$$H(x, y) = f_1(x, y) f_2(x, y)^{-2/\varepsilon} = \left(x^2 + y^2 + \varepsilon x - a + \frac{\varepsilon^2}{2} \right) \exp(-2x/\varepsilon) \quad (10)$$

будет интегралом Дарбу системы (9).

Подробнее о теории Дарбу интегрирования плоских полиномиальных систем см., например, в [16].

Система (9) имеет две особые точки $O_1(\sqrt{a}, 0)$, $O_2(-\sqrt{a}, 0)$.

Матрица линейного приближения правой части системы, вычисленная в точке O_1 , имеет вид

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2\sqrt{a}}{\varepsilon} & 0 \end{pmatrix}.$$

Особая точка O_1 — седло.

Матрица линейного приближения правой части системы, вычисленная в точке O_2 , имеет вид

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2\sqrt{a}}{\varepsilon} & 0 \end{pmatrix}.$$

Особая точка O_2 является центром по линейной части. Поскольку система (9) имеет интеграл (10), аналитический на всей плоскости, она не может иметь особых точек типа фокус. Следовательно, точка O_2 является центром системы (9).

Границей области центра служит траектория, двоякоасимптотическая к седлу O_1 (петля сепаратрисы).

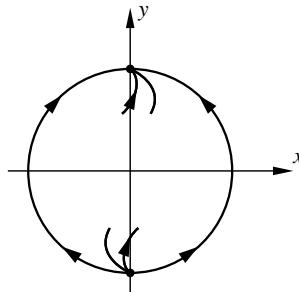


Рис. 2. Траектории системы (9) в окрестности экватора Пуанкаре.

В частности, в области центра помещается медленное интегральное многообразие. Эта окружность определяет периодическое решение системы (9). Траектория пересекает ось Ox в точках с абсциссами x_1, x_2 , которые определяются из уравнения

$$x^2 + \varepsilon x - a + \frac{\varepsilon^2}{2} = 0.$$

Имеем

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}(-\varepsilon \mp \sqrt{4a - \varepsilon^2}),$$

и период равен

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{-(x^2 + \varepsilon x - a + \frac{\varepsilon^2}{2})}} = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{-(x - x_1)(x - x_2)}} = 2\pi.$$

Центр O_2 не является изохронным. Поэтому рассмотренное периодическое движение неустойчиво по Ляпунову.

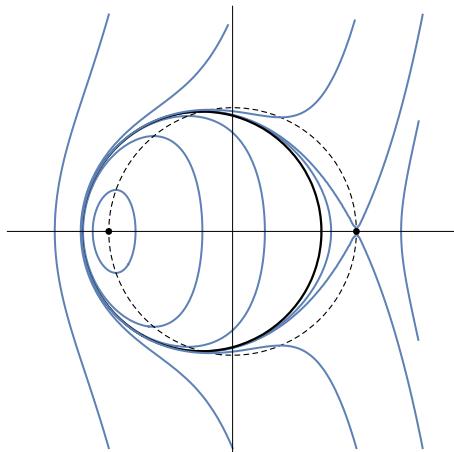
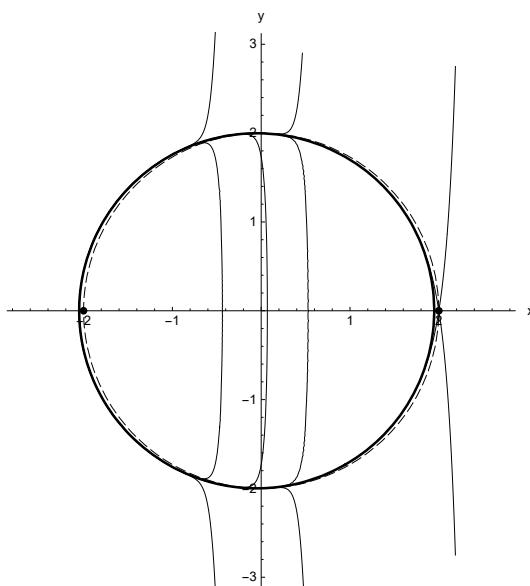


Рис. 3. Фазовый портрет системы (9).

Рис. 4. Фазовый портрет системы (9) при значениях параметров $a = 4$, $\varepsilon = 1/10$.

Бесконечно удаленные точки системы (9) расположены в точках пересечения экватора Пуанкаре с осью Oy : устойчивый вырожденный узел в верхней полуплоскости и неустойчивый в нижней (рис. 2).

Фазовый портрет системы (9) приведен на рис. 3.

При стремлении ε к 0 медленное интегральное многообразие и петля сепаратрисы стремятся к окружности $x^2 + y^2 = a$, которая определяет медленную поверхность, и приходим к представлению о поведении решений системы, согласующемся с выводами, полученными ранее в разд. 3.

В системе (9) при малых ε имеют место траектории, поведение которых на-

поминает поведение траекторий-уток [10, 11], поскольку они характеризуются тем, что в течение заметного промежутка времени проходят в непосредственной близости от неустойчивой части медленного интегрального многообразия. Внутри области центра эти траектории замкнуты и представляют собой циклы. Если эти циклы расположены достаточно далеко от состояний равновесия, они состоят из быстрых и медленных участков и являются релаксационными.

Рис. 4 иллюстрирует сказанное.

Отметим, что медленное интегральное многообразие задается как линия уровня $H(x, y) = 0$, т. е.

$$x^2 + y^2 + \varepsilon x - a + \frac{\varepsilon^2}{2} = 0,$$

является алгебраической кривой (окружность) и определяет алгебраический цикл.

Благодарность. Авторы благодарят В. Н. Потапова за большую помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1963.
2. Васильева А. В., Бутузов В. Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: Изд-во МГУ, 1978.
3. Гольдштейн В. М., Соболев В. А. Качественный анализ сингулярно возмущенных систем. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1988.
4. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975.
5. Стрыйгин В. В., Соболев В. А. Разделение движений методом интегральных многообразий. М.: Наука, 1988.
6. Кононенко Л. И. О гладкости медленных поверхностей сингулярно возмущенных систем // Сиб. журн. индустр. математики. 2002. Т. 5, № 10. С. 109–125.
7. Кононенко Л. И., Волокитин Е. П. Параметризация и качественный анализ сингулярной системы в математической модели реакции каталитического окисления // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 1. С. 44–52.
8. Воропаева Н. В., Соболев В. А. Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем. М.: Физматлит, 2009.
9. Тихонов А. Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Мат. сб. 1948. Т. 22, № 2. С. 193–204.
10. Звонкин А. К., Шубин М. А. Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1984. Т. 39, № 2. С. 77–127.
11. Арнольд В. И. и др. Теория бифуркаций // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1986. С. 5–218.
12. Chumakov G. A., Chumakova N. A. Relaxation oscillations in a kinetic model of catalytic hydrogen oxidation involving a chase on canards // Chem. Eng. J. 2003. V. 91, N 2–3. P. 151–158.
13. Соболев В. А., Щепакина Е. А. Траектории-утки в одной задаче теории горения// Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 9. С. 1175–1184.
14. Кононенко Л. И. Релаксации в сингулярно возмущенных системах на плоскости// Вестн. НГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, № 4. С. 45–50.
15. Решетняк Ю. Г. Курс математического анализа. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1999. Ч. 1. Кн. 2; 1999, 2000. Ч. 2. Кн. 1.

-
16. Grau I. A., Grau M. A survey on the unverse integrating factor // Qual. Theory Dyn. Syst. 2010. V. 9. P. 15–166.

Поступила в редакцию 2 сентября 2024 г.

После доработки 2 сентября 2024 г.

Принята к публикации 1 октября 2024 г.

Кононенко Лариса Ивановна, Волокитин Евгений Павлович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коштюга, 4, Новосибирск 630090
larakon@math.nsc.ru, volok@math.nsc.ru

QUALITATIVE ANALYSIS OF ONE SINGULARLY
PERTURBED SYSTEM OF DIFFERENTIAL
EQUATIONS WITH A SMALL PARAMETER

L. I. Kononenko and E. P. Volokitin

Abstract: We consider a singularly perturbed system of ordinary differential equations with a small parameter, in which different-scale variables are involved. The necessary information about the method of integral manifolds is presented, such as slow surface ($\varepsilon = 0$), sheets of slow surfaces, integral manifold ($\varepsilon \neq 0$), its sheets, and asymptotic expansion of a slow integral manifold in powers of ε . As an example, a qualitative analysis of one singularly perturbed system with a small parameter is carried out in the work.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-3-15-27

Keywords: singularly perturbed system, integral manifold, slow surface sheet, small parameter.

REFERENCES

1. Mitropolsky Yu. A. and Lykova O. B., Integral Manifolds in Nonlinear Mechanics [in Russian], Nauka, Moscow (1963).
2. Vasil'eva A. V. and Butuzov V. F., Singularly Perturbed Equations in Critical Cases [in Russian], Nauka, Moscow (1978).
3. Goldstein V. M. and Sobolev V. A., Qualitative Analysis of Singularly Perturbed Systems [in Russian], Inst. Mat., Novosibirsk (1988).
4. Mishchenko E. F. and Rozov N. Kh., Differential Equations with Small Parameter and Relaxation Oscillations [in Russian], Nauka, Moscow (1975).
5. Strygin V. V. and Sobolev V. A., Separation of Motions Using the Method of Integral Manifolds [in Russian], Nauka, Moscow (1988).
6. Kononenko L. I., “On the smoothness of slow surfaces of singularly perturbed systems [in Russian],” Sib. Zh. Ind. Mat., **5**, No. 2, 109–125 (2002).
7. Kononenko L. I. and Volokitin E. P., “Parameterization and qualitative analysis of a singular system in a mathematical model of reaction of catalytic oxidation [in Russian],” Sib. Zh. Ind. Mat., **15**, No. 1, 44–52 (2012).
8. Voropaeva N. V. and Sobolev V. A., Geometric Decomposition of Singularly Perturbed Systems [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2009).
9. Tikhonov A. N., “On independence of solutions to differential equations on a small parameter [in Russian],” Mat. Sb., **22**, No. 2, 193–204 (1948).
10. Zvonkin A. K. and Shubin M. A., “Nonstandard analysis and singular perturbations of ordinary differential equations [in Russian],” Uspekhi Mat. Nauk, **39**, No. 2, 77–127 (1984).
11. Arnold V. I. et al., “Theory of bifurcations,” in: Modern Problems of Mathematics, Fundamental Directions [in Russian], pp. 5–218, VINITI, Moscow (1986).
12. Chumakov G. A. and Chumakova N. A., “Relaxation oscillations in a kinetic model of catalytic hydrogen oxidation involving a chase on canards [in Russian],” Chem. Eng. J., **91**, No. 2-3, 151–158 (2003).

13. Sobolev V. A. and Shchepakina E. A., “Duck-trajectories in one problem of combustion theory [in Russian],” Differ. Equ., **32**, No. 9, 1175–1184 (1996).
14. Kononenko L. I., “Relaxations in singularly perturbed systems on the plane [in Russian],” Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat., Mekh., Inform., **9**, No. 4, 45–50 (2009).
15. Reshetnyak Yu. G., Course of Mathematical Analysis [in Russian], Izdat. Inst. Mat., Novosibirsk, vol. 1: 1999; vol. 2.: 2000.
16. Grau I. A. and Grau M., “A survey on the unverse integrating factor,” Qual. Theory Dyn. Syst., **9**, 115–166 (2010).

Submitted September 2, 2024

Revised September 2, 2024

Accepted October 1, 2024

Larisa I. Kononenko, Evgenii P. Volokitin
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia
larakon@math.nsc.ru, volok@math.nsc.ru

ОБОБЩЕННАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ
НЕКЛАССИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ
ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ
**Б. Б. Ошоров, Е. Н. Булгатова,
Е. Г. Васильева**

Аннотация. Даётся краткий обзор результатов исследований авторов по неклассическим краевым задачам для линейных систем уравнений в частных производных. Приводятся некоторые новые результаты в указанном направлении.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-3-28-38

Ключевые слова: системы уравнений, краевые задачи, обобщенные решения.

1. Идея введения обобщенных решений начала проникать в математическую физику с 20-х гг. прошлого столетия. В частности, при исследовании двумерных вариационных задач появилась необходимость расширить класс функций, среди которых ищется минимум, привлекая непрерывные функции, имеющие обобщенные производные (классы Тонелли) [1]. Другим источником возникновения обобщенных решений послужили нестационарные задачи для волнового уравнения и уравнений гидродинамики, где давно вводились разрывные решения в виде плоских и сферических волн с сильным разрывом, а также решения, описывающие ударные волны.

В этом направлении значительные результаты, во многом определяющие все дальнейшие исследования, получены С. Л. Соболевым [2]. В основу определяемых им обобщенных решений той или иной задачи для уравнения $Lu = f$ положено интегральное тождество

$$\int\limits_D u(x)L^*\nu dx = \int\limits_D f\nu(x) dx,$$

имеющее место для некоторого класса гладких «пробных» функций $\nu(x)$. Затем доказывается, что такие обобщенные решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами по существу являются пределами в том или ином смысле гладких решений исследуемых задач. Таким образом, С. Л. Соболев пришел к определению обобщенных решений уравнения $Lu = f$ как пределу классических решений. В настоящее время эти два вида обобщенных решений называются слабыми и сильными решениями.

О. А. Ладыженская [3], продолжая исследования в указанном направлении, отметила, что для каждой задачи можно вводить различные классы обобщенных решений, определяемые тем функциональным пространством, которому принадлежит искомое решение. При этом оказалось, что корректность задач зависит от функциональных пространств, в которых ищется решение.

Возник вопрос отличия систем уравнений в частных производных от одного уравнения с точки зрения постановки корректных задач. Если для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений такие постановки практически совпадают, то для уравнений в частных производных наблюдается иная картина. Для одного эллиптического уравнения второго порядка корректной является задача Дирихле и есть пример эллиптической по Петровскому системы уравнений второго порядка, для которой нарушается единственность решения задачи Дирихле [4].

Этот факт положил начало исследованиям, где одной из задач является изучение влияния типа системы уравнений на постановку корректных задач. Методика исследований базируется на результатах В. Н. Врагова, изложенных в доступной форме в учебном пособии [5].

Исследования Б. Б. Ошорова, которые были начаты еще в 70-х годах прошлого столетия [6], изложены в работах [7–13]. В самом начале для эллиптической системы уравнений второго порядка, где в главной части стоит оператор из работы [4], доказана [6–10] однозначная разрешимость неклассической краевой задачи в прямоугольнике $D = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < k; 0 < y < l\}$, где однородные граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} u_1|_{y=0} &= u_1|_{y=l} = u_2|_{y=0} = u_2|_{y=l} = 0, \\ u_1|_{x=0} &= u_1|_{x=k} = u_2|_{x=0} = u_2|_{x=l} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь условия на функцию $u_1(x, y)$ совпадают с условиями смешанной задачи для гиперболического волнового уравнения, а условия на функцию $u_2(x, y)$ суть условия смешанной задачи для волнового уравнения, но с измененным направлением времени (переменная y).

Так как оператор второго порядка в этих работах является второй степенью оператора Коши — Римана, чтобы понять, почему для эллиптической системы корректна гиперболическая задача, были исследованы краевые задачи для систем уравнений первого порядка в плоских областях. Эти исследования также отражены в [7–10]. По сути, исследуемые задачи являются обобщениями задачи Римана — Гильберта с разрывными краевыми условиями для системы Коши — Римана. Тогда условия (1) являются продолжениями условий Римана — Гильберта на уравнения второго порядка.

Результаты исследований для плоских областей нашли продолжение для областей в трехмерном и четырехмерном пространствах как краевые задачи для системы уравнений Моисила — Теодореско и для переменных кватернионов [10, 11].

Отметим, что во всех перечисленных выше работах рассматривались неклассические задачи для классических систем уравнений эллиптического типа. За-

тем пришло понимание, что в примененной методике исследования задач Римана — Гильберта с разрывными краевыми условиями и их обобщениями эллиптичность систем уравнений не играет существенной роли. Поэтому было начато изучение краевых задач для систем уравнений, не имеющих определенного типа по существующим классификациям, что нашло отражение в работах [12, 13].

Следует отметить, что в перечисленных работах главные части систем уравнений в основном являются дифференциальными операторами с постоянными коэффициентами.

Далее в этой работе в некоторой области $D \subset R^n$ рассматриваем систему уравнений с переменными коэффициентами

$$LU \equiv \sum_{i=1}^n A_i(x)U_{x_i}(x) + A(x)U(x) = F(x), \quad (2)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$, $A_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, — квадратные матрицы n -го порядка,

$$U(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ \vdots \\ u_k(x) \end{pmatrix}$$

— неизвестная матрица (вектор-функция),

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_k(x) \end{pmatrix}$$

— заданная матрица (вектор-функция). Размерность пространства переменных может не совпадать с размерностью вектор-функции.

Поскольку известно, что любая квадратная матрица представляется в виде суммы симметрической и кососимметрической матриц, сначала изучаем системы (2), в которых коэффициенты не являются произвольными матрицами. Например, можно рассматривать:

- (а) симметрические системы, в которых все матрицы в главной части дифференциального оператора не являются знакопределеными;
- (б) системы, где одна матрица в главной части симметрическая, а другие кососимметрические;
- (в) системы, где все матрицы в главной части кососимметрические.

Рассмотрим случай (а). Заметим, что предложенная ниже схема исследования с небольшими непринципиальными видоизменениями может быть использована в других случаях. Схема исследования выглядит следующим образом.

Для произвольных матриц-столбцов (вектор-функций) $U(x), V(x) \in C^\infty(\overline{D})$ интегрированием по частям получаем интегральное равенство

$$(LU, V)_0 = (U, L^*V)_0 + \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^k \langle U, A_i V \rangle \eta_i d\Gamma.$$

В этом выражении $(\cdot, \cdot)_0$ — скалярное произведение в пространстве $L_2(D)$, Γ — граница области D , $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ — единичный вектор внешней нормали к этой границе,

$$L^*V \equiv -\sum_{i=1}^k A_i V_{x_i} + \left(A^T - \sum_{i=1}^k A_{ix_i} \right) V$$

— оператор, формально сопряженный оператору LU , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в пространстве R_n .

2. В пространстве $C^\infty(\overline{D})$ выделяем подмножество C_L вектор-функций $U(x)$, которые на границе Γ принимают такие значения, чтобы для формально сопряженного оператора множество C_L порождало множество C_L^* вектор-функций $V(x)$, удовлетворяющих сопряженным граничным условиям, и имело место тождество

$$(LU, V)_0 = (U, L^*V)_0, \quad U(x) \in C_L, \quad V(x) \in C_L^*, \quad (3)$$

т. е. было выполнено условие

$$\int_{\Gamma} \sum_{i=1}^k \langle U, A_i V \rangle \eta_i d\Gamma = 0, \quad U(x) \in C_L, \quad V(x) \in C_L^*.$$

Тождество (3) позволяет определить слабое обобщенное решение краевой задачи $LU = F$, $U(x) \in C_L$, как вектор-функцию $U(x) \in L_2(D)$, для которой справедливо тождество

$$(U, L^*V)_0 = (F, V)_0, \quad V(x) \in C_L^*.$$

Сильное обобщенное решение этой задачи $U(x) \in L_2(D)$ определяется условиями

$$\exists \{U_n(x) \in C_L\} : \lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n - U\|_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|LU_n - F\|_0 = 0.$$

3. Имеет место следующая теорема разрешимости задачи.

Теорема 1. Если справедливы априорные оценки

$$\|LU\|_0 \geq \delta \|U\|_0, \quad \|L^*V\|_0 \geq \delta_1 \|V\|_0, \quad U(x) \in C_L, \quad V(x) \in C_L^*, \quad \delta, \delta_1 = \text{const} > 0,$$

то для любой $F(x) \in L_2(D)$ в пространстве $L_2(D)$ однозначно разрешимы краевая задача $LU = F$, $U(x) \in C_L$, и сопряженная краевая задача $L^*V = G$, $V(x) \in C_L^*$.

Для наглядности реализуем эту схему для систем двух уравнений в плоской области.

(a) В квадрате $D = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ с границей Γ рассмотрим систему уравнений

$$LU \equiv A(x, y)U_x(x, y) + B(x, y)U_y(x, y) + C(x, y)U(x, y) = F(x, y), \quad (4)$$

где

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B(x, y) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

— симметрические матрицы из пространства $C^1(\overline{D})$,

$$C(x, y) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

— матрица из пространства $C(\overline{D})$,

$$U(x, y) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

— искомая вектор-функция (матрица-столбец),

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

— заданная вектор-функция.

Одна из симметрических функциональных матриц $A(x, y)$ и $B(x, y)$ может быть положительно или отрицательно определенной в области D (система гиперболическая), а в общем случае они обе не будут знакоопределенными. Характеристический детерминант системы имеет вид

$$\begin{aligned} Q(\lambda) &= \det(A(x, y)\lambda_1 + B(x, y)\lambda_2) = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda_1 + b_{11}\lambda_2 & a_{12}\lambda_1 + b_{12}\lambda_2 \\ a_{12}\lambda_1 + b_{12}\lambda_2 & a_{22}\lambda_1 + b_{22}\lambda_2 \end{vmatrix} \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\lambda_1^2 + (a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12})\lambda_1\lambda_2 + (b_{11}b_{22} - b_{12}^2)\lambda_2^2. \end{aligned}$$

Для произвольных функциональных коэффициентов эта квадратичная форма может не иметь постоянного знака в области D (система без определенного типа по существующим классификациям), может быть знакоопределенной (система эллиптическая) и, наконец, может вырождаться (система вырождающаяся).

Границу квадрата Γ разбиваем на части следующим образом:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^+ &= \{(0, y) : a_{11}\lambda_1^2 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + a_{22}\lambda_2^2 > 0, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)\}, \\ \Gamma_{01}^- &= \{(0, y) : a_{11}\lambda_1^2 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + a_{22}\lambda_2^2 < 0, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)\}, \\ \Gamma_{01}^0 &= \{(0, y) : a_{11}\lambda_1^2 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + a_{22}\lambda_2^2 = 0, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)\}, \\ \Gamma_{11}^+ &= \{(1, y) : a_{11}\lambda_1^2 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + a_{22}\lambda_2^2 > 0, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)\}, \\ \Gamma_{11}^- &= \{(1, y) : a_{11}\lambda_1^2 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + a_{22}\lambda_2^2 < 0, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)\}, \\ \Gamma_{11}^0 &= \{(1, y) : a_{11}\lambda_1^2 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + a_{22}\lambda_2^2 = 0, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)\}, \\ \Gamma_{02}^+ &= \{(x, 0) : b_{11}\lambda_1^2 + 2b_{12}\lambda_1\lambda_2 + b_{22}\lambda_2^2 > 0, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)\}, \\ \Gamma_{02}^- &= \{(x, 0) : b_{11}\lambda_1^2 + 2b_{12}\lambda_1\lambda_2 + b_{22}\lambda_2^2 < 0, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)\}, \\ \Gamma_{02}^0 &= \{(x, 0) : b_{11}\lambda_1^2 + 2b_{12}\lambda_1\lambda_2 + b_{22}\lambda_2^2 = 0, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)\}, \\ \Gamma_{12}^+ &= \{(x, 1) : b_{11}\lambda_1^2 + 2b_{12}\lambda_1\lambda_2 + b_{22}\lambda_2^2 > 0, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)\}, \\ \Gamma_{12}^- &= \{(x, 1) : b_{11}\lambda_1^2 + 2b_{12}\lambda_1\lambda_2 + b_{22}\lambda_2^2 < 0, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)\}, \\ \Gamma_{12}^0 &= \{(x, 1) : b_{11}\lambda_1^2 + 2b_{12}\lambda_1\lambda_2 + b_{22}\lambda_2^2 = 0, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)\}. \end{aligned}$$

Независимо от наличия какого-то типа системы уравнений или его отсутствия рассматриваем следующую краевую задачу.

Задача 1. В квадрате D найти решение системы (4), удовлетворяющее граничным условиям

$$U|_{\Gamma_{01}^+ \cup \Gamma_{11}^- \cup \Gamma_{02}^+ \cup \Gamma_{12}^-} = 0. \quad (5)$$

Тем самым C_L — множество вектор-функций $U(x, y) \in C^\infty(\overline{D})$, для которых выполнены условия (5).

Формально сопряженный оператор имеет вид

$$L^*V \equiv -AV_x - BV_y + (C^T - A_x - B_y)V,$$

а C_L^* — множество вектор-функций $V(x, y) \in C^\infty(\overline{D})$, для которых выполнены следующие условия:

$$V|_{\Gamma_{01}^- \cup \Gamma_{01}^0 \cup \Gamma_{11}^+ \cup \Gamma_{11}^0 \cup \Gamma_{02}^- \cup \Gamma_{02}^0 \cup \Gamma_{12}^+ \cup \Gamma_{12}^0} = 0. \quad (5^*)$$

Теорема 2. Если матрица $C - \frac{1}{2}A_x - \frac{1}{2}B_y$ положительно определена в квадрате D , то для любых вектор-функций $U(x, y) \in C_L$ и $V(x, y) \in C_L^*$ справедливы априорные оценки

$$\|LU\|_0 \geq \delta \|U\|_0, \quad \|L^*V\|_0 \geq \delta_1 \|V\|_0, \quad \delta, \delta_1 = \text{const} > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрированием по частям получаем

$$\begin{aligned} (LU, U)_0 &= (AU_x, U)_0 + (BU_y, U)_0 + (CU, U)_0 \\ &= -((AU)_x, U)_0 - ((BU)_y, U)_0 + (CU, U)_0 \\ &= -(AU_x, U)_0 - (BU_y, U)_0 + ((C - A_x - B_y)U, U)_0 + \int_{\Gamma} (\langle AU, U \rangle \eta_1 + \langle BU, U \rangle \eta_2) d\Gamma \\ &= \left(\left(C - \frac{1}{2}A_x - \frac{1}{2}B_y \right) U, U \right)_0 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\langle AU, U \rangle \eta_1 + \langle BU, U \rangle \eta_2) d\Gamma. \end{aligned}$$

В силу условий (5)

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \langle AU, U \rangle \eta_1 d\Gamma &= - \int_{\Gamma_{01}^-} (a_{11}u_1^2 + 2a_{12}u_1u_2 + a_{22}u_2^2)|_{x=0} dy \\ &\quad + \int_{\Gamma_{11}^+} (a_{11}u_1^2 + 2a_{12}u_1u_2 + a_{22}u_2^2)|_{x=1} dy \geq 0. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\int_{\Gamma} \langle BU, U \rangle \eta_2 d\Gamma \geq 0.$$

Следовательно,

$$\int_{\Gamma} (\langle AU, U \rangle \eta_1 + \langle BU, U \rangle \eta_2) d\Gamma \geq 0.$$

В силу положительной определенности матрицы $C - \frac{1}{2}A_x - \frac{1}{2}B_y$ имеет место неравенство

$$(LU, U)_0 \geq \delta \|U\|_0^2,$$

откуда следует первая из доказываемых априорных оценок.

Другую оценку доказываем аналогично, рассматривая интеграл $(L^*V, V)_0$ на вектор-функциях $V(x, y) \in C_L^*$.

Согласно теореме 1 краевая задача (4), (5) и сопряженная краевая задача $L^*V = G(x, y)$ и (5*) однозначно разрешимы в пространстве $L_2(D)$.

(b) В выпуклой ограниченной области $D \subset R^2$ с кусочно-гладкой границей Γ рассматриваем систему уравнений

$$LU \equiv A(x, y)U_x(x, y) + B(x, y)U_y(x, y) + C(x, y)U(x, y) = F(x, y), \quad (6)$$

где

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad B(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

— кососимметрические матрицы из пространства $C^1(\overline{D})$,

$$C(x, y) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

— матрица из пространства $C(\overline{D})$.

Характеристический детерминант системы имеет вид

$$Q(\lambda) = \det(A(x, y)\lambda_1 + B(x, y)\lambda_2) = \begin{vmatrix} 0 & a\lambda_1 + b\lambda_2 \\ -(a\lambda_1 + b\lambda_2) & 0 \end{vmatrix} = (a\lambda_1 + b\lambda_2)^2 \geq 0,$$

т. е. система (6) либо эллиптическая, либо вырождающаяся.

После умножения второго уравнения системы (6) на (-1) получаем систему с симметрическими матричными коэффициентами. Сохранив для обозначения этой системы вид (6), полагаем

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad B(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Ввиду простой структуры матричных коэффициентов можно рассматривать различные краевые задачи.

На границе квадрата выделим множество

$$\Gamma_1 = \overline{\{(x, y) \in \Gamma : a\eta_1 + b\eta_2 \neq 0\}}.$$

Задача 2. В области D найти решение системы уравнений (6), удовлетворяющее условию

$$u_1|_{\Gamma_1} = 0. \quad (7)$$

Эта задача является аналогом задачи Дирихле для системы уравнений Коши — Римана.

Условия (8) определяют множество C_L . Множество C_L^* состоит из вектор-функций $V(x, y) \in C^\infty(\overline{D})$, для которых выполнено условие

$$v_1|_{\Gamma_1} = 0. \quad (7^*)$$

Теорема 3. Если матрица $C - \frac{1}{2}A_x - \frac{1}{2}B_y$ положительно определена в квадрате D , то для любых вектор-функций $U(x, y) \in C_L$ и $V(x, y) \in C_L^*$ справедливы априорные оценки

$$\|LU\|_0 \geq \delta \|U\|_0, \quad \|L^*V\|_0 \geq \delta_1 \|V\|_0, \quad \delta, \delta_1 = \text{const} > 0.$$

Эта теорема доказывается так же, как теорема 2.

Представим множество Γ_1 в виде $\Gamma_1 = \Gamma_{11} \cup \Gamma_{12}$ так, чтобы $\Gamma_{11} \cap \Gamma_{12} \neq \emptyset$.

Задача 3. В области D найти решение системы уравнений (6), удовлетворяющее условию

$$u_1|_{\Gamma_{11}} = u_2|_{\Gamma_{12}} = 0. \quad (8)$$

Эта задача есть аналог задачи Римана — Гильберта с разрывными краевыми условиями для системы уравнений Коши — Римана.

Условия (8) определяют множество \tilde{C}_L для задачи 3. Множество \tilde{C}_L^* состоит из вектор-функций $V(x, y) \in C^\infty(\overline{D})$, для которых выполнено условие

$$v_1|_{\Gamma_{12}} = v_2|_{\Gamma_{11}} = 0. \quad (8^*)$$

Теорема 4. Если матрица $C - \frac{1}{2}A_x - \frac{1}{2}B_y$ положительно определена в квадрате D , то для любых вектор-функций $U(x, y) \in \tilde{C}_L$ и $V(x, y) \in \tilde{C}_L^*$ справедливы априорные оценки

$$\|LU\|_0 \geq \delta \|U\|_0, \quad \|L^*V\|_0 \geq \delta_1 \|V\|_0, \quad \delta, \delta_1 = \text{const} > 0.$$

Эта теорема доказывается так же, как теорема 2.

На основании теоремы 1 делаем вывод, что задачи 2 и 3, а также их сопряженные задачи, однозначно разрешимы в пространстве $L_2(D)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tonelli L. Fondamenti di calcolo delle variazioni. Bologna: Zanichelli, vol. 1: 1922, vol. 2: 1923.
2. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
3. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
4. Бицадзе А. В. Об единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными // Успехи мат. наук. 1948. Т. 2, № 6. С. 211–212.
5. Врагов В. Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ, 1983.
6. Oshorov B. B. Boundary value problems in a strip for an elliptic system // Collect. Artic. Novosibirsk, 1980. Р. 152–155.
7. Ошоров Б. Б. О некоторых краевых задачах для систем уравнений Коши — Римана и Бицадзе // Докл. АН. 2006. Т. 407, № 4. С. 446–449.
8. Ошоров Б. Б., Ошоров Бато Б. Корректные и некорректные краевые задачи для некоторых матричных функций // Вестн. Вост.-Сиб. гос. технол. ун-та. 2010. № 2. С. 8–16.
9. Oshorov B. B. Riemann–Hilbert and Poincare problems with discontinuous boundary conditions for some model systems of partial differential equations // Differ. Equ. 2011. V. 47, N 5. P. 696–705.
10. Ошоров Б. Б. Краевые задачи с разрывными граничными условиями для некоторых классов векторных и матричных функций. М.: Академия естествознания, 2010.

-
11. Oshorov Bato B., Oshorov Bator B. Boundary value problems for a model system of first-order equations in three-dimensional space // Differ. Equ. 2015. V. 51, N 5. P. 635–641.
 12. Ошоров Б. Б. Неклассические краевые задачи для некоторых систем уравнений с частными // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53, № 6. С. 789–800.
 13. Oshorov B. B. Boundary value problems for nonclassical systems of second order differential equations // J. Math. Sci. New York: Springer, 2018. V. 228, N 4. P. 421–430.

Поступила в редакцию 15 августа 2024 г.

После доработки 18 сентября 2024 г.

Принята к публикации 1 октября 2024 г.

Ошоров Батор Батуевич

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления,
ул. Ключевская, 40В, Улан-Удэ, 670013

bboshorov@yandex.ru

Булгатова Елена Николаевна (автор для переписки)

Университет Санья, проспект Инбинь,
Санья, провинция Хайнань, Китай, 572022
belena77@mail.ru

Васильева Евгения Геннадьевна

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления,
ул. Ключевская, 40В, Улан-Удэ, 670013
vasil_eg@mail.ru

GENERALIZED SOLVABILITY OF NON-CLASSICAL
BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR SYSTEMS
OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

B. B. Oshorov, E. N. Bulgatova,
and E. G. Vasilyeva

Abstract: A brief overview of the authors' research results on non-classical boundary-value problems for linear systems of partial differential equations is given. Some new results in this direction are presented.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-3-28-38

Keywords: systems of equations, boundary-value problems, generalized solutions.

REFERENCES

1. Tonelli L., Fondamenti di Calcolo delle Variazioni, Zanichelli, Bologna, vol. 1: 1922; vol. 2: 1923.
2. Sobolev S. L., Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1991).
3. Ladyzhenskaya O. A., Boundary Value Problems of Mathematical Physics [in Russian], Nauka, Moscow (1973).
4. Bitsadze A. V., “On the uniqueness of the solution of the Dirichlet problem for elliptic partial differential equations [in Russian],” Uspekhi Mat. Nauk., **2**, No. 6, 211–212 (1948).
5. Vragov V. N., Boundary Value Problems for Non-Classical Equations of Mathematical Physics [in Russian], Novosibirsk, Novosib. Gos. Univ. (1983).
6. Oshorov B. B., “Boundary value problems in a strip for an elliptic system [in Russian],” in: Correct Boundary Value Problems for Non-Classical Equations of Mathematical Physics, Collect. Artic., pp. 152–155, Novosibirsk (1980).
7. Oshorov B. B., “On boundary value problems for the Cauchy–Riemann and Bitsadze systems of equations,” Dokl. Math., **407**, No. 4, 446–449 (2006).
8. Oshorov B. B. and Oshorov Bato B., “Correct and incorrect boundary value problems for some matrix functions [in Russian],” Vestn. Vost.-Sib. Gos. Tekhnol. Univ., No. 2, 8–16 (2010).
9. Oshorov B. B., “Riemann–Hilbert and Poincare problems with discontinuous boundary conditions for some model systems of partial differential equations,” Differ. Equ., **47**, No. 5, 696–705 (2011).
10. Oshorov B. B., Boundary Value Problems with Discontinuous Boundary Conditions for Some Classes of Vector and Matrix Functions [in Russian], Akad. Estestvoznanija, Moscow (2010).
11. Oshorov Bato B. and Oshorov Bator B., “Boundary value problems for a model system of first-order equations in three-dimensional space,” Differ. Equ., **51**, No. 5, 635–641 (2015).
12. Oshorov B. B., “Non-classical boundary value problems for some systems of partial differential equations,” Differ. Equ., **53**, No. 6, 789–800 (2017).

-
13. Oshorov B. B., “Boundary value problems for nonclassical systems of second order differential equations,” J. Math. Sci., **228**, No. 4, 421–430 (2018).

Submitted August 15, 2024

Revised September 17, 2024

Accepted October 1, 2024

Bator B. Oshorov

East Siberia State University of Technology and Management,
40B Klyuchevskaya Street, Ulan-Ude 670013, Russia

bboshorov@yandex.ru

Elena N. Bulgatova
University of Sanya

belena77@mail.ru

Evgenia G. Vasilyeva

East Siberia State University of Technology and Management,
40B Klyuchevskaya Street, Ulan-Ude 670013, Russia

vasil_eg@mail.ru

О НЕЛОКАЛЬНЫХ
ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ МНОГОМЕРНЫХ
ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Н. С. Попов

Аннотация. Исследуется разрешимость начально-краевой задачи для линейных интегродифференциальных уравнений с заданием на боковой границе условия, связывающего значения решения или конормальной производной решения со значениями некоторого интегрального оператора от решения. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений. Начало систематических исследований нелокальных краевых задач — задач нахождения периодических решений для эллиптических уравнений — было положено в статье А. В. Бицадзе и А. А. Самарского (1969). Отметим также исследования для псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений третьего порядка с интегральным условием на боковой границе. Большой вклад в развитие теории нелокальных задач для дифференциальных уравнений различных классов внесли монографии А. Л. Скубачевского (1997), А. М. Нахушева (2006, 2012) и А. И. Кожанова (2024).

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-3-39-52

Ключевые слова: интегродифференциальные уравнения, пространство С. Л. Соболева, начально-краевая задача, метод продолжения по параметру, априорные оценки, регулярное решение.

1. Введение

Нелокальные краевые задачи для параболических и гиперболических уравнений с интегральным условием на боковой границе активно изучаются в последнее время, но при этом в основном рассматривается лишь случай классических уравнений второго порядка (см. [1–5]). Отметим также исследования для псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений с интегральным условием на боковой границе [1, 6, 7].

Нелокальные задачи естественным образом возникают в задачах математического моделирования — в задачах теплопроводности, физики плазмы, электродинамики, биологии и во многих других задачах, связанных с реальными физическими, механическими и т. п. процессами.

В настоящей работе изучаются интегродифференциальные уравнения с интегральными условиями на боковой границе. Доказываются теоремы существования регулярных решений.

2. Постановка задачи

Пусть Ω — ограниченная область пространства \mathbb{R}^n с гладкой (для простоты бесконечно-дифференцируемой) границей Γ , Q — цилиндр $\Omega \times (0, T)$ ($0 < T < +\infty$), $S = \Gamma \times (0, T)$ — его боковая граница, $a(x, t)$, $c(x, t)$ и $f(x, t)$ — функции, заданные в цилиндре \overline{Q} , $u_0(x)$ — на множестве $\overline{\Omega}$, $N(t)$ — на множестве $[0, T]$ и $K_1(x, y, t)$, $K_2(x, y, t)$ — на множестве $x \in \overline{\Omega}$, $y \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T]$.

Краевая задача I. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial t}(Au - \Delta u) - a(x, t)\Delta u + c(x, t)u = f(x, t), \quad Au = \int_0^t N(t - \tau)u(x, \tau) d\tau, \quad (1)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(x, t)|_{(x,t) \in S} = \int_{\Omega} K_1(x, y, t)u(y, t) dy \Big|_{(x,t) \in S}. \quad (3)$$

Краевая задача II. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2) и условие

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu(x)} \Big|_{(x,t) \in S} = \int_{\Omega} K_2(x, y, t)u(y, t) dy \Big|_{(x,t) \in S}. \quad (4)$$

Уточним, что здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование в пределах от 1 до n ; $\nu(x) = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ — вектор внутренней нормали к Γ в текущей точке.

3. Разрешимость краевой задачи I

Из уравнения (1) получим

$$N(0)u(x, t) + \int_0^t N'(\tau)u(x, \tau) d\tau - \Delta u_t - a(x, t)\Delta u + c(x, t)u = f(x, t).$$

Отсюда при $t = 0$ с учетом условий (2) имеем нелокальную краевую задачу для определения $u'_t(x, 0)$:

$$\begin{aligned} -a(x, 0)\Delta u_0(x) + (N(0) + c(x, 0))u_0(x) - \Delta u'_t(x, 0) &= f(x, 0), \\ u'_t(x, 0)|_{x \in \Omega} &= \int_{\Omega} (K_1(x, y, t)u(y, t))'_t|_{t=0} dy \Big|_{x \in \Omega}. \end{aligned} \quad (5)$$

Определим оператор M по формуле

$$(Mu)(x, t) = u(x, t) - Ku(x, t), \quad Ku(x, t) = \int_{\Omega} K_1(x, y, t)u(y, t) dy,$$

где оператор K определен на пространстве $L_2(\Omega)$ и предполагаем, что 1 не является собственным числом оператора K . В этом случае M будет непрерывно обратимым оператором из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ и существуют положительные постоянные m_1, m_2 такие, что выполняются неравенства

$$m_1 \int_{\Omega} u^2(x, t) dx \leq \int_{\Omega} [Mu(x, t)]^2 dx \leq m_2 \int_{\Omega} u^2(x, t) dx \quad (6)$$

при любых $t \in [0, T]$ и $u(x, t) \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega))$. Отметим, что в работе [8] рассмотрен случай, когда 1 является собственным числом оператора вида K .

Пусть

$$V = \{v(x, t) : v \in L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega)), v_t \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega))\},$$

норму в этом пространстве определим следующим образом:

$$\|v\|_V = \|v_t\|_{L_2(0, T; W_2^2(\Omega))} + \|v\|_{L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega))}.$$

Введем обозначения:

$$LMu(x, t) - MLu(x, t) = \Phi(x, t, u), \quad w = Mu,$$

и будем рассматривать уравнение относительно w :

$$Lw = g(x, t) + \Phi(x, t, M^{-1}w),$$

где $g(x, t) = Mf$, которое, как будет показано ниже, эквивалентно исходному уравнению (1).

Имеем

$$\begin{aligned} \Phi(x, t, u) &= \int_{\Omega} [a(x, t)\Delta_x K_1(x, y, t) + \Delta_x K_{1t}(x, y, t) \\ &\quad - c(x, t)K_1(x, y, t) + c(y, t)K_1(x, y, t)]u(y, t) dy \\ &\quad - \int_{\Omega} a(y, t)K_1(x, y, t)\Delta_y u(y, t) dy - \int_{\Omega} K_1(x, y, t)\Delta_y u_t(y, t) dy \\ &\quad + \int_{\Omega} \Delta_x K_1(x, y, t)u_t(y, t) dy. \end{aligned}$$

Прежде чем доказывать разрешимость краевой задачи I, заметим, что для функций $u(x, t)$ из пространства V , для которых выполняется условие (2), имеет место следующее неравенство Пуанкаре:

$$\int_0^t \int_{\Omega} u^2 dx d\tau \leq d_0 \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx d\tau, \quad (7)$$

где c_0, d_0 зависят от области Ω .

Пусть

$$w_0(x) = u_0(x) - \int_{\Omega} K_1(x, y, 0) u_0(y) dy.$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} P_0 &= \max_{t \in [0, T]} \int_{\Omega} \int_{\Omega} (\Delta_x K_1)^2(x, y, t) dx dy, \\ Q_0 &= \max_{t \in [0, T]} \int_{\Omega} \int_{\Omega} K_1^2(x, y, t) dx dy, \quad c_1 = \max_{t \in [0, T]} |N'(t)|. \end{aligned} \tag{8}$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия (6),

$$\begin{aligned} c(x, t) &\in C^1(\overline{Q}), \quad c(x, t) \geq c_0 > 0 \quad \text{при } (x, t) \in \overline{Q}; \\ K_1(x, y, t) &\in C^3(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times [0, T]), \\ 1 - \delta_0^2(1 + d_0) - \frac{P_0 d_0}{\delta_0^2 m_1} &> 0, \quad 1 - \frac{Q_0 d_0}{\delta_0^2 m_1} > 0 \quad \text{при } \delta_0 \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \\ f(x, t) &\in L_2(Q). \end{aligned} \tag{9}$$

Тогда краевая задача I имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству V , и это решение единственное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: найти функцию $w(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$Lw = g(x, t) + \Phi_1(x, t, w) \tag{10}$$

и удовлетворяющую условиям

$$w(x, t)|_S = 0, \quad w(x, 0) = w_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned} u(x, 0) - \int_{\Omega} K(x, y, 0) u(y, 0) dy &= u_0(x) - \int_{\Omega} K(x, y, 0) u_0(y) dy = w_0(x), \\ \Phi_1(x, t, w) &= \Phi(x, t, M^{-1}w). \end{aligned}$$

Докажем, что при выполнении условий теоремы краевая задача (10), (11) разрешима в классе $W = \{v(x, t) : v(x, t) \in V, w(x, t) = Mv(x, t) \in V\}$ для любой функции $g(x, t)$ из пространства $L_2(Q)$. Воспользуемся методом продолжения по параметру. Именно, для чисел λ из отрезка $[0, 1]$ определим семейство операторов $\{L_\lambda\}$: $L_\lambda w = g + \lambda \Phi_1(x, t, w)$. Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $w(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$L_\lambda w = g(x, t) + \lambda \Phi_1(x, t, w) \tag{7_\lambda}$$

при выполнении условий (11). Обозначим через Λ множество тех чисел λ из отрезка $[0, 1]$, для которых краевая задача (7_λ) , (11) разрешима в классе W для

произвольной функции $g(x, t)$ из пространства $L_2(Q)$. Покажем, что множество Λ будет совпадать со всем отрезком $[0, 1]$. Совпадение множества Λ с отрезком $[0, 1]$ и означает разрешимость краевой задачи (10), (11) в требуемом классе.

Убедимся прежде всего, что множество Λ непустое. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $w(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$Lw = g(x, t)$$

при выполнении условий (11).

Как следует из результатов работ [1, 9, 10], при выполнении условий теоремы эта задача имеет решение, принадлежащее пространству V .

Пусть $w(x, t)$ — решение краевой задачи (7_λ) , (11) из пространства V . Далее, если имеет место априорная оценка в том же пространстве V , то задача разрешима при $\lambda \in [0, 1]$ (см. [11]).

Для получения априорной оценки умножим уравнение (7_λ) , записанное в переменных x и τ , на функцию $w_\tau - \Delta w_\tau$ и результат проинтегрируем по области Ω и по переменной τ в пределах от 0 до t . Таким образом преобразуем равенство

$$\int_0^t \int_{\Omega} L_\lambda w(w_\tau - \Delta w_\tau) dx d\tau = \int_0^t \int_{\Omega} (g + \lambda \Phi_1)(w_\tau - \Delta w_\tau) dx d\tau.$$

С помощью интегрирования по частям с учетом краевых условий (11) придем к равенству

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} N(0) \int_{\Omega} \left[w^2(x, t) dx + \sum_{i=1}^n w_{x_i}^2(x, t) \right] dx \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} \left(\int_0^\tau N'(\tau - \xi) w(x, \xi) d\xi \right) (w_\tau - \Delta w_\tau) dx d\tau \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^n (w_{x_i \tau})^2 + (\Delta w_\tau)^2 \right] dx dt \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Delta w)^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} [a(x, t) + c(x, t)] w_{x_i}^2(x, t) dx \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} c(x, t) w^2(x, t) dx = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} a_\tau (\Delta w)^2 dx d\tau \\ & + \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} [(a_\tau + c_\tau) w_{x_i}^2 - a_{x_i} w_{x_i} w_\tau - c_{x_i} w w_{x_i \tau}] dx d\tau \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} c_\tau w^2 dx d\tau + \frac{1}{2} \int_{\Omega} c(x, 0) w_0^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x, 0) (\Delta w_0)^2 dx \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} [a(x, 0) + c(x, 0)] w_{0x_i}^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} (g + \lambda \Phi_1)(w_{\tau} - \Delta w_{\tau}) dx d\tau. \quad (12)$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^t \int_{\Omega} \left(\int_0^{\tau} N'(\tau - \xi) w(x, \xi) d\xi \right) (w_{\tau} - \Delta w_{\tau}) dx d\tau = J_1 + J_2. \quad (13)$$

Имеем

$$\begin{aligned} |J_1| &= \left| \int_0^t \int_{\Omega} \left(\int_0^{\tau} N'(\tau - \xi) w_{\tau}(x, \xi) d\xi \right) w(x, \tau) dx d\tau \right| \\ &\leq \frac{1}{2} c_1 T \int_0^t \int_{\Omega} w^2(x, \tau) dx d\tau, \\ |J_2| &= \left| \int_0^t \int_{\Omega} \left(\int_0^{\tau} N'(\tau - \xi) w(x, \xi) d\xi \right) \Delta w_{\tau}(x, \tau) dx d\tau \right| \\ &\leq \frac{1}{2} c_1 T \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x, \tau) dx d\tau. \end{aligned} \quad (14)$$

Для получения априорной оценки из равенства (12) рассмотрим оценку интеграла

$$\int_0^t \int_{\Omega} u_{\tau}^2(y, \tau) dy d\tau$$

через функцию w . Из равенства $w = Mu$ имеем

$$u_{\tau}(y, \tau) - \int_{\Omega} K_1(y, z, \tau) u_{\tau}(z, \tau) dz = w_{\tau}(y, \tau) + \int_{\Omega} K_{1\tau}(y, z, \tau) u(z, \tau) dz.$$

Используя (6) и неравенство Юнга, получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_{\tau}^2(y, \tau) dy &\leq \frac{1}{m_1} \int_{\Omega} \left[w_{\tau}(y, \tau) + \int_{\Omega} K_{1\tau}(y, z, \tau) u(z, \tau) dz \right]^2 dy \\ &= \frac{1}{m_1} \left[\int_{\Omega} w_{\tau}^2(y, \tau) dy + 2 \int_{\Omega} |w_{\tau}(y, \tau)| \cdot \left| \int_{\Omega} K_{1\tau}(y, z, \tau) u(z, \tau) dz \right| dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} K_{1\tau}(y, z, \tau) u(z, \tau) dz \right)^2 dy \right] \\ &\leq \frac{1}{m_1} \left[\int_{\Omega} w_{\tau}^2(y, \tau) dy + \delta_1^2 \int_{\Omega} w_{\tau}^2(y, \tau) dy + \frac{1}{\delta_1^2} \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} K_{1\tau}(y, z, \tau) u(z, \tau) dz \right)^2 dy \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} K_{1\tau}(y, z, \tau) u(z, \tau) dz \right)^2 dy \Big] \\
& \leq \frac{1 + \delta_1^2}{m_1} \int_{\Omega} w_{\tau}^2(y, \tau) dy + \frac{C(\delta_1)}{m_1} \int_{\Omega} w^2(y, \tau) dy, \quad (15)
\end{aligned}$$

где малое $\delta_1 > 0$ подберем позже, а последний интеграл оценивается через (6).

Для того чтобы оценить в (12) интеграл

$$\int_0^t \int_{\Omega} \Phi_1(w_{\tau} - \Delta w_{\tau}) dx d\tau \quad (16)$$

рассмотрим оценку интеграла от $\Phi(x, t, u)$ вида

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^t \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \Delta_x K_1(x, y, \tau) u_{\tau}(y, \tau) dy \right) (w_{\tau} - \Delta w_{\tau}) dx d\tau \right| \\
& \leq \int_0^t \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} (\Delta_x K_1)^2(x, y, \tau) dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} u_{\tau}^2(y, \tau) dy \right)^{\frac{1}{2}} |w_{\tau} - \Delta w_{\tau}| dx d\tau \\
& \leq \frac{\delta_0^2}{2} \int_0^t \int_{\Omega} (w_{\tau} - \Delta w_{\tau})^2 dx d\tau \\
& + \frac{1}{2\delta_0^2} \int_0^t \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} (\Delta_x K_1)^2(x, y, \tau) dy \right) \left(\int_{\Omega} u_{\tau}^2(y, \tau) dy \right) dx d\tau \\
& \leq \delta_0^2(1 + d_0) \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta w_{\tau})^2 dx d\tau + \frac{P_0}{2\delta_0^2 m_1} \int_0^t \int_{\Omega} w_{\tau}^2(y, \tau) dy d\tau, \quad (17)
\end{aligned}$$

где P_0 задано равенством (8).

Продолжая неравенство (17), с учетом (15) и неравенства Юнга получим

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^t \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \Delta_x K_1(x, y, \tau) u_{\tau}(y, \tau) dy \right) (w_{\tau} - \Delta w_{\tau}) dx d\tau \right| \\
& \leq \delta_0^2(1 + d_0) \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta w_{\tau})^2 dx d\tau + \frac{P_0(1 + \delta_1^2)}{2\delta_0^2 m_1} \int_0^t \int_{\Omega} w_{\tau}^2(x, \tau) dx d\tau \\
& + \frac{P_0 C(\delta_1)}{2m_1 \delta_0^2} \int_0^t \int_{\Omega} w^2(x, \tau) dx d\tau. \quad (18)
\end{aligned}$$

Далее, для того чтобы оценить в (16) интеграл вида

$$\int_0^t \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} K_1(x, y, \tau) \Delta_y u_{\tau}(y, \tau) dy \right) (w_{\tau} - \Delta_x w_{\tau}) dx d\tau$$

поступаем, как и выше. Имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} K_1(x, y, \tau) \Delta_y u_{\tau}(y, \tau) dy \right) (w_{\tau} - \Delta w_{\tau}) dx d\tau \right| \\ & \leq \frac{\delta_0^2}{2} \int_0^t \int_{\Omega} (w_{\tau} - \Delta w_{\tau})^2 dx d\tau + \frac{Q_0(1 + \delta_1^2)}{2\delta_0^2 m_1} \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta_y u_{\tau})^2(y, \tau) dy d\tau, \quad (19) \end{aligned}$$

где Q_0 задано формулой (8).

Зафиксируем $\delta_0 \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ и потребуем выполнения неравенства (9):

$$p_1 \equiv 1 - \delta_0^2(1 + d_0) - \frac{P_0 d_0}{\delta_0^2 m_1} > 0, \quad p_2 \equiv 1 - \frac{Q_0 d_0}{\delta_0^2 m_1} > 0, \quad (20)$$

которые, очевидно, выполняются при малых $|\Delta_x K_1(x, y, t)|$ и $|K_1(x, y, t)|$. Подбирая малое $\delta_1 > 0$, из неравенств

$$p_1 - \frac{P_0 \delta_1^2}{\delta_0^2 m_1} > 0, \quad p_2 - \frac{Q_0 \delta_1^2}{\delta_0^2 m_1} > 0, \quad (21)$$

применяя неравенство Юнга и используя лемму Гронуолла в равенстве (12), получим априорную оценку

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} \left[(\Delta w_{\tau})^2 + \sum_{i=1}^n (w_{x_i \tau})^2 \right] dx d\tau \\ & + \int_{\Omega} \left[w^2(x, t) + \sum_{i=1}^n w_{x_i}^2(x, t) + (\Delta w)^2(x, t) \right] dx \leq K_0 \int_0^T \int_{\Omega} g^2(x, t) dx dt \quad (22) \end{aligned}$$

с положительной постоянной K_0 , определяемой лишь функциями $a(x, t)$, $c(x, t)$, числами T , a_0 , c_0 , d_0 , а также областью Ω .

Очевидно, аналогичная оценка имеет место и для функции $u(x, t)$:

$$\|u\|_V \leq K_1 \|w\|_V \leq K_2 \|g\|_{L_2(Q)}, \quad (23)$$

с положительными постоянными K_1 , K_2 определяемой теми же величинами, которыми определяются постоянные K_0 .

Из оценок (22), (23) следует открытость и замкнутость множества Λ (см. [1, 5]). Следовательно, краевая задача (10), (11) разрешима в классе W .

Покажем теперь, что с помощью решения вспомогательной краевой задачи (10), (11) можно найти решение исходной краевой задачи (1)–(3). Так как $g(x, t) = Mf(x, t)$ и в силу условия (6) следует, что из принадлежности функции $f(x, t)$ пространству $L_2(Q)$ функция $Mf(x, t)$ также будет принадлежать пространству $L_2(Q)$, то согласно доказанному краевая задача (10), (11) с такой функцией $g(x, t)$ будет разрешима в пространстве V . Легко показать, что исходное уравнение (1) эквивалентно уравнению (10). В самом деле, уравнение

(10) имеет вид $LMu = Mf + \Phi$, откуда получим $LMu = Mf + LMu - MLu$, т. е. $M(Lu - f) = 0$. Поскольку оператор M взаимно однозначен (из условия (6)), то решение $u(x, t)$ уравнения (10) будет решением уравнения (1). Выполнение условий (2), (3) для функции $u(x, t)$ очевидно.

Единственность решений очевидна — она вытекает, например, из неравенства (23). Теорема доказана.

4. Разрешимость краевой задачи II

Пусть $K_2(x, y, t)$ — функция, определенная на множестве $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times [0, T]$ и такая, что при $(x, y, t) \in \Gamma \times \Omega \times (0, T)$ выполняется равенство

$$\frac{\partial K_2(x, y, t)}{\partial \nu(x)} = K_1(x, y, t)$$

(как можно построить данную функцию, обсудим ниже). С помощью функции $K_2(x, y, t)$ определим оператор M_1 и функцию $\tilde{\Phi}(x, t, u)$:

$$(M_1 u)(x, t) = u(x, t) - \int_{\Omega} K_2(x, y, t) u(y, t) dy,$$

$$\tilde{\Phi}(x, t, u) = LM_2 u(x, t) - M_2 Lu(x, t),$$

значение оператора M_2 на функции $u(x, t)$ будем обозначать через $\tilde{w} = M_2 u(x, t)$ и определим начальную функцию $\tilde{w}(x, 0) = w_1(x)$:

$$w_1(x) = u_0(x) - \int_{\Omega} K_2(x, y, 0) u_0(y) dy.$$

Условие на оператор M_1 : оператор M_1 однозначно и непрерывно обратим как оператор из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ при всех $t \in [0, T]$ и существуют положительные постоянные m_3, m_4 такие, что выполняются неравенства

$$m_3 \int_{\Omega} u^2(x, t) dx \leq \int_{\Omega} [M_1 u(x, t)]^2 dx \leq m_4 \int_{\Omega} u^2(x, t) dx \quad (24)$$

при любых $t \in [0, T]$ и $u(x, t) \in L_{\infty}(0, T; L_2(\Omega))$.

Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(x, t, u) &= \int_{\Omega} [a(x, t) \Delta_x K_2(x, y, t) + \Delta_x K_{2t}(x, y, t) \\ &\quad - c(x, t) K_2(x, y, t) + c(y, t) K_2(x, y, t)] u(y, t) dy \\ &\quad - \int_{\Omega} a(y, t) K_2(x, y, t) \Delta_y u(y, t) dy - \int_{\Omega} K_2(x, y, t) \Delta_y u_t(y, t) dy \\ &\quad + \int_{\Omega} \Delta_x K_2(x, y, t) u_t(y, t) dy. \end{aligned}$$

Как и выше, введем обозначения

$$P_1 = \max_{t \in [0, T]} \int_{\Omega} \int_{\Omega} (\Delta_x K_2)^2(x, y, t) dx dy, \quad Q_1 = \max_{t \in [0, T]} \int_{\Omega} \int_{\Omega} K_2^2(x, y, t) dx dy. \quad (25)$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия (24),

$$\begin{aligned} & a(x, t), c(x, t) \in C^1(\overline{Q}), \\ & a(x, t) \geq a_0 > 0, \quad c(x, t) \geq c_0 > 0 \quad \text{при } (x, t) \in \overline{Q}; \\ & K_2(x, y, t) \in C^3(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times [0, T]), \\ & 1 - \delta_0^2(1 + d_0) - \frac{P_1 d_0}{\delta_0^2 m_3} > 0, \quad 1 - \frac{Q_1 d_0}{\delta_0^2 m_3} > 0 \quad \text{при } \delta_0 \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \\ & f(x, t) \in L_2(Q), \quad w_1(x) \in W_2^1(\Omega), \\ & \left. \frac{\partial w_1(x)}{\partial \nu(x)} \right|_{x \in \Gamma} = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Тогда краевая задача II имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству V , и это решение единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$L\tilde{w} = g(x, t) + \tilde{\Phi}(x, t, u) \quad (27)$$

и удовлетворяющую условиям

$$\left. \frac{\partial \tilde{w}(x, t)}{\partial \nu(x)} \right|_S = 0, \quad \tilde{w}(x, 0) = w_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (28)$$

где $g(x, t)$ — заданная функция. Разрешимость данной краевой задачи в пространстве W устанавливается стандартным (в рамках настоящей работы) способом — с помощью метода продолжения по параметру. Необходимые априорные оценки выводятся из равенств

$$\int_0^t \int_{\Omega} L_{\lambda} \tilde{w} (\tilde{w}_{\tau} - \Delta \tilde{w}_{\tau}) dx d\tau = \int_0^t \int_{\Omega} (g + \lambda \tilde{\Phi}_1) (\tilde{w}_{\tau} - \Delta \tilde{w}_{\tau}) dx d\tau,$$

где $\tilde{\Phi}_1(x, t, \tilde{w}) = \tilde{\Phi}(x, t, M_1^{-1} \tilde{w})$.

Как и выше, при осуществлении схемы метода продолжения по параметру основная априорная оценка будет определяться положительной постоянной K_3 в правой части, определяемой лишь функциями $a(x, t)$, $c(x, t)$, числами T , a_0 , c_0 , d_0 , а также областью Ω . Имеем

$$\|u\|_V \leq K_3 \|g\|_{L_2(Q)}. \quad (29)$$

Как и ранее, с помощью решения вспомогательной краевой задачи (27), (28) строим требуемое решение краевой задачи II — именно, с помощью выбора функции $g(x, t) = M_1 f(x, t)$ и перехода к уравнению

$$M_1(Lu - f) = 0.$$

Единственность решений краевой задачи II в пространстве V очевидна из априорной оценки (29). Теорема полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В теореме 1 условия малости на функции $K_1(x, y, t)$, $\Delta_x K_1(x, y, t)$ можно заменить условиями симметричности $K_1(x, y, t) = K_1(y, x, t)$ и обращения в нуль на границе:

$$K_1(x, y, t) = K_{1y_i}(x, y, t) = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad \text{при } y \in \Gamma.$$

В случае теоремы 2 для функции $K_2(x, y, t)$ аналогично.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В теоремах 1, 2 от условий $a(x, t) \geq a_0 > 0$, $c(x, t) \geq c_0 > 0$ можно отказаться, но тогда, как и выше, при получении априорных оценок возникнут условия малости на функции $a(x, t)$, $c(x, t)$ и их производные.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Функцию $K_2(x, y, t)$ можно построить, например, как решение второй краевой задачи для оператора Лапласа:

$$\Delta K_2(x, y, t) = \Delta K_1(x, y, t), \quad \left. \frac{\partial K_2(x, y, t)}{\partial \nu(x)} \right|_{x \in \Gamma} = K_1(x, y, t)|_{x \in \Gamma},$$

где переменные y и t являются параметрами.

5. Заключение

1. Метод доказательства разрешимости краевых задач I и II основан на переходе от задачи с неклассическим краевым условием к задаче с классическим условием, но для неклассического уравнения — так называемого нагруженного [9] уравнения, с последующим доказательством разрешимости полученной задачи с помощью метода продолжения по параметру и априорных оценок и далее — к построению решения исходной задачи. Ранее подобные методы в близкой ситуации эффективно использовались в работах [3–5].

2. В краевой задаче II условие (4) можно заменить условием

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu(x)} + \sigma(x, t)u(x, t) \right|_{(x, t) \in S} = \int_{\Omega} K_3(x, y, t)u(y, t) dy \Big|_{(x, t) \in S}.$$

3. Теоремы 1, 2 остаются справедливыми и для уравнения вида

$$\frac{\partial}{\partial t}(Au - \Delta u) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(b^{ij}(x, t)u_{x_j}) + \sum_{i=1}^n b^i(x, t)u_{x_i} + b(x, t)u = f(x, t)$$

при соответствующих ограничениях на коэффициенты уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кожанов А. И. Нелокальные задачи и задачи с интегральными условиями для дифференциальных уравнений в частных производных: сводка результатов, нерешенные задачи. М.: Наука, 2024.
2. Fridman A. Monotone decay of solutions of parabolic equations with nonlocal boundary conditions // Q. Appl. Math. 1986. V. 44, N 3. P. 401–407.
3. Кожанов А. И. О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием для линейных параболических уравнений // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. 2004. Вып. 30. С. 63–69.

4. Абдрахманов А. М., Кожанов А. И. Задача со смещением для уравнений в частных производных // Изв. вузов. Математика. 2007. № 5. С. 3–26.
5. Кожанов А. И. Пулькина Л. С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 9. С. 1116–1172.
6. Попов Н. С. О разрешимости нелокальных краевых задач для интегродифференциальных уравнений склеивания // Мат. заметки СВФУ. 2018. Т. 25, № 4. С. 76–85.
7. Popov N. S. On nonlocal inverse integro-differential problems of multi-dimensional diffusion processes // AIP Conf. Proc. 2022. V. 2528. Article ID 020014. doi.org/10.1063/5.0107394.
8. Кожанов А. И. Дюжева А. В. Вторая начально-краевая задача с интегральным смещением для гиперболических и параболических уравнений второго порядка // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 3. С. 423–434.
9. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.
10. Якубов С. Я. Линейные дифференциально–операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985.
11. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию 29 июля 2024 г.

После доработки 5 сентября 2024 г.

Принята к публикации 1 октября 2024 г.

Попов Николай Сергеевич
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
popovnserg@mail.ru

ON NONLOCAL INTEGRO-DIFFERENTIAL
BOUNDARY VALUE PROBLEMS
FOR MULTIDIMENSIONAL
PSEUDOPARABOLIC EQUATIONS

N. S. Popov

Abstract: The solvability of the initial-boundary value problem for linear integro-differential equations with a condition on the lateral boundary that connects the values of the solution or the conormal derivative of the solution with the values of some integral operator of the solution is investigated. Theorems of existence and uniqueness of regular solutions are proved. The systematic study of nonlocal boundary value problems – the problems of finding periodic solutions to elliptic equations – was initiated by Bitsadze and Samarskii in 1969. Note also the studies for pseudoparabolic and pseudohyperbolic third-order equations with an integral condition on the lateral boundary. Great contributions to the development of the theory of nonlocal problems for differential equations of various classes were made by the monographs of Skubachevsky in 1997, Nakhushev in 2006 and 2012, and Kozhanov in 2024.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-3-39-52

Keywords: integro-differential equation, Sobolev space, initial-boundary value problem, method of continuation with respect to a parameter, a priori estimate, regular solution.

REFERENCES

1. Kozhanov A. I., Nonlocal Problems and Problems with Integral Conditions for Partial Differential Equations: Summary of Results, Unsolved Problems [in Russian], Nauka, Moscow (2024).
2. Fridman A., “Monotone decay of solutions of parabolic equations with nonlocal boundary conditions,” *Q. Appl. Math.*, **44**, No. 3, 401–407 (1986).
3. Kozhanov A. I., “On the solvability of a boundary value problem with a nonlocal boundary condition for linear parabolic equations [in Russian],” *Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ.*, No. 30, 63–69 (2004).
4. Abdurakhmanov A. M. and Kozhanov A. I., “Problem with displacement for the equations in partial derivatives [in Russian],” *Izv. Vuzov, Mat.*, No. 5, 3–26 (2007).
5. Kozhanov A. I. and Pulkina L. S., “On solvability of boundary value problems with a nonlocal boundary condition of integral type for multidimensional hyperbolic equations [in Russian],” *Differ. Equ.*, **42**, No. 9, 1116–1172 (2006).
6. Popov N. S., “On solvability of nonlocal boundary value problems for integro-differential gluing equations [in Russian],” *Mat. Zametki SVFU*, **25**, No. 4, 76–85 (2018).
7. Popov N. S., “On nonlocal inverse integro-differential problems of multi-dimensional diffusion processes,” *AIP Conf. Proc.*, **2528**, article ID 020014 (2022).
8. Kozhanov A. I. and Dyuzheva A. V., “The second initial-boundary value problem with integral shift for hyperbolic and parabolic equations of the second order [in Russian],” *Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, **25**, No. 3, 423–434 (2021).

9. Nakhushev A. M., Problems with Shift for Partial Differential Equations [in Russian], Nauka, Moscow (2006).
10. Yakubov S. Ya., Linear Differential-Operator Equations and Their Applications [in Russian], Elm, Baku (1985).
11. Trenogin V. A., Functional Analysis [in Russian], Nauka, Moscow (1980).

Submitted July 29, 2024

Revised September 5, 2024

Accepted October 1, 2024

Nikolay S. Popov
Ammosov North-Eastern Federal University,
Institute of Mathematics and Informatics,
48 Kulakovskiy Street, Yakutsk 677000, Russia
popovnsberg@mail.ru

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОБРАТНЫЕ
ЗАДАЧИ СО СТАЦИОНАРНЫМ
НЕИЗВЕСТНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ
ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОДНЫМИ
ДЖРБАШЯНА — НЕРСЕСЯНА

В. Е. Федоров, М. В. Плеханова,
А. О. Сагимбаева

Аннотация. Получены достаточные условия однозначной разрешимости в классическом и обобщенном смыслах обратной задачи для нелинейного уравнения в базаховом пространстве, разрешенного относительно старшей дробной производной Джрбашяна — Нерсесяна. Условие переопределения обратной задачи задается интегралом Стильеса, младшие производные входят в уравнение нелинейно. Оператор при искомой функции в линейной части уравнения предполагается ограниченным или порождающим аналитическое разрешающее семейство соответствующего линейного однородного уравнения. С использованием полученных ранее авторами результатов о прямой задаче для линейного неоднородного уравнения методом сжимающих отображений получены основные результаты. Приведен пример обратной задачи для уравнения в частных производных, для которой условия абстрактной теоремы выполняются.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-3-53-72

Ключевые слова: нелинейная обратная задача, обобщенное решение, классическое решение, дробная производная Джрбашяна — Нерсесяна, начально-краевая задача.

1. Введение

Обратные задачи для дифференциальных уравнений представляют интерес для исследователей с теоретической точки зрения [1–4], и в то же время они очень значимы для прикладных исследований в геофизике, астрономии, теории управления и многих других областях науки [5–8]. С другой стороны, уравнениям с дробными производными посвящено огромное количество исследовательских работ в последние десятилетия [9–12]. Отметим большое количество совсем недавних работ, в которых исследуются линейные обратные задачи для уравнений с дробными производными [13–25]. Нелинейные обратные задачи с

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Правительства Челябинской области № 23–21–10015, <https://rscf.ru/project/23-21-10015/>.

зависящим от времени неизвестным параметром для дробных дифференциальных уравнений исследованы в работах [26] (для уравнений с производными Римана — Лиувилля), в [27, 28] (уравнения с производными Герасимова — Капуто), в [29, 30] (уравнения с производными Джрабашяна — Нерсесяна). В продолжение этих работ здесь исследуются нелинейные обратные задачи с не зависящим от времени неизвестным параметром u

$$\mathcal{D}^{\sigma_n} z(t) = Az(t) + B(t, D^{\sigma_0} z(t), D^{\sigma_1} z(t), \dots, D^{\sigma_{n-1}} z(t)) + b(t)u, \quad (1)$$

$$\mathcal{D}^{\sigma_k} z(0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (2)$$

$$\int_0^T z(t) d\mu(t) = z_T, \quad (3)$$

где \mathcal{D}^{σ_k} , $k = 0, 1, \dots, n$, — дробные производные Джрабашяна — Нерсесяна, соответствующие набору чисел $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in (0, 1]$ (определение см. в разд. 2), $B \in C([0, T] \times \mathcal{Z}^n; \mathcal{Z})$ — нелинейный оператор, $b \in ([0, T]; \mathbb{C})$, $\mu : (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации. Рассмотрены случаи ограниченного оператора A в банаховом пространстве \mathcal{Z} и линейного замкнутого оператора, порождающего аналитическое разрешающее семейство операторов линейного однородного уравнения $\mathcal{D}^{\sigma_n} z(t) = Az(t)$ в \mathcal{Z} . Здесь неизвестными являются функция $z : [0, T] \rightarrow \mathcal{Z}$ и вектор $u \in \mathcal{Z}$. Условия (2) можно назвать начальными условиями Джрабашяна — Нерсесяна [31], (3) — условие переопределения обратной задачи.

С использованием полученных ранее авторами результатов о разрешимости прямой задачи [32–34] методом сжимающих отображений исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи (1)–(3) в смысле обобщенных и классических решений. Рассмотрен иллюстративный пример.

2. Случай ограниченного оператора

Пусть \mathcal{Z} — банахово пространство, для $z \in L_1(0, T; \mathcal{Z})$

$$J^\beta z(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} z(s) ds$$

есть дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка $\beta > 0$, J^0 — тождественный оператор, $D^\beta z := J^{-\beta} z$ при $\beta \leq 0$, $D^\beta z := D^m J^{m-\beta} z$ — дробная производная Римана — Лиувилля порядка $\beta \in (m-1, m]$, $m \in \mathbb{N}$. Дробные производные Джрабашяна — Нерсесяна, которые соответствуют последовательности $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, $0 < \alpha_k \leq 1$, $k = 0, 1, \dots, n \in \mathbb{N}$, имеют вид [31]

$$\mathcal{D}^{\sigma_0} z(t) := D^{\alpha_0-1} z(t),$$

$$\mathcal{D}^{\sigma_k} z(t) := D^{\alpha_k-1} D^{\alpha_{k-1}} D^{\alpha_{k-2}} \dots D^{\alpha_0} z(t), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Такая производная является обобщением дробной производной Римана — Лиувилля ($\alpha_0 \in (0, 1)$, $\alpha_k = 1$, $k = 1, 2, \dots, n$), дробной производной Герасимова —

Капуто ($\alpha_k = 1$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$, $\alpha_n \in (0, 1)$). Мы будем использовать обозначения

$$\sigma_k := \sum_{j=0}^k \alpha_j - 1, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Пусть $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ — банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов в \mathcal{Z} , $\mathcal{Cl}(\mathcal{Z})$ — множество линейных замкнутых плотно определенных в пространстве \mathcal{Z} операторов. Область D_A оператора $A \in \mathcal{Cl}(\mathcal{Z})$ наделена нормой графика $\|\cdot\|_{D_A} = \|\cdot\|_{\mathcal{Z}} + \|A \cdot\|_{\mathcal{Z}}$, следовательно, D_A является банаховым пространством в силу замкнутости A .

Нам понадобится функция Миттаг-Леффлера

$$E_{\alpha, \beta}(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)}, \quad z \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}), \alpha, \beta > 0.$$

Рассмотрим начальную задачу

$$\mathcal{D}^{\sigma_k} z(0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1, \tag{4}$$

для линейного неоднородного уравнения

$$\mathcal{D}^{\sigma_n} z(t) = Az(t) + f(t). \tag{5}$$

Функция $z \in C((0, T]; \mathcal{Z})$ является решением задачи (4), (5) на отрезке $[0, T]$, если $\mathcal{D}^{\sigma_k} z \in AC([0, T]; \mathcal{Z})$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$, $\mathcal{D}^{\sigma_n} z \in C((0, T]; \mathcal{Z})$, равенство (5) выполняется для всех $t \in (0, T]$ и выполнены условия (4).

Зададим пространство $C_{\beta}^1([0, T]; \mathcal{Z})$, $\beta \in \mathbb{R}$, функций $v \in C([0, T]; \mathcal{Z}) \cap C^1((0, T]; \mathcal{Z})$ таких, что $t^{\beta} v'(t) \in C([0, T]; \mathcal{Z})$.

Теорема 1 [34]. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$, $0 < \alpha_k \leq 1$, $k = 0, 1, \dots, n$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, $f \in C([0, T]; \mathcal{Z})$ при $\alpha_n = 1$ и $f \in C_{\beta}^1([0, T]; \mathcal{Z})$ для некоторого $\beta < 1$ при $\alpha_n < 1$. Тогда функция

$$z(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^{\sigma_k} E_{\sigma_n, \sigma_k+1}(t^{\sigma_n} A) z_k + \int_0^t (t-s)^{\sigma_n-1} E_{\sigma_n, \sigma_n}((t-s)^{\sigma_n} A) f(s) ds$$

является единственным решением задачи (4), (5).

Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $B \in C([0, T] \times \mathcal{Z}^n; \mathcal{Z})$, $b \in C([0, T]; \mathbb{C})$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$, $z_T \in \mathcal{Z}$, $u \in \mathcal{Z}$. Рассмотрим обратную задачу (1)–(3).

Обобщенным решением задачи (1)–(3) будем называть пару

$$(z, u) \in [C((0, T]; \mathcal{Z}) \cap L_1(0, T; \mathcal{Z})] \times \mathcal{Z},$$

для которой $D^{\sigma_k} z \in C([0, T]; \mathcal{Z})$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$, при всех $t \in (0, T]$

$$z(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^{\sigma_k} E_{\sigma_n, \sigma_k+1}(t^{\sigma_n} A) z_k + \int_0^t (t-s)^{\sigma_n-1} E_{\sigma_n, \sigma_n}((t-s)^{\sigma_n} A) (B^z(s) + b(s)u) ds, \tag{6}$$

где $B^z(s) = B(s, D^{\sigma_0} z(s), D^{\sigma_1} z(s), \dots, D^{\sigma_{n-1}} z(s))$, и выполнены условия (2), (3). Если, кроме того, $D^{\sigma_k} z \in AC([0, T]; \mathcal{Z})$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$, существует $D^{\sigma_n} z \in C((0, T]; \mathcal{Z})$ и выполняется равенство (1) при всех $t \in (0, T]$, то пара (z, u) называется *классическим решением* задачи (1)–(3).

Будем называть отображение $B \in C([0, T] \times \mathcal{Z}^n; \mathcal{Z})$ *липшицевым*, если существует такое $L > 0$, что для любых $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathcal{Z}$, $t \in [0, T]$ выполняется

$$\|B(t, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) - B(t, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})\|_{\mathcal{Z}} \leq L \sum_{k=0}^{n-1} \|x_k - y_k\|_{\mathcal{Z}}.$$

Через $V_0^T \mu$ обозначим вариацию функции μ на $(0, T]$.

Теорема 2. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha_k \leq 1$, $k = 0, 1, \dots, n$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, $\alpha_{n-1} + \alpha_n > 1$, $B \in C([0, T] \times \mathcal{Z}^n; \mathcal{Z})$ липшицево, $b \in C([0, T]; \mathbb{C})$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$, $z_T \in \mathcal{Z}$, $\mu \in BV((0, T]; \mathbb{C})$, существует обратный оператор

$$\Phi := \left(\int_0^T \int_0^t (t-s)^{\sigma_n-1} E_{\sigma_n, \sigma_n}((t-s)^{\sigma_n} A) b(s) ds d\mu(t) \right)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}),$$

$$q := \max \left\{ V_0^T \mu \|\Phi\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} LT^{\sigma_n} E_{\sigma_n, \sigma_n+1}(T^{\sigma_n} \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}), \right. \\ \left. 2LT^{\sigma_n-\sigma_k} E_{\sigma_n, \sigma_n-\sigma_k+1}(T^{\sigma_n} \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}), \right.$$

$$2LT^{\sigma_n-\sigma_k} E_{\sigma_n, \sigma_n-\sigma_k+1}(T^{\sigma_n} \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}) \|b\|_{C([0, T]; \mathbb{C})}, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1 \} < 1. \quad (7)$$

Тогда обратная задача (1)–(3) имеет единственное обобщенное решение. Если при этом $\alpha_n = 1$, то задача (1)–(3) имеет единственное классическое решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сразу отметим, что неравенство $\alpha_{n-1} + \alpha_n > 1$ с учетом остальных условий теоремы влечет существование непрерывных на $[0, T]$ производных D^{σ_k} , $k = 0, 1, \dots, n - 1$, для интеграла из правой части равенства (6).

При $k, l = 0, 1, \dots, n - 1$ в лемме 1 из [32] было доказано, что

$$D^{\sigma_k} t^{\sigma_l} E_{\sigma_n, \sigma_l+1}(t^{\sigma_n} A) = t^{\sigma_l-\sigma_k} E_{\sigma_n, \sigma_l-\sigma_k+1}(t^{\sigma_n} A) \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Z})), \quad k \leq l,$$

$$D^{\sigma_k} t^{\sigma_k} E_{\sigma_n, \sigma_k+1}(t^{\sigma_n} A) = At^{\sigma_l-\sigma_k+\sigma_n} E_{\sigma_n, \sigma_l-\sigma_k+\sigma_n+1}(t^{\sigma_n} A) \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Z})), \quad k > l.$$

Равенство

$$D^{\sigma_k} \int_0^t (t-s)^{\sigma_n-1} E_{\sigma_n, \sigma_n}((t-s)^{\sigma_n} A) f(s) ds \\ = \int_0^t (t-s)^{\sigma_n-\sigma_k-1} E_{\sigma_n, \sigma_n-\sigma_k}((t-s)^{\sigma_n} A) f(s) ds$$

при $k = 0, 1, \dots, n$, $\alpha_n = 1$, $f \in C([0, T]; \mathcal{Z})$ было получено при доказательстве леммы 2 в [34]. Поэтому для обобщенного решения (z, u) задачи (1)–(3) при $k = 0, 1, \dots, n - 1$

$$\begin{aligned} D^{\sigma_k} z(t) &= \sum_{l=0}^{k-1} t^{\sigma_l - \sigma_k + \sigma_n} E_{\sigma_n, \sigma_l - \sigma_k + \sigma_n + 1}(t^{\sigma_n} A) A z_l \\ &\quad + \sum_{l=k}^{n-1} t^{\sigma_l - \sigma_k} E_{\sigma_n, \sigma_l - \sigma_k + 1}(t^{\sigma_n} A) z_l \\ &\quad + \int_0^t (t-s)^{\sigma_n - \sigma_k - 1} E_{\sigma_n, \sigma_n - \sigma_k}((t-s)^{\sigma_n} A) (B(s, D^{\sigma_0} z(s), \dots, D^{\sigma_{n-1}} z(s)) + b(s)u) ds. \end{aligned} \quad (8)$$

Следовательно, $D^{\sigma_k} z \in C([0, T]; \mathcal{Z})$.

В силу условия переопределения

$$\begin{aligned} z_T &= \int_0^T \sum_{k=0}^{n-1} t^{\sigma_k} E_{\sigma_n, \sigma_k + 1}(t^{\sigma_n} A) z_k d\mu(t) \\ &\quad + \int_0^T \int_0^t (t-s)^{\sigma_n - 1} E_{\sigma_n, \sigma_n}((t-s)^{\sigma_n} A) (B(s, D^{\sigma_0} z(s), \dots, D^{\sigma_{n-1}} z(s)) + b(s)u) ds d\mu(t). \end{aligned}$$

Поэтому согласно условиям теоремы

$$\begin{aligned} u &= \Phi z_T - \Phi \int_0^T \sum_{k=0}^{n-1} t^{\sigma_k} E_{\sigma_n, \sigma_k + 1}(t^{\sigma_n} A) z_k d\mu(t) \\ &\quad - \Phi \int_0^T \int_0^t (t-s)^{\sigma_n - 1} E_{\sigma_n, \sigma_n}((t-s)^{\sigma_n} A) B(s, D^{\sigma_0} z(s), \dots, D^{\sigma_{n-1}} z(s)) ds d\mu(t). \end{aligned} \quad (9)$$

Получена система из n уравнений (8) при $k = 0, 1, \dots, n - 1$ и уравнения (9) для n функций $y_0 := D^{\sigma_0} z$, $y_1 := D^{\sigma_1} z, \dots, y_{n-1} := D^{\sigma_{n-1}} z$ и $(n + 1)$ -го неизвестного u .

Обозначим $\bar{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ и в полном метрическом пространстве $C([0, T]; \mathcal{Z}^n) \times \mathcal{Z}$ зададим отображение H с компонентами H_0, H_1, \dots, H_n : при $k = 0, 1, \dots, n - 1$

$$\begin{aligned} H_k(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, u)(t) &= \sum_{l=0}^{k-1} t^{\sigma_l - \sigma_k + \sigma_n} E_{\sigma_n, \sigma_l - \sigma_k + \sigma_n + 1}(t^{\sigma_n} A) A z_l \\ &\quad + \sum_{l=k}^{n-1} t^{\sigma_l - \sigma_k} E_{\sigma_n, \sigma_l - \sigma_k + 1}(t^{\sigma_n} A) z_l \\ &\quad + \int_0^t (t-s)^{\sigma_n - \sigma_k - 1} E_{\sigma_n, \sigma_n - \sigma_k}((t-s)^{\sigma_n} A) (B(s, y_0(s), y_1(s), \dots, y_{n-1}(s)) + b(s)u) ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_n(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) &= \Phi z_T - \Phi \int_0^T \sum_{k=0}^{n-1} t^{\sigma_k} E_{\sigma_n, \sigma_k+1}(t^{\sigma_n} A) z_k d\mu(t) \\
&\quad - \Phi \int_0^T \int_0^t (t-s)^{\sigma_n-1} E_{\sigma_n, \sigma_n}((t-s)^{\sigma_n} A) B(s, y_0(s), y_1(s), \dots, y_{n-1}(s)) ds d\mu(t).
\end{aligned}$$

Теперь обратную задачу (1)–(3) можно записать в виде системы

$$\begin{aligned}
y_0(t) &= H_0(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, u)(t), \\
y_1(t) &= H_1(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, u)(t), \\
&\quad \dots, \\
y_{n-1}(t) &= H_{n-1}(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, u)(t), \\
u &= H_n(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) = H_n(H_0(\bar{y}, u), H_1(\bar{y}, u), \dots, H_{n-1}(\bar{y}, u)).
\end{aligned} \tag{10}$$

По условиям теоремы отображение $H(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, u)(t)$ непрерывно по t на $[0, T]$ при $(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, u) \in C([0, T]; \mathcal{Z}^n) \times \mathcal{Z}$. Поэтому $H[C([0, T]; \mathcal{Z}^n) \times \mathcal{Z}] \subset C([0, T]; \mathcal{Z}^n) \times \mathcal{Z}$.

При $(\bar{y}^j, u^j) \in C([0, T]; \mathcal{Z}^n \times \mathcal{Z})$, $j = 1, 2$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ в силу липшицевости по фазовым переменным отображения B имеем

$$\begin{aligned}
&\|H_k(\bar{y}^1, u^1)(t) - H_k(\bar{y}^2, u^2)(t)\|_{\mathcal{Z}} \\
&\leq L \int_0^t t^{\sigma_n - \sigma_k - 1} E_{\sigma_n, \sigma_n - \sigma_k}(t^{\sigma_n} \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}) \\
&\quad \times \left(\sum_{l=0}^{n-1} \|y_l^1(s) - y_l^2(s)\|_{\mathcal{Z}} + \|b\|_{C([0, T]; \mathbb{C})} \|u^1 - u^2\|_{\mathcal{Z}} \right) ds \\
&\leq LT^{\sigma_n - \sigma_k} E_{\sigma_n, \sigma_n - \sigma_k + 1}(T^{\sigma_n} \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}) \\
&\quad \times \left(\sum_{l=0}^{n-1} \|y_l^1 - y_l^2\|_{C([0, T]; \mathcal{Z})} + \|b\|_{C([0, T]; \mathbb{C})} \|u^1 - u^2\|_{\mathcal{Z}} \right), \\
&\|H_n(\bar{y}^1) - H_n(\bar{y}^2)\|_{\mathcal{Z}} \\
&\leq V_0^T \mu \|\Phi\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} LT^{\sigma_n} E_{\sigma_n, \sigma_n + 1}(T^{\sigma_n} \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}) \sum_{l=0}^{n-1} \|y_l^1 - y_l^2\|_{C([0, T]; \mathcal{Z})}.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
&\|H(\bar{y}^1, u^1) - H(\bar{y}^2, u^2)\|_{C([0, T]; \mathcal{Z}^n) \times \mathcal{Z}} \\
&= \max\{\|H_n(\bar{y}^1) - H_n(\bar{y}^2)\|_{\mathcal{Z}}, \|H_k(\bar{y}^1, u^1) - H_k(\bar{y}^2, u^2)\|_{C([0, T]; \mathcal{Z})}, k = 0, 1, \dots, n-1\} \\
&\leq q \left(\sum_{l=0}^{n-1} \|y_l^1 - y_l^2\|_{C([0, T]; \mathcal{Z})} + \|u^1 - u^2\|_{\mathcal{Z}} \right) = q \|(\bar{y}^1, u^1) - (\bar{y}^2, u^2)\|_{C([0, T]; \mathcal{Z}^n) \times \mathcal{Z}}.
\end{aligned}$$

В силу условия (7) отображение H имеет в пространстве $C([0, T]; \mathcal{Z}^n) \times \mathcal{Z}$ единственную неподвижную точку $(\bar{y}^0, u^0) = (y_0^0, y_1^0, \dots, y_{n-1}^0, u^0)$.

Имеем

$$\begin{aligned} y_0^0 &= H_0(\bar{y}^0, u^0) = \sum_{l=0}^{n-1} t^{\sigma_l - \sigma_0} E_{\sigma_n, \sigma_l - \sigma_0 + 1}(t^{\sigma_n} A) z_l \\ &+ \int_0^t (t-s)^{\sigma_n - \sigma_0 - 1} E_{\sigma_n, \sigma_n - \sigma_0}((t-s)^{\sigma_n} A) (B(s, y_0^0(s), y_1^0(s), \dots, y_{n-1}^0(s)) + b(s)u^0) ds. \end{aligned} \quad (11)$$

По построению H

$$D^{\alpha_1-1} D^1 y_0^0 = y_1^0, \quad D^{\alpha_2-1} D^{\alpha_1} D^1 y_0^0 = y_2^0, \dots, D^{\alpha_{n-1}-1} D^{\alpha_{n-2}} \dots D^{\alpha_1} D^1 y_0^0 = y_{n-1}^0.$$

Отсюда, в частности, следует, что $D^1 y_0^0 \in L_1(0, T; \mathcal{Z})$, а значит,

$$y_0^0 = J^{1-\alpha_0} D^{1-\alpha_0} y_0 + J^{\alpha_0} y_0^0(0) \frac{t^{-\alpha_0}}{\Gamma(1-\alpha_0)} = J^{1-\alpha_0} D^{1-\alpha_0} y_0$$

(см. теорему 1.5 в [35]) в силу непрерывности на $[0, T]$ функции y_0^0 . Подействовав на равенство (11) оператором $D^{1-\alpha_0}$, получим

$$\begin{aligned} z^0 &:= D^{1-\alpha_0} y_0^0 = \sum_{l=0}^{n-1} t^{\sigma_l} E_{\sigma_n, \sigma_l + 1}(t^{\sigma_n} A) z_l \\ &+ D^1 \int_0^t (t-s)^{\sigma_n} E_{\sigma_n, \sigma_n + 1}((t-s)^{\sigma_n} A) (B(s, y_0^0(s), y_1^0(s), \dots, y_{n-1}^0(s)) + b(s)u^0) ds \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} t^{\sigma_l} E_{\sigma_n, \sigma_l + 1}(t^{\sigma_n} A) z_l + \int_0^t (t-s)^{\sigma_n - 1} E_{\sigma_n, \sigma_n}((t-s)^{\sigma_n} A) \\ &\quad \times (B(s, D^{\sigma_0} z^0(s), D^{\sigma_1} z^0(s), \dots, D^{\sigma_{n-1}} z^0(s)) + b(s)u^0) ds. \end{aligned}$$

Таким образом, (z^0, u^0) — обобщенное решение задачи (1)–(3). Если к тому же $\alpha_n = 1$, то по теореме 1 непрерывности на $[0, T]$ функции $B(s, D^{\sigma_0} z^0(s), D^{\sigma_1} z^0(s), \dots, D^{\sigma_{n-1}} z^0(s)) + b(s)u^0$ достаточно, чтобы решение было классическим. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Задача (1)–(3) нелокальна по времени, поэтому говорить о ее локальной разрешимости не имеет смысла. При этом часто используемый метод доказательства нелокальной разрешимости нелинейных задач, когда доказывают сжимаемость достаточно большой степени оператора H (см., например, [29]), в данном случае не работает, поскольку компонента H_n содержит нелокальное интегрирование по t .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть μ — функция единичного скачка в точке T , $b \equiv 1$. Тогда

$$\int_0^T \int_0^t (t-s)^{\sigma_n - 1} E_{\sigma_n, \sigma_n}((t-s)^{\sigma_n} A) b(s) ds d\mu(t) = T^{\sigma_n} E_{\sigma_n, \sigma_n + 1}(T^{\sigma_n} A),$$

$$\begin{aligned}\Phi &:= (T^{\sigma_n} E_{\sigma_n, \sigma_n+1}(T^{\sigma_n} A))^{-1} \\ &= T^{-\sigma_n} \Gamma(\sigma_n + 1) (I + T^{\sigma_n} \Gamma(\sigma_n + 1) A E_{\sigma_n, 2\sigma_n+1}(T^{\sigma_n} A))^{-1}, \\ \|\Phi\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} &\sim T^{-\sigma_n} \Gamma(\sigma_n + 1), \quad T \rightarrow 0+.\end{aligned}$$

Поэтому даже при малом T малость выражения

$$V_0^T \mu \|\Phi\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} L T^{\sigma_n} E_{\sigma_n, \sigma_n+1}(T^{\sigma_n} \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})})$$

из (7) не гарантирована, а значит, условие (7) может не выполняться.

3. Случай секториального оператора

Определим резольвентное множество $\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})\}$ оператора A и его спектр $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$, обозначим $R_\lambda(A) := (\lambda I - A)^{-1}$.

Оператор $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ принадлежит классу $A \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$ для некоторого $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, $\alpha_k \in (0, 1]$, $k = 0, 1, \dots, n$, если

- (i) для всех $\lambda \in S_{\theta_0, a_0} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a_0)| < \theta_0, \mu \neq a_0\}$ имеем $\lambda^{\sigma_n} \in \rho(A)$;
- (ii) для каждого $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$, существует такое $K = K(\theta, a) > 0$, что для всех $\lambda \in S_{\theta, a}$

$$\|R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K(\theta, a)}{|\lambda|^{\sigma_n}}.$$

Если $A \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$, то определены операторы

$$Y_\beta(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^\beta R_{\lambda^{\sigma_n}}(A) e^{\lambda t} d\lambda, \quad t > 0, \beta \in \mathbb{R},$$

где $\Gamma := \Gamma_+ \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_-$, $\Gamma_\pm := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = a + re^{\pm i\theta}, r \in (\delta, \infty)\}$, $\Gamma_0 := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = a + \delta e^{i\varphi}, \varphi \in [-\theta, \theta]\}$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$, $\delta > 0$. Мы будем использовать обозначения $Z_k(t) := Y_{\sigma_n - \sigma_{k-1}}(t)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Рассуждая, как в лемме 2.1 из [36], получим

$$\exists C > 0 \forall t \in (0, T] \quad \|Y_\beta(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C_\beta t^{\sigma_n - \beta - 1}. \quad (12)$$

Пусть $A \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$, $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $z_T \in D_A$. В этом случае решением задачи (4), (5) будем называть такое $z \in C((0, T]; D_A)$, что $\mathcal{D}^{\sigma_k} z \in AC([0, T]; \mathcal{Z})$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, равенство (5) выполняется для всех $t \in (0, T]$ и выполняются условия (4).

Теорема 3 [34]. Пусть $\alpha_k \in (0, 1]$, $k = 0, 1, \dots, n$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \geq 0$, $A \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$, функция f удовлетворяет одному из следующих условий:

- (i) $f \in C([0, T]; D_A)$ при $\alpha_n = 1$ и $f \in C([0, T]; D_A) \cap C_\beta^1([0, T]; \mathcal{Z})$ для некоторого $\beta < 1$ при $\alpha_n < 1$;
- (ii) $f \in C^\gamma([0, T]; \mathcal{Z})$ при $\alpha_n = 1$ и $f \in C^\gamma([0, T]; \mathcal{Z}) \cap C_\beta^1([0, T]; \mathcal{Z})$ для некоторых $\gamma \in (0, 1]$, $\beta < 1$ при $\alpha_n < 1$.

Тогда функция

$$z(t) = \sum_{k=0}^{n-1} Z_k(t) z_k + \int_0^t Y_0(t-s) f(s) ds$$

является единственным решением задачи (4), (5).

В данном случае обратную задачу рассмотрим для уравнения, в котором нелинейный оператор B не зависит от производной $D^{\sigma_{n-1}} z$:

$$\mathcal{D}^{\sigma_n} z(t) = Az(t) + B(t, D^{\sigma_0} z(t), D^{\sigma_1} z(t), \dots, D^{\sigma_{n-2}} z(t)) + b(t)u, \quad (13)$$

$$\mathcal{D}^{\sigma_k} z(0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (14)$$

$$\int_0^T z(t) d\mu(t) = z_T. \quad (15)$$

Обобщенным решением задачи (13)–(15) в случае оператора $A \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$ будем называть пару $(z, u) \in [C((0, T]; \mathcal{Z}) \cap L_1(0, T; \mathcal{Z})] \times \mathcal{Z}$, для которой $D^{\sigma_k} z \in C([0, T]; \mathcal{Z})$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, при всех $t \in (0, T]$

$$z(t) = \sum_{k=0}^{n-1} Z_k(t) z_k + \int_0^t Y_0(t-s)(B^z(s) + b(s)u) ds, \quad (16)$$

где $B^z(s) = B(s, D^{\sigma_0} z(s), D^{\sigma_1} z(s), \dots, D^{\sigma_{n-2}} z(s))$, и выполнены условия (14), (15). Если, кроме того, $z \in C((0, T]; D_A)$, $D^{\sigma_k} z \in AC([0, T]; \mathcal{Z})$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, существует $D^{\sigma_n} z \in C((0, T]; \mathcal{Z})$ и выполняется равенство (13) при всех $t \in (0, T]$, то пара (z, u) называется *классическим решением* задачи (13)–(15).

Будем предполагать, что отображение $B \in C([0, T] \times \mathcal{Z}^{n-1}; \mathcal{Z})$ удовлетворяет следующему условию: существуют такие $L > 0$, $\gamma \in (0, 1]$, что для любых $x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, y_0, y_1, \dots, y_{n-2} \in \mathcal{Z}$, $s, t \in [0, T]$ выполняется

$$\|B(s, x_0, x_1, \dots, x_{n-2}) - B(t, y_0, y_1, \dots, y_{n-2})\|_{\mathcal{Z}} \leq L \left(|s-t|^{\gamma} + \sum_{k=0}^{n-2} \|x_k - y_k\|_{\mathcal{Z}} \right). \quad (17)$$

Теорема 4. Пусть $0 < \alpha_k \leq 1$, $k = 0, 1, \dots, n$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, $\alpha_{n-1} + \alpha_n > 1$, $A \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, $B \in C([0, T] \times \mathcal{Z}^{n-1}; \mathcal{Z})$ удовлетворяет условию (17), $b \in C^{\gamma}([0, T]; \mathbb{C})$, $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $z_T \in D_A$, $\mu \in BV((0, T]; \mathbb{C})$, существует обратный оператор

$$\Phi := \left(\int_0^T \int_0^t Y_0(t-s) b(s) ds d\mu(t) \right)^{-1} \in \mathcal{L}(D_A; \mathcal{Z}),$$

$$q := LT^{\sigma_n} \max \left\{ \frac{C_0}{\sigma_n} V_0^T \mu \|\Phi\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}, \frac{2C_{\sigma_k} T^{-\sigma_k}}{\sigma_n - \sigma_k}, \frac{2C_{\sigma_k} T^{-\sigma_k}}{\sigma_n - \sigma_k} \|b\|_{C([0, T]; \mathbb{C})}, k = 0, 1, \dots, n-1 \right\} < 1. \quad (18)$$

Тогда обратная задача (13)–(15) имеет единственное обобщенное решение. Если к тому же $\alpha_n = 1$, то задача (13)–(15) имеет единственное классическое решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того чтобы воспользоваться теоремой 3, надо показать гельдеровость функции

$$f(t) = B(s, \mathcal{D}^{\sigma_0} z(s), \dots, \mathcal{D}^{\sigma_{n-2}} z(s)) + b(s)u$$

на обобщенном решении z . Функция b гельдерова, кроме того, заметим, что для $\mathcal{D}^{\sigma_k} z$, $k = 0, 1, \dots, n-2$, существуют непрерывные на $[0, T]$ функции

$$J^{1-\alpha_{k+1}} D^1 \mathcal{D}^{\sigma_k} z = \mathcal{D}^{\sigma_{k+1}} z.$$

В таком случае при $0 \leq t < s \leq T$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}^{\sigma_k} z(s) - \mathcal{D}^{\sigma_k} z(t)\|_{\mathcal{Z}} &= \|J^{\alpha_{k+1}} J^{1-\alpha_{k+1}} D^1 \mathcal{D}^{\sigma_k} z(s) - J^{\alpha_{k+1}} J^{1-\alpha_{k+1}} D^1 \mathcal{D}^{\sigma_k} z(t)\|_{\mathcal{Z}} \\ &\leq \frac{s^{\alpha_{k+1}} - t^{\alpha_{k+1}}}{\Gamma(\alpha_{k+1} + 1)} \|J^{1-\alpha_{k+1}} D^1 \mathcal{D}^{\sigma_k} z\|_{C([0, T]; \mathcal{Z})} \leq \frac{(s-t)^{\alpha_{k+1}}}{\Gamma(\alpha_{k+1} + 1)} \|\mathcal{D}^{\sigma_{k+1}} z\|_{C([0, T]; \mathcal{Z})}, \end{aligned}$$

поскольку функция

$$\frac{s^{\alpha_{k+1}} - t^{\alpha_{k+1}}}{(s-t)^{\alpha_{k+1}}}$$

невозрастающая по t при $t \in [0, s)$, $\alpha_{k+1} \leq 1$. Таким образом, каждая функция $\mathcal{D}^{\sigma_k} z$ гельдерова с показателем α_{k+1} , $k = 0, 1, \dots, n-2$. Тогда

$$\begin{aligned} &\|B(s, \mathcal{D}^{\sigma_0} z(s), \dots, \mathcal{D}^{\sigma_{n-2}} z(s)) - B(t, \mathcal{D}^{\sigma_0} z(t), \dots, \mathcal{D}^{\sigma_{n-2}} z(t))\|_{\mathcal{Z}} \\ &\leq L \left(|s-t|^{\gamma} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\|\mathcal{D}^{\sigma_{k+1}} z\|_{C([0, T]; \mathcal{Z})}}{\Gamma(\alpha_{k+1} + 1)} |s-t|^{\alpha_{k+1}} \right) \leq L_1 |s-t|^{\min\{\gamma, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}}. \end{aligned}$$

При $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, имеем

$$\mathcal{D}^{\sigma_j} Z_k(t) z_k = Y_{\sigma_n - \sigma_k - 1 + \sigma_j}(t) z_k \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$$

(см. доказательство теоремы 3 в [33]). В силу леммы 1 из [33]

$$\mathcal{D}^{\sigma_j} \int_0^t Y_0(t-s) g(s) ds = \int_0^t Y_{\sigma_j}(t-s) g(s) ds, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Поэтому из (16) следует, что при $k = 0, 1, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\sigma_k} z(t) &= \sum_{l=0}^{n-1} Y_{\sigma_n - \sigma_l - 1 + \sigma_k}(t) z_k \\ &\quad + \int_0^t Y_{\sigma_k}(t-s) (B(s, \mathcal{D}^{\sigma_0} z(s), \dots, \mathcal{D}^{\sigma_{n-1}} z(s)) + b(s)u) ds. \quad (19) \end{aligned}$$

При этом также показано, что при $k < l$

$$\|\mathcal{D}^{\sigma_k} Z_l(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C t^{\sigma_l - \sigma_k}$$

(см. (12)), при $k > l$, $z_l \in D_A$

$$\|\mathcal{D}^{\sigma_k} Z_l(t) z_l\|_{\mathcal{Z}} \leq C t^{\alpha_0 + \alpha_n - 1}$$

и, наконец,

$$\|\mathcal{D}^{\sigma_k} Z_k(t) z_k - z_k\|_{\mathcal{Z}} \leq C t^{\alpha_0 + \alpha_n - 1}.$$

Все это вместе и условие $\alpha_0 + \alpha_n > 1$ данной теоремы означает, что $\mathcal{D}^{\sigma_k} Z_l(t) z_l \in C([0, T]; \mathcal{Z})$, $k, l = 0, 1, \dots, n - 1$.

Заметим, что, поскольку $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$,

$$\int_0^T A \sum_{k=0}^{n-1} Z_k(t) z_k d\mu(t) = \int_0^T \sum_{k=0}^{n-1} Z_k(t) A z_k d\mu(t),$$

$$\begin{aligned} AY_0(t) &= Y_{\sigma_n}(t), \quad t > 0, \quad \int_0^T A \int_0^t Y_0(t-s) B(s, \mathcal{D}^{\sigma_0} z(s), \dots, \mathcal{D}^{\sigma_{n-1}} z(s)) ds d\mu(t) \\ &= \int_0^T \int_0^t Y_{\sigma_n}(t-s) B(s, \mathcal{D}^{\sigma_0} z(s), \dots, \mathcal{D}^{\sigma_{n-1}} z(s)) ds d\mu(t), \end{aligned}$$

поэтому

$$\int_0^T \sum_{k=0}^{n-1} Z_k(t) z_k d\mu(t), \quad \int_0^T \int_0^t Y_0(t-s) B(s, \mathcal{D}^{\sigma_0} z(s), \dots, \mathcal{D}^{\sigma_{n-1}} z(s)) ds d\mu(t) \in D_A. \quad (20)$$

Подставим правую часть равенства (16), определяющую обобщенное решение, в (15) и получим

$$\begin{aligned} &\int_0^T \sum_{k=0}^{n-1} Z_k(t) z_k d\mu(t) \\ &+ \int_0^T \int_0^t Y_0(t-s) (B(s, \mathcal{D}^{\sigma_0} z(s), \dots, \mathcal{D}^{\sigma_{n-1}} z(s)) + b(s) u) ds d\mu(t) = z_T. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (20) и включения $z_T \in D_A$ следует равенство

$$\begin{aligned} u &= \Phi z_T - \Phi \int_0^T \sum_{k=0}^{n-1} Z_k(t) z_k d\mu(t) \\ &- \Phi \int_0^T \int_0^t Y_0(t-s) B(s, \mathcal{D}^{\sigma_0} z(s), \dots, \mathcal{D}^{\sigma_{n-1}} z(s)) ds d\mu(t). \quad (21) \end{aligned}$$

Таким образом, вновь, как и в предыдущем разделе, получена система нелинейных уравнений вида (10), в которой теперь H_k задаются правыми частями уравнений (19) при $k = 0, 1, \dots, n - 1$, а H_n — правой частью равенства

(21). Докажем, что оператор $H = (H_0, H_1, \dots, H_n)$ сжимающий в пространстве $C([0, T]; \mathcal{Z}^n) \times \mathcal{Z}$.

Во-первых, как показано выше, отображение $H_k(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, u)(t)$ непрерывно по t на $[0, T]$ при $(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, u) \in C([0, T]; \mathcal{Z}^n) \times \mathcal{Z}$, следовательно, выполняется $H[C([0, T]; \mathcal{Z}^n) \times \mathcal{Z}] \subset C([0, T]; \mathcal{Z}^n) \times \mathcal{Z}$.

Далее, для $(\bar{y}^j, u^j) \in C([0, T]; \mathcal{Z}^n) \times \mathcal{Z}$, $j = 1, 2$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ с помощью липшицевости по фазовым переменным оператора B и с учетом (12) получим

$$\begin{aligned} & \|H_k(\bar{y}^1, u^1)(t) - H_k(\bar{y}^2, u^2)(t)\|_{\mathcal{Z}} \\ & \leq L \int_0^t \|Y_{\sigma_k}(s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \left(\sum_{l=0}^{n-1} \|y_l^1(s) - y_l^2(s)\|_{\mathcal{Z}} + \|b\|_{C([0, T]; \mathbb{C})} \|u^1 - u^2\|_{\mathcal{Z}} \right) ds \\ & \leq \frac{LC_{\sigma_k} T^{\sigma_n - \sigma_k}}{\sigma_n - \sigma_k} \left(\sum_{l=0}^{n-1} \|y_l^1 - y_l^2\|_{C([0, T]; \mathcal{Z})} + \|b\|_{C([0, T]; \mathbb{C})} \|u^1 - u^2\|_{\mathcal{Z}} \right), \\ & \|H_n(\bar{y}^1) - H_n(\bar{y}^2)\|_{\mathcal{Z}} \leq V_0^T \mu \|\Phi\|_{\mathcal{L}(D_A; \mathcal{Z})} \frac{LC_0 T^{\sigma_n}}{\sigma_n} \sum_{l=0}^{n-1} \|y_l^1 - y_l^2\|_{C([0, T]; \mathcal{Z})}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (18)

$$\begin{aligned} & \|H(\bar{y}^1, u^1) - H(\bar{y}^2, u^2)\|_{C([0, T]; \mathcal{Z}^n) \times \mathcal{Z}} \\ & = \max\{\|H_n(\bar{y}^1) - H_n(\bar{y}^2)\|_{\mathcal{Z}}, \|H_k(\bar{y}^1, u^1) - H_k(\bar{y}^2, u^2)\|_{C([0, T]; \mathcal{Z})}, k = 0, 1, \dots, n-1\} \\ & \leq q \|(\bar{y}^1, u^1) - (\bar{y}^2, u^2)\|_{C([0, T]; \mathcal{Z}^n) \times \mathcal{Z}}. \end{aligned}$$

Тот факт, что по единственной неподвижной точке $(\bar{y}^0, u^0) = (y_0^0, y_1^0, \dots, y_{n-1}^0, u^0)$ отображения H в пространстве $C([0, T]; \mathcal{Z}^n) \times \mathcal{Z}$ определяется обобщенное решение (z^0, u^0) , где $z^0 = D^{1-\alpha_0} y_0^0$, доказывается, как для теоремы 2.

При $\alpha_n = 1$ имеющаяся гельдеровость правой части уравнения (13) по теореме 3 влечет существование классического решения. \square

4. Приложение к одной обратной задаче для уравнения в частных производных

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $\nu > 0$,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial^2 \xi_1} + \frac{\partial^2}{\partial^2 \xi_2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial^2 \xi_d}$$

— оператор Лапласа. Пусть $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in (0, 1]$, $\sigma_n = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n - 1$. Рассмотрим обратную задачу

$$\mathcal{D}_t^{\sigma_k} x(\xi, 0) = x_k(\xi), \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad \xi \in \Omega, \quad (22)$$

$$x(\xi, t) = 0, \quad (\xi, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \quad (23)$$

$$x(\xi, T) = x_T(\xi), \quad \xi \in \Omega, \quad (24)$$

для уравнения в области $\Omega \times (0, T]$,

$$\mathcal{D}_t^{\sigma_n} x(\xi, t) = \nu \Delta x(\xi, t) + \arctan \left(\sum_{k=0}^{n-2} \mathcal{D}_t^{\sigma_k} x(\xi, t) \right) + bu(\xi) \quad (25)$$

с неизвестными функциями x, u . Здесь $\mathcal{D}_t^{\sigma_k}$, $k = 0, 1, \dots, n$, — дробные производные Джрабашяна — Нерсесяна по переменной t , соответствующие набору чисел $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, $\nu \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Возьмем $j \in 2\mathbb{N}$, $j - 2 > d/2$, тогда по теореме вложения Соболева $H^{j-2}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$. Положим

$$\mathcal{Z} = H^j(\Omega), \quad A = \Delta, \quad D_A = H_0^{j+2}(\Omega) := \{h \in H^{j+2}(\Omega) : h(\xi) = 0, \xi \in \partial\Omega\},$$

тогда $A \in \mathcal{Cl}(\mathcal{Z})$.

Пусть $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ — ортонормированная в смысле скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в пространстве $L_2(\Omega)$ система собственных функций оператора A , занумерованная в порядке неввозрастания собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ этого оператора с учетом их кратностей.

Следующие два утверждения могут быть доказаны аналогично тому, как это сделано для лемм 6 и 7 в [37].

Лемма 1. Пусть $A \in \mathcal{Cl}(\mathcal{Z})$, $\alpha > 1$,

$$\begin{aligned} \exists \theta_1 \in (\pi/2, \pi) \exists a_1 \geq 0 \forall \lambda \in S_{a_1, \theta_1} \quad \lambda^\alpha \in \rho(A); \\ \exists C > 0 \forall \lambda \in S_{a_1, \theta_1} \quad \|R_{\lambda^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{C}{|\lambda^\alpha - a_1|}. \end{aligned}$$

Тогда существуют такие $\theta_0 \in (\pi/2, \theta_1)$, $a_0 \geq a_1$, $a_0 > 1$, $K > 0$, что

$$\forall \lambda \in S_{\theta_0, a_0} \quad \|R_{\lambda^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K}{|\lambda|^\alpha}.$$

Лемма 2. Пусть $A \in \mathcal{Cl}(\mathcal{Z})$, $\alpha \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} \exists \theta_1 \in (\pi/2, \pi) \exists a_0 \in [0, 1) \forall \lambda \in S_{a_0, \theta_1} \quad \lambda^\alpha \in \rho(A); \\ \exists C > 0 \forall \lambda \in S_{a_0, \theta_1} \quad \|R_{\lambda^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{C}{|\lambda^\alpha - a_0|}. \end{aligned}$$

Тогда существует такие $\theta_0 \in (\pi/2, \theta_1)$, $K > 0$, что

$$\forall \lambda \in S_{\theta_0, a_0} \quad \|R_{\lambda^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K}{|\lambda|^\alpha}.$$

Лемма 3. Пусть $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in (0, 1]$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, $\sigma_n \in (0, 2)$, $\nu > 0$, $j \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathcal{Z} = H^j(\Omega)$, $A = \Delta$, $D_A = H_0^{j+2}(\Omega)$. Тогда $A \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi/\sigma_n)$, $a_0 \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\theta_1 \in (\pi/2, \pi/\sigma_n)$, $a_1 \geq 0$, $\lambda \in S_{\theta_1, a_1}$, $v \in H^j(\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned} \|R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)v\|_{H^j(\Omega)}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 + \lambda_k^{2j})|\langle v, \varphi_k \rangle|^2}{|\lambda^{\sigma_n} - \nu \lambda_k|^2} \\ &\leq \frac{\sin^{-2}(\theta_1 \sigma_n)}{|\lambda^{\sigma_n} - a_1|^2} \sum_{k=1}^{\infty} (1 + \lambda_k^j) |\langle v, \varphi_k \rangle|^2 = \frac{\sin^{-2}(\theta_1 \sigma_n)}{|\lambda^{\sigma_n} - a_1|} \|v\|_{H^j(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

При $\sigma_n = 1$ утверждение получено. С помощью леммы 1 при $\sigma_n \in (1, 2)$ или леммы 2 при $\sigma_n \in (0, 1)$ получаем, что $A \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi/\sigma_n)$, $a_0 \geq 0$. \square

Теорема 5. Пусть $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in (0, 1]$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, $\alpha_{n-1} + \alpha_n > 1$, $\sigma_n = 1$, $\nu \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $j \in 2\mathbb{N}$, $j-2 > d/2$, $x_k \in H_0^{j+2}(\Omega)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $x_T \in H_0^{j+2}(\Omega)$,

$$T < \min \left\{ \left(\frac{\alpha_n}{2} \right)^{1/\alpha_n}, \left(\frac{\alpha_n}{2|b|} \right)^{1/\alpha_n} \right\}, \quad -\lambda_1|b| > 1. \quad (26)$$

Тогда обратная задача (22)–(25) имеет единственное обобщенное решение. Если при этом $\alpha_n = 1$, то обратная задача (22)–(25) имеет единственное классическое решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $y_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $t \in [0, T]$

$$B(t, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) = \arctan \left(\sum_{k=0}^{n-1} y_k \right).$$

В силу бесконечной дифференцируемости функции в правой части этого равенства имеем $B : [0, T] \times \mathcal{Z}^n \rightarrow \mathcal{Z}$ по теореме 1 из [38, приложение B].

Заметим, что

$$\begin{aligned} Y_\beta(t) &:= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^\beta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{\lambda^{\sigma_n} - \nu \lambda_k} e^{\lambda t} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^\beta \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \lambda^{-\sigma_n(l+1)} \nu^l \lambda_k^l \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k e^{\lambda t} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=0}^{\infty} \nu^l t^{\sigma_n(l+1)-\beta-1} \int_{t\Gamma} \mu^{\beta-\sigma_n(l+1)} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^l \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k e^{\mu} d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\nu^l t^{\sigma_n(l+1)-\beta-1} \lambda_k^l}{\Gamma(\sigma_n(l+1)-\beta)} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k = t^{\sigma_n-\beta-1} \sum_{k=1}^{\infty} E_{\sigma_n, \sigma_n-\beta}(t^{\sigma_n} \nu \lambda_k) \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k, \end{aligned}$$

отсюда

$$\|Y_0(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} = \sup_{k \in \mathbb{N}} e^{t\nu\lambda_k} \leq 1,$$

$$\begin{aligned} \|Y_{\sigma_k}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} &= t^{-\sigma_k} \sup_{k \in \mathbb{N}} E_{1, 1-\sigma_k}(t\nu\lambda_k) \\ &\leq t^{-\sigma_k} \sup_{k \in \mathbb{N}} E_{1, \alpha_n}(t\nu\lambda_k) \leq \frac{t^{-\sigma_k}}{\Gamma(\alpha_n)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Здесь использована отрицательность чисел λ_k , $k \in \mathbb{N}$. Поэтому $C_0 \leq 1$, $C_{\sigma_k} \leq 1/\Gamma(\alpha_n)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Поскольку $\sigma_n = 1$, имеем

$$Y_0(t) := t^{\sigma_n-1} \sum_{k=1}^{\infty} E_{\sigma_n, \sigma_n}(t^{\sigma_n} \nu \lambda_k) \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\nu\lambda_k t} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\Phi &:= \left(b \int_0^T Y_0(s) ds \right)^{-1} = b^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\nu\lambda_k T} - 1}{\nu\lambda_k} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k \right)^{-1} \\ &= b^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu\lambda_k}{e^{\nu\lambda_k T} - 1} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k \in \mathcal{L}(D_A; \mathcal{X}),\end{aligned}$$

так как для $v \in H_0^{j+2}(\Omega)$

$$\begin{aligned}\|\Phi v\|_{\mathcal{X}}^2 &= |b|^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\nu\lambda_k|^2 |\langle v, \varphi_k \rangle|^2}{|e^{\nu\lambda_k T} - 1|^2} \\ &\leq |b|^{-2} \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{|e^{\nu\lambda_k T} - 1|^2} \nu^2 \|Av\|_{\mathcal{X}}^2 = \frac{|b|^{-2} \nu^2 \|Av\|_{\mathcal{X}}^2}{|e^{\nu\lambda_1 T} - 1|^2}.\end{aligned}$$

Отсюда можно показать, что

$$\|\Phi\|_{\mathcal{L}(D_A; \mathcal{X})} = \frac{|b|^{-1} \nu}{1 - e^{\nu\lambda_1 T}}.$$

Заметим, что

$$\frac{\nu T}{1 - e^{\nu\lambda_1 T}} \leq \frac{\nu T}{-\nu\lambda_1 T} = \frac{1}{-\lambda_1}.$$

Так как в данном случае μ — функция единичного скачка, то $V_0^T \mu = 1$. Для оператора B константа Липшица $L = 1$, поэтому

$$\begin{aligned}q &:= \max \left\{ \frac{|b|^{-1} \nu T}{1 - e^{\nu\lambda_1 T}}, \frac{2T^{1-\sigma_k}}{1 - \sigma_k}, \frac{2T^{1-\sigma_k}}{1 - \sigma_k} |b|, k = 0, 1, \dots, n-1 \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{|b|^{-1} \nu T}{1 - e^{\nu\lambda_1 T}}, \frac{2T^{\alpha_n}}{\alpha_n}, \frac{2T^{\alpha_n}}{\alpha_n} |b|, k = 0, 1, \dots, n-1 \right\} < 1\end{aligned}$$

в силу условия (26). По лемме 3 и теореме 4 получим требуемое. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Разрешимость в данном случае гарантирует помимо малости T также условие $-\lambda_1 |b| > 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kozhanov A. I. Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
2. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker, 2000.
3. Belov Yu. Ya. Inverse problems for parabolic equations. Utrecht: VSP, 2002.
4. Hasanov Hasanoğlu A., Romanov V. G. Introduction to inverse problems for differential equations. Cham: Springer, 2017.
5. Klibanov M. V., Timonov A. A. Carleman estimates for coefficient inverse problems and numerical applications. Utrecht; Boston: VSP, 2004.
6. Ramm A. G. Inverse problems. Mathematical and analytical techniques with applications to engineering. New York: Springer, 2004.
7. Kabanikhin S. I. Inverse and ill-posed problems: Theory and applications. Utrecht: Walter de Gruyter, 2012.

8. Пятков С. Г., Потапков А. А. О некоторых классах коэффициентных обратных задач определения теплофизических параметров в слоистых средах // Мат. заметки СВФУ. 2024. Т. 31, № 2. С. 31–45.
9. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
10. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.
11. Псеху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005.
12. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006.
13. Глушак А. В. Об обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения дробного порядка // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 5. С. 684–693.
14. Орловский Д. Г. Parameter determination in a differential equation of fractional order with Riemann–Liouville fractional derivative in a Hilbert space // Журн. Сиб. федер. ун-та. Математика и физика. 2015. Т. 8, № 1. С. 55–63.
15. Fedorov V. E., Ivanova N. D. Identification problem for degenerate evolution equations of fractional order // Fract. Calc. Appl. Anal. 2017. V. 20, N 3. P. 706–721.
16. Fedorov V. E., Nazhimov R. R. Inverse problems for a class of degenerate evolution equations with Riemann–Liouville derivative // Fract. Calc. Appl. Anal. 2019. V. 22, N 2. P. 271–286.
17. Orlovsky D. G. Determination of the parameter of the differential equation of fractional order with the Caputo derivative in Hilbert space // J. Phys., Conf. Ser. 2019. V. 1205, N 1. 012042.
18. Федоров В. Е., Костић М. Задача идентификации для сильно вырожденных эволюционных уравнений с производной Герасимова — Капуто // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57, № 1. С. 100–113.
19. Fedorov V. E., Nagumanova A. V., Avilovich A. S. A class of inverse problems for evolution equations with the Riemann–Liouville derivative in the sectorial case // Math. Methods Appl. Sci. 2021. V. 44, N 15. P. 11961–11969.
20. Fedorov V. E., Nagumanova A. V., Kostić M. A class of inverse problems for fractional order degenerate evolution equations // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2021. V. 29, N 2. P. 173–184.
21. Kostin A. B., Piskarev S. I. Inverse source problem for the abstract fractional differential equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2021. V. 29, N 2. P. 267–281.
22. Плеханова М. В., Ижбердеева Е. М. О корректности обратной задачи для вырожденного эволюционного уравнения с производной Джрбашяна — Нерсесяна // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2022. Т. 213. С. 80–88. Tematicheskiye
23. Orlovsky D., Piskarev S. Inverse problem with final overdetermination for time-fractional differential equation in a Banach space // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2022. V. 30, N 2. P. 221–237.
24. Ашурров Р. Р., Файзиев Ю. Э. Обратная задача по определению порядка дробной производной в волновом уравнении // Мат. заметки. 2021. Т. 110, вып. 6. С. 824–836.
25. Plekhanova M., Melekhina D., Fedorov V. On local unique solvability for a class of nonlinear identification problems // J. Math. Sci. 2024. V. 281, N 6. P. 882–897.
26. Федоров В. Е., Борель Л. В., Иванова Н. Д. Нелинейные обратные задачи для одного класса уравнений с производными Римана — Лиувилля // Зап. науч. сем. ПОМИ. 2022. Т. 519. С. 264–288.
27. Fedorov V. E., Ivanova N. D., Borel L. V., Avilovich A. S. Nonlinear inverse problems for fractional differential equations with sectorial operators // Lobachevskii J. Math. 2022. V. 43, N 11. P. 3125–3141.
28. Fedorov V. E., Plekhanova M. V., Ivanova N. D., Shuklina A. F., Filin N. V. Nonlinear inverse problems for some equations with fractional derivatives // Chelyab. Fiz. Mat. Zh. 2023. V. 8, N 2. P. 190–202.
29. Fedorov V. E., Plekhanova M. V., Melekhina D. V. Nonlinear inverse problems for equations with Dzhrbashyan–Nersesyan derivatives // Fractal Fract. 2023. V. 7, N 6. P. 464.
30. Fedorov V. E., Plekhanova M. V., Melekhina D. V. On local unique solvability for a class of nonlinear identification problems // Axioms. 2023. V. 12, N 11. 1013.
31. Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. Арм. ССР. Математика. 1968. Т. 3, № 1.

- C. 3–28.
32. Fedorov V. E., Plekhanova M. V., Izhberdeeva E. M. Initial value problem for linear equations with the Dzhrbashyan–Nersesyan derivative in Banach spaces // Symmetry. 2013. V. 13. P. 1058.
33. Fedorov V. E., Plekhanova M. V., Izhberdeeva E. M. Analytic resolving families for equations with the Dzhrbashyan–Nersesyan derivative // Fractal Fract. 2022. V. 6. 541.
34. Ижбердеева Е. М. Композиции дробных производных как производная Джрбашяна — Нерсесяна // Челяб. физ.-мат. журн. 2024. Т. 9, вып. 1. С. 35–49.
35. Bajlekova E. G. Fractional evolution equations in Banach spaces. PhD Thesis. Eindhoven: Eindhoven Univ. Technol., 2001.
36. Fedorov V. E., Avilovich A. S. A Cauchy type problem for a degenerate equation with the Riemann–Liouville derivative in the sectorial case // Sib. Math. J. 2019. V. 60, N 2. P. 359–372.
37. Fedorov V. E., Romanova E. A., Debbouche A. Analytic in a sector resolving families of operators for degenerate evolution fractional equations // J. Math. Sci. 2018. V. 228, N 4. P. 380–394.
38. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985.

Поступила в редакцию 18 сентября 2024 г.

После доработки 26 сентября 2024 г.

Принята к публикации 1 октября 2024 г.

Федоров Владимир Евгеньевич, Плеханова Марина Васильевна,
Сагимбаева Ангелина Олеговна
Челябинский государственный университет,
кафедра математического анализа,
ул. Бр. Кашириных, 129, Челябинск 454001
kar@csu.ru, mariner79@mail.ru, angsag@mail.ru

NONLINEAR INVERSE PROBLEMS
WITH A STATIONARY UNKNOWN
ELEMENT FOR EQUATIONS WITH
DZHRBASHYAN—NERSESYAN DERIVATIVES

V. E. Fedorov, M. V. Plekhanova,
and A. O. Sagimbaeva

Abstract: Sufficient conditions for unique solvability in the classical and generalized sense of the inverse problem for a nonlinear equation in a Banach space resolved with respect to the highest fractional derivative of Dzhrbashyan–Nersesyan are obtained. The overdetermination condition of the inverse problem is given by the Stieltjes integral; the lower derivatives are present in the equation non-linearly. The operator by the unknown function in the linear part of the equation is assumed to be bounded or generating an analytical resolving family of the corresponding linear homogeneous equation. Using our previous results for the direct problem for a linear inhomogeneous equation we obtain the main results here by the method of contraction mappings. An example of an inverse problem for a partial differential equation for which the conditions of an abstract theorem are fulfilled is given.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-3-53-72

Keywords: nonlinear inverse problem, generalized solution, classical solution, fractional derivative of Dzhrbashyan–Nersesyan, initial boundary value problem.

REFERENCES

1. Kozhanov A. I., Composite Type Equations and Inverse Problems, VSP, Utrecht (1999).
2. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., and Vasin I. A., Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics, Marcel Dekker, New York (2000).
3. Belov Yu. Ya., Inverse Problems for Parabolic Equations, VSP, Utrecht (2002).
4. Hasanov Hasanoglu A. and Romanov V. G., Introduction to Inverse Problems for Differential Equations, Springer, Cham (2017).
5. Klibanov M. V. and Timonov A. A., Carleman Estimates for Coefficient Inverse Problems and Numerical Applications, VSP, Utrecht; Boston (2004).
6. Ramm A. G., Inverse Problems. Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering, Springer, New York (2004).
7. Kabanikhin S. I., Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications, Walter de Gruyter, Utrecht (2012).
8. Pyatkov S. G. and Potapkov A. A., “On some classes of coefficient inverse problems of determining thermophysical parameters in layered media [in Russian],” Mat. Zamet. SVFU, **31**, No. 2, 31–45 (2024).

The research was carried out at the expense of a grant from the Russian Science Foundation and the Government of the Chelyabinsk Region No. 23-21-10015, <https://rscf.ru/project/23-21-10015/>.

9. Samko S. G., Kilbas A. A., and Marichev O. I., Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of Their Applications [in Russian], Nauka i Tekhnika, Minsk (1987).
10. Nakhushhev A. M., Fractional Calculus and its Application [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2003).
11. Pskhu A. V., Partial Differential Equations of Fractional Order [in Russian], Nauka, Moscow (2005).
12. Kilbas A. A., Srivastava H. M., and Trujillo J. J., Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, Amsterdam (2006).
13. Glushak A. V., “On an inverse problem for an abstract differential equation of fractional order,” *Math. Notes*, **87**, No. 5–6, 654–662 (2010).
14. Orlovskii D. G., “Parameter determination in a differential equation of fractional order with Riemann–Liouville fractional derivative in a Hilbert space,” *J. Sib. Fed. Univ., Math. Phys.*, **8**, No. 1, 55–63 (2015).
15. Fedorov V. E. and Ivanova N. D., “Identification problem for degenerate evolution equations of fractional order,” *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **20**, No. 3, 706–721 (2017).
16. Fedorov V. E. and Nazhimov R. R., “Inverse problems for a class of degenerate evolution equations with Riemann–Liouville derivative,” *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **22**, No. 2, 271–286 (2019).
17. Orlovsky D. G., “Determination of the parameter of the differential equation of fractional order with the Caputo derivative in Hilbert space,” *J. Phys., Conf. Ser.*, **1205**, No. 1, paper ID 012042 (2019).
18. Fedorov V. E. and Kostić M., “Identification problem for strongly degenerate evolution equations with the Gerasimov–Caputo derivative,” *Differ. Equ.*, **56**, No. 12, 1613–1627 (2020).
19. Fedorov V. E., Nagumanova A. V., and Avilovich A. S., “A class of inverse problems for evolution equations with the Riemann–Liouville derivative in the sectorial case,” *Math. Methods Appl. Sci.*, **44**, No. 15, 11961–11969 (2021).
20. Fedorov V. E., Nagumanova A. V., and Kostić M., “A class of inverse problems for fractional order degenerate evolution equations,” *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **29**, No. 2, 173–184 (2021).
21. Kostin A. B. and Piskarev S. I., “Inverse source problem for the abstract fractional differential equation,” *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **29**, No. 2, 267–281 (2021).
22. Plekhanova M. V. and Izhberdeeva E. M., “On the well-posedness of an inverse problem for a degenerate evolutionary equation with the Dzhrbashyan–Nersesyan fractional derivative [in Russian],” *Itogi Nauki Tekhniki, Sovremen. Mat. Prilozh., Tem. Obzory*, **213**, 80–88 (2022).
23. Orlovsky D. and Piskarev S., “Inverse problem with final overdetermination for time-fractional differential equation in a Banach space,” *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **30**, No. 2, 221–237 (2022).
24. Ashurov R. R. and Fayziev Yu. E., “Inverse problem of determining the order of fractional derivative in the wave equation,” *Math. Notes*, **110**, No. 6, 824–836 (2021).
25. Plekhanova M., Melekhina D., and Fedorov V., “On local unique solvability for a class of nonlinear identification problems,” *J. Math. Sci.*, **281**, No. 6, 882–897 (2024).
26. Fedorov V. E., Borel L. V., and Ivanova N. D., “Nonlinear inverse problems for one class of equations with Riemann–Liouville derivatives [in Russian],” *Zap. Nauchn. Semin. POMI*, **519**, 264–288 (2022).
27. Fedorov V. E., Ivanova N. D., Borel L. V., and Avilovich A. S., “Nonlinear inverse problems for fractional differential equations with sectorial operators,” *Lobachevskii J. Math.*, **43**, No. 11, 3125–3141 (2022).
28. Fedorov V. E., Plekhanova M. V., Ivanova N. D., Shuklina A. F., and Filin N. V., “Nonlinear inverse problems for some equations with fractional derivatives,” *Chelyab. Fiz. Mat. Zh.*, **8**, No. 2, 190–202 (2023).
29. Fedorov V. E., Plekhanova M. V., and Melekhina D. V., ‘Nonlinear inverse problems for equations with Dzhrbashyan–Nersesyan derivatives,’ *Fractal Fract.*, **7**, No. 6, 464 (2023).
30. Fedorov V. E., Plekhanova M. V., and Melekhina D. V., “On local unique solvability for a class of nonlinear identification problems,” *Axioms*, **12**, No. 11, 1013 (2023).
31. Dzhrbashyan M. M. and Nersesyan A. B., “Fractional derivatives and the Cauchy problem for differential equations of fractional order [in Russian],” *Izv. Akad. Nauk Armyan. SSR, Mat.*, **3**, No. 1, 3–28 (1968).

32. Fedorov V. E., Plekhanova M. V., and Izhberdeeva E. M., “Initial value problem for linear equations with the Dzhrbashyan–Nersesyan derivative in Banach spaces,” *Symmetry*, **13**, 1058 (2013).
33. Fedorov V. E., Plekhanova M. V., and Izhberdeeva E. M., “Analytic resolving families for equations with the Dzhrbashyan–Nersesyan derivative,” *Fractal Fract.*, **6**, 541 (2022).
34. Izhberdeeva E. M., “Compositions of fractional derivatives as the Dzhrbashyan–Nersesyan derivative,” *Chelyab. Fiz. Mat. Zh.*, **9**, No. 1, 35–49 (2024).
35. Bajlekova E. G., “Fractional Evolution Equations in Banach Spaces,” PhD Thesis., Eindhoven Univ. Technol., Eindhoven (2001).
36. Fedorov V. E. and Avilovich A. S., “A Cauchy type problem for a degenerate equation with the Riemann–Liouville derivative in the sectorial case,” *Sib. Math. J.*, **60**, No. 2, 359–372 (2019).
37. Fedorov V. E., Romanova E. A., and Debbouche A., “Analytic in a sector resolving families of operators for degenerate evolution fractional equations,” *J. Math. Sci.*, **228**, No. 4, 380–394 (2018).
38. Hessard B., Kazarinov N., and Wen Y., Theory and Applications of the Cycle Birth Bifurcation [in Russian], Mir, Moscow (1985).

Submitted September 18, 2024

Revised September 26, 2024

Accepted October 1, 2024

Vladimir E. Fedorov, Marina V. Plekhanova,
Angelina O. Sagimbaeva
Chelyabinsk State University,
Mathematical Analysis Department,
129 Kashirin Brothers Street, Chelyabinsk 454001, Russia
kar@csu.ru, mariner79@mail.ru, angsag@mail.ru

ON BERGMAN TYPE PROJECTIONS
IN NEW ANALYTIC SPACES IN TUBULAR
DOMAINS OVER SYMMETRIC CONES

R. F. Shamoyan and E. B. Tomashevskaya

Abstract: We provide new results on the Bergman type projections in products of tubular domains over symmetric cones extending some known classical assertions. Similar results with the same proof may be valid in the Siegel domains and bounded strongly pseudoconvex domains with smooth boundary. Our new Bergman projection theorems may have various interesting applications in function theory in tubular domains over symmetric cones.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-3-73-81

Keywords: analytic function, Bergman projection, tubular domain over symmetric cones.

1. Introduction

The goal of this paper is to provide new results on boundedness of Bergman type projections in tubular domains over symmetric cones and in products of such type domains. Note that for particular values of parameters our results are well-known. Our results on Bergman type projections may have various interesting applications in complex function theory of several variables namely in spaces of analytic functions in tubular domains over symmetric cones. We provide first basic notations and definitions of complex function theory in tubular domains over symmetric cones which are needed for this paper. The theory of analytic spaces in tubular domains over symmetric cones is an active research area (see, for example, [1–7] and references there).

Let $T_\Omega = V + i\Omega$ be the tube domain over an irreducible symmetric cone Ω in the complexification $V^\mathbb{C}$ of an n -dimensional Euclidean space V . $\mathcal{H}(T_\Omega)$ denotes the space of all holomorphic functions on T_Ω . Following the notation of [8] and [5] we denote the rank of the cone Ω by r and by Δ the determinant function on V .

Letting $V = \mathbb{R}^n$, we have as an example of a symmetric cone on \mathbb{R}^n the Lorentz cone Λ_n which is a rank 2 cone defined for $n \geq 3$ by

$$\Lambda_n = \{y \in \mathbb{R}^n : y_1^2 - \dots - y_n^2 > 0, y_1 > 0\}.$$

The determinant function in this case is given by the Lorentz form

$$\Delta(y) = y_1^2 - \dots - y_n^2.$$

(see for example [5])

For $\tau \in \mathbb{R}_+$ and the associated determinant function $\Delta(x)$ [5] we set

$$A_\tau^\infty(T_\Omega) = \{F \in \mathcal{H}(T_\Omega) : \|F\|_{A_\tau^\infty} = \sup_{x+iy \in T_\Omega} |F(x+iy)|\Delta^\tau(y) < \infty\} \quad (1)$$

It can be checked that this is a Banach space. For $1 \leq p, q < +\infty$ and $\nu \in \mathbb{R}$, and $\nu > -1$ we denote by $A_\nu^{p,q}(T_\Omega)$ the mixed-norm weighted Bergman space consisting of analytic functions f in T_Ω such that

$$\|F\|_{A_\nu^{p,q}} = \left(\int_{\Omega} \left(\int_V |F(x+iy)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \Delta^\nu(y) dy \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

This is a Banach space. Replacing above A by L we will get as usual the corresponding larger space of all measurable functions in tube over symmetric cone with the same quazinorm (see [1, 8]). It is known that the $A_\nu^{p,q}(T_\Omega)$ space is nontrivial if and only if $\nu > -1$ (see [5, 9]). When $p = q$ we write (see [5])

$$A_\nu^{p,q}(T_\Omega) = A_\nu^p(T_\Omega).$$

This is the classical weighted Bergman space with usual modification when $p = \infty$.

The (weighted) Bergman projection P_ν is the orthogonal projection from the Hilbert space $L_\nu^2(T_\Omega)$ onto its closed subspace $A_\nu^2(T_\Omega)$ and it is given by the following integral formula (see [5])

$$P_\nu f(z) = C_\nu \int_{T_\Omega} B_\nu(z, w) f(w) dV_\nu w, \quad (2)$$

where

$$B_\nu(z, w) = C_\nu \Delta^{\nu+\frac{n}{r}}((z-\bar{w})/i)$$

is the Bergman reproducing kernel for $A_\nu^2(T_\Omega)$ (see [5, 8]).

Here we used the notation

$$dV_\nu(w) = \Delta^{\nu-\frac{n}{r}}(v) dudv.$$

Below and here we use constantly the following notations $w = u + iv \in T_\Omega$ and also $z = x + iy \in T_\Omega$. Hence for any analytic function from $A_\nu^2(T_\Omega)$ the following integral formula is valid (see also [5]):

$$f(z) = C_\nu \int_{T_\Omega} B_\nu(z, w) f(w) dV_\nu w. \quad (3)$$

In this case sometimes below we say simply that the f function allows Bergman representation via Bergman kernel with ν index. Note that these assertions have direct copies in simpler cases of analytic function spaces in unit disk, polydisk, unit ball, upperhalfspace \mathbb{C}_+ and in spaces of harmonic functions in the unit ball or upperhalfspace of Euclidean space \mathbb{R}^n . These classical facts are well-known and can be found, for example, in [2, 5, 10] and in some items from references there. Above and throughout the paper we write \mathbb{C} (sometimes with indexes) to denote positive constants which might be different each time we see them (and even in a chain of inequalities), but are independent of the functions or variables being discussed.

2. Preliminaries on geometry of tubular domains over symmetric cones

In this section we will collect several very useful assertions from [1, 5, 8, 9] mainly concerning so-called *r-lattices* that will be used rather often in all proofs of our sharp embedding theorems below.

Let $T_\Omega \subset \mathbb{C}^n$ be a bounded tubular domains over symmetric cones in \mathbb{C}^n . We shall use the following notations:

- $\delta : T_\Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ will denote the determinant function from the boundary, that is $\delta(z) = \Delta(\operatorname{Im} z)$. Let $d\nu_t(Z) = (\delta(z))^t d\nu(z)$, $t > -1$;
- ν will be the Lebesgue measure on T_Ω ;
- $H(T_\Omega)$ will denote the space of holomorphic function on T_Ω , endowed with the topology of uniform convergence on compact subsets;
- $B : T_\Omega \times T_\Omega \rightarrow \mathbb{C}$ will be the Bergman kernel of T_Ω . Note that if B is kernel of type t , $t \in \mathbb{N}$, then B^s is kernel of type st , $s \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{N}$. This follows directly from definition. Note $B = B_{2n/r}$ (see [1, 5, 8, 9, 11, 12]);
- given $r \in (0, \infty)$ and $z_0 \in T_\Omega$, we shall denote by $B_{T_\Omega}(z_0, r)$ the Bergman ball.

See, for example, [1, 5, 8, 9, 11, 12], for definitions, basic properties and applications to geometric function theory of the Bergman distance and [1, 5, 8, 9, 11, 12]) for definitions and basic properties of the Bergman kernel. Let us now recall a number of vital results proved in T_Ω . The first two give information about the shape of Bergman balls.

Lemma 1 [1, 5, 8, 9, 11, 12]. *Let $T_\Omega \subset \mathbb{C}^n$ be a bounded tubular domains over symmetric cones, and $r \in (0, \infty)$. Then*

$$\nu(B_{T_\Omega}(\cdot, t)) \approx \delta^{2r/n}$$

Lemma 2 [1, 5, 8, 9, 11, 12]. *Let $T_\Omega \subset \mathbb{C}^n$ be a bounded tubular domains over symmetric cones. Then there is $C > 0$ such that*

$$\frac{C}{1-r}\delta(z_0) \leq \delta(z) \leq \frac{1-r}{C}\delta(z_0)$$

for all $r \in (0, \infty)$, $z_0 \in T_\Omega$ and $z \in B_{T_\Omega}(z_0, r)$.

DEFINITION 1. Let $T_\Omega \subset \mathbb{C}^n$ be a tubular domains over symmetric cones, and $r > 0$. An *r-lattice* in T_Ω is a sequence $a_k \subset T_\Omega$ such that $T_\Omega = \bigcup_k B_{T_\Omega}(a_k, r)$ and there exists $m > 0$ such that any point in T_Ω belongs to at most m balls of the form $B_{T_\Omega}(a_k, R)$, where $R = \frac{1}{2}(1+r)$. Note by Lemma 2,

$$\nu_\alpha(B_{T_\Omega}(a_k, R)) = \int_{B_{T_\Omega}(a_k, R)} \delta^\alpha(z) d\nu(z) = (\delta^\alpha(a_k))\nu(B_{T_\Omega}(a_k, R)), \quad \alpha > -1.$$

The existence of *r-lattice* intubular domains over symmetric cones is ensured by the following

Lemma 3 [1, 3–6, 8, 9, 11, 12]. Let $T_\Omega \subset \mathbb{C}^n$ be a bounded tubular domains over symmetric cones. Then for every $r \in (0, \infty)$ there exists an r -lattice in T_Ω , that is there exists $m \in \mathbb{N}$ and a sequence $a_k \subset T_\Omega$ of points such that

$$T_\Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_{T_\Omega}(a_k, r)$$

and no point of T_Ω belongs to more than m of the balls $B_{T_\Omega}(a_k, R)$, where $R = \frac{1}{2}(1+r)$.

We will call r -lattice sometimes the family $B_{T_\Omega}(a_k; r)$. Dealing with B Bergman kernel we always assume $|B(z; a_k)| \asymp |B(a_k; a_k)|$ for any $z \in B_{T_\Omega}(a_k; r)$, $r \in (0; \infty)$ (see [1, 5, 8, 9, 11, 12]). Let $m = (2n/r)l$, $l \in \mathbb{N}$. Then $|B_m(z; a_k)| \asymp |B_m(a_k; a_k)|$, $z \in B_{T_\Omega}(a_k; r)$, $r \in (0; \infty)$. This fact is crucial for embedding theorems in tubular domains over symmetric cones (see also [13]).

Lemma 4 (see [1, 3–6, 8, 9, 11, 12]). Let $T_\Omega \subset \mathbb{C}^n$ be a tubular domains over symmetric cones. Given $r \in (0; \infty)$, set $R = \frac{1}{2}(1+r) \in (0; \infty)$. Then there exists a $C_r > 0$ depending on r such that

$$\forall z_0 \in T_\Omega, \forall z \in B_{T_\Omega}(z_0, r), \quad \chi(z) \leq \frac{C_r}{\nu(B_{T_\Omega}(z_0, r))} \int_{B_{T_\Omega}} \chi \, d\nu$$

for every nonnegative plurisubharmonic function $\chi : T_\Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Lemma 5 (see [1, 3–6, 8, 9, 11, 12]). (1) Let $\lambda > \frac{n}{r} - 1$ be fixed. Then

$$\Delta(y + y') \geq \Delta(y) \forall y, y' \in \Omega, \quad |\Delta^{-\lambda}\left(\frac{x+iy}{i}\right)| \geq \Delta(y)^{-\lambda}; \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, y \in \Omega.$$

(2) Let α, β are real, then

$$I_{\alpha, \beta}(t) = \int_{\Omega} (\Delta^\alpha(y+t))(\Delta^\beta(y)) \, dy < \infty,$$

if $\beta > -1$, $\alpha + \beta < 1 - \frac{2n}{r}$, and

$$I_{\alpha, \beta}(t) = (c_{\alpha, \beta}) \Delta^{\alpha+\beta+\frac{n}{r}}(t).$$

Moreover

$$I_\alpha(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \Delta^{-\alpha}\left(\frac{x+iy}{i}\right) \right| dx < \infty,$$

if $\alpha > \frac{2n}{r} - 1$; and

$$I_\alpha(y) = (c_\alpha) \Delta^{\alpha+\frac{n}{r}}(y),$$

where $y \in \Omega$.

Lemma 6. For any analytic function from $A_\alpha^2(T_\Omega)$ the following integral formula is valid:

$$f(z) = \tilde{c}_\alpha \int_{T_\Omega} B_\alpha(z, w) f(w) d\nu_\alpha(w), \quad z \in T_\Omega. \quad (\star)$$

Let $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, $\frac{n}{r} \leq p_1$, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p} = 1$, $\frac{n}{r} < \gamma$. Let $f \in A_\gamma^{p,q}$, then (\star) with $\alpha > \frac{n}{r} - 1$ is valid (Bergman representation formula with α index is valid).

We now collect a few facts on the (possibly weighted) L^p -norms of the Bergman kernel and the normalized Bergman kernel. The first result is classical (see, for example, [1, 5, 8]).

Proposition 1 (Forelly–Rudin estimates). Let $T_\Omega \subset \mathbb{C}^n$ be a tubular domains over symmetric cones, and let $z_0 \in T_\Omega$ and $1 \leq p < \infty$. Then

$$\int_{T_\Omega} |B(\zeta, z_0)|^p \delta^\beta(\zeta) d\nu(\zeta) \leq C \delta^{\beta - 2(2n/r)(p-1)}(z_0), \quad -1 < \beta < (2n/r)(p-1).$$

The same result is valid for weighted Bergman kernel (see [11]).

We define new Banach mixed norm analytic Bergman-type spaces in $T_\Omega \times \dots \times T_\Omega$ in product of tubular domains over symmetric cones as follows. Let $m \geq 1$, $p_j \in (1; \infty)$; $\nu_j > \frac{n}{r} - 1$; α_j, \dots, m ,

$$\begin{aligned} A_{\vec{\nu}}^{\vec{p}} = & \left\{ f \in H(T_\Omega^m) = H(T_\Omega \times \dots \times T_\Omega) \right. \\ & = \left(\int_{T_\Omega} \dots \left(\int_{T_\Omega} |f(z_1, \dots, z_m)|^{p_1} \Delta^{\nu_1 - \frac{n}{r}}(y_1) dx_1 dy_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \right. \\ & \quad \left. \dots \Delta^{\nu_m - \frac{n}{r}}(y_m) dx_m dy_m \right)^{\frac{1}{p_m}} < \infty \left. \right\}; \end{aligned}$$

Replacing A by L as usual we get larger space of measurable functions with the same norms.

Note first for case of polydisk (when T_Ω is a unit disk) or even T_Ω is a unit ball in \mathbb{C}^n these analytic spaces are not new. They were introduced and studied in [14, 15]. Note also very similar spaces in \mathbb{R}^n were introduced and studied before by various authors. Our theorem for mentioned particular cases are not new. They can be seen in [14]: For $m = 1$ case our theorem is also known (see [3–5]).

Theorem 1. Let

$$T_{\vec{\beta}} f(\vec{z}) = \int_{T_\Omega^m} \frac{f(w_1, \dots, w_m) \prod_{j=1}^m \Delta^{\beta_j - \frac{n}{r}}(w_j) dv(w_j)}{\Delta^{\beta_1 + \frac{n}{r}}(\frac{z_1 - \bar{w}_1}{i}) \dots \Delta^{\beta_m + \frac{n}{r}}(\frac{z_m - \bar{w}_m}{i})},$$

$$dv(w) = dudv; \quad w = u + iv \in T_\Omega, \quad \vec{z} = (z_1, \dots, z_m) \in T_\Omega.$$

Let $\beta_j > \beta_0, j = 1, \dots, m$, for some fixed enough large β_0 . Then $T_{\vec{\beta}}$ operator maps $L_{\vec{\nu}}^{\vec{p}}(T_{\Omega}^m)$ into $A_{\vec{\nu}}^{\vec{p}}(T_{\Omega}^m)$, $p_j > 1; \nu_j > \frac{n}{r} - 1$, $j = 1, \dots, m$.

REMARK 1. For unit ball and unit disk this theorem can be seen in [14, 15]. We provide for simplisity our proof in the unit disk case since repetition of same arguments leads to the proof of Theorem 1. The proof use only Minkowski and Holder's inequality and Forelly–Rudin estimate (A) which is avialable in tubular domaines over symmetric cones $\tau > -1$, $\tau_1 > \tau + \frac{2n}{r}$

$$\int_{T_{\Omega}} \frac{\Delta^{\tau}(\operatorname{Im} w) dv(w)}{\Delta(\operatorname{Im}^{\tau_1}\left(\frac{w-z}{i}\right))} \leq c \Delta^{\tau-\tau_1+\frac{2n}{r}}(\operatorname{Im} z), \quad z \in T_{\Omega}. \quad (A)$$

REMARK 2. In the unit disk or for $m = 1$ this result is classical and well-known fact (Bergman projection theorem in tubular domain [10, 12]). The proof uses only Forelly–Rudin estimate from Lemma 1 and Holders and Minkowski inequalities and $m = 2$ and unit disk case is typical. We have in the unit disk $U = \{|z| < 1\}$, $m = 2$ case the following estimates.

We denote as usual by dm_2 the normalized Lebegues measure in the unit disk U . Put first

$$D_{\alpha_j}(\xi_j, z_j) = \frac{\alpha_j + 1}{\pi} \cdot \frac{(1 - |\xi_j|)^{\alpha_j}}{(1 - \overline{\xi_j} z_j)^{\alpha_j + 2}}, \quad j = 1, 2;$$

$$D_{\alpha}(z, \xi) = D_{\alpha_1}(z_1, \xi_1) \times D_{\alpha_2}(z_2, \xi_2);$$

$$\frac{1}{p_j} + \frac{1}{q_j} = 1, \quad j = 1, 2, \quad \chi(z_1, z_2) = (1 - |z_1|)^{\frac{\gamma}{p_1 q_1}} \cdot (1 - |z_2|)^{\frac{\gamma}{p_2 q_2}}, \\ z_j \in U, \quad \xi_j \in U, \quad j = 1, 2.$$

$$\begin{aligned} \|V_{\vec{\beta}} f(\cdot, z_2)\|_{A_{\alpha_1}^p} &= \left(\int_U |F(z_1, z_2)|^{p_1} (1 - |z_1|)^{\alpha_1} dm_2(z_1) \right)^{1/p_1} \\ &\leq C_{17} \left(\int_U \left(\int_U |D_{\beta_1}(z_1, \xi_1)| \cdot |D_{\beta_2}(z_2, \xi_2)| \cdot |f(\xi_1, \xi_2)| dm_2(\xi_1) dm_2(\xi_2) \right)^{p_1} \right. \\ &\quad \times (1 - |z_1|)^{\alpha_1} dm_2(z_1) \Big)^{1/p_1} \\ &\leq C_{18} \int_U |D_{\beta_2}(z_2, \xi_2)| \left(\int_U \left(\int_U |D_{\beta_1}(z_1, \xi_1)| \cdot |f(\xi_1, \xi_2)| dm_2(\xi_1) \right)^{p_1} \right. \\ &\quad \times (1 - |z_1|)^{\alpha_1} dm_2(z_1) \Big)^{1/p_1} dm_2(\xi_2) \\ &\leq C_{19} \int_U |D_{\beta_2}(z_2, \xi_2)| \left(\int_U \left(\int_U \frac{|D_{\beta_1}(z_1, \xi_1)| \cdot |f(\xi_1, \xi_2)|^{p_1} dm_1(\xi_1)}{|\chi^{p_1}(\xi_1, \xi_2)|} \right)^{p_1/q_1} \right. \\ &\quad \times \left(\int_U |D_{\beta_1}(z_1, \xi_1)| \cdot \chi^{p_1}(\xi_1, \xi_2) dm_2(\xi_1) \right)^{p_1/q_1} (1 - |z_1|)^{\alpha_1} dm_2(z_1) \Big)^{1/p_1} dm_2(\xi_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_{20} \int_U |D_{\beta_2}(z_2, \xi_2)| \\
&\times \left(\int_U \frac{|f(\xi_1, \xi_2)|^p}{\chi^{p_1}(\xi_1, \xi_2)} \int_U |D_{\beta_1}(z_1, \xi_1)| \chi^{p_1}(\xi_1, \xi_2) (1 - z_1)^{\alpha_1} dm_2(z_1) dm_2(\xi_2) \right)^{\frac{1}{p_1}} dm_2(\xi_2) \\
&\leq C_{21} \int_U |D_{\beta_2}(z_2, \xi_2)| \cdot \|f(\cdot, \xi_2)\|_{L_{\alpha_1}^{p_1}} dm_2(\xi_2).
\end{aligned}$$

Then we have that

$$\begin{aligned}
&\|V_{\vec{\beta}} f(\cdot, z_2)\|_{A_{\alpha_1, \alpha_2}^{p_1, p_2}} \\
&\leq C_{22} \left(\int_U |D_{\beta_2}(z_2, \xi_2)| \cdot \|f(\cdot, \xi_2)\|_{L_{\alpha_1}^{p_1}} dm_2(\xi_2) \right)^{p_2} (1 - |z_2|)^{\alpha_2} dm_2(z_2).
\end{aligned}$$

Using again Holders inequality with p_2 and Forelly–Rudin estimate and changing the order of integration we get what we need

$$\|V_{\vec{\beta}} f\|_{A_{\alpha_1, \alpha_2}^{p_1, p_2}}^{p_2} \leq C \|f\|_{L_{\alpha_1, \alpha_2}^{p_1, p_2}}^{p_2}.$$

We showed our theorem in case of two variables. The general case can be covered by ordinary induction. Theorem is proved.

The following theorem for $m = 1$ is well-knowns.

For any two n -tuples of real numbers $x = (x_1, \dots, x_n)$ and $y = (y_1, \dots, y_n)$ we consider integral operator

$$\begin{aligned}
(R_{x,y}g)(w) &= \Delta(\operatorname{Im} w)^{-m(\frac{2n}{r}) + \sum_{i=1}^m y_i} \int_{T_\Omega} \dots \int_{T_\Omega} g(z_1, \dots, z_m) \\
&\quad \times \prod_{j=1}^m \frac{(\Delta(\operatorname{Im} z_j))^{x_j}}{\Delta(\operatorname{Im}(\overline{\frac{z_j-w}{i}}))^{x_j+y_j}} dV(z_1) \dots dV(z_m)
\end{aligned}$$

for $g \in L^1(T_\Omega^m; dV_{x_1}, \dots, dV_{x_m})$; $w \in T_\Omega$, $x_j > -1$; $x_j + y_j > 0$; $j = 1, \dots, m$.

Theorem 2. Let $s_j > (-1)$ and $ms_j + 1 > m(\frac{2n}{r} - y_j) - (m-1)(\frac{2n}{r})$; $j = 1, \dots, m$. Then there is exist a constant $C > 0$ such that

$$\begin{aligned}
&\int_{T_\Omega} |R_{x,y}g(w)| \cdot \Delta(\operatorname{Im} w)^{(m-1)\frac{2n}{r} + \sum_{j=1}^m s_j} dV(w) \\
&\leq C \int_{T_\Omega} \dots \int_{T_\Omega} g(z_1, \dots, z_m) \cdot \prod_{j=1}^m (\Delta^{s_j}(\operatorname{Im}, z_j)) dV(z_j).
\end{aligned}$$

PROOF. We have that $\tau = (m-1)\frac{2n}{r} + \sum_{j=1}^m s_j$;

$$\int_{T_\Omega} |R_{x,y}g(w)| \Delta^\tau(\operatorname{Im} w) dV(w) \leq C \int_{T_\Omega} \dots \int_{T_\Omega} |g(z_1, \dots, z_m)| \cdot \prod_{j=1}^m (\Delta^{x_j}(\operatorname{Im}, z_j))$$

$$\times \left(\int_{T_\Omega} \frac{\Delta(\operatorname{Im} w)^{-\frac{2n}{r} + \sum_{j=1}^m (y_j + s_j)}}{\left| \prod_{j=1}^m \Delta^{x_j + y_j} (\operatorname{Im}(\frac{\bar{z}_j - w}{i})) \right|} dV(w) \right) dV(z_1) \dots dV(z_m);$$

By Holder's inequality we have

$$\int_{T_\Omega} \frac{\Delta^\tau(\operatorname{Im} w)}{\prod_{j=1}^m |\Delta^{\tau_1}(\operatorname{Im}(\frac{z_j - \bar{w}}{i}))|} dV(w) \leq C \left(\prod_{j=1}^m \int_{T_\Omega} \frac{\Delta^{\tau_2}(\operatorname{Im} w) dV(w)}{|\Delta^{\tau_3}(\operatorname{Im}(\frac{w - z_j}{i}))|} \right)^{1/m} = \mathcal{J},$$

where

$$\begin{aligned} \tau &= -\frac{2n}{r} + \sum_{j=1}^m (y_j + s_j), \quad \tau > -1, \quad \tau_1 = (x_j + y_j); \\ x_j + y_j &> 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad \tau_2 = -\frac{2n}{r} + my_j + ms_j, \quad \tau_3 = mx_j + my_j. \end{aligned}$$

Since

$$-\frac{2n}{r} + m(y_j + s_j) > (-1); \quad m(x_j + y_j) > \left(-\frac{2n}{r} + my_j + ms_j \right) + \frac{2n}{r}$$

for each j from 1 to m . By Forelly–Rudin estimate we have

$$\mathcal{J} \leq C \prod_{j=1}^m (\Delta^{s_j - x_j}(\operatorname{Im} z_j)).$$

From this we arrive at estimate we need. Theorem 2 is proved.

REMARK 3. This theorem is valid probably for all $p > 1$. Our Theorem 2 for $m = 1$ case can be seen in [1] and [3]. We note this theorem 2 is valid for all $p > 1$ in the ball (see for example [15, 14]).

REFERENCES

1. Sehba B., “Bergman-type operators in tubular domains over symmetric cones,” Proc. Edinb. Math. Soc., II Ser., **52**, No. 2, 529–544 (2009).
2. Duren P. and Schuster A., Bergman Spaces, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2004) (Math. Surv. Monogr.; vol. 100).
3. Sehba B., “Operators in some analytic function spaces and their dyadic counterparts,” PhD Thes., Univ. Glasgow, Glasgow (2009).
4. Sehba B., “Hankel operators on Bergman spaces of tube domains over symmetric cones,” Integral Equations Oper. Theory, **62**, 233–245 (2008).
5. Bekolle D., Bonami A., Garrigos G., Nana C., Peloso M., and Ricci F., “Lecture notes on Bergman projectors in tube domain over cones, an analytic and geometric viewpoint,” IMHOTEP, J. Afr. Math. Pures Appl., **5** (2004).
6. Sehba B. F. and Nana C., “Carleson embeddings and two operators on Bergman spaces of tube domains over symmetric cones,” Integral Equations Oper. Theory, **83**, 151–178 (2015).
7. Arsenovic M. and Shamoyan R., “Embedding relations and boundedness of the Bergman projection in tube domains over symmetric cones,” Filomat, **25**, No. 4, 109–126 (2011).
8. Faraut J. and Koranyi A., Analysis on Symmetric Cones, Oxford Univ. Press, New York (1994).

-
- 9. Debertol D., “Besov spaces and boundedness of weighted Bergman projections over symmetric tube domains,” *Publ. Mat., Barc.*, **49**, No. 1, 21–72 (2005).
 - 10. Zhu K., *Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball*, Springer, New York (2005).
 - 11. Shamoyan R. F. and Mihić O. R., “Embedding theorems for weighted anisotropic spaces of holomorphic functions in tubular domains,” *ROMAI J.*, **13**, No. 1, 93–115 (2017).
 - 12. Shamoyan R. F. and Mihić O. R., “On some new sharp estimates in analytic Herz-type function spaces in tubular domains over symmetric cones,” *Czech. Math. J.*, **68**, No. 4, 1033–1050 (2018).
 - 13. Shamoyan R. F. and Kurilenko S., “On a new embedding theorem in analytic Bergman type spaces in bounded strictly pseudoconvex domains of an n -dimensional complex space,” *J. Sib. Fed. Univ., Math. Phys.*, **7**, No. 3, 383–388 (2014).
 - 14. Yaroslavceva O., “Bounded projections and bounded linear functionals in mixed norm spaces of analytic functions in the unit polydisk [in Russian],” *Diss. ... Kand. Fiz.-Mat. Nauk*, Bryansk (1999).
 - 15. Mihić O. R. and Shamoyan R., “On some new analytic function spaces in polyball,” *Palest. J. Math.*, **4**, No. 1, 105–107 (2015).

Submitted August 6, 2024

Revised September 18, 2024

Accepted October 1, 2024

Romy F. Shamoyan, Elena B. Tomashevskaya
Bryansk State Technical University,
43 Bezhitskaya Street, Bryansk 241050, Russia
rsham@mail.ru, tomele@mail.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СТРОЕНИЯ
И ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СРЕДЫ
НА ХАРАКТЕР РАСПРОСТРАНЕНИЯ
СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН ОТ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

Х. Х. Имомназаров,
А. А. Михайлов, И. К. Искандаров

Аннотация. Распространение волн в упругих пористых средах представляет интерес для различных областей науки и техники. Теория этого явления широко изучалась в механике грунтов, сейсмологии, акустике, сейсмотехнике, океанотехнике, геофизике и многих других дисциплинах. В настоящей работе рассматривается решение прямой динамической задачи теории упругости, которая моделирует формирование и распространение сейсмических волн от землетрясений. Поставленная задача записывается в виде динамических уравнений теории упругости в терминах компонент скоростей смещений и напряжений для двумерной декартовой системы координат. В настоящей статье рассматривается эффективный алгоритм решения данной прямой динамической задачи сейсмики. Численное решение задачи основано на методе комплексирования аналитического преобразования Лагерра и конечно-разностного метода. Представлены численные результаты моделирования сейсмических волновых полей для реалистичной модели среды Байкальской рифтовой зоны.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-3-82-92

Ключевые слова: упругая среда, сейсмические волны, землетрясения, прямая задача, преобразование Лагерра, разностная схема.

1. Введение

Регистрируемые сейсмические волны характеризуют не только очаг землетрясения, но и среду, через которую они распространяются, поэтому они являются основным носителем информации в сейсмологии. Самыми разрушительными при землетрясениях являются поверхностные волны, так как они имеют низкую частоту, большую амплитуду и внушительное время действия. Большую разрушительную силу имеют также прямые продольные сейсмические волны, возникающие в результате сдвига тектонических плит земной коры на больших по площади пространственных участках. В результате такого типа

Работы Имомназарова Х. Х. и Искандрова И. К. выполнены при поддержке Хабаровского отделения регионального научно-образовательного математического центра «Дальневосточный центр математических исследований» (дополнительное соглашение с Минобрнауки России от 28 февраля 2024 года № 075-02-2024-1432).

очагов землетрясений генерируется протяженная плоская продольная волна с большой амплитудой. На амплитуду этих волн влияет не только геологическая структура в очаге землетрясения, но также структура и физические свойства вышележащих слоев среды.

Математические методы, основанные на распространении сейсмических волн в акустической или идеально упругой среде, успешно применяются к различным геофизическим задачам для идентификации геологических структур.

В данной работе для моделирования процесса распространения сейсмических волн в упругой среде численно решается прямая динамическая задача, которая записывается в виде гиперболической системы в терминах скоростей смещений и тензора напряжений. Для численного решения поставленной задачи используется метод комплексирования аналитического преобразования Лагерра по времени и конечно-разностного метода по пространству. Данный метод решения динамических задач теории упругости был впервые рассмотрен в работах [1, 2], а затем развит и для задач вязкоупругости [3, 4]. Предлагаемый метод решения можно рассматривать как аналог известного спектрального метода на основе Фурье-преобразования, только вместо частоты мы имеем параметр t — степень полиномов Лагерра. Однако в отличие от Фурье применение интегрального преобразования Лагерра по времени позволяет свести исходную задачу к решению системы уравнений, в которой параметр разделения присутствует только в правой части уравнений и имеет рекуррентную зависимость. В отличие от конечно-разностного в спектрально-разностном методе с помощью аналитического преобразования можно свести исходную задачу к решению системы дифференциальных уравнений, в которой имеются производные только по пространственным координатам. Это позволяет применить известные устойчивые разностные схемы для последующего решения подобных систем. В работах [2, 4] рассмотрены отличительные особенности данного метода от принятых подходов и обсуждаются преимущества применения преобразования Лагерра.

2. Постановка задачи

Распространение сейсмических волн в упругой среде записывается известной системой уравнений первого порядка теории упругости через взаимосвязь компонент вектора скорости смещений и компонент тензора напряжений в декартовой системе координат (x_1, x_2) :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + F_i f(t), \quad t > 0, \quad -\infty < x_1 < \infty, \quad x_2 > 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) + \lambda \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{u} + \delta_{ik} F_i f(t), \quad t > 0, \quad -\infty < x_1 < \infty, \quad x_2 > 0. \quad (2)$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера, $\lambda(x_1, x_2)$, $\mu(x_1, x_2)$ — упругие параметры среды, $\rho(x_1, x_2)$ — плотность среды, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ — вектор скорости смещений, σ_{ij} —

компоненты тензора напряжений, $\mathbf{F}(x_1, x_2) = F_1 \mathbf{e}_x + F_2 \mathbf{e}_z$ описывает пространственное распределение источника, $f(t)$ — заданный временной сигнал в источнике. Для точечного источника типа центр давления: $F_i = \delta(x - x_0)\delta(z - z_0)$, (x_0, z_0) — координата источника.

Задача решается при нулевых начальных данных:

$$u_i|_{t=0} = \sigma_{ij}|_{t=0} = 0 \quad -\infty < x_1 < \infty, \quad x_2 > 0, \quad (3)$$

и граничных условиях на свободной поверхности $x_2 = 0$:

$$\sigma_{12}|_{x_2=0} = \sigma_{22}|_{x_2=0} = 0, \quad t > 0, \quad -\infty < x_1 < \infty. \quad (4)$$

Исследование вопросов корректности начально-краевой задачи (1)–(4) можно найти в [5–7] и указанной там литературе. Предполагаем, что функции u_1, u_2, σ_{ij} обладают достаточной гладкостью для применения последующих преобразований.

3. Алгоритм решения

Для решения поставленной задачи (1)–(4) используем интегральное преобразование Лагерра по времени вида [1–4]

$$\overrightarrow{W}_m(x_1, x_2) = \int_0^\infty \overrightarrow{W}(x_1, x_2, t)(ht)^{-\frac{\alpha}{2}} l_m^\alpha(ht) d(ht) \quad (5)$$

с формулой обращения

$$\overrightarrow{W}(x_1, x_2, t) = (ht)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{(m+\alpha)!} \overrightarrow{W}_m(x_1, x_2) l_m^\alpha(ht), \quad (6)$$

где $l_m^\alpha(ht)$ — ортогональные функции Лагерра.

Для удовлетворения начальных условий (3) необходимо и достаточно положить $\alpha \geq 1$. Кроме того, введен параметр сдвига $h > 0$, смысл и эффективность применения которого подробно обсуждается в работах [2–4].

После применения интегрального преобразования Лагерра по времени исходная начально-краевая задача (1)–(4) сводится к решению системы дифференциальных уравнений только по пространственным координатам (x_1, x_2) :

$$\frac{h}{2} u_i^m + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ik}^m}{\partial x_k} = -h \sum_{n=0}^{m-1} u_i^n, \quad (7)$$

$$\frac{h}{2} \sigma_{ik}^m + \mu \left(\frac{\partial u_k^m}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i^m}{\partial x_k} \right) + \lambda \delta_{ik} \operatorname{div} \bar{u}^m = \delta_{ik} F_i f^m - h \sum_{n=0}^{m-1} \sigma_{ik}^n, \quad (8)$$

где

$$f^m = \int_0^\infty f(t)(ht)^{-\frac{\alpha}{2}} l_m^\alpha(ht) d(t).$$

Для дальнейшего решения задачи используется конечно-разностная аппроксимация производных на сдвинутых сетках [8] с четвертым порядком точности. Определим искомые компоненты вектора решения в следующих узлах сеток:

$$\begin{aligned} u_1(m) &\in \omega x_1^i \times \omega x_2^j, \quad u_2(m) \in \omega x_1^{i+1/2} \times \omega x_2^{j+1/2}, \\ \sigma_{11}(m), \sigma_{22}(m) &\in \omega x_1^{i+1/2} \times \omega x_2^j, \quad \sigma_{12}(m) \in \omega x_1^i \times \omega x_2^{j+1/2}. \end{aligned}$$

В результате конечно-разностной аппроксимации задачи (7), (8) получим систему линейных алгебраических уравнений. Представим искомый вектор решения \mathbf{W} в следующем виде:

$$\mathbf{W}(m) = (\mathbf{V}_0(m), \mathbf{V}_1(m), \dots, \mathbf{V}_{K+N}(m))^T,$$

$$\mathbf{V}_{i+j} = (u_1^{i,j}, u_2^{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}, \sigma_{11}^{i+\frac{1}{2}, j}, \sigma_{22}^{i+\frac{1}{2}, j}, \sigma_{12}^{i, j+\frac{1}{2}})^T.$$

Тогда полученная в результате преобразований система линейных алгебраических уравнений в векторной форме может быть записана так:

$$\left(A_\Delta + \frac{h}{2} E \right) \mathbf{W}(m) = \mathbf{F}_\Delta(m-1).$$

На главной диагонали матрицы решаемой системы уравнений специально располагаются компоненты, входящие в уравнения системы как слагаемые, имеющие в качестве сомножителя параметр h (параметр преобразования по Лагерру). За счет выбора значения параметра h можно существенно улучшать обусловленность матрицы системы. Для решения данной системы линейных алгебраических уравнений используется итерационный метод сопряженных градиентов [9, 10]. Преимуществом этого метода является быстрая сходимость к искомому решению при условии хорошей обусловленности матрицы системы. Полученная в результате преобразования Лагерра матрица системы обладает этим свойством за счет введенного параметра сдвига h , специально расположенного на главной диагонали. Выбор значения параметра h дает возможность существенно улучшать обусловленность матрицы системы. Решив систему линейных алгебраических уравнений, можно определить спектральные значения для всех компонент волнового поля $\tilde{W}(m)$. Затем, воспользовавшись формулами обращения преобразования Лагерра (6), получим решение исходной задачи (1)–(4).

4. Численное моделирование

Для численного моделирования распространения сейсмических волн, возникающих в процессе землетрясения, были заданы две модели среды, описывающие предполагаемое строение байкальской рифтовой зоны [11]. Данная географическая область характеризуется высокой сейсмической активностью. Задаваемые для расчетов модели среды изображены на рис. 1 и рис. 2. На изображенных моделях, можно увидеть небольшие структурные различия в строении среды.

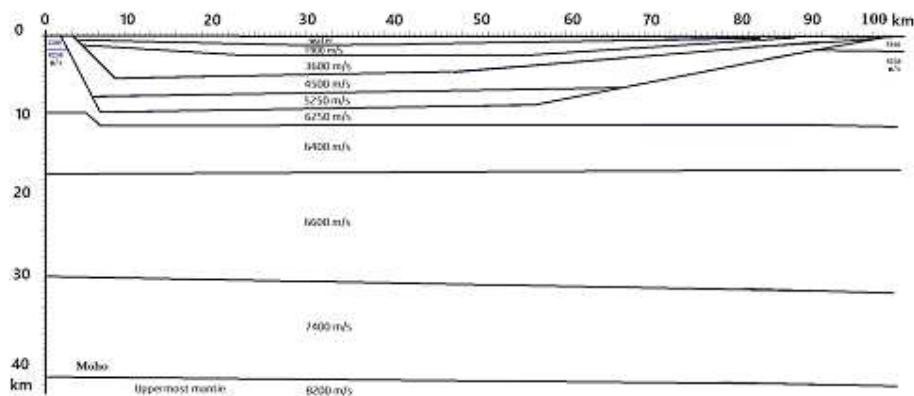


Рис 1. Модель среды № 1.

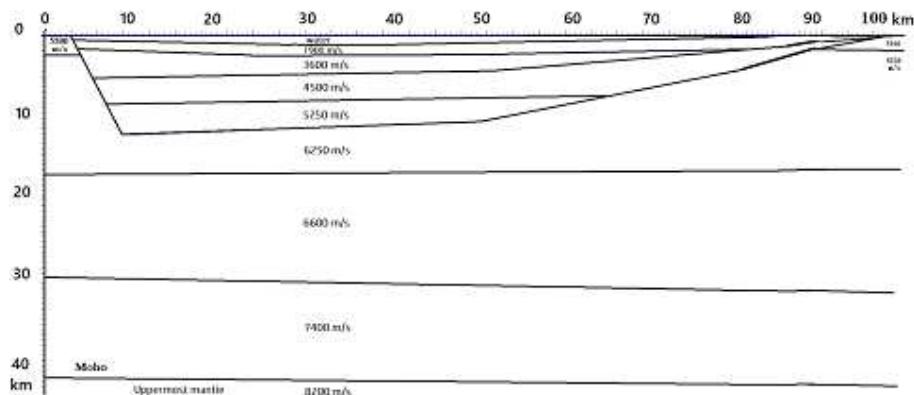


Рис 2. Модель среды № 2.

На представленных рисунках изображены границы слоев и подписаны значения скоростей продольных волн v_P в этих слоях. Значения скоростей поперечных волн задавались по формуле $v_S = v_P / \sqrt{3}$. Плотность среды в слоях рассчитывалась по известной формуле Гарднера $\rho = 1.74 * v_P^{0.25}$. Физические характеристики для водного слоя — скорость продольной волны $v_P = 1480 \text{ м/сек}$, плотность $\rho = 1.0 \text{ г/см}^3$.

Как видно из представленной на рисунках модели данная среда имеет сложное геологическое строение. Полагаем, что в результате сдвига тектонических плит на границе земной коры и мантии генерируется плоская продольная волна, параллельная этой границе.

Генерация плоской продольной волны, образующаяся в процессе землетрясения, задавалась с помощью определения пространственного распределения источника в исходных уравнениях системы (2) в виде суперпозиции точечных

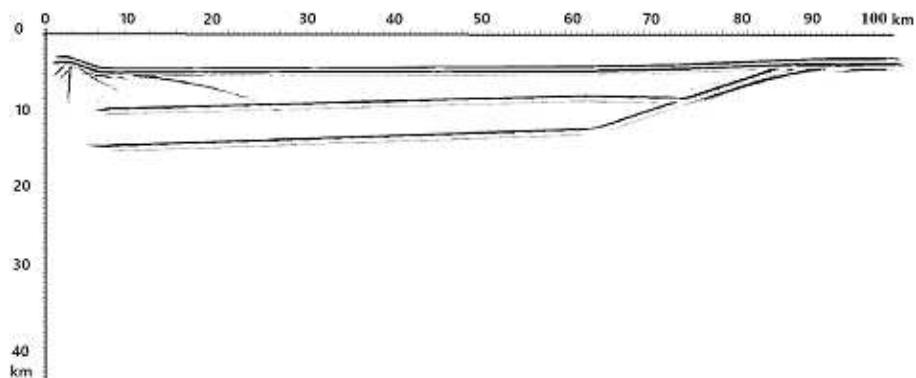


Рис 3. Мгновенный снимок волнового поля u_z — компоненты в момент времени $T = 6$ с для модели среды № 1.

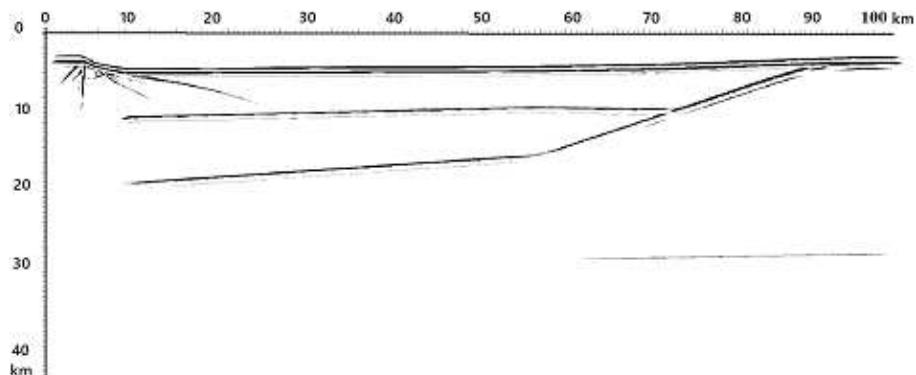


Рис 4. Мгновенный снимок волнового поля u_z — компоненты в момент времени $T = 6$ с для модели среды № 2.

источников, располагающихся на одной горизонтальной линии, в виде функции

$$F(x, z) = \delta(z - z_0) \sum_{k=1}^N \delta(x - x_k),$$

где N — количество узлов сетки по координате x , а z_0 — глубина формирования плоской волны. Значение глубины генерации плоской волны для численных расчетов волновых полей было задано равным 45 км. Временной сигнал в источнике задавался в виде импульса Пузырева с частотой $f_0 = 8$ Гц.

На мгновенных снимках волнового поля, представленных на рис. 3–6, изображены мгновенные снимки волнового поля для u_z -компоненты скорости смещений в моменты времени $T = 6$ и $T = 10$ с. Видно, что при распространении сейсмической волны, сгенерированной в эпицентре землетрясения, на границах раздела слоев формируются различные типы отраженных волн.

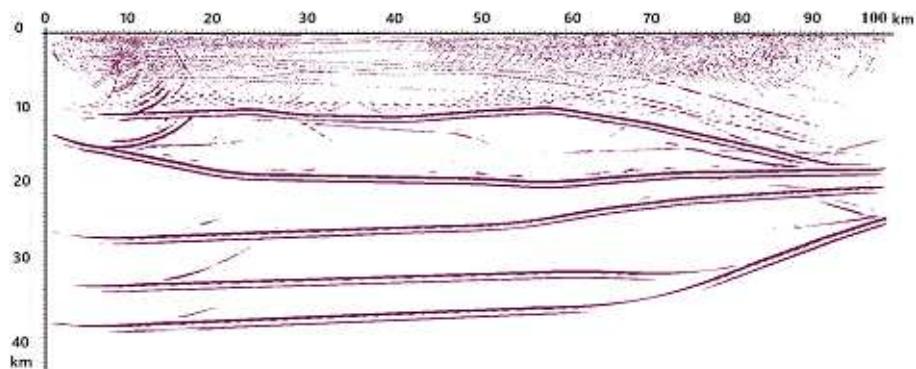


Рис 5. Мгновенный снимок волнового поля u_z — компоненты в момент времени $T = 10$ с для модели среды № 1.

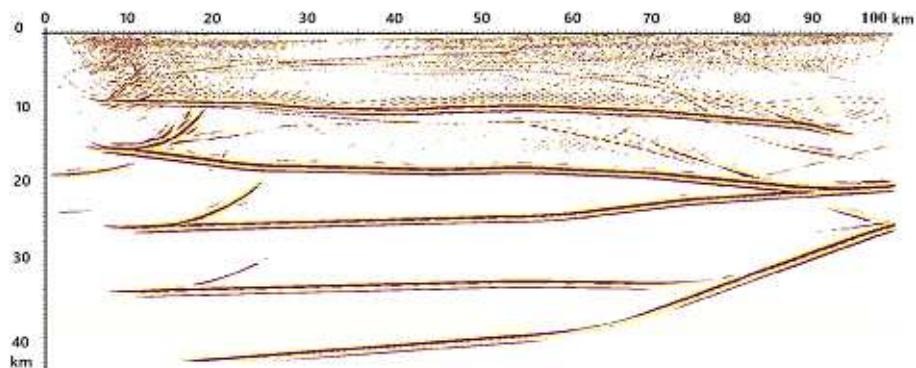


Рис 6. Мгновенный снимок волнового поля u_z — компоненты в момент времени $T = 10$ с для модели среды № 2.

На рис. 3 и рис. 4 изображены мгновенные снимки волнового поля u_z — компоненты в момент времени падения прямой продольной волны на свободную поверхность в моделях среды № 1 и № 2. Из рассмотрения волнового поля видно различие формирования волновых фронтов в моделях № 1 и № 2 в зависимости от геометрии границ слоев. Общая интерференционная волновая картина складывается в зависимости от геометрии этих границ и толщины слоев по сравнению с пространственной длиной волны.

На рис. 5 и рис. 6 изображены мгновенные снимки u_z — компоненты волнового поля для моделей среды № 1 и № 2 соответственно в момент времени $T = 10$ с. На представленных снимках видно образование сложной интерференционной картины вследствие отражения различных сейсмических волн от свободной поверхности и границ слоев среды. Из рассмотрения этих снимков волнового поля видно, что даже небольшое различие в строении моделей среды № 1 и № 2 приводит к изменению областей фокусировки энергии сейсмических

волн на различных участках среды.

5. Заключение

Результаты численных расчетов показывают эффективность используемого алгоритма для решения поставленной задачи моделирования распространения сейсмических волн в сложнопостроенных неоднородных средах. Анализ полученных расчетов визуальной картины волнового поля в результате распространения сейсмических волн в таких средах показывает возможность фокусировки энергии сейсмических колебаний на определенных участках среды в области происходящего землетрясения, что приводит к значительному увеличению амплитуды данных колебаний. Этот эффект, как видно из представленных результатов моделирования, зависит от строения среды и частоты распространяющихся в ней колебаний. Результаты моделирования возникающей волновой картины в зависимости от частоты сейсмических колебаний приводятся в работе [12]. Этот факт следует учитывать при строительстве технических сооружений на поверхности, а также внутри среды и производить подобного рода численное моделирование. В дальнейших исследованиях предполагается изучить эффект возникновения резонанса собственных колебаний в данных сооружениях и внешних сейсмических колебаний от землетрясений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mikhailenko B. G. Spectral Laguerre method for the approximate solution of time dependent problems // Appl. Math. Let. 1999. N 12. P. 105–110.
2. Konyukh G. V., Mikhailenko B. G., Mikhailov A. A. Application of the integral Laguerre transforms for forward seismic modeling // J. Comput. Acoustics. 2001. V 9, N 4. P. 1530–1541.
3. Mikhailenko B. G., Mikhailov A. A., Reshetova G. V. Numerical modeling of transient seismic fields in viscoelastic media based on the Laguerre spectral method // Pure Appl. Geophys. 2003. N 160. P. 1207–1224.
4. Mikhailenko B. G., Mikhailov A. A., Reshetova G. V. Numerical viscoelastic modeling by the spectral Laguerre method // Geophysical Prospecting. 2003. N 51. P. 37–48.
5. Годунов С. К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004.
7. Коновалов А. Н., Попов Ю. П. Оптимальные явно разрешимые дискретные модели с контролируемым дисбалансом полной механической энергии для динамических задач линейной теории упругости // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 5. С. 1092–1099.
8. Levander A. R. Fourth-order finite-difference P-SV seismograms // Geophysics. 1988. V. 53. P. 1425–1436.
9. Saad Y., Van der Vorst H. A. Iterative solution of linear systems in the 20th century // J. Comput. Appl. Math. 2000. N 123. P. 1–33.
10. Sonneveld P. CGS, a fast Lanczos-type solver for nonsymmetric linear system // SIAM J. Sci. Statist. Computing. 1989. N 10. P. 36–52.
11. Nielsen C., Thybo H. Lower crustal intrusions beneath the southern Baikal Rift Zone: Evidens from full-waveform modeling of wide-angle seismic data // Tectonophysics. 2009. V. 470, N 3. P. 298–318.
12. Mikhailov A., Imomnazarov Kh., Iskandarov I., Omonov A. Modeling then seismic waves

propagation while earthquakes // AIP Conf. Proc. 2024. V. 3147, N 1. 030008.

Поступила в редакцию 15 июня 2024 г.

После доработки 24 июля 2024 г.

Принята к публикации 1 октября 2024 г.

Имомназаров Холматжон Худайназарович

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,

пр. Академика Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

imom@omzg.sscce.ru

Михайлов Александр Анатольевич

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,

пр. Академика Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

alex_mikh@omzg.sscce.ru

Искандаров Илхам Кучкарович

Тихоокеанский государственный университет,

ул. Тихоокеанская, 136, Хабаровск 680035

iskandarovilkh@yandex.ru

MODELING THE INFLUENCE OF STRUCTURE
AND PHYSICAL PROPERTIES OF A MEDIUM
ON THE NATURE OF PROPAGATION OF
SEISMIC WAVES FROM EARTHQUAKES

**Kh. Kh. Imomnazarov,
A. A. Mikhailov, and K. Iskandarov**

Abstract: A direct dynamic problem of the theory of elasticity is considered, which models the formation of seismic wave fields from earthquakes that occur during tectonic processes in the lower layers of Earth's crust. The numerical solution to the stated problem is based on the method of complexing the analytical Laguerre transform and the finite difference method. A series of numerical calculations for a test model of media has been carried out.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-3-82-92

Keywords: elastic medium, longitudinal wave, earthquakes, direct problem, Laguerre transform, difference scheme.

REFERENCES

1. Mikhailenko B. G., “Spectral Laguerre method for the approximate solution of time dependent problems,” *Appl. Math. Lett.*, No. 12, 105–110 (1999).
2. Konyukh G. V., Mikhailenko B. G., and Mikhailov A. A., “Application of the integral Laguerre transforms for forward seismic modeling,” *J. Comput. Acoust.*, **9**, No. 4, 1523–1541 (2001).
3. Mikhailenko B. G., Mikhailov A. A., and Reshetova G. V., “Numerical modeling of transient seismic fields in viscoelastic media based on the Laguerre spectral method,” *Pure Appl. Geophys.*, No. 160, 1207–1224 (2003).
4. Mikhailenko B. G., Mikhailov A. A., and Reshetova G. V., “Numerical viscoelastic modeling by the spectral Laguerre method,” *Geophys. Prospect.*, No. 51, 37–48 (2003).
5. Godunov S. K., Equations of Mathematical Physics [in Russian], Nauka, Moscow (1971).
6. Tikhonov A. N. and Samarsky A. A., Equations of Mathematical Physics [in Russian], Nauka, Moscow (2004).
7. Konovalov A. N. and Popov Yu. P., “Optimal explicitly solvable discrete models with controlled imbalance of total mechanical energy for dynamic problems of linear theory of elasticity,” *Sib. Math. J.*, **56**, No. 5, 1092–1099 (2015).
8. Levander A. R., “Fourth-order finite-difference P-SV seismograms,” *Geophys.*, **53**, 1425–1436 (1988).
9. Saad Y. and Van der Vorst H. A., “Iterative solution of linear systems in the 20th century,” *J. Comput. Appl. Math.*, No. 123, 1–33 (2000).
10. Sonneveld P., “CGS, a fast Lanczos-type solver for nonsymmetric linear system,” *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, No. 10, 36–52 (1989).
11. Nielsen C. and Thybo H., “Lower crustal intrusions beneath the southern Baikal Rift Zone: Evidence from full-waveform modeling of wide-angle seismic data,” *Tectonophys.*, **470**, No. 3, 298–318 (2009).

-
12. *Mikhailov A., Imomnazarov Kh., Iskandarov I., and Omonov A.*, “Modeling the seismic waves propagation while earthquakes,” AIP Conf. Proc., **3147**, No. 1, 030008 (2024).

Submitted June 15, 2024

Revised July 24, 2024

Accepted October 1, 2024

Kholmatzhon Kh. Imomnazarov, Aleksandr A. Mikhailov
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Physics,
6 Lavrentiev Avenue, Novosibirsk 630090, Russia
imom@omzg.sscc.ru, alex_mikh@omzg.sscc.ru

Ilkham K. Iskandarov
Pacific State University,
136 Tikhookeanskaya Street, Khabarovsk 680035, Russia
iskandarovilkham@mail.ru

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О Т-ОБРАЗНОМ
СОПРЯЖЕНИИ ДВУХ ТОНКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ
ТИМОШЕНКО В ДВУМЕРНОМ УПРУГОМ ТЕЛЕ

Т. С. Попова

Аннотация. Разработан алгоритм численного решения задачи о равновесии двумерного упругого тела, содержащего два тонких упругих включения. Включения моделируются в рамках теории балок Тимошенко и пересекаются под прямым углом во внутренней точке одного из них, образуя Т-образную конструкцию в упругом теле. Одно из включений отслаивается от упругой матрицы, образуя трещину. На берегах трещины как на части границы области задаются граничные условия вида неравенств. Наличие данного вида краевых условий приводит к нелинейности задачи и постановке в виде вариационного неравенства. Для разработки алгоритма численного решения поставленной задачи формулируется приближенная задача о поиске седловой точки лагранжиана. Доказана сходимость по прямой переменной решений приближенной задачи к решению исходной задачи. Построен итерационный алгоритм типа Удзавы и показана его сходимость. Приведены примеры численной реализации

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-3-93-120

Ключевые слова: вариационное неравенство, включение Тимошенко, тонкое включение, трещина, условия непроникания, нелинейные граничные условия, задача сопряжения, алгоритм Удзавы, метод конечных элементов.

1. Введение

Задачи сопряжения составляют отдельный класс краевых задач в математическом моделировании и имеют широкий спектр применений. Рассматриваемая в данной работе задача относится к области изучения деформирования упругих тел, содержащих тонкие включения. В литературе известно множество результатов теоретического характера и численный анализ для задач о равновесии упругих и неупругих тел с одиночными тонкими включениями. При этом упругие включения могут моделироваться в рамках теории тонких балок Тимошенко [1–3] или Бернулли — Эйлера [4–6]. Модели тонких жестких включений предполагают иной подход, а именно ограничения на структуру функций перемещений точек включения: данные функции должны иметь вид аффинных

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-00469), <https://rscf.ru/project/23-21-00469/>.

непрерывных функций [5, 7]. Причем, как показано в работе [5], задача о тонком жестком включении может быть рассмотрена как предельная для семейства задач о тонком упругом включении при стремлении параметра ее жесткости к бесконечности. В опубликованных позднее работах рассмотрены также модели так называемых полужестких включений, характеризующиеся анизотропными свойствами, т. е. в направлении одной из осей перемещения включения соответствуют перемещениям упругой балки, а в ортогональном направлении — перемещениям жесткого включения [8]. В статьях [9–12] приведены общая иерархия моделей тонких включений в двумерном упругом теле и асимптотические модели включений, приводящие к их различным модификациям, включая трещины как один из предельных случаев. Отметим также результаты для различных моделей тонких включений в вязкоупругих и термоупругих двумерных телах [13–15], а также криволинейных включений [16]. Модели, рассмотренные в приведенных работах, предполагают возможное отслоение включения от окружающей упругой матрицы с образованием трещины. Формулировки задач содержат выписанные на берегах трещины граничные условия типа неравенств, которые интерпретируются как взаимное непроникание точек противоположных берегов. Нелинейность вводимых краевых условий приводит к постановке задач в виде вариационных неравенств. Дальнейшее исследование вариационных неравенств позволяет получить результаты о разрешимости задач, различных свойствах решений и вывести эквивалентную дифференциальную постановку. Для численного решения данных задач возможно использование метода декомпозиции области и построение алгоритма типа Удзавы [17–20]. Для данного типа моделей получены также результаты в случае сопряжения двух тонких включений в концевых точках [21–24]. Дифференциальная постановка этих задач содержит условия сопряжения в общей точке включений. Вид этих условий зависит не только от типа включений, но и от типа сопряжения: контакт отдельных включений или их соединение с различной степенью повреждения. Имеются также работы [25–27], посвященные исследованию сопряжений, в которых контакт или соединение включений происходит во внутренней точке одного из них. При этом сопряжение приобретает Т-образную геометрическую структуру. В этом случае модель имеет более сложный вид и дифференциальная постановка должна учитывать большую систему условий сопряжения. Отметим также современные подходы в моделировании различного типа соединений и сопряжений, включая односторонние ограничения на части границы, в работах [28, 29].

В статье [27] рассмотрена задача о Т-образном сопряжении двух тонких включений Тимошенко, доказана однозначная разрешимость задачи и получена полная система уравнений и краевых условий, выполненных в области с

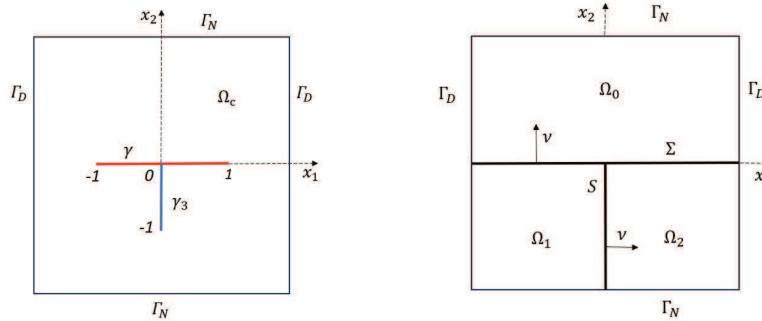


Рис. 1. Т-образное сопряжение тонких включений в упругом теле.

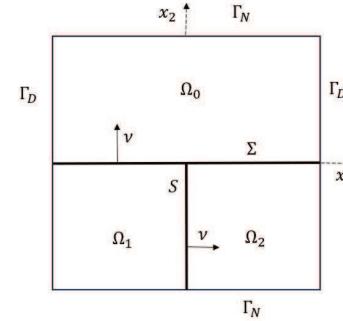


Рис. 2. Разбиение Ω_c на подобласти $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$.

разрезом и на кривых, задающих форму включений. Целью настоящей работы является разработка алгоритма численного решения данной задачи. Наличие граничных условий типа неравенств и формулировка задачи в форме вариационного неравенства обуславливает применение метода декомпозиции области и построение алгоритма типа Удзавы. В работе исследуются вопросы сходимости для приближенной задачи и итерационного алгоритма.

2. Постановка задачи

В плоскости Ox_1x_2 рассмотрим квадратную область $\Omega = (-2, 2) \times (-2, 2)$ с границей Γ , при этом $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$, где $\Gamma_D = \{\pm 2\} \times (-2, 2)$, $\Gamma_N = (-2, 2) \times \{\pm 2\}$, черта сверху означает замыкание множества. Единичный вектор внешней нормали к Γ обозначим через n . В области Ω рассмотрим прямолинейные пересекающиеся линии γ и γ_3 , где $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{(0; 0)\}$, $\gamma_1 = (-1, 0) \times \{0\}$, $\gamma_2 = (0, 1) \times \{0\}$, $\gamma_3 = \{0\} \times (-1, 0)$. Задачу будем рассматривать в области $\Omega_c = \Omega \setminus \left(\bigcup_{I=1}^3 \bar{\gamma}_I \right)$ (рис. 1).

Область Ω_c задает форму двумерного тела из упругого материала, линии γ и γ_3 соответствуют двум сопрягающимся включениям. Поскольку точка сопряжения является внутренней для включения γ , постановка задачи включает отдельные части γ_1 и γ_2 для этого включения. Тело закреплено по краю вдоль части границы Γ_D и испытывает внешние нагрузки на Γ_N .

Введем также обозначения для линий $\Sigma = (-2, 2) \times \{0\}$ и $S = \{0\} \times (-2, 0)$, разбивающих область Ω_c на подобласти Ω_I , $I = 0, 1, 2$. Заметим, что $\gamma \subset \Sigma$, $\gamma_3 \subset S$, $(0; 0) \in \partial S$, $\text{meas}(\partial\Omega_I \cap \Gamma_D) > 0$, $I = 0, 1, 2$ (рис. 2). Единичные векторы нормали и касательной к Σ и S обозначим через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ и $\tau = (\nu_2, -\nu_1)$.

Будем считать, что горизонтальное включение γ отслаивается от упругой матрицы с образованием трещины. При этом разрез, соответствующий тре-

щине, имеет два берега γ^+ и γ^- и включение остается прикрепленным к нижнему берегу γ^- . Вертикальное включение γ_3 не имеет отслоений.

Пусть вектор-функция $u = (u_1, u_2)$ задает перемещения точек тела Ω_c , при этом u_i соответствует перемещениям вдоль оси x_i , $i = 1, 2$. Для компонент тензоров деформаций и напряжений тела введем следующие формулы:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}(u) &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, \\ \sigma_{11}(u) &= (2\mu + \lambda)\varepsilon_{11}(u) + \lambda\varepsilon_{22}, \quad \sigma_{22}(u) = \lambda\varepsilon_{11} + (2\mu + \lambda)\varepsilon_{22}(u), \\ \sigma_{12}(u) &= \sigma_{21}(u) = 2\mu\varepsilon_{12}(u),\end{aligned}$$

где

$$\xi_{,j} = \frac{\partial \xi}{\partial x_j}, \quad \lambda = \frac{2\nu\mu}{1 - 2\nu}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

— коэффициенты Ламе, E и ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала упругого тела соответственно.

Тонкие включения γ и γ_3 моделируются в рамках теории тонкой упругой балки Тимошенко. Для описания модели данных включений введем вектор-функции $\psi^{(I)} = (w^{(I)}, v^{(I)}, \varphi^{(I)})$, $I = 1, 2, 3$, где $w^{(I)}$ и $v^{(I)}$ — перемещения точек γ_I вдоль осей x_1 и x_2 соответственно, $\varphi^{(I)}$ — угол поворота нормального сечения γ_I . Поскольку включение γ отслаивается от упругой матрицы с образованием трещины, то перемещения точек на противоположных берегах разреза γ могут не совпадать. Для значений некоторой функции ξ на берегах γ^+ и γ^- введем обозначения с верхним индексом: ξ^+ и ξ^- , а также обозначение для скачка функции на берегах разреза: $[\xi] = \xi^+ - \xi^-$. Аналогичное обозначение будет использовано и для скачка на γ_3 . Горизонтальное включение отслаивается от берега γ^+ и прикреплено к берегу γ^- , поэтому на γ^- задаются условия склейки перемещений точек тела и включения: $u_1^- = w^{(I)}$, $u_2^- = v^{(I)}$ на γ_I , $I = 1, 2$. Вертикальное включение не отслаивается, поэтому на γ_3 выполнены условия $u_1 = w^{(3)}$, $u_2 = v^{(3)}$. В дальнейшем все функции, заданные на γ_1 , γ_2 , будем отождествлять с функциями одной переменной x_1 , а функции, заданные на γ_3 — с функциями переменной x_2 .

Отметим, что подход к моделированию тонких включений, использованный в настоящей работе, позволяет рассматривать как случаи включений, отслоившихся от матрицы, так и без отслоения. Предполагается, что отслоение приводит к образованию трещины, на одном из берегов которой (в данном случае на нижнем) включение остается прикрепленным. Известно, что современные волокнисто-композитные материалы, например, из полимерной матрицы с углеродными волокнами, характеризуются низкой степенью адгезии на межфазной границе, что может приводить к частичному или полному отделению волокна от матрицы. Рассматриваемая задача является модельной и включает два

различных случая взаимодействия включения и матрицы — отслоившееся от матрицы горизонтальное включение и вертикальное включение без отслоения.

Приведем вариационную формулировку задачи о равновесии двумерного упругого тела, содержащего сопрягающиеся тонкие упругие включения. Рассмотрим функциональное пространство

$$H = \{\chi = (u, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \psi^{(3)}) \mid u \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega_c)^2; \psi^{(I)} \in H^1(\gamma_I)^3, I = 1, 2, 3\},$$

где

$$H_{\Gamma_D}^1(\Omega_c)^2 = \{u \in H^1(\Omega_c)^2 \mid u = 0 \text{ на } \Gamma_D\},$$

и введем множество допустимых перемещений следующего вида:

$$\begin{aligned} K = \{\chi \in H \mid & u_1^- = w^{(I)}, u_2^- = v^{(I)} \text{ на } \gamma_I, I = 1, 2; \\ & u_1 = w^{(3)}, u_2 = v^{(3)} \text{ на } \gamma_3; [u]\nu \geq 0 \text{ на } \gamma; \varphi^{(1)}(0) = \varphi^{(2)}(0)\}. \end{aligned}$$

Вариационная постановка задачи состоит в следующем: найти элемент $\chi \in K$, доставляющий минимум функционалу энергии Π :

$$\Pi(\chi) = \inf_{\bar{\chi} \in K} \Pi(\bar{\chi}). \quad (1)$$

Функционал энергии рассматриваемой системы взаимодействующих объектов имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi(\chi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_c} \sigma(u) \varepsilon(u) dx - \int_{\Gamma_N} f u ds \\ + \frac{1}{2} \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} \Phi(\psi^{(I)}, \psi^{(I)}) ds + \frac{1}{2} \int_{\gamma_3} \Psi(\psi^{(3)}, \psi^{(3)}) ds, \end{aligned}$$

где первые два слагаемых соответствуют потенциальной энергии деформирования упругого тела Ω_c и работе внешних сил $f = (f_1, f_2)$, а остальные слагаемые заданы посредством билинейных форм вида

$$\Phi(\xi, \bar{\xi}) = \delta_1 p_{,1} \bar{p}_{,1} + \delta_2 r_{,1} \bar{r}_{,1} + \delta_3 (q_{,1} + r)(\bar{q}_{,1} + \bar{r}), \quad \xi = (p, q, r), \bar{\xi} = (\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}),$$

$$\Psi(\phi, \bar{\phi}) = \delta_1 l_{,2} \bar{l}_{,2} + \delta_2 m_{,2} \bar{m}_{,2} + \delta_3 (k_{,2} + m)(\bar{k}_{,2} + \bar{m}), \quad \phi = (k, l, m), \bar{\phi} = (\bar{k}, \bar{l}, \bar{m}),$$

и соответствуют энергии деформирования включений. Здесь также приняты обозначения: $\sigma(u) \varepsilon(u) = \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(u)$, $i, j = 1, 2$. Всюду в тексте по повторяющимся индексам предполагается суммирование. Через $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ обозначены параметры, характеризующие упругие свойства включений и вычисляемые по формулам

$$\delta_1 = E_{inc} S_{inc}, \quad \delta_2 = E_{inc} I_{inc}, \quad \delta_3 = \frac{E_{inc}}{2(1+\nu)}, \quad S_{inc} = h^2, \quad I_{inc} = \frac{h^4}{12},$$

где E_{inc} , h — модуль упругости и толщина включения соответственно. Задача (1) имеет единственное решение, удовлетворяющее вариационному неравенству [27]:

$$\begin{aligned} \chi \in K : & \int_{\Omega_c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) dx \\ & + \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} \Phi(\psi^{(I)}, \bar{\psi}^{(I)} - \psi^{(I)}) ds + \int_{\gamma_3} \Psi(\psi^{(3)}, \bar{\psi}^{(3)} - \psi^{(3)}) ds \\ & \geq \int_{\Gamma_N} f(\bar{u} - u) ds, \quad \bar{\chi} = (\bar{u}, \bar{\psi}^{(1)}, \bar{\psi}^{(2)}, \bar{\psi}^{(3)}) \in K. \end{aligned} \quad (2)$$

Как показано в [27], в предположении достаточной гладкости решений из вариационного неравенства (2) можно получить дифференциальную постановку рассматриваемой задачи в виде следующей краевой задачи.

Для заданной на Γ_N функции $f = (f_1, f_2)$ внешних нагрузок найти в Ω_c поле перемещений $u = (u_1, u_2)$ точек тела и тензор напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}(u)\}$, $i, j = 1, 2$, кроме того, на γ_I найти функции $\psi^{(I)} = (w^{(I)}, v^{(I)}, \varphi^{(I)})$, $I = 1, 2, 3$, такие, что

$$-\operatorname{div} \sigma = 0, \quad \sigma = A\varepsilon(u) \text{ в } \Omega_c, \quad (3)$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma_D, \quad \sigma(u)n = f \quad \text{на } \Gamma_N, \quad (4)$$

$$-\delta_1 w_{,11}^{(I)} = [\sigma_\tau], \quad -\delta_3 (v_{,11}^{(I)} + \varphi_{,1}^{(I)}) = [\sigma_\nu] \quad \text{на } \gamma_I, \quad I = 1, 2, \quad (5)$$

$$-\delta_2 \varphi_{,11}^{(I)} + \delta_3 (v_{,1}^{(I)} + \varphi^{(I)}) = 0 \quad \text{на } \gamma_I, \quad I = 1, 2, \quad (6)$$

$$\delta_1 v_{,22}^{(3)} = [\sigma_\tau], \quad -\delta_3 (w_{,22}^{(3)} + \varphi_{,2}^{(3)}) = [\sigma_\nu] \quad \text{на } \gamma_3, \quad (7)$$

$$-\delta_2 \varphi_{,22}^{(3)} + \delta_3 (w_{,2}^{(3)} + \varphi^{(3)}) = 0 \quad \text{на } \gamma_3, \quad (8)$$

$$w_{,1}^{(I)} = v_{,1}^{(I)} + \varphi^{(I)} = \varphi_{,1}^{(I)} = 0 \quad \text{при } x_1 = (-1)^I, \quad I = 1, 2, \quad (9)$$

$$v_{,2}^{(3)} = w_{,2}^{(3)} + \varphi^{(3)} = \varphi_{,2}^{(3)} = 0 \quad \text{при } x_2 = -1, \quad (10)$$

$$u_1^- = w^{(I)}, \quad u_2^- = v^{(I)} \quad \text{на } \gamma_I, \quad I = 1, 2, \quad u_1 = w^{(3)}, \quad u_2 = v^{(3)} \quad \text{на } \gamma_3, \quad (11)$$

$$w^{(1)}(0) = w^{(2)}(0) = w^{(3)}(0); \quad v^{(1)}(0) = v^{(2)}(0) = v^{(3)}(0), \quad (12)$$

$$\varphi^{(1)}(0) = \varphi^{(2)}(0), \quad (13)$$

$$\delta_3 (w_{,2}^{(3)} + \varphi^{(3)})(0) = \delta_1 (w_{,1}^{(2)} - w_{,1}^{(1)})(0), \quad \delta_1 v_{,2}^{(3)}(0) = \delta_3 (v_{,1}^{(2)} - v_{,1}^{(1)})(0), \quad (14)$$

$$\varphi_{,1}^{(1)}(0) = \varphi_{,1}^{(2)}(0), \quad \varphi_{,2}^{(3)}(0) = 0, \quad (15)$$

$$[u]\nu \geq 0, \quad \sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+ \cdot [u]\nu = 0 \quad \text{на } \gamma. \quad (16)$$

Здесь $\operatorname{div} \sigma = (\sigma_{1j,j}, \sigma_{2j,j})$; $A\varepsilon = a_{ijkl}\varepsilon_{ij}$, $i, j = 1, 2$, A — тензор модулей упругости; $\sigma n = (\sigma_{1j}n_j, \sigma_{2j}n_j)$; $\sigma_{ij}\nu_j = \sigma_\nu\nu_i + \sigma_\tau n_i$, $i = 1, 2$; σ_ν , σ_τ — нормальная и касательная составляющие вектора $\sigma_{ij}\nu_j$ соответственно.

Соотношения (3) — уравнения равновесия и закон Гука для упругого тела, соотношения (4) — краевые условия на внешней границе Ω_c . Уравнения (5)–(8) и граничные условия (9), (10) описывают равновесие включений и соответствуют модели балки Тимошенко со свободными концами в точках $(\pm 1, 0)$ и $(0, -1)$. В то же время скачки $[\sigma_\nu]$ и $[\sigma_\tau]$ в правых частях (5) и (7) выражают воздействие на балку окружающей упругой среды. Согласно условиям (11) вертикальные и горизонтальные перемещения включений Тимошенко совпадают с соответствующими перемещениями тела на γ_1^- , γ_2^- и γ_3 . Равенства (12)–(15) — условия сопряжения включений в точке $(0, 0)$. Из условий (12), (13) следует совпадение горизонтальных и вертикальных перемещений всех включений, а также углов поворота для γ_1 и γ_2 . Угол поворота γ_3 не участвует в условиях сопряжения (13), поскольку в точке сопряжения включения γ и γ_3 не соединены. Случай идеального сцепления между включениями γ и γ_3 представляет собой отдельную модель и требует специального рассмотрения. Условия (14) характеризуют соотношения для продольных и поперечных сил для γ_1 , γ_2 и γ_3 . Соотношения (15) показывают, что изгибающие моменты γ_1 и γ_2 в точке сопряжения также совпадают, в то время как изгибающий момент γ_3 в этой точке равен нулю. Система (16) представляет собой стандартный набор краевых условий, описывающих возможный контакт берегов трещины на γ , включая условие их взаимного непроникания (первое из представленных соотношений).

Задача (1), а значит, и вариационное неравенство (2), эквивалентны (3)–(16) при условии достаточной гладкости решений [27].

3. Декомпозиция области

Для построения алгоритма численной реализации в области с разрезом применим метод декомпозиции области [20]. Для простоты в этом разделе в соотношениях будем опускать коэффициенты δ_1 , δ_2 , δ_3 . Произведем разбиение области Ω_c на три подобласти Ω_0 , Ω_1 и Ω_2 , как показано на рис. 2.

Будем рассматривать задачи о равновесии в подобластях и на γ_1 , γ_2 , γ_3 , неизвестными в которых являются вектор-функции

$$u^{(I)} = (u_1^{(I)}, u_2^{(I)}) \quad \text{в } \Omega_I, \quad I = 0, 1, 2,$$

$$\psi^{(I)} = (w^{(I)}, v^{(I)}, \varphi^{(I)}) \quad \text{на } \gamma_I, \quad I = 1, 2, 3.$$

Введем дополнительные обозначения на интерфейсе контактирующих подобластей:

$$\Sigma^+ = \partial\Omega_0 \cap \Sigma, \quad \Sigma^- = \bigcup_{I=1}^2 (\partial\Omega_I \cap \Sigma);$$

$$g_I = \partial\Omega_I \cap (\Sigma \setminus \bar{\gamma}_I), \quad I = 1, 2, \quad g = g_1 \cup g_2, \quad g_3 = S \setminus \bar{\gamma}_3.$$

Определим следующие функциональные пространства для вектор-функций $u^{(0)}$, $\chi^{(1)} = (u^{(1)}, \psi^{(1)}, \psi^{(3)})$ и $\chi^{(2)} = (u^{(2)}, \psi^{(2)})$:

$$V_0 = \{u^{(0)} \in H^1(\Omega_0)^2 \mid u^{(0)} = 0 \text{ на } \Gamma_D \cap \partial\Omega_0\},$$

$$V_1 = \{\chi^{(1)} \in H^1(\Omega_1)^2 \times H^1(\gamma_1)^3 \times H^1(\gamma_3)^3 \mid u^{(1)} = 0 \text{ на } \Gamma_D \cap \partial\Omega_1; \\ u_1^{(I)} = w^{(I)}, u_2^{(I)} = v^{(I)} \text{ на } \gamma_I, I = 1, 3\},$$

$$V_2 = \{\chi^{(2)} \in H^1(\Omega_2)^2 \times H^1(\gamma_2)^3 \mid u^{(2)} = 0 \text{ на } \Gamma_D \cap \partial\Omega_2; \\ u_1^{(2)} = w^{(2)}, u_2^{(2)} = v^{(2)} \text{ на } \gamma_2\}$$

с нормами

$$\|u^{(0)}\|_{V_0}^2 = \int_{\Omega_0} \sigma(u^{(0)}) \varepsilon(u^{(0)}) dx, \\ \|\chi^{(1)}\|_{V_1}^2 = \int_{\Omega_1} \sigma(u^{(1)}) \varepsilon(u^{(1)}) dx + \int_{\gamma_1} \Phi(\psi^{(1)}, \psi^{(1)}) ds + \int_{\gamma_3} \Psi(\psi^{(3)}, \psi^{(3)}) ds, \\ \|\chi^{(2)}\|_{V_2}^2 = \int_{\Omega_2} \sigma(u^{(2)}) \varepsilon(u^{(2)}) dx + \int_{\gamma_2} \Phi(\psi^{(2)}, \psi^{(2)}) ds$$

и обозначим $V = V_0 \times V_1 \times V_2$.

Рассмотрим выпуклое множество $K_d \subset V$, имеющее следующий вид:

$$K_d = \{U = (u^{(0)}, \chi^{(1)}, \chi^{(2)}) \in V \mid u_2^{(0)} - v^{(I)} \geq 0 \text{ на } \gamma_I, I = 1, 2; \\ u^{(0)} = u^{(I)} \text{ на } g_I, I = 1, 2; u^{(2)} = u^{(1)} \text{ на } S\}.$$

Для функционалов

$$\Pi_0(u^{(0)}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \sigma(u^{(0)}) \varepsilon(u^{(0)}) dx - \int_{\Gamma_N \cap \partial\Omega_0} f u^{(0)} ds, \\ \Pi_1(\chi^{(1)}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \sigma(u^{(1)}) \varepsilon(u^{(1)}) dx - \int_{\Gamma_N \cap \partial\Omega_1} f u^{(1)} ds \\ + \frac{1}{2} \int_{\gamma_1} \Phi(\psi^{(1)}, \psi^{(1)}) ds + \frac{1}{2} \int_{\gamma_3} \Psi(\psi^{(3)}, \psi^{(3)}) ds, \\ \Pi_2(\chi^{(2)}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_2} \sigma(u^{(2)}) \varepsilon(u^{(2)}) dx - \int_{\Gamma_N \cap \partial\Omega_2} f u^{(2)} ds + \frac{1}{2} \int_{\gamma_1} \Phi(\psi^{(2)}, \psi^{(2)}) ds$$

будем решать следующую задачу минимизации:

$$\inf_{\overline{U} \in K_d} (\Pi_0(\overline{u}^{(0)}) + \Pi_1(\overline{\chi}^{(1)}) + \Pi_2(\overline{\chi}^{(2)})). \quad (17)$$

Соответствующее вариационное неравенство имеет вид

$$\begin{aligned} U \in K_d : \quad & \sum_{I=0}^2 \left(\int_{\Omega_I} \sigma(u^{(I)}) \varepsilon(\bar{u}^{(I)} - u^{(I)}) dx - \int_{\Gamma_N \cap \partial \Omega_I} f(\bar{u}^{(I)} - u^{(I)}) ds \right) \\ & + \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} \Phi(\psi^{(I)}, \bar{\psi}^{(I)} - \psi^{(I)}) ds + \int_{\gamma_3} \Psi(\psi^{(3)}, \bar{\psi}^{(3)} - \psi^{(3)}) ds \geq 0, \quad (18) \end{aligned}$$

$\bar{U} = (\bar{u}^{(0)}, \bar{\chi}^{(1)}, \bar{\chi}^{(2)}) \in K_d$. Более того, будем иметь

$$u^{(I)} = u|_{\Omega_I}, \quad I = 0, 1, 2,$$

где $\chi = (u, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \psi^{(3)})$ — решение (1).

4. Приближенная задача

Для произвольной постоянной $p > 0$ можно определить множества

$$\Lambda_{\gamma_I}^p = \{\mu \in L^2(\gamma_I) \mid 0 \leq \mu \leq p \text{ на } \gamma_I\}, \quad I = 1, 2,$$

$$\Lambda_l^p = \{\mu \in L^2(l) \mid -p \leq \mu \leq p \text{ на } l\}, \quad l \in \{g_1, g_2, S\},$$

$$\Lambda^p = \Lambda_{\gamma_1}^p \times \Lambda_{\gamma_2}^p \times (\Lambda_{g_1}^p)^2 \times (\Lambda_{g_2}^p)^2 \times (\Lambda_S^p)^2.$$

Обозначим также

$$\lambda^\gamma = (\lambda^{\gamma_1}, \lambda^{\gamma_2}), \quad \lambda^{g_I} = (\lambda_1^{g_I}, \lambda_2^{g_I}), \quad I = 1, 2, \quad \lambda^S = (\lambda_1^S, \lambda_2^S),$$

$$\lambda = (\lambda^\gamma, \lambda^{g_1}, \lambda^{g_2}, \lambda^S),$$

и на множестве $W^p = V \times \Lambda^p$ введем функцию Лагранжа

$$\begin{aligned} L(U, \lambda) = & \Pi_0(u^{(0)}) + \Pi_1(\chi^{(1)}) + \Pi_2(\chi^{(2)}) - \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} \lambda^{\gamma_I} (u_2^{(0)} - v^{(I)}) ds \\ & - \sum_{I=1}^2 \sum_{k=1}^2 \int_{g_I} \lambda_k^{g_I} (u_k^{(0)} - u_k^{(I)}) ds - \sum_{k=1}^2 \int_S \lambda_k^S (u_k^{(2)} - u_k^{(1)}) ds. \end{aligned}$$

Для рассматриваемой формы лагранжиана L сформулируем следующую задачу отыскания седловой точки. При фиксированном $p \geq 0$ найти элемент $(U^p, \lambda_p) \in W^p$, где $U^p = (u_p^{(0)}, \chi_p^{(1)}, \chi_p^{(2)})$, $\lambda_p = (\lambda_p^\gamma, \lambda_p^{g_1}, \lambda_p^{g_2}, \lambda_p^S)$, такой, что

$$L(U^p, \bar{\lambda}) \leq L(U^p, \lambda_p) \leq L(\bar{U}, \lambda_p) \quad (19)$$

для любых $(\bar{U}, \bar{\lambda}) = (\bar{u}^{(0)}, \bar{\chi}^{(1)}, \bar{\chi}^{(2)}, \bar{\lambda}) \in W^p$. Поскольку множества, входящие в произведение W^p , выпуклы и замкнуты в соответствующих рефлексивных пространствах, а L выпуклый полуунпрерывный снизу на V и вогнутый полуунпрерывный сверху на Λ^p , то при любом $p \geq 0$ задача (19) имеет решение [30].

Теорема 1. Пусть U — решение (18), (U^p, λ^p) — решение (19). Тогда при $p \rightarrow \infty$

$$U^p \rightarrow U \text{ сильно в } V.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенства (19) эквивалентны следующей системе:

$$\begin{aligned} & \sum_{I=0}^2 \left(\int_{\Omega_I} \sigma(u_p^{(I)}) \varepsilon(\bar{u}^{(I)} - u_p^{(I)}) dx - \int_{\Gamma_N \cap \partial \Omega_I} f(\bar{u}^{(I)} - u_p^{(I)}) ds \right) \\ & + \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} \Phi(\psi_p^{(I)}, \bar{\psi}^{(I)} - \psi_p^{(I)}) ds + \int_{\gamma_3} \Psi(\psi_p^{(3)}, \bar{\psi}^{(3)} - \psi_p^{(3)}) ds \\ & - \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} \lambda_p^{\gamma_I} (\bar{u}_2^{(0)} - u_{p_2}^{(0)} - (\bar{v}^{(I)} - v_p^{(I)})) ds - \sum_{I=1}^2 \sum_{k=1}^2 \int_{g_I} \lambda_{p_k}^{g_I} (\bar{u}_k^{(0)} - u_{p_k}^{(0)} - (\bar{u}_k^{(I)} - u_{p_k}^{(I)})) ds \\ & - \sum_{k=1}^2 \int_S \lambda_{p_k}^S (\bar{u}_k^{(2)} - u_{p_k}^{(2)} - (\bar{u}_k^{(1)} - u_{p_k}^{(1)})) ds \geq 0, \quad \bar{U} \in V, \quad (20) \end{aligned}$$

$$\int_{\gamma_I} \bar{\lambda}^{\gamma_I} (v_p^{(I)} - u_{p_2}^{(0)}) ds \leq \int_{\gamma_I} \lambda_p^{\gamma_I} (v_p^{(I)} - u_{p_2}^{(0)}) ds, \quad \bar{\lambda}^{\gamma_I} \in \Lambda_\gamma^p, \quad I = 1, 2, \quad (21)$$

$$\int_{g_I} \bar{\lambda}_k^{g_I} (u_{p_k}^{(I)} - u_{p_k}^{(0)}) ds \leq \int_{g_I} \lambda_{p_k}^{g_I} (u_{p_k}^{(I)} - u_{p_k}^{(0)}) ds, \quad \bar{\lambda}_k^{g_I} \in \Lambda_g^p, \quad I = 1, 2, \quad k = 1, 2, \quad (22)$$

$$\int_S \bar{\lambda}_k^S (u_{p_k}^{(1)} - u_{p_k}^{(2)}) ds \leq \int_S \lambda_{p_k}^S (u_{p_k}^{(1)} - u_{p_k}^{(2)}) ds, \quad \bar{\lambda}_k^S \in \Lambda_S^p, \quad k = 1, 2. \quad (23)$$

Подставим в (20) пробный элемент $\bar{U} = 0$. Будем иметь

$$\begin{aligned} & \sum_{I=0}^2 \int_{\Omega_I} \sigma(u_p^{(I)}) \varepsilon(u_p^{(I)}) dx + \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} \Phi(\psi_p^{(I)}, \psi_p^{(I)}) ds + \int_{\gamma_3} \Psi(\psi_p^{(3)}, \psi_p^{(3)}) ds \\ & + \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} \lambda_p^{\gamma_I} (v_p^{(I)} - u_{p_2}^{(0)}) ds + \sum_{I=1}^2 \sum_{k=1}^2 \int_{g_I} \lambda_{p_k}^{g_I} (u_{p_k}^{(I)} - u_{p_k}^{(0)}) ds \\ & + \sum_{k=1}^2 \int_S \lambda_{p_k}^S (u_{p_k}^{(1)} - u_{p_k}^{(2)}) ds \leq \sum_{I=0}^2 \int_{\Gamma_N \cap \partial \Omega_I} f(u_p^{(I)}) ds. \quad (24) \end{aligned}$$

Подставим также $\bar{\lambda}^{\gamma_I} = \bar{\lambda}_k^{g_I} = \bar{\lambda}_k^S = 0$, $k = 1, 2$, в (21)–(23). Получим

$$\int_{\gamma_I} \lambda_p^{\gamma_I} (v_p^{(I)} - u_{p_2}^{(0)}) ds \geq 0, \quad I = 1, 2, \quad (25)$$

$$\int_{g_I} \lambda_{p_k}^{g_I} (u_{p_k}^{(I)} - u_{p_k}^{(0)}) ds \geq 0, \quad I = 1, 2, \quad k = 1, 2, \quad (26)$$

$$\int_S \lambda_{p_k}^S (u_{p_k}^{(1)} - u_{p_k}^{(2)}) ds \geq 0, \quad k = 1, 2. \quad (27)$$

Отсюда

$$\|u_p^{(0)}\|_{V_0}^2 + \|\chi_p^{(1)}\|_{V_1}^2 + \|\chi_p^{(2)}\|_{V_2}^2 \leq \sum_{I=0}^2 C^{(I)} \|f\|_{L^2(\partial\Omega_I)^2} \cdot \|u_p^{(I)}\|_{V_I}.$$

Тогда существует такая константа $C > 0$, что при любом $p > 0$ имеют место оценки

$$\|u_p^{(0)}\|_{V_0} \leq C, \quad \|\chi_p^{(1)}\|_{V_1} \leq C, \quad \|\chi_p^{(2)}\|_{V_2} \leq C. \quad (28)$$

Из ограниченности последовательностей $\{u_p^{(0)}\}$, $\{\chi_p^{(1)}\}$, $\{\chi_p^{(2)}\}$ следует, что можно выделить подпоследовательности, сохраняя обозначение для которых, можно утверждать, что

$$\begin{cases} u_p^{(0)} \rightarrow \tilde{u}^{(0)} & \text{слабо в } V_0, \\ \chi_p^{(1)} \rightarrow \tilde{\chi}^{(1)} & \text{слабо в } V_1, \\ \chi_p^{(2)} \rightarrow \tilde{\chi}^{(2)} & \text{слабо в } V_2. \end{cases} \quad (29)$$

Покажем, что $\tilde{U} = (\tilde{u}^{(0)}, \tilde{\chi}^{(1)}, \tilde{\chi}^{(2)}) \in K_d$. Из (21)–(23) следует, что

$$\lambda_p^{\gamma_I} = \begin{cases} 0, & v_p^{(I)} - u_{p_2}^{(0)} < 0, \\ p, & v_p^{(I)} - u_{p_2}^{(0)} > 0, \end{cases} \quad I = 1, 2, \quad (30)$$

$$\lambda_{p_k}^{g_I} = \begin{cases} -p, & u_{p_k}^{(I)} - u_{p_k}^{(0)} < 0, \\ p, & u_{p_k}^{(I)} - u_{p_k}^{(0)} > 0, \end{cases} \quad I = 1, 2, \quad k = 1, 2, \quad (31)$$

$$\lambda_{p_k}^S = \begin{cases} -p, & u_{p_k}^{(1)} - u_{p_k}^{(2)} < 0, \\ p, & u_{p_k}^{(1)} - u_{p_k}^{(2)} > 0, \end{cases} \quad k = 1, 2. \quad (32)$$

Введем обозначения:

$$J_p^c = \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} \max\{0, v_p^{(I)} - u_{p_2}^{(0)}\} ds,$$

$$J_p^g = \sum_{I=1}^2 \sum_{k=1}^2 \int_{g_I} (\max\{0, u_{p_k}^{(I)} - u_{p_k}^{(0)}\} + \max\{0, -(u_{p_k}^{(I)} - u_{p_k}^{(0)})\}) ds,$$

$$J_p^S = \sum_{k=1}^2 \int_S (\max\{0, u_{p_k}^{(1)} - u_{p_k}^{(2)}\} + \max\{0, -(u_{p_k}^{(1)} - u_{p_k}^{(2)})\}) ds.$$

Из (30)–(32) следует, что

$$\sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} \lambda_p^{\gamma_I} (v_p^{(I)} - u_{p_2}^{(0)}) ds = p J_p^c, \quad \sum_{I=1}^2 \sum_{k=1}^2 \int_{g_I} \lambda_{p_k}^{g_I} (u_{p_k}^{(0)} - u_{p_k}^{(I)}) ds = p J_p^g,$$

$$\sum_{k=1}^2 \int_S \lambda_{p_k}^S (u_{p_k}^{(1)} - u_{p_k}^{(2)}) ds = p J_p^S.$$

Из (24)–(27) можем получить

$$0 \leq \|u_p^{(0)}\|_{V_0}^2 + \|\chi_p^{(1)}\|_{V_1}^2 + \|\chi^{(2)}\|_{V_2}^2 + p(J_p^c + J_p^g + J_p^S) \leq \sum_{I=0}^2 \int_{\Gamma_N \cap \partial\Omega_I} f u_p^{(I)} ds.$$

Из (28) заключаем, что существует такая постоянная $C_1 > 0$, что выполнено

$$0 \leq p(J_p^c + J_p^g + J_p^S) \leq C_1, \quad p > 0.$$

Тогда, очевидно,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (J_p^c + J_p^g + J_p^S) = 0. \quad (33)$$

Возьмем произвольную неотрицательную функцию $\eta \in C_0^\infty(\gamma)$ и запишем

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_I} \eta (\tilde{v}^{(I)} - \tilde{u}_2^{(0)}) ds &= \lim_{p \rightarrow \infty} \int_{\gamma_I} \eta (v_p^{(I)} - u_{p_2}^{(0)}) ds \\ &\leq \max_{x \in \gamma_I} \eta(x) \lim_{p \rightarrow \infty} \int_{\gamma_I} \max \{0, v_p^{(I)} - u_{p_2}^{(0)}\} ds = 0, \quad I = 1, 2. \end{aligned}$$

Из произвольности $\eta \geq 0$ следует, что

$$\tilde{v}^{(I)} - \tilde{u}_2^{(0)} \leq 0 \text{ на } \gamma_I, \quad I = 1, 2.$$

Выбирая произвольные функции $\alpha_{kI} \in C_0^\infty(g_I)$, $k, I = 1, 2$, можем записать

$$\int_{g_I} \alpha_{kI} (\tilde{u}_k^{(0)} - \tilde{u}_k^{(I)}) ds = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_{g_I} \alpha_{kI} (u_{p_k}^{(0)} - u_{p_k}^{(I)}) ds, \quad k, I = 1, 2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} - \max_{x \in g_I} |\alpha_{kI}(x)| \int_{g_I} \max \{0, -(u_{p_k}^{(I)} - u_{p_k}^{(0)})\} ds &\leq \int_{g_I} \alpha_{kI} (u_{p_k}^{(I)} - u_{p_k}^{(0)}) ds \\ &\leq \max_{x \in g_I} |\alpha_{kI}(x)| \int_{g_I} \max \{0, u_{p_k}^{(I)} - u_{p_k}^{(0)}\} ds. \end{aligned}$$

Переходя в последних неравенствах к пределу при $p \rightarrow \infty$ с учетом (33), получим

$$\int_{g_I} \alpha_{kI} (\tilde{u}_k^{(0)} - \tilde{u}_k^{(I)}) ds = 0,$$

откуда в силу произвольности α_{kI} заключаем, что

$$\tilde{u}_k^{(0)} = \tilde{u}_k^{(I)} \text{ на } g_I, \quad I = 1, 2, \quad k = 1, 2.$$

Аналогично можно показать, что

$$\tilde{u}_k^{(1)} = \tilde{u}_k^{(2)} \text{ на } S, \quad k = 1, 2.$$

Таким образом, $\tilde{U} \in K_d$.

Покажем, что \tilde{U} совпадает с U . Зафиксируем произвольный элемент $\widehat{U} = (\widehat{u}^{(0)}, \widehat{\chi}^{(1)}, \widehat{\chi}^{(2)}) \in K_d$ и подставим его в (20) в качестве тестового. Будем иметь

$$\begin{aligned} & \sum_{I=0}^2 \int_{\Omega_I} \sigma(u_p^{(I)}) \varepsilon(\widehat{u}^{(I)} - u_p^{(I)}) dx + \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} \Phi(\psi_p^{(I)}, \widehat{\psi}^{(I)} - \psi_p^{(I)}) ds \\ & + \int_{\gamma_3} \Psi(\psi_p^{(3)}, \widehat{\psi}^{(3)} - \psi_p^{(3)}) ds \geq \sum_{I=0}^2 \int_{\Gamma_N \cap \partial\Omega_I} f(\widehat{u}^{(I)} - u_p^{(I)}) ds + \sum_{I=1}^2 \left(\int_{\gamma_I} \lambda_p^{\gamma_I} (\widehat{u}_2^{(0)} - \widehat{v}^{(I)}) ds \right. \\ & \left. + \int_{\gamma_I} \lambda_p^{\gamma_I} (v_p^{(I)} - u_{p_2}^{(0)}) ds \right) + \sum_{I=1}^2 \sum_{k=1}^2 \left(\int_{g_I} \lambda_{p_k}^{g_I} (\widehat{u}_k^{(0)} - \widehat{u}_k^{(I)}) ds + \int_{g_I} \lambda_{p_k}^{g_I} (u_{p_k}^{(I)} - u_{p_k}^{(0)}) \right) \\ & + \sum_{k=1}^2 \left(\int_S \lambda_{p_k}^S (\widehat{u}_k^{(2)} - \widehat{u}_k^{(1)}) ds + \int_S \lambda_{p_k}^S (u_{p_k}^{(1)} - u_{p_k}^{(2)}) \right), \quad \widehat{U} \in K_d. \end{aligned}$$

Учитывая (25)–(27) и принадлежность \widehat{U} множеству K_d , отсюда имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{I=0}^2 \int_{\Omega_I} \sigma(u_p^{(I)}) \varepsilon(\widehat{u}^{(I)} - u_p^{(I)}) dx + \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} \Phi(\psi_p^{(I)}, \widehat{\psi}^{(I)} - \psi_p^{(I)}) ds \\ & + \int_{\gamma_3} \Psi(\psi_p^{(3)}, \widehat{\psi}^{(3)} - \psi_p^{(3)}) ds \geq \sum_{I=0}^2 \int_{\Gamma_N \cap \partial\Omega_I} f(\widehat{u}^{(I)} - u_p^{(I)}) ds. \quad (34) \end{aligned}$$

В силу слабой полунепрерывности снизу нормы в (34) можно перейти к пределу при $p \rightarrow \infty$. В результате получим неравенство

$$\begin{aligned} & \sum_{I=0}^2 \int_{\Omega_I} \sigma(\tilde{u}^{(I)}) \varepsilon(\widehat{u}^{(I)} - \tilde{u}^{(I)}) dx + \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} \Phi(\tilde{\psi}^{(I)}, \widehat{\psi}^{(I)} - \tilde{\psi}^{(I)}) ds \\ & + \int_{\gamma_3} \Psi(\tilde{\psi}^{(3)}, \widehat{\psi}^{(3)} - \tilde{\psi}^{(3)}) ds \geq \sum_{I=0}^2 \int_{\Gamma_N \cap \partial\Omega_I} f(\widehat{u}^{(I)} - \tilde{u}^{(I)}) ds, \quad (35) \end{aligned}$$

выполненное в силу произвольности выбора для всех $\widehat{U} \in K_d$. С другой стороны, (35) совпадает с вариационным неравенством (18). Принимая во внимание единственность решения (18), можем сделать вывод, что \tilde{U} совпадает с U .

Докажем, что $U^p \rightarrow U$ сильно в V . Переходя к пределу в (24) при $p \rightarrow \infty$, с учетом слабой полунепрерывности снизу нормы получим

$$\begin{aligned} \|u^{(0)}\|_{V_0}^2 + \|\chi^{(1)}\|_{V_1}^2 + \|\chi^{(2)}\|_{V_2}^2 & \leq \underline{\lim}(\|u_p^{(0)}\|_{V_0}^2 + \|\chi_p^{(1)}\|_{V_1}^2 + \|\chi_p^{(2)}\|_{V_2}^2) \\ & \leq \overline{\lim}(\|u_p^{(0)}\|_{V_0}^2 + \|\chi_p^{(1)}\|_{V_1}^2 + \|\chi_p^{(2)}\|_{V_2}^2) \leq \sum_{I=0}^2 \int_{\Gamma_N \cap \partial\Omega_I} f u^{(I)} ds. \end{aligned}$$

Из (18) следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{I=0}^2 \int_{\Omega_I} \sigma(u^{(I)}) \varepsilon(u^{(I)}) dx + \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} \Phi(\psi^{(I)}, \psi^{(I)}) ds \\ + \int_{\gamma_3} \Psi(\psi^{(3)}, \psi^{(3)}) ds = \sum_{I=0}^2 \int_{\Gamma_N \cap \partial \Omega_I} f(u^{(I)}) ds, \end{aligned}$$

это равенство можно переписать в виде

$$\|u^{(0)}\|_{V_0}^2 + \|\chi^{(1)}\|_{V_1}^2 + \|\chi^{(2)}\|_{V_2}^2 = \sum_{I=0}^2 \int_{\Gamma_N \cap \partial \Omega_I} f u^{(I)} ds.$$

Сравнивая это равенство с последним неравенством, можно сделать вывод о том, что U^p сильно сходится к U в V . Теорема доказана.

5. Итерационный алгоритм

Заметим, что вариационное неравенство (20) эквивалентно следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \sigma(u_p^{(0)}) \varepsilon(\bar{u}^{(0)}) dx - \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} \lambda_p^{\gamma_I} \bar{u}_2^{(0)} ds - \sum_{I=1}^2 \sum_{k=1}^2 \int_{g_I} \lambda_{p_k}^{g_I} \bar{u}_k^{(0)} ds \\ = \int_{\Gamma_N \cap \partial \Omega_0} f \bar{u}^{(0)} ds, \quad \bar{u}^{(0)} \in V_0. \quad (36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \sigma(u_p^{(1)}) \varepsilon(\bar{u}^{(1)}) dx + \int_{\gamma_1} \Phi(\psi_p^{(1)}, \bar{\psi}^{(1)}) ds + \int_{\gamma_3} \Psi(\psi_p^{(3)}, \bar{\psi}^{(3)}) \\ + \int_{\gamma_1} \lambda_p^{\gamma_1} \bar{v}^{(1)} ds + \int_{g_1} (\lambda_{p_1}^{g_1} \bar{u}_1^{(1)} + \lambda_{p_2}^{g_1} \bar{u}_2^{(1)}) ds + \int_S (\lambda_{p_1}^S \bar{u}_1^{(1)} + \lambda_{p_2}^S \bar{u}_2^{(1)}) ds \\ = \int_{\Gamma_N \cap \partial \Omega_1} f \bar{u}^{(1)} ds, \quad \bar{\chi}^{(1)} = (\bar{u}^{(1)}, \bar{\psi}^{(1)}, \bar{\psi}^{(3)}) \in V_1. \quad (37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} \sigma(u_p^{(2)}) \varepsilon(\bar{u}^{(2)}) dx + \int_{\gamma_2} \Phi(\psi_p^{(2)}, \bar{\psi}^{(2)}) ds \\ + \int_{\gamma_2} \lambda_p^{\gamma_2} \bar{v}^{(2)} ds + \int_{g_2} (\lambda_{p_2}^{g_2} \bar{u}_1^{(2)} + \lambda_{p_2}^{g_2} \bar{u}_2^{(2)}) ds - \int_S (\lambda_{p_1}^S \bar{u}_1^{(2)} + \lambda_{p_2}^S \bar{u}_2^{(2)}) ds \\ = \int_{\Gamma_N \cap \partial \Omega_2} f \bar{u}^{(2)} ds, \quad \bar{\chi}^{(2)} = (\bar{u}^{(2)}, \bar{\psi}^{(2)}) \in V_2. \quad (38) \end{aligned}$$

Далее выберем p достаточно большим и рассмотрим операторы $P_{\Lambda_p^{\gamma_I}}$, $P_{\Lambda_p^{g_I}}$, $P_{\Lambda_p^S}$ проектирования на множества $\Lambda_p^{\gamma_I}$, $\Lambda_p^{g_I}$, Λ_p^S в $L^2(\gamma_I)$, $L^2(g_I)$, $L^2(S)$ соответственно. Нетрудно видеть, что

$$P_{\Lambda_p^{\gamma_I}} \xi(x) = \begin{cases} 0, & \xi(x) \leq 0, \\ \xi(x), & 0 < \xi(x) < p, \\ p, & \xi(x) \geq p, \end{cases} \quad I = 1, 2,$$

$$P_{\Lambda_p^{g_I}} \xi(x) = P_{\Lambda_p^S} \xi(x) = \begin{cases} -p, & \xi(x) \leq -p, \\ \xi(x), & -p < \xi(x) < p, \\ p, & \xi(x) \geq p, \end{cases} \quad I = 1, 2.$$

Итерационный алгоритм численного решения исходной задачи составим на основе алгоритма Удзавы в следующем виде.

1. Итерация $m = 0$. Задаем

$$\lambda^0 = (\lambda^{\gamma_1, 0}, \lambda^{\gamma_2, 0}, \lambda^{g_1, 0}, \lambda^{g_2, 0}, \lambda^{S, 0}) \in \Lambda_p^{\gamma_1} \times \Lambda_p^{\gamma_2} \times (\Lambda_p^{g_1})^2 \times (\Lambda_p^{g_2})^2 \times (\Lambda_p^S)^2.$$

2. Итерация $m \geq 0$. Найдем элемент $U^m = (u^{(0), m}, \chi^{(1), m}, \chi^{(2), m})$ такой, что

$$\int_{\Omega_0} \sigma(u^{(0), m}) \varepsilon(\bar{u}^{(0)}) dx - \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} \lambda^{\gamma_I, m} \bar{u}_2^{(0)} ds - \sum_{I=1}^2 \int_{g_I} (\lambda_1^{g_I, m} \bar{u}_1^{(0)} + \lambda_2^{g_I, m} \bar{u}_2^{(0)}) ds = \int_{\Gamma_N \cap \partial \Omega_0} f \bar{u}^{(0)} ds, \quad \bar{u}^{(0)} \in V_0, \quad (39)$$

$$\int_{\Omega_1} \sigma(u^{(1), m}) \varepsilon(\bar{u}^{(1)}) dx + \int_{\gamma_1} \Phi(\psi^{(1), m}, \bar{\psi}^{(1)}) ds + \int_{\gamma_3} \Psi(\psi^{(3), m}, \bar{\psi}^{(3)}) ds + \int_{\gamma_1} \lambda^{\gamma_1, m} \bar{v}^{(1)} ds + \int_{g_1} (\lambda_1^{g_1, m} \bar{u}_1^{(1)} + \lambda_2^{g_1, m} \bar{u}_2^{(1)}) ds + \int_S (\lambda_1^{S, m} \bar{u}_1^{(1)} + \lambda_2^{S, m} \bar{u}_2^{(1)}) ds = \int_{\Gamma_N \cap \partial \Omega_1} f \bar{u}^{(1)} ds, \quad \bar{\chi}^{(1)} \in V_1, \quad (40)$$

$$\int_{\Omega_2} \sigma(u^{(2), m}) \varepsilon(\bar{u}^{(2)}) dx + \int_{\gamma_2} \Phi(\psi^{(2), m}, \bar{\psi}^{(2)}) ds + \int_{\gamma_2} \lambda^{\gamma_2, m} \bar{v}^{(2)} ds + \int_{g_2} (\lambda_1^{g_2, m} \bar{u}_1^{(2)} + \lambda_2^{g_2, m} \bar{u}_2^{(2)}) ds - \int_S (\lambda_1^{S, m} \bar{u}_1^{(2)} + \lambda_2^{S, m} \bar{u}_2^{(2)}) ds = \int_{\Gamma_N \cap \partial \Omega_2} f \bar{u}^{(2)} ds, \quad \bar{\chi}^{(2)} \in V_2. \quad (41)$$

3. Проверка критерия остановки вида

$$\max\left(\frac{\|\chi^{(1),m} - \chi^{(1),m-1}\|_{V_1}}{\|\chi^{(1),m}\|_{V_1}}, \frac{\|\chi^{(2),m-1} - \chi^{(2),m-1}\|_{V_2}}{\|\chi^{(2),m}\|_{V_2}}, \frac{\|u^{(0),m} - u^{(0),m-1}\|_{V_0}}{\|u^{(0),m}\|_{V_0}}\right) \leq \epsilon,$$

где ϵ — заданный параметр алгоритма. При выполнении критерия алгоритм останавливается и в качестве решения задачи принимается элемент, найденный на данном шаге итерации. Иначе при $m+1$ определяем λ^{m+1} по формулам

$$\begin{aligned} \lambda^{\gamma_I, m+1} &= P_{\Lambda_p^{\gamma_I}}(\lambda^{g_I, m} + \theta(v^{(I),m} - u_2^{(0),m})), \quad I = 1, 2, \\ \lambda_k^{g_I, m+1} &= P_{\Lambda_p^{g_I}}(\lambda_k^{g_I, m} + \theta(u_k^{(I),m} - u_k^{(0),m})), \quad I = 1, 2, \quad k = 1, 2, \\ \lambda_k^{S, m+1} &= P_{\Lambda_p^S}(\lambda_k^{S, m} + \theta(u_k^{(1),m} - u_k^{(2),m})), \quad k = 1, 2, \end{aligned}$$

и переходим к шагу 2.

Здесь $\theta > 0$ может быть выбрано таким, чтобы итерационный алгоритм сходился, а именно имеет место следующая

Теорема 2. Существует $\theta^* > 0$ такое, что U^m сильно сходится к элементу U^p в пространстве V при $m \rightarrow \infty$ для всех $\theta \in (0, \theta^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} r^{\gamma_I, m} &= \lambda^{\gamma_I, m} - \lambda_p^{\gamma_I}, \quad r_k^{g_I, m} = \lambda_k^{g_I, m} - \lambda_{p_k}^{g_I}, \quad I = 1, 2, \quad k = 1, 2, \\ r_k^{S, m} &= \lambda_k^{S, m} - \lambda_{p_k}^S, \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

Учитывая, что оператор проектирования на замкнутое выпуклое множество является нерастягивающим оператором, для каждого $\theta > 0$ будем иметь

$$\begin{aligned} &\sum_{I=1}^2 \|r^{\gamma_I, m+1}\|_{L^2(\gamma_I)}^2 + \sum_{I=1}^2 \sum_{k=1}^2 \|r_k^{g_I, m+1}\|_{L^2(g_I)}^2 + \sum_{k=1}^2 \|r_k^{S, m+1}\|_{L^2(S)}^2 \\ &\leq \sum_{I=1}^2 \left(\|r^{\gamma_I, m}\|_{L^2(\gamma_I)}^2 + 2\theta \int_{\gamma_I} r^{\gamma_I, m} ((v^{(I),m} - u_2^{(0),m}) - (v_p^{(I)} - u_{p_2}^{(0)})) ds \right. \\ &\quad \left. + \theta^2 \| (v^{(I),m} - u_2^{(0),m}) - (v_p^{(I)} - u_{p_2}^{(0)}) \|_{L^2(\gamma_I)}^2 \right) \\ &+ \sum_{I=1}^2 \sum_{k=1}^2 \left(\|r_k^{g_I, m}\|_{L^2(g_I)}^2 + 2\theta \int_{g_I} r_k^{g_I, m} ((u_k^{(I),m} - u_k^{(0),m}) - (u_{p_k}^{(I)} - u_{p_k}^{(0)})) ds \right. \\ &\quad \left. + \theta^2 \| (u_k^{(I),m} - u_k^{(0),m}) - (u_{p_k}^{(I)} - u_{p_k}^{(0)}) \|_{L^2(g_I)}^2 \right) \\ &+ \sum_{k=1}^2 \left(\|r_k^{S, m}\|_{L^2(S)}^2 + 2\theta \int_S r_k^{S, m} ((u_k^{(1),m} - u_k^{(2),m}) - (u_{p_k}^{(1)} - u_{p_k}^{(2)})) ds \right. \\ &\quad \left. + \theta^2 \| (u_k^{(1),m} - u_k^{(2),m}) - (u_{p_k}^{(1)} - u_{p_k}^{(2)}) \|_{L^2(S)}^2 \right). \quad (42) \end{aligned}$$

Подставим в (36)–(38) пробные элементы вида

$$\begin{aligned}\bar{u}^{(0)} &= u_p^{(0)} - u^{(0),m}, \quad \bar{\chi}^{(1)} = (u_p^{(1)} - u^{(1),m}, \psi_p^{(1)} - \psi^{(1),m}, \psi_p^{(3)} - \psi^{(3),m}), \\ \bar{\chi}^{(2)} &= (u_p^{(2)} - u^{(2),m}, \psi_p^{(2)} - \psi^{(2),m}),\end{aligned}$$

а в (39)–(41) — элементы вида

$$\begin{aligned}\bar{u}^{(0)} &= u^{(0),m} - u_p^{(0)}, \quad \bar{\chi}^{(1)} = (u^{(1),m} - u_p^{(1)}, \psi^{(1),m} - \psi_p^{(1)}, \psi^{(3),m} - \psi_p^{(3)}), \\ \bar{\chi}^{(2)} &= (u^{(2),m} - u_p^{(2)}, \psi^{(2),m} - \psi_p^{(2)}).\end{aligned}$$

Сложим полученные равенства и получим

$$\begin{aligned}&\sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} r^{\gamma_I, m} ((v^{(I),m} - v_p^{(I)}) - (u_2^{(0),m} - u_{p_2}^{(0)})) ds \\ &+ \sum_{I=1}^2 \sum_{k=1}^2 \int_{g_I} r_k^{g_I, m} ((u_k^{(I),m} - u_{p_k}^{(I)}) - (u_k^{(0),m} - u_{p_k}^{(0)})) ds \\ &+ \sum_{k=1}^2 \int_S r_k^{S, m} ((u_k^{(1),m} - u_{p_k}^{(1)}) - (u_k^{(2),m} - u_{p_k}^{(2)})) ds \\ &= -(\|u^{(0),m} - u_p^{(0)}\|_{V_0}^2 + \|\chi^{(1),m} - \chi_p^{(1)}\|_{V_1}^2 + \|\chi^{(2),m} - \chi_p^{(2)}\|_{V_2}^2).\end{aligned}$$

Тогда из (42) можно записать

$$\begin{aligned}&\sum_{I=1}^2 \|r^{\gamma_I, m+1}\|_{L^2(\gamma_I)}^2 + \sum_{I=1}^2 \sum_{k=1}^2 \|r^{g_I, m+1}\|_{L^2(g_I)}^2 + \sum_{k=1}^2 \|r^{S, m+1}\|_{L^2(S)}^2 \\ &\leq \sum_{I=1}^2 (\|r^{\gamma_I, m}\|_{L^2(\gamma_I)}^2 + 2\theta^2 (\|v^{(I),m} - v_p^{(I)}\|_{L^2(\gamma_I)}^2 + \|u_2^{(0),m} - u_{p_2}^{(0)}\|_{L^2(\gamma_I)}^2)) \\ &+ \sum_{I=1}^2 \sum_{k=1}^2 (\|r_k^{g_I, m}\|_{L^2(g_I)}^2 + 2\theta^2 (\|u_k^{(I),m} - u_{p_k}^{(I)}\|_{L^2(g_I)}^2 + \|u_k^{(0),m} - u_{p_k}^{(0)}\|_{L^2(g_I)}^2)) \\ &+ \sum_{k=1}^2 (\|r_k^{S, m}\|_{L^2(S)}^2 + 2\theta^2 (\|u_k^{(1),m} - u_{p_k}^{(1)}\|_{L^2(S)}^2 + \|u_k^{(2),m} - u_{p_k}^{(2)}\|_{L^2(S)}^2)) \\ &- 2\theta \|u^{(0),m} - u_p^{(0)}\|_{V_0}^2 - 2\theta \|\chi^{(1),m} - \chi_p^{(1)}\|_{V_1}^2 - 2\theta \|\chi^{(2),m} - \chi_p^{(2)}\|_{V_2}^2.\end{aligned}$$

Ввиду ограниченности оператора следа можно заключить, что существует такая константа $C^* > 0$, что имеет место неравенство

$$\begin{aligned}&\sum_{I=1}^2 \|r^{\gamma_I, m+1}\|_{L^2(\gamma_I)}^2 + \sum_{I=1}^2 \sum_{k=1}^2 \|r^{g_I, m+1}\|_{L^2(g_I)}^2 + \sum_{k=1}^2 \|r^{S, m+1}\|_{L^2(S)}^2 \\ &\leq \sum_{I=1}^2 \|r^{\gamma_I, m}\|_{L^2(\gamma_I)}^2 + \sum_{I=1}^2 \sum_{k=1}^2 \|r_k^{g_I, m}\|_{L^2(g_I)}^2 + \sum_{k=1}^2 \|r_k^{S, m}\|_{L^2(S)}^2\end{aligned}$$

$$-2\theta(1-\theta C^*) \left(\|u^{(0),m} - u_p^{(0)}\|_{V_0}^2 + \sum_{I=1}^2 \|\chi^{(I),m} - \chi_p^{(I)}\|_{V_I}^2 \right).$$

Пусть θ^* — такая постоянная, что $0 < \theta^* < \frac{1}{C^*}$. Тогда для любых $\theta \in (0, \theta^*]$ будем иметь $\theta(1 - \theta C^*) > 0$ и из последнего неравенства следует монотонная сходимость последовательности

$$\sum_{I=1}^2 \|r^{\gamma_I, m}\|_{L^2(\gamma_I)}^2 + \sum_{I=1}^2 \sum_{k=1}^2 \|r_k^{g_I, m}\|_{L^2(g_I)}^2 + \sum_{k=1}^2 \|r^{S, m}\|_{L^2(S)}^2.$$

Переходя к пределу, также будем иметь

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|U^m - U^p\|_V^2 = 0.$$

Теорема доказана.

6. Численная реализация

Рассмотрим примеры численной реализации для поставленной задачи. Физические постоянные материала упругого тела (матрицы) приняты равными $E = 21 \times 10^3$ МПа, $\nu = 0.16$. Параметры, характеризующие физические и геометрические свойства включений Тимошенко, выбраны следующими: $E_{inc} = 21 \times 10^4$ МПа, $h = 0.02$ м, $\nu = 0.16$. Построенный алгоритм реализован с использованием свободно распространяемого пакета FreeFem++. Для решения линейных подзадач на каждом итерационном шаге использован метод конечных элементов. Области Ω_0 , Ω_1 , Ω_2 разбиты на 11722, 10480 и 10454 треугольников, количество их вершин — 6022, 5369 и 5356 соответственно. Параметры алгоритма взяты равными $\theta = 10^3$, $p = 10^7$, $\epsilon = 10^{-6}$. Пространства V_1 , V_2 , V_0 аппроксимируются конечно-элементными пространствами, состоящими из кусочно-гладких функций $P1$ — элементами Лагранжа. При численной реализации рассмотрены два случая нагружения — растяжение параллельно γ_3 , приводящее к полному раскрытию трещины, а также растяжение правой половины квадрата при одновременном скатии левой его части, такой вид нагрузления приводит к частичному смыканию берегов трещины. В обоих случаях правый и левый края области считаются закрепленными.

ПРИМЕР 1. ПОЛНОЕ РАСКРЫТИЕ ТРЕЩИНЫ. Пусть на нижней и верхней границах области заданы поверхностные силы $f = (0, -0.01\mu)$ и $f = (0, 0.01\mu)$ соответственно. При данном типе нагружения деформированная конфигурация области характеризуется полным раскрытием трещины (рис. 3, 4).

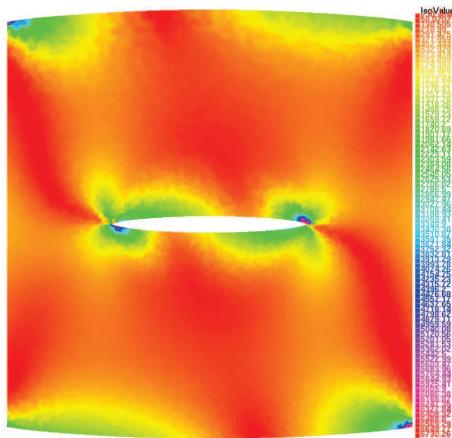


Рис. 3. Деформированная конфигурация области и распределение напряжений Мизеса (МПа), пример 1.

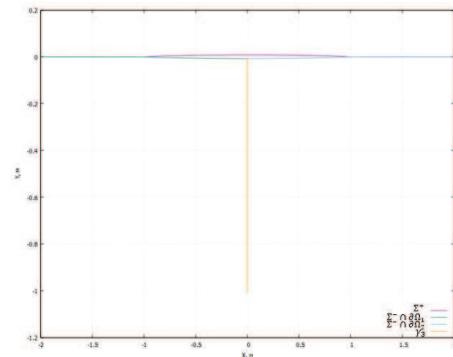


Рис. 4. Деформированная конфигурация кривых $\Sigma \cup \gamma_3$, пример 1.

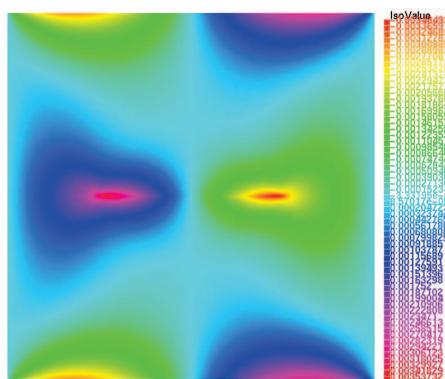


Рис. 5. Горизонтальные перемещения u_1 (м), пример 1.

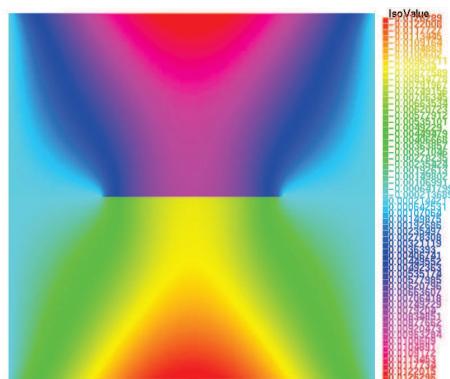


Рис. 6. Вертикальные перемещения u_2 (м), пример 1.

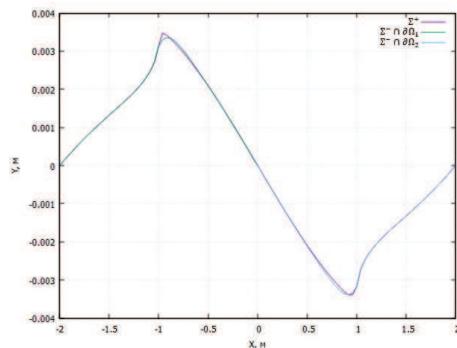


Рис. 7. Горизонтальные перемещения u_1 на интерфейсе Σ , пример 1.

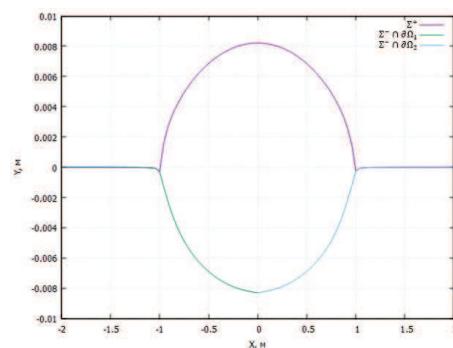


Рис. 8. Вертикальные перемещения u_2 на интерфейсе Σ , пример 1.

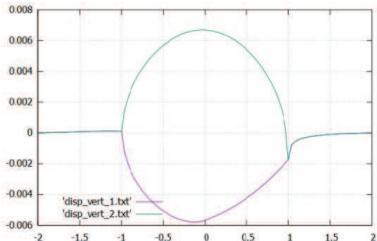


Рис. 9. Вертикальные перемещения точек на интерфейсе (задача о концевом сопряжении двух упругих включений [31]).

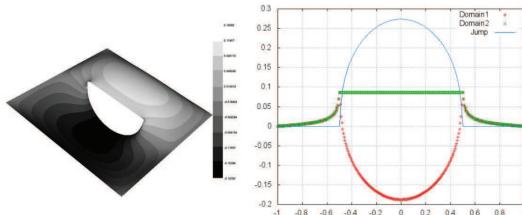


Рис. 4. Example 3. On the left: deformed configuration; On the right: displacements and jump on Σ .

Рис. 10. Перемещения берегов трещины

с тонким жестким включением на одном из них (задача об изгибе мембранны [17]).

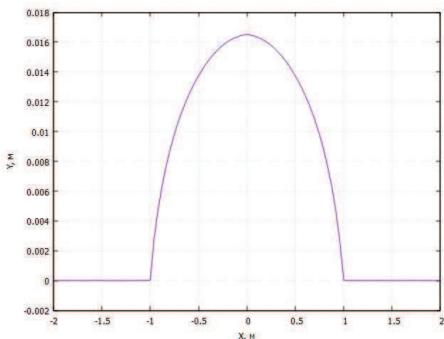


Рис. 11. Скачок $[u_2]$ вертикальных перемещений на Σ , пример 1.

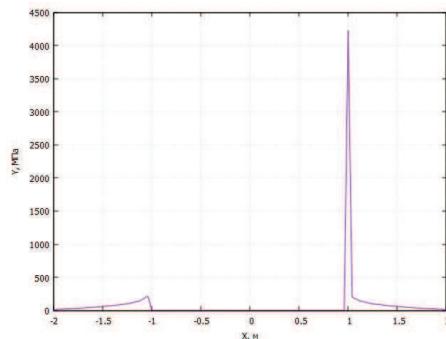


Рис. 12. Значения σ_ν на Σ^+ , пример 1.

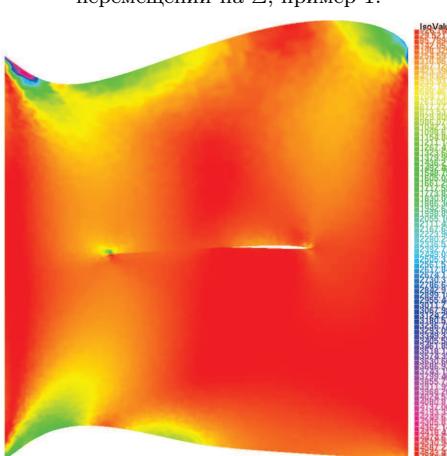


Рис. 13. Деформированная конфигурация области и распределение напряжений Мизеса (МПа), пример 2.

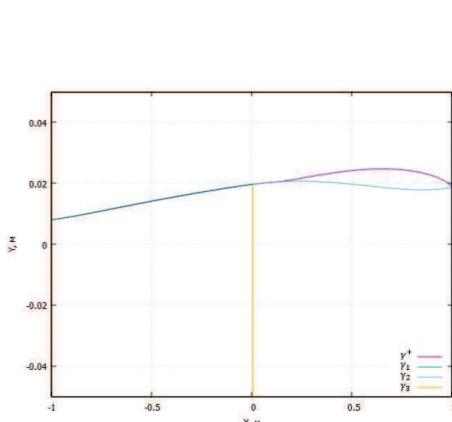


Рис. 14. Деформированная конфигурация $\gamma^\pm \cup \gamma_3$, кривых пример 2.

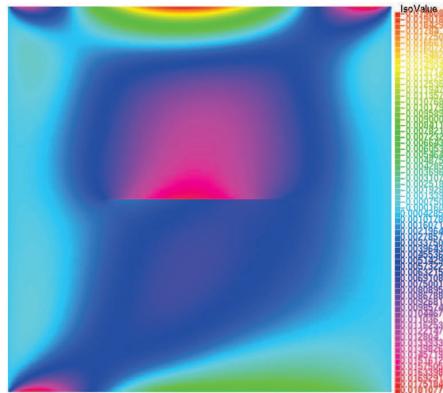


Рис. 15. Горизонтальные перемещения u_1 (м), пример 2

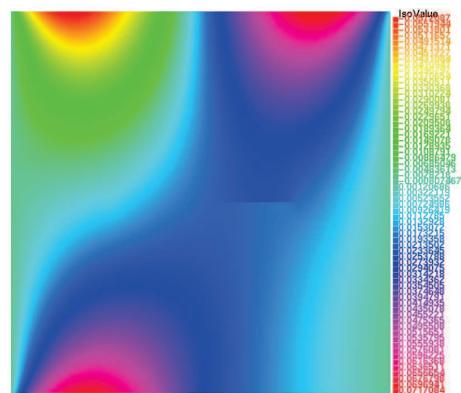


Рис. 16. Вертикальные перемещения u_2 (м), пример 2.

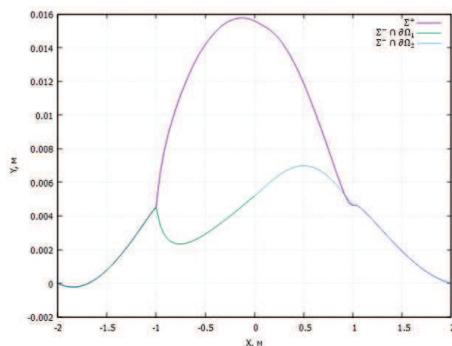


Рис. 17. Горизонтальные перемещения u_1 на интерфейсе Σ , пример 2.

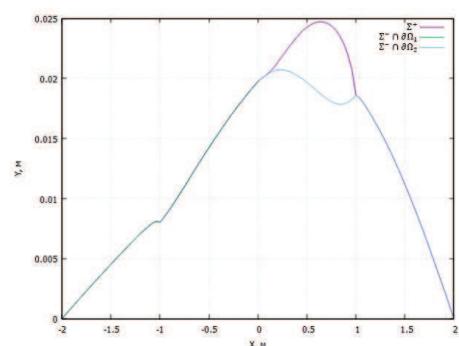


Рис. 18. Вертикальные перемещения u_2 на интерфейсе Σ , пример 2.

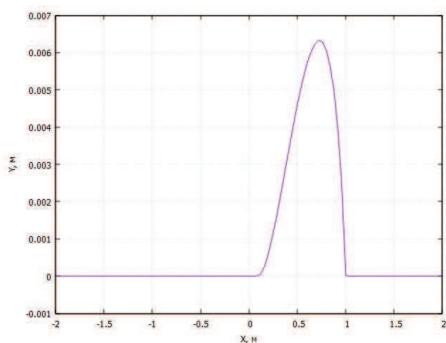


Рис. 19. Скачок $[u_2]$ вертикальных перемещений на Σ , пример 2.

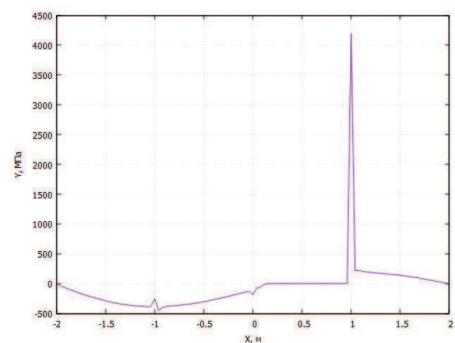


Рис. 20. Нормальные напряжения σ_v на Σ^+ , пример 2.

Значения функций u_1 и u_2 , рассчитанные в области, представлены на рис. 5, 6, а вычисленные на берегах Σ^\pm построены на рис. 7, 8. При вертикальном одностороннем нагружении горизонтальные перемещения u_1 совпадают почти на всей кривой Σ (см. рис. 5, 7), в то время как вертикальные перемещения u_2 имеют скачок на γ (см. рис. 6, 8). Вне трещины перемещения точек Σ^\pm совпадают, поскольку выполнены условия их склейки. Также на рис. 7, 8 видно, что в концевых точках включений формируются угловые точки графиков функций перемещений верхнего берега трещины, не подкрепленного включением, вследствие наличия на нижнем берегу трещины упругих включений, параметр жесткости которых в 10 раз превышает соответствующий параметр упругой матрицы. На рис. 9 приведены графики вертикальных перемещений точек аналогичного интерфейса Σ для задачи о концевом сопряжении двух упругих включений, расположенных также на нижнем берегу трещины, одно из которых моделируется в рамках теории балок Бернулли — Эйлера (точки $(-1, 0)$ на оси абсцисс), а другое — в рамках теории балки Тимошенко (точки $(0, 1)$ на оси абсцисс). Данная задача решена в работе [31] в условиях одинаковых параметров жесткости обоих включений. Видно, что в концевой точке включения Тимошенко также образуется угловая точка графика функции перемещений. На рис. 10 приведены результаты численного решения задачи о прогибе мембранны с отслоившимся тонким жестким включением из статьи [17]. При наличии тонкого жесткого включения, подкрепляющего один из берегов трещины, также образуются угловые точки графика перемещений.

Поскольку трещина имеет полное раскрытие, скачок вертикальных перемещений $[u_2]$ на γ положителен, а в точках вне трещины равен нулю (рис. 11). В соответствии с условиями (16) в точках, в которых $[u_2] > 0$, значения σ_ν равны нулю (рис. 12).

ПРИМЕР 2. ЧАСТИЧНОЕ СМЫКАНИЕ БЕРЕГОВ ТРЕЩИНЫ. Пусть на нижней и верхней границах области заданы поверхностные силы $f = (0, -0.1\mu x_1)$ и $f = (0, 0.1\mu x_1)$ соответственно. Данный тип нагружения соответствует сжатию в левой части квадрата и растяжению — в правой. Наличие вертикального включения γ_3 приводит к тому, что растяжение и сжатие в нижней части деформированной конфигурации имеет меньшие абсолютные значения, чем в верхней части (рис. 13). При этом берега трещины на участке $-1 < x_1 < 0.2$ смыкаются, а на остальной части трещины наблюдается ее раскрытие (рис. 13, 14).

На рис. 15, 16 приведено распределение в области Ω_c значений горизонтальных и вертикальных перемещений. Видно, что скачок перемещений u_1 имеет место по всей длине трещины (также см. рис. 17), а перемещений u_2 — только в точках раскрытия трещины (рис. 16, 18). Также отсутствует симметрия в распределении значений перемещений, связанная с наличием вертикального

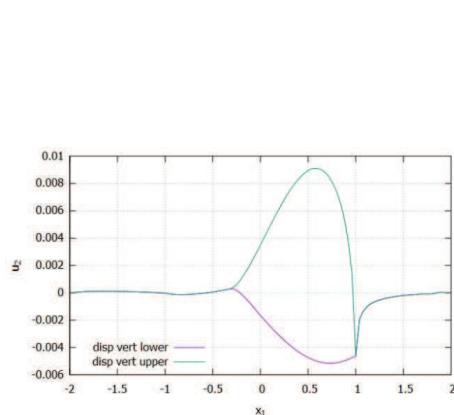


Рис. 21. Вертикальные перемещения u_2 (м) точек интерфейса (задача о концевом сопряжении двух упругих включений [31].

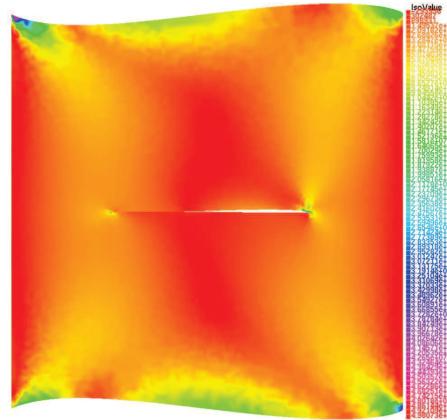


Рис. 22. Деформированная конфигурация области и распределение напряжений Мизеса, МПа (задача о концевом сопряжении двух упругих включений [31].

включения (рис. 15–18).

На рис. 19, 20 изображены графики скачков вертикальных перемещений и нормальных напряжений в точках Σ . В точках, где наблюдается смыкание трещины, а также вне трещины скачки равны нулю, а в точках раскрытия трещины скачок принимает положительные значения. В точках трещины в соответствии с условиями (16) произведение $[u_2]\sigma_\nu$ равно нулю: при смыкании трещины выполнены условия $[u_2] = 0$ и $\sigma_\nu^+ < 0$, а при раскрытии трещины — условия $[u_2] > 0$ и $\sigma_\nu^+ = 0$. Также из рис. 20 видно, что в концевых точках включений наблюдаются особенности графиков нормальных напряжений, что согласуется с известными теоретическими результатами в механике [32]. Для сравнения на рис. 21, 22 приведены график вертикальных перемещений интерфейса и деформированная конфигурация области в задаче о концевом сопряжении двух упругих включений, расположенных на нижнем берегу трещины, в условиях с аналогичным нагружением [31].

ЛИТЕРАТУРА

1. Itou H., Khludnev A. M. On delaminated thin Timoshenko inclusions inside elastic bodies // Math. Meth. Appl. Sci. 2016. V. 39. P. 4980–4993.
2. Khludnev A. M., Leugering G. R. On Timoshenko thin elastic inclusions inside elastic bodies // Math. Mech. Solids. 2015. V. 20, N 5. P. 495–511.
3. Khludnev A. M., Popova T. S. Timoshenko inclusions in elastic bodies crossing an external boundary at zero angle // Acta Mechanica Solidia Sinica. 2017. V. 30, N 3. P. 327–333.
4. Khludnev A. M., Shcherbakov V. V. Singular invariant integrals for elastic bodies with thin elastic inclusions and cracks // Dokl. Phys. 2016. V. 61, N 12. P. 615–619.

5. Khludnev A. M. Thin inclusions in elastic bodies crossing an external boundary // Z. Angew. Math. Mech. 2015. V. 95, N 11. P. 1256–1267.
6. Khludnev A. M., Leugering G. R. Delaminated thin elastic inclusion inside elastic bodies // Math. Mech. Complex Systems. 2014. V. 2, N 1. P. 1–21.
7. Itou H., Khludnev A. M., Rudoy E. M. et al. Asymptotic behaviour at a tip of a rigid line inclusion in linearized elasticity // Z. Angew. Math. Mech. 2012. V. 92, N 9. P. 716–730.
8. Shcherbakov V. Energy release rates for interfacial cracks in elastic bodies with thin semirigid inclusions // Z. Angew. Math. Phys. 2017. V. 68, N 1. A. 26.
9. Хлуднев А. М., Попова Т. С. Об иерархии тонких включений в упругих телах // Мат. заметки СВФУ. 2016. Т. 23, № 1. С. 87–107.
10. Rudoy E.M. Asymptotic justification of models of plates containing inside hard thin inclusions // Technologies. 2017. V. 8. 59.
11. Rudoy E.M., Itou H., Lazarev N.P. Asymptotic justification of the models of thin inclusions in an elastic body in the antiplane shear problem // J. Appl. Industr. Math. 2021. V. 15, N 1. P. 129–140.
12. Ljulj M., Tambaca J. 3D structure–2D plate–1D rod interaction problem // Math. Methods Appl. Sci. 2023. V.46(8). P. 9053–907.
13. Popova T., Rogerson G. A. On the problem of a thin rigid inclusion embedded in a Maxwell material // Z. Angew. Math. Phys. 2016. V. 67, N 105. A. 105.
14. Popova T. S. Problems of thin inclusions in a two-dimensional viscoelastic body // J. Appl. Ind. Math. 2018. V. 12. P. 313–324.
15. Furtsev A.I., Fankina I.V., Rodionov A.A., Ponomarev D.A. Asymptotic modeling of steady vibrations of thin inclusions in a thermoelastic composite // ZAMP. 2023. V.74. 195.
16. Rudoy E., Sazhenkov S. Variational approach to modeling of curvilinear thin inclusions with rough boundaries in elastic bodies: case of a rod type inclusion // Mathematics. 2023. V. 11, N 16. 3447.
17. Rudoy E. M. Domain decomposition method for a membrane with a delaminated thin rigid inclusion // Sib. Electron. Math. Rep. 2016. V. 13. P. 395–410.
18. Kazarinov N.A., Rudoy E.M., Slesarenko V.Y. et al. Mathematical and numerical simulation of equilibrium of an elastic body reinforced by a thin elastic inclusion // Comput. Mathematics and Math. Phys. 2018. N 58. P. 761–774.
19. Рудой Е. М. Численное решение задачи о равновесии упругого тела с отслоившимся тонким жестким включением // Сиб. журн. индустр. математики. 2016. Т. 19, № 2. С. 74–87.
20. Rudoy E. M., Lazarev N. P. Domain decomposition technique for a model of an elastic body reinforced by a Timoshenko's beam // J. Comput. Appl. Math. 2018. V. 334. P. 18–26.
21. Khludnev A. M., Faella L., Popova T. S. Junction problem for rigid and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies // Mathematics and Mechanics of Solids. 2017. V. 22, N 4. P. 737–750.
22. Khludnev A. M., Popova T. S. On the mechanical interplay between Timoshenko and semirigid inclusions embedded in elastic bodies // Z. Angew. Math Mech. 2017. V. 97. P. 1406–1417.
23. Хлуднев А. М., Попова Т. С. Задача сопряжения упругого включения Тимошенко и полужесткого включения // Мат. заметки СВФУ. 2018. Т. 25, № 1. С. 73–86.
24. Popova T.S. On numerical solving of junction problem for the thin rigid and elastic inclusions in elastic body // Lobachevskii J. Mathematics, 2023. V. 44, N 10. P. 4143–4156.
25. Khludnev A. M., Popova T. S. Equilibrium problem for elastic body with delaminated T-shape inclusion // J. Comp. Appl. Math. 2020. V. 376. A. 112870.
26. Khludnev A. M. T-shape inclusion in elastic body with a damage parameter // J. Comput. Appl. Math. 2021. V. 393. A. 113540.
27. Попова Т. С. Задача о Т-образном сопряжении двух тонких включений Тимошенко в двумерном упругом теле // Мат. заметки СВФУ. 2023. Т. 30, № 2. С. 40–55.
28. Dumont S., Rizzoni R., Lebon F., Sacco E. Soft and hard interface models for bonded elements // Composites Part B: Engineering. 2018. V. 153. P. 480–490.
29. Dumont S., Lebon F., Rizzoni R. Imperfect interfaces with graded materials and unilateral conditions: theoretical and numerical study // Mathematics and Mechanics of Solids. 2018. V. 23(3). P. 445–460.

30. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
31. Попова Т. С. Задачи равновесия неоднородных деформируемых тел с тонкими включениями при наличии отслоений. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Якутск, 2021.
32. Александров В. М., Сметанин Б. И., Соболь Б. В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Физматлит, 1993.

Поступила в редакцию 4 марта 2024 г.

После доработки 3 июня 2024 г.

Принята к публикации 1 октября 2024 г.

Попова Татьяна Семеновна
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
ул. Кулачковского, 48, Якутск 677000
ptsokt@mail.ru

NUMERICAL SOLUTION OF THE
PROBLEM OF T-SHAPED JUNCTION
OF TWO THIN TIMOSHENKO INCLUSIONS
IN A TWO-DIMENTIONAL ELASTIC BODY

T. S. Popova

Abstract: An algorithm for the numerical solution of the equilibrium problem of a two-dimensional elastic body containing two thin elastic inclusions is developed. The inclusions are modeled within the framework of the theory of Timoshenko beams and intersect at right angle at an internal point of one of them, forming a T-shaped structure in an elastic body. One of the inclusions delaminates from the elastic matrix, forming a crack. On the crack faces, as part of the domain boundary, boundary conditions of the inequality form are specified. The presence of this type of boundary conditions leads to nonlinearity of the problem and formulation in the form of a variational inequality. To develop an algorithm for the numerical solution of the problem, an approximate problem of finding the saddle point of the Lagrangian is formulated. The convergence of solutions of the approximate problem to the solution of the original problem is proven. An iterative Uzawa-type algorithm is constructed and its convergence is shown. Examples of numerical implementation are given.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-3-93-120

Keywords: variational inequality, Timoshenko inclusion, thin elastic inclusion, crack, non-penetration conditions, nonlinear boundary conditions, junction problem, Uzawa algorithm, finite element method.

REFERENCES

1. Itou H. and Khludnev A. M., “On delaminated thin Timoshenko inclusions inside elastic bodies,” *Math. Meth. Appl. Sci.*, **39**, 4980–4993 (2016).
2. Khludnev A. M. and Leugering G. R., “On Timoshenko thin elastic inclusions inside elastic bodies,” *Math. Mech. Solids*, **20**, No. 5, 495–511 (2015).
3. Khludnev A. M. and Popova T. S., “Timoshenko inclusions in elastic bodies crossing an external boundary at zero angle,” *Acta Mech. Solidi Sin.*, **30**, No. 3, 327–333 (2017).
4. Khludnev A. M. and Shcherbakov V. V., “Singular invariant integrals for elastic bodies with thin elastic inclusions and cracks,” *Dokl. Phys.*, **61**, No. 12, 615–619 (2016).
5. Khludnev A. M., “Thin inclusions in elastic bodies crossing an external boundary,” *Z. Angew. Math. Mech.*, **95**, No. 11, 1256–1267 (2015).
6. Khludnev A. M. and Leugering G. R., “Delaminated thin elastic inclusion inside elastic bodies,” *Math. Mech. Complex Syst.*, **2**, No. 1, 1–21 (2014).
7. Itou H., Khludnev A. M., Rudoy E. M., et al., “Asymptotic behaviour at a tip of a rigid line inclusion in linearized elasticity,” *Z. Angew. Math. Mech.*, **92**, No. 9, 716–730 (2012).
8. Shcherbakov V., “Energy release rates for interfacial cracks in elastic bodies with thin semirigid inclusions,” *Z. Angew. Math. Phys.*, **68**, No. 1, article ID 26 (2017).

9. Khludnev A. M. and Popova T. S., “On the hierarchy of thin inclusions in elastic bodies [in Russian],” *Mat. Zamet. SVFU*, **23**, No. 1, 87–107 (2016).
10. Rudoy E. M., “Asymptotic justification of models of plates containing inside hard thin inclusions,” *Technologies*, **8**, 59 (2017).
11. Rudoy E. M., Itou H., and Lazarev N. P., “Asymptotic justification of the models of thin inclusions in an elastic body in the antiplane shear problem,” *J. Appl. Ind. Math.*, **15**, No. 1, 129–140 (2021).
12. Ljulj M. and Tambaca J., “3D structure–2D plate–1D rod interaction problem,” *Math. Methods Appl. Sci.*, **46**, No. 2 (2023).
13. Popova T. and Rogerson G. A., “On the problem of a thin rigid inclusion embedded in a Maxwell material,” *Z. Angew. Math. Phys.*, **67**, No. 4, article ID 105 (2016).
14. Popova T. S., “Problems of thin inclusions in a two-dimensional viscoelastic body,” *J. Appl. Ind. Math.*, **12**, 313–324 (2018).
15. Furtsev A. I., Fankina I. V., Rodionov A. A., and Ponomarev D. A., “Asymptotic modeling of steady vibrations of thin inclusions in a thermoelastic composite,” *Z. Angew. Math. Phys.*, **74**, article ID 195 (2023).
16. Rudoy E. and Sazhenkov S., “Variational approach to modeling of curvilinear thin inclusions with rough boundaries in elastic bodies: case of a rod type inclusion,” *Mathematics*, **11**, No. 16, 3447 (2023).
17. Rudoy E. M., “Domain decomposition method for a membrane with a delaminated thin rigid inclusion [in Russian],” *Sib. Electron. Math. Rep.*, **13**, 395–410 (2016).
18. Kazarinov N. A., Rudoy E. M., Slesarenko V. Y., et al., “Mathematical and numerical simulation of equilibrium of an elastic body reinforced by a thin elastic inclusion,” *Comput. Math. Math. Phys.*, **58**, 761–774 (2018).
19. Rudoy E. M., “Numerical solution of an equilibrium problem for an elastic body with a delaminated thin rigid inclusion,” *J. Appl. Ind. Math.*, **10**, No. 2, 264–276 (2016).
20. Rudoy E. M. and Lazarev N. P., “Domain decomposition technique for a model of an elastic body reinforced by a Timoshenko’s beam,” *J. Comput. Appl. Math.*, **334**, 18–26 (2018).
21. Khludnev A. M., Faella L., and Popova T. S., “Junction problem for rigid and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies,” *Math. Mech. Solids*, **22**, No. 4, 737–750 (2017).
22. Khludnev A. M. and Popova T. S., “On the mechanical interplay between Timoshenko and semirigid inclusions embedded in elastic bodies,” *Z. Angew. Math. Mech.*, **97**, 1406–1417 (2017).
23. Khludnev A. M. and Popova T. S., “On junction problem for elastic Timoshenko inclusion and semi-rigid inclusion [in Russian],” *Mat. Zamet. SVFU*, **25**, No. 1, 73–86 (2018).
24. Popova T. S., “On numerical solving of junction problem for the thin rigid and elastic inclusions in elastic body,” *Lobachevskii J. Math.*, **44**, No. 10, 4143–4156 (2023).
25. Khludnev A. M. and Popova T. S., “Equilibrium problem for elastic body with delaminated T-shape inclusion,” *J. Comput. Appl. Math.*, **376**, article ID 112870 (2020).
26. Khludnev A. M., “T-shape inclusion in elastic body with a damage parameter,” *J. Comput. Appl. Math.*, **393**, article ID 113540 (2021).
27. Popova T. S., “The problem of T-shaped junction of two thin Timoshenko inclusions in a two-dimensional elastic body,” *Mat. Zamet. SVFU*, **30**, No. 2, 40–55 (2023).
28. Dumont S., Rizzoni R., Lebon F., and Sacco E., “Soft and hard interface models for bonded elements,” *Composites, Part B: Engineering*, **153**, 480–490 (2018).
29. Dumont S., Lebon F., and Rizzoni R., “Imperfect interfaces with graded materials and unilateral conditions: theoretical and numerical study,” *Math. Mech. Solids*, **23**, No. 3, 445–460 (2018).
30. Ekeland I. and Temam R., *Convex Analysis and Variational Problems*, North-Holland, Amsterdam; Elsevier, New York (1976).
31. Popova T. S., *Problems of Equilibrium of Inhomogeneous Deformable Bodies with Thin Inclusions in Presence of Delamination [in Russian]*, Diss. ... Dokt. Fiz.-Mat. Nauk, Yakutsk (2021).
32. Alexandrov V. M., Smetanin B. I., and Sobol B. V., *Thin Stress Concentrators in Elastic*

Bodies [in Russian], Fizmatlit, Moscow (1993).

Submitted March 4, 2024

Revised June 3, 2024

Accepted October 1, 2024

Tatiana S. Popova
Ammosov North-Eastern Federal University,
Institute of Mathematics and Informatics,
48 Kulakovskiy Street, Yakutsk 677000, Russia
ptsokt@mail.ru

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. К публикации в журнале «Математические заметки СВФУ» принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики, механики и информатики. Статьи, опубликованные ранее, а также направленные в другие издания, редакцией не рассматриваются. Редакционный совет вправе воздержаться от принятия статьи к рассмотрению, если она не соответствует профилю журнала.

2. Направляя статью в редакцию журнала, автор (соавторы) на безвозмездной основе передает(ют) издателю на срок действия авторского права по действующему законодательству РФ исключительное право на использование статьи или отдельной ее части (в случае принятия статьи к опубликованию) на территории всех государств, где авторские права в силу международных договоров Российской Федерации являются охраняемыми, в том числе следующие права: на воспроизведение, на распространение, на публичный показ, на доведение до всеобщего сведения, на перевод на иностранные языки (и исключительное право на использование переведенного произведения вышеуказанными способами), на предоставление всех вышеперечисленных прав другим лицам. Одновременно со статьей автор (соавторы) направляет в редакцию подписанный лицензионный договор на право использования научного произведения в журнале. Образец договора высыпается авторам по электронной почте вместе с сообщением о принятии статьи к печати.

3. Для рассмотрения статьи на предмет ее публикации в журнале в редакцию представляются текст статьи объемом не более 1,5 авторских листов (18 страниц журнального текста), написанной на русском или, по согласованию с редакцией, на английском языке, а также сопроводительное письмо, в котором сообщается, что статья направляется именно в журнал «Математические заметки СВФУ», и информация об авторе (коллективе авторов) с указанием фамилии, имени и отчества, полного почтового адреса для переписки, места работы, подробного служебного адреса, адреса электронной почты и номера телефона. Статьи объемом более 1,5 авторских листов, как правило, не рассматриваются и могут быть приняты к рассмотрению и опубликованы лишь по специальному решению редакционного совета.

4. Статья должна быть подготовлена с использованием текстового редактора LaTeX и представлена в виде файлов форматов pdf и tex.

5. В начале статьи указывается индекс УДК и/или MSC. Статья сопровождается аннотацией объемом не менее 100 слов, желательно без формул, и списком ключевых слов. Аннотация и список должны быть представлены на русском и английском языках.

6. Список литературы печатается в конце текста. Ссылки на литературу в тексте нумеруются в порядке их появления и даются в квадратных скобках. Ссылки на неопубликованные работы нежелательны. Оформление литературы должно соответствовать требованиям стандартов (примеры библиографических описаний см. в последних номерах журнала).

7. Издание осуществляет рецензирование всех поступающих в редакцию материалов, соответствующих ее тематике, с целью их экспертной оценки. Все рецензенты являются признанными специалистами по тематике рецензируемых материалов и имеют в течение последних 3 лет публикации по тематике рецензируемой статьи. Рецензии хранятся в редакции издания в течение 5 лет.

8. Принятая к рассмотрению статья направляется на анонимное рецензирование. На основании рецензии редсовет принимает решение о возможности публикации статьи, которое сообщается автору. Автор вправе сообщить свои замечания и возражения к рецензии. Повторное решение редсовета по статье является окончательным.

9. Редакция издания направляет авторам представленных материалов копии рецензий или мотивированный отказ, а также обязуется направлять копии рецензий в Министерство науки и высшего образования Российской Федерации при поступлении в редакцию издания соответствующего запроса.

10. После редакционной подготовки непосредственно перед публикацией автору высыпается корректура. По возможности в наиболее короткие сроки необходимо ее прочесть, внести исправления (правка против авторского оригинала нежелательна) и направить в редакцию. Статья выходит в свет только после получения от автора (коллектива авторов) авторской корректуры, подписанной автором (всеми соавторами) в печать.

11. В соответствии с международными законами об авторском праве Редакция уведомляет авторов журнала об их ответственности за получение ими в случае необходимости письменного разрешения на использование охраняемых авторским правом материалов, таких, как цитаты, воспроизведение данных, иллюстраций и любых иных материалов, которые могут быть использованы в их публикациях, а также о том, что вытекающая отсюда ответственность за нарушение таких авторских прав лежит на авторах. Плата за опубликование с авторами или учреждений, где работают авторы, не взимается, и опубликованные статьи не оплачиваются.

12. Права авторов на использование материалов статей и переводов статей из журнала «Математические заметки СВФУ» в иных публикациях определяются общими международными и российскими законами об авторских правах.



Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций
Свидетельство о регистрации № ПИ № ФС 77-59001 от 11.08.2014 г.

Учредитель: ФГАОУ ВО «Северо-Восточный
федеральный университет имени М. К. Аммосова»
ул. Белинского, 58, Якутск 677000

Подписано в печать 15.10.2024. Дата выхода 11.11.2024. Формат 70 × 108/16. Печать офсетная.
Печ. л. 10,85. Уч.-изд. л. 11,0. Тираж 50 экз. Заказ № 235.

Издательский дом Северо-Восточного федерального университета,
677891, г. Якутск, ул. Петровского, 5.
Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии ИД СВФУ