СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. К. АММОСОВА

ISSN 2411-9326

Математические заметки СВФУ

Том 29
№ 4. 2023

СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М. К. АММОСОВА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ СВФУ

ОСНОВАН В 1994 ГОДУ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ВЫХОДИТ 4 РАЗА В ГОД

Том 30, № 4 (120) Октябрь—декабрь, 2023

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Математическое моделирование

Адрес издателя:
СВФУ, ул. Белинского, 58, Якутск, 677000

Адрес редакции:
СВФУ, ул. Кулаковского, 48, каб. 543, Якутск, 677000
Телефон: 8(4112)32-14-99, Факс: 8(4112)36-43-47;
http://mzsvfu.ru
e-mail: prokopevav85@gmail.com; yktmatzam@gmail.com; ivanegorov51@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2023. Том 30, № 4

УДК 517.955

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Л. Н. Бондарь, С. Б. Мингнаров

Аннотация. Рассматривается задача Коши для одной системы, не разрешенной относительно старшей производной по времени. Исследуемая система относится к классу псевдогиперболических. Система описывает поперечные изгибно-крутильные колебания упругого стержня. Доказана однозначная разрешимость задачи Коши в соболевских пространствах, получены оценки на решение.

DOI: 10.25587/2411-9326-2023-4-3-11

Ключевые слова: система, не разрешенная относительно старшей производной, псевдогиперболическая система, изгибно-крутильные колебания.

1. Введение

В работе рассматривается следующая система:

$$\begin{pmatrix} I-\alpha D_x^2 & 0 & a_1 \\ 0 & I-\alpha D_x^2 & -a_2 \\ ca_1 & -ca_2 & I-\alpha D_x^2 \end{pmatrix} D_t^2 \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} D_x^4 & 0 & 0 \\ 0 & D_x^4 & 0 \\ 0 & 0 & D_x^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^1(t,x) \\ f^2(t,x) \\ f^3(t,x) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $\alpha, \beta > 0$, $0 < c\big(a_1^2 + a_2^2\big) < 1$. Система (1) является не разрешенной относительно старшей производной по времени и описывает поперечные изгибно-крутильные колебания упругого стержня (см. [1]).

В монографии [2] была введена классификация уравнений, не разрешенных относительно старшей производной:

$$L_0(D_x)D_t^l u + \sum_{k=0}^{l-1} L_{l-k}(D_x)D_t^k u = f(t,x),$$

где $L_0(D_x)$, $L_{l-k}(D_x)$ — линейные дифференциальные операторы. В частности, был введен класс псевдогиперболических уравнений и исследована задача Коши для него. Дальнейшие исследования разрешимости задачи Коши для

Работа Бондарь Л. Н. выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

псевдогиперболических уравнений проводились в [3–5] и др. Для псевдогиперболических систем общей теории разрешимости задачи Коши нет, есть лишь единичные результаты для конкретных систем. Рассматриваемая система (1) относится к классу псевдогиперболических систем (см. [2]).

Сделав замену

$$\widetilde{x}=\frac{x}{\sqrt{\alpha}},\quad \widetilde{t}=\frac{c}{\alpha\sqrt{\beta}}t,\quad \widetilde{\theta}(\widetilde{t},\widetilde{x})=\frac{\theta(t,x)}{\sqrt{c}},\quad \widetilde{u}(\widetilde{t},\widetilde{x})=u(t,x),$$

$$\widetilde{v}(\widetilde{t},\widetilde{x})=v(t,x),\quad \varepsilon_1=\sqrt{c}a_1,\quad \varepsilon_2=\sqrt{c}a_2,$$

$$\widetilde{f}^1(\widetilde{t},\widetilde{x})=\frac{\alpha^2\beta}{c^2}f^1(t,x),\quad \widetilde{f}^2(\widetilde{t},\widetilde{x})=\frac{\alpha^2\beta}{c^2}f^2(t,x),\quad \widetilde{f}^3(\widetilde{t},\widetilde{x})=\frac{\alpha^2\beta}{c^{\frac{3}{2}}}f^3(t,x),$$

систему (1) перепишем в виде

$$\begin{pmatrix} I-D_{\widetilde{x}}^2 & 0 & \varepsilon_1\\ 0 & I-D_{\widetilde{x}}^2 & -\varepsilon_2\\ \varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & I-D_{\widetilde{x}}^2\end{pmatrix} D_{\widetilde{t}}^2 \begin{pmatrix}\widetilde{u}\\ \widetilde{v}\\ \widetilde{\theta}\end{pmatrix} + c^2\begin{pmatrix} D_{\widetilde{x}}^4 & 0 & 0\\ 0 & D_{\widetilde{x}}^4 & 0\\ 0 & 0 & D_{\widetilde{x}}^4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{u}\\ \widetilde{v}\\ \widetilde{\theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\widetilde{f}_1(\widetilde{t},\widetilde{x})\\ \widetilde{f}_2(\widetilde{t},\widetilde{x})\\ \widetilde{f}_3(\widetilde{t},\widetilde{x})\end{pmatrix}.$$

Для сокращения записи в системе оставим прежние обозначения, т. е. далее будем рассматривать следующую систему:

$$\begin{pmatrix} I-D_x^2 & 0 & \varepsilon_1\\ 0 & I-D_x^2 & -\varepsilon_2\\ \varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & I-D_x^2\end{pmatrix} D_t^2 \begin{pmatrix}u\\ v\\ \theta\end{pmatrix} + c^2\begin{pmatrix} D_x^4 & 0 & 0\\ 0 & D_x^4 & 0\\ 0 & 0 & D_x^4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\\ \theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f^1(t,x)\\ f^2(t,x)\\ f^3(t,x)\end{pmatrix}. \quad (2)$$

Если $\varepsilon_2=0$, $\varepsilon_1>0$, то система (2) распадается на псевдогиперболическое уравнение

$$\big(I-D_x^2\big)D_t^2v+c^2D_x^4v=f^2(t,x) \quad (3)$$

и псевдогиперболическую систему

$$\begin{cases} \big(I-D_x^2\big)D_t^2u+c^2D_x^4u+\varepsilon_1D_t^2\theta=f^1(t,x),\\ \big(I-D_x^2\big)D_t^2\theta+c^2D_x^4\theta+\varepsilon_1D_t^2u=f^3(t,x).\end{cases} \quad (4)$$

Если в системе (4) сделать замену

$$\widetilde{u}=u+\theta,\quad \widetilde{\theta}=u-\theta,$$

то она распадется на два псевдогиперболических уравнения

$$\begin{gathered}\big(I-D_x^2\big)D_t^2\widetilde{u}+c^2D_x^4\widetilde{u}+\varepsilon_1D_t^2\widetilde{u}=g_1(t,x),\\ \big(I-D_x^2\big)D_t^2\widetilde{\theta}+c^2D_x^4\widetilde{\theta}-\varepsilon_1D_t^2\widetilde{\theta}=g_2(t,x).\end{gathered} \quad (5)$$

Уравнение вида (3), (5) в литературе называют *уравнением Власова* [1, 6], а также уравнением Релея — Бишопа [7–9]. Разрешимость задачи Коши в соболевском пространстве для таких уравнений следует из работы [3].

Если же $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, то система (2) распадается на три псевдогиперболических уравнения вида (3).

Далее в системе (2) будем предполагать $\varepsilon_1 \neq 0$ и $\varepsilon_2 \neq 0$.

Наша цель — доказательство однозначной разрешимости задачи Коши для псевдогиперболической системы (2) в соболевских пространствах, получение оценок на решение.

2. Формулировка результатов

Рассмотрим задачу Коши для псевдогиперболической системы:

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} I - D_x^2 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & I - D_x^2 & -\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & I - D_x^2 \end{pmatrix} D_t^2 U + c^2 \begin{pmatrix} D_x^4 & 0 & 0 \\ 0 & D_x^4 & 0 \\ 0 & 0 & D_x^4 \end{pmatrix} U = F(t,x), \\ t > 0, \quad x \in R, \\ U|_{t=0} = \Phi(x), \quad D_t U|_{t=0} = \Psi(x), \end{gathered} \tag{6}$$

где

$$U(t,x) = (u(t,x), v(t,x), \theta(t,x))^T, \quad F(t,x) = (f^1(t,x), f^2(t,x), f^3(t,x))^T,$$

$$\Phi(x) = (\varphi^1(x), \varphi^2(x), \varphi^3(x))^T, \quad \Psi(x) = (\psi^1(x), \psi^2(x), \psi^3(x))^T,$$

$c > 0$, $0 < \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 < 1$, $\varepsilon_1 \neq 0$, $\varepsilon_2 \neq 0$.

Дадим определения анизотропных соболевских пространств (см., например, [2]), которые понадобятся при доказательстве разрешимости задачи (6).

Определение 1. Функция $u(t,x) \in L_2(G)$ *принадлежит анизотропному соболевскому пространству* $W_2^{l_1,l_2}(G)$, $G \subseteq R^2$, $l_1, l_2 \in N$, если существуют обобщенные производные

$$D_t^{\alpha_1} D_x^{\alpha_2} u(t,x), \quad \alpha_1/l_1 + \alpha_2/l_2 \leq 1,$$

в области G, при этом $D_t^{\alpha_1} D_x^{\alpha_2} u(t,x) \in L_2(G)$. Введем норму

$$\left\| u, W_2^{l_1,l_2}(G) \right\| = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2):\alpha_1/l_1+\alpha_2/l_2 \leq 1} \left\| D_t^{\alpha_1} D_x^{\alpha_2} u, L_2(G) \right\|.$$

Определение 2. Функция $u(t,x)$ *принадлежит анизотропному соболевскому пространству с экспоненциальным весом* $W_{2,\gamma}^{l_1,l_2}(G)$, $\gamma > 0$, если $e^{-\gamma t} u(t,x) \in W_2^{l_1,l_2}(G)$. Полагаем

$$\left\| u(t,x), W_{2,\gamma}^{l_1,l_2}(G) \right\| = \left\| e^{-\gamma t} u(t,x), W_2^{l_1,l_2}(G) \right\|.$$

Определение 3. Функция $f(t,x)$ *принадлежит анизотропному соболевскому пространству* $W^{0,1}_{2,\gamma}(G)$, $\gamma > 0$, если $e^{-\gamma t} f(t,x) \in L_2(G)$, существует обобщенная производная $D_x f(t,x)$ в G, при этом $e^{-\gamma t} D_x f(t,x) \in L_2(G)$. Полагаем

$$\left\| f(t,x), W^{0,1}_{2,\gamma}(R^2_+) \right\| = \| e^{-\gamma t} f(t,x), L_2(G) \| + \| e^{-\gamma t} D_x f(t,x), L_2(G) \|.$$

Будем говорить, что $V(t,x) = (v^1(t,x), v^2(t,x), v^3(t,x))^T$ *принадлежит* $W^{l_1,l_2}_{2,\gamma}(G)$, если $v^j(t,x) \in W^{l_1,l_2}_{2,\gamma}(G)$, $j = 1,2,3$. Полагаем

$$\left\| V(t,x), W^{l_1,l_2}_{2,\gamma}(G) \right\| = \sum_{j=1}^{3} \left\| v^j(t,x), W^{l_1,l_2}_{2,\gamma}(G) \right\|.$$

В работе доказана следующая

Теорема. *Пусть* $F(t,x) \in W^{0,1}_{2,\gamma}(R^2_+)$, $\Phi(x) \in W^4_2(R)$, $\Psi(x) \in W^3_2(R)$. *Тогда задача Коши* (6) *имеет единственное решение* $U(t,x)$ *в пространстве вектор-функций* $W^{2,4}_{2,\gamma}(R^2_+)$, $\gamma > 0$, *таких, что* $D^2_t D^2_x U \in L_{2,\gamma}(R^2_+)$, *при этом справедлива оценка*

$$\begin{aligned} &\left\| U(t,x), W^{2,4}_{2,\gamma}(R^2_+) \right\| + \left\| D^2_t D^2_x U(t,x), L_{2,\gamma}(R^2_+) \right\| \\ &\qquad \le c(\gamma) \Big(\left\| \Phi(x), W^4_2(R) \right\| + \left\| \Psi(x), W^3_2(R) \right\| + \left\| F(t,x), W^{0,1}_{2,\gamma}(R^2_+) \right\| \Big), \end{aligned} \tag{7}$$

где $c(\gamma)$ — *константа, зависящая от коэффициентов системы и* γ.

3. Разрешимость задачи Коши

Докажем однозначную разрешимость задачи Коши (6) в весовом соболевском пространстве $W^{2,4}_{2,\gamma}(R^2_+)$ и получим оценку на решение.

Для построения решения задачи (6) рассмотрим вспомогательную задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром $\xi \in R$, которая получается при формальном применении оператора Фурье по x к задаче (6):

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} 1+\xi^2 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & 1+\xi^2 & -\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & 1+\xi^2 \end{pmatrix} D^2_t \widehat{U} + c^2 \begin{pmatrix} \xi^4 & 0 & 0 \\ 0 & \xi^4 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^4 \end{pmatrix} \widehat{U} = \widehat{F}(t,\xi), \quad t > 0,\ \xi \in R, \\ \widehat{U}|_{t=0} = \widehat{\Phi}(\xi), \quad D_t \widehat{U}|_{t=0} = \widehat{\Psi}(\xi), \end{gathered} \tag{8}$$

где через $\widehat{v}(t,\xi)$ будем обозначать преобразование Фурье по x функции $v(t,x) \in L_2(R^2_+)$.

Поскольку матрица при производной $D^2_t \widehat{U}$ не вырождается, нетрудно получить формулы решения задачи Коши (8). Представим решение в следующем виде:

$$\widehat{U}(t,\xi) = \widehat{U_1}(t,\xi) + \widehat{U_2}(t,\xi) + \widehat{U_3}(t,\xi), \tag{9}$$

где

$$\widehat{U_1}(t,\xi) = (A\cos(a(\xi)t) + B\cos(b(\xi)t) + D\cos(d(\xi)t))\widehat{\Phi}(\xi), \tag{10}$$

$$\widehat{U_2}(t,\xi) = \left(A\frac{\sin(a(\xi)t)}{a(\xi)} + B\frac{\sin(b(\xi)t)}{b(\xi)} + D\frac{\sin(d(\xi)t)}{d(\xi)}\right)\widehat{\Psi}(\xi), \tag{11}$$

$$\widehat{U_3}(t,\xi) = \int\limits_0^t \left(A\frac{\sin(a(\xi)(t-s))}{a(\xi)} + B\frac{\sin(b(\xi)(t-s))}{b(\xi)} + D\frac{\sin(d(\xi)(t-s))}{d(\xi)}\right)G(s,\xi)\,ds. \tag{12}$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon^2} & \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon^2} & 0 \\ \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon^2} & 1-\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_1^2}{2\varepsilon^2} & -\frac{\varepsilon_1^2}{2\varepsilon^2} & -\frac{\varepsilon_1}{2\varepsilon} \\ -\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{2\varepsilon^2} & \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{2\varepsilon^2} & \frac{\varepsilon_2}{2\varepsilon} \\ -\frac{\varepsilon_1}{2\varepsilon} & \frac{\varepsilon_1}{2\varepsilon} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_1^2}{2\varepsilon^2} & -\frac{\varepsilon_1^2}{2\varepsilon^2} & \frac{\varepsilon_1}{2\varepsilon} \\ -\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{2\varepsilon^2} & \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{2\varepsilon^2} & -\frac{\varepsilon_2}{2\varepsilon} \\ \frac{\varepsilon_1}{2\varepsilon} & -\frac{\varepsilon_1}{2\varepsilon} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}, \tag{14}$$

$$a(\xi) = \frac{c\xi^2}{\sqrt{k(\xi)}}, \quad b(\xi) = \frac{c\xi^2}{\sqrt{k(\xi)-\varepsilon}}, \quad d(\xi) = \frac{c\xi^2}{\sqrt{k(\xi)+\varepsilon}}, \quad k(\xi) = 1+\xi^2,$$

$$G(t,\xi) = \begin{pmatrix} \frac{(k^2(\xi)-\varepsilon_2^2)\widehat{f^1}(t,\xi)-\varepsilon_1\varepsilon_2\widehat{f^2}(t,\xi)-\varepsilon_1 k(\xi)\widehat{f^3}(t,\xi)}{k(\xi)((k(\xi))^2-\varepsilon^2)} \\ \frac{-\varepsilon_1\varepsilon_2\widehat{f^1}(t,\xi)+(k^2(\xi)-\varepsilon_1^2)\widehat{f^2}(t,\xi)+\varepsilon_2 k(\xi)\widehat{f^3}(t,\xi)}{k(\xi)((k(\xi))^2-\varepsilon^2)} \\ \frac{-\varepsilon_1\widehat{f^1}(t,\xi)+\varepsilon_2\widehat{f^2}(t,\xi)+k(\xi)\widehat{f^3}(t,\xi)}{(k(\xi))^2-\varepsilon^2} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Учитывая (10), (13), (14), равенство Парсеваля, оценку

$$|a(\xi)| + |b(\xi)| + |d(\xi)| \le c_1|\xi|, \tag{16}$$

имеем

$$\sum_{\frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2}{4}<1} \left\|(i\xi)^{\beta_2} D_t^{\beta_1}\widehat{U_1}(t,\xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\right\|$$

$$\le \frac{c_2}{\sqrt{\gamma}} \sum_{\frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2}{4}<1} \sum_{j=1}^{3} \||\xi|^{\beta_1+\beta_2}\widehat{\varphi}^j(\xi), L_2(R)\| \le \frac{c_3}{\sqrt{\gamma}}\left\|\Phi(x), W_2^3(R)\right\|. \tag{17}$$

Учитывая оценку (16), будем иметь

$$\left|\frac{\sin(g(\xi)t)}{g(\xi)}\right| \le \frac{c_4}{|\xi|}, \quad |\xi| \ge 1, \quad g(\xi) = a(\xi), b(\xi), d(\xi), \tag{18}$$

а из представления

$$\sin(g(\xi)t) = g(\xi)t\int\limits_0^1 \cos(sg(\xi)t)\,ds, \quad g(\xi) = a(\xi), b(\xi), d(\xi),$$

следует, что

$$\left|\frac{\sin(g(\xi)t)}{g(\xi)}\right| \le t, \quad |\xi| < 1, \quad g(\xi) = a(\xi), b(\xi), d(\xi). \tag{19}$$

Оценки (18), (19) перепишем в одно неравенство:

$$\left|\frac{\sin(g(\xi)t)}{g(\xi)}\right| \le \frac{c_3(t+1)}{1+|\xi|}, \quad \xi \in R, \quad g(\xi) = a(\xi), b(\xi), d(\xi). \tag{20}$$

В силу равенства Парсеваля, учитывая (11), (13), (14), (16), (20), получим

$$\sum_{\frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2}{4}<1} \big\|(i\xi)^{\beta_2} D_t^{\beta_1} \widehat{U_2}(t,\xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\big\|$$
$$\le c_4(\gamma)\left(\sum_{j=1}^{3} \|\widehat{\psi}_j(\xi), L_2(R)\| + \sum_{0<\frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2}{4}<1} \sum_{j=1}^{3} \||\xi|^{\beta_1+\beta_2-1}\widehat{\psi}^j(\xi), L_2(R)\|\right)$$
$$\le c_5(\gamma)\big\|\Psi(x), W_2^2(R)\big\|. \tag{21}$$

Рассуждая аналогично, получим

$$\sum_{j=1}^{2}\big(\big\|D_t^2\widehat{U_j}(t,\xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\big\| + \big\|D_t^2|\xi|^2\widehat{U_j}(t,\xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\big\|$$
$$+ \||\xi|^4\widehat{U_j}(t,\xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\|\big) \le c_6(\gamma)\big(\big\|\Phi(x), W_2^4(R_+^2)\big\| + \big\|\Psi(x), W_2^3(R_+^2)\big\|\big), \tag{22}$$

где константа $c(\gamma) > 0$ зависит от γ и не зависит от U_1, U_2.

Проведем оценку третьего слагаемого из (9).

Учитывая (12), функцию Хевисайда $\theta(t)$, неравенство Юнга, получим

$$\sum_{\beta\le 4} \||\xi|^{\beta}\widehat{U_3}(t,\xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| = \Bigg\||\xi|^{\beta} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta(t-s)e^{-\gamma(t-s)}\bigg(A\frac{\sin(a(\xi)(t-s))}{a(\xi)}$$
$$+ B\frac{\sin(b(\xi)(t-s))}{b(\xi)} + D\frac{\sin(d(\xi)(t-s))}{d(\xi)}\bigg)G(s,\xi)\theta(s)e^{-\gamma s}ds, L_2(R^2)\Bigg\|$$
$$\le \Bigg\||\xi|^{\beta} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \theta(t)e^{-\gamma t}\left|A\frac{\sin(a(\xi)t)}{a(\xi)} + B\frac{\sin(b(\xi)t)}{b(\xi)} + D\frac{\sin(d(\xi)t)}{d(\xi)}\right| dt$$
$$\times \|G(t,\xi)\theta(t)e^{-\gamma t}, L_2(R)\|, L_2(R)\Bigg\|.$$

Из явного вида вектор-функции $G(t,\xi)$ из (15) получаем оценку

$$\|G(t,\xi)\| \le \frac{c_7}{1+\xi^2}\left(\sum_{j=1}^{3}|\widehat{f^j}(t,\xi)|\right), \quad \xi \in R. \tag{23}$$

Пользуясь (13), (14), (20), (23), будем иметь

$$\sum_{\beta\le 4} \||\xi|^{\beta}\widehat{U_3}(t,\xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| \le c_8(\gamma)\big\|F(t,x), W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2)\big\|. \tag{24}$$

Учитывая (12), представим $D_t^2\widehat{U}_3(t,\xi)$ в виде

$$D_t^2\widehat{U_3}(t,\xi) = G(t,\xi) + \int\limits_0^t (Aa(\xi)\sin(a(\xi)(s-t))$$
$$+ Bb(\xi)\sin(b(\xi)(s-t)) + Dd(\xi)\sin(d(\xi)(s-t)))G(s,\xi)\,ds.$$

Следуя схеме, использованной при получении оценки (24), будем иметь

$$\left\|D_t^2\widehat{U_3}(t,\xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\right\| + \left\||\xi|^2 D_t^2\widehat{U_3}(t,\xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\right\| \le c_9(\gamma)\left\|F(t,x), W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2)\right\|, \tag{25}$$

где константа $c_9(\gamma) > 0$ зависит от $\gamma > 0$.

Учитывая представление (9) решения задачи Коши (8), из неравенств (17), (21), (22), (24), (25) и критерия о принадлежности соболевским пространствам $W_2^l(R^n)$ получаем, что обратное преобразование Фурье по ξ вектор-функции

$$U(t,x) = F^{-1}[\widehat{U}](t,x)$$

принадлежит $W_{2,\gamma}^{2,4}(R_+^2)$, является решением задачи Коши (6). Из указанных неравенств вытекает также оценка (7).

Доказательство единственности повторяет рассуждения из [2]. Теорема доказана.

Заключение

В работе доказана разрешимость задачи Коши в соболевском пространстве для одной псевдогиперболической системы (1), моделирующей изгибно-крутильные колебания тонкого упругого стержня, получены L_2-оценки на решение.

Благодарность. Авторы выражают благодарность Г. В. Демиденко за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Власов В. З.* Тонкостенные упругие стержни. М.; Л.: Стройиздат, 1940.
2. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998.
3. *Демиденко Г. В.* Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1289–1303.
4. *Бондарь Л. Н., Демиденко Г. В.* О корректности задачи Коши для псевдогиперболических уравнений в весовых соболевских пространствах // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 5. С. 895–911.
5. *Fedotov I., Volevich L. V.* The Cauchy problem for hyperbolic equations not resolved with respect to the highest time derivative // Russ. J. Math. Phys. 2006. V. 13, N 3. P. 278–292.
6. *Герасимов С. И., Ерофеев В. И.* Задачи волновой динамики элементов конструкций. Саров: ФГУП РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2014.
7. *Bishop R. E. D.* Longitudinal waves in beams // Aeronaut. Q. 1952. V. 3, N 4. P. 280–293.
8. *Rao J. S.* Advanced theory of vibration. New Delhi: Wiley East., 1992.

9. *Федотов И. А., Полянин А. Д., Шаталов М. Ю., Тенкам Э. М.* Продольные колебания стержня Рэлея — Бишопа // Докл. АН. 2010. Т. 435, № 5. С. 613–618.

Поступила в редакцию 24 октября 2023 г.
После доработки 13 ноября 2023 г.
Принята к публикации 30 ноября 2023 г.

Бондарь Лина Николаевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
l.bondar@g.nsu.ru

Мингнаров Санжар Баходир угли
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
s.mingnarov@g.nsu.ru

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2023. Том 30, № 4

UDC 517.955

ON THE CAUCHY PROBLEM FOR ONE SYSTEM OF PSEUDOHYPERBOLIC TYPE

L. N. Bondar and S. B. Mingnarov

Abstract: We consider the Cauchy problem for one system unsolvable with respect to the highest time derivative. The system under study belongs to the class of pseudohyperbolic systems and describes transverse flexural-torsional vibrations of an elastic rod. We prove the unique solvability of the Cauchy problem in Sobolev spaces and obtain estimates for the solution.

DOI: 10.25587/2411-9326-2023-4-3-11

Keywords: system unsolvable with respect to the highest time derivative, pseudohyperbolic system, transverse flexural-torsional vibrations.

REFERENCES

1. *Vlasov V. Z.*, Thin-Walled Elastic Beams, Natl. Sci. Found., Washington, DC (1961).
2. *Demidenko G. V. and Uspenskii S. V.*, Partial Differential Equations and Systems Not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative, Marcel Dekker, New York; Basel (2003).
3. *Demidenko G. V.*, “Solvability conditions of the Cauchy problem for pseudohyperbolic equations,” Sib. Math. J., **56**, No. 6, 1028–1041 (2015).
4. *Bondar L. N. and Demidenko G. V.*, “On well-posedness of the Cauchy problem for pseudohyperbolic equations in weighted Sobolev spaces,” Sib. Math. J., **64**, No. 5, 1076–1090 (2023).
5. *Fedotov I. and Volevich L. V.*, “The Cauchy problem for hyperbolic equations not resolved with respect to the highest time derivative,” Russ. J. Math. Phys., **13**, No. 3, 278–292 (2006).
6. *Gerasimov S. I. and Erofeev V. I.*, Problems of Wave Dynamics for Structural Elements [in Russian], Ross. Fed. Yad. Tsentr–Vseross. Nauchn.-Issled. Inst. Eksp. Fiz., Sarov (2014).
7. *Bishop R. E. D.*, “Longitudinal waves in beams,” Aeronaut. Q., **3**, No. 4, 280–293 (1952).
8. *Rao J. S.*, Advanced Theory of Vibration, Wiley East., New Delhi (1992).
9. *Fedotov I., Polyanin A. D., Shatalov M., and Tenkam H. M.*, “Longitudinal vibration of a Rayleigh–Bishop rod,” Dokl. Phys., **434**, 1–6 (2010).

Submitted October 24, 2023
Revised November 13, 2023
Accepted November 30, 2023

Lina N. Bondar′
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia
l.bondar@g.nsu.ru

Sanzhar B. Mingnarov
Novosibirsk State University,
1 Pirogov Street, 630090 Novosibirsk, Russia
s.mingnarov@g.nsu.ru

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2023. Том 30, № 4

УДК 519.95

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНО–ВОЗМУЩЕННЫМ УСЛОВИЕМ А. А. САМАРСКОГО ДЛЯ КВАЗИПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А. И. Кожанов, Д. С. Хромченко

Аннотация. Изучается разрешимость в анизотропных пространствах С. Л. Соболева нелокальных краевых задач для квазипараболических уравнений третьего порядка с интегрально-возмущенным условием А. А. Самарского. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений (т. е. решений, имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение).

DOI: 10.25587/2411-9326-2023-4-12-23

Ключевые слова: квазипараболические уравнения, нелокальные задачи, условия А. А. Самарского, регулярные решения, существование, единственность.

Введение

Нелокальные задачи для параболических уравнений с условием А. А. Самарского в интегральной [1] или дифференциальной [1, 2] формах активно изучаются с 1977 г. (см., например, [3–7]). Значительно меньшее число работ посвящено исследованию разрешимости подобных задач для квазипараболических уравнений, т. е. уравнений вида

$$D_t^{2p+1}u + Au = f(x,t), \tag{$*$}$$

в которых $D_t^k = \frac{\partial^k}{\partial t^k}$, p — натуральное число, A — эллиптический оператор второго порядка, действующий по пространственным переменным. Как наиболее близкую по тематике к настоящей работе отметим статью [8], в которой изучались нелокальные задачи для квазипараболических уравнений вида ($*$) с краевым условием А. А. Самарского (точнее говоря, с обобщенным условием Самарского — Ионкина [1, 2]) по пространственной переменной.

Более точно, в настоящей работе изучаются задачи для уравнений ($*$) в случае $p = 1$ при задании обобщенных условий Самарского — Ионкина с интегральным возмущением. Целью работы будет доказательство существования

Работа выполнена в рамках госзадания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект FWNF–2022–0008).

и единственности регулярных решений изучаемых задач — решений, имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

Функциональной основой для всех рассуждений и выкладок, представленных ниже, будут пространства Лебега L_p и Соболева W_p^l. Определение и описание свойств функций из этих пространств имеются в монографиях [9–11].

В работе изучаются модельные уравнения $(*)$. О более общих уравнениях, в частности, уравнениях со всеми младшими производными по переменным x и t, будет сказано в конце статьи.

1. Постановка задач

Пусть $b(x,t)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\beta_1(t)$, $N_1(x)$, $N_2(x)$ и $R_1(x)$ — заданные функции, определенные при $x \in [0,1]$, $t \in [0,T]$, L — дифференциальный оператор, действие которого на заданную функцию $v(x,t)$ определяется равенством

$$Lv = v_{ttt} + v_{xx} + b(x,t)v_x + c(x,t)v.$$

Нелокальная задача I. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике $Q = \{(x,t) : x \in (0,1), t \in (0,T)\}$ решением уравнения*

$$Lu = f(x,t) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,0) = u_t(x,0) = u(x,T) = 0, \quad x \in (0,1), \tag{2}$$

$$u(0,t) = \alpha_1(t)u(1,t) + \int\limits_0^1 N_1(x)u(x,t)\,dx, \quad t \in (0,T), \tag{3}$$

$$u_x(1,t) + \beta_1(t)u(1,t) = \int\limits_0^1 N_2(x)u(x,t)\,dx, \quad t \in (0,T). \tag{4}$$

Нелокальная задача II. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условие* (2), *а также условия*

$$u_x(0,t) = \alpha_2(t)u_x(1,t) + \int\limits_0^1 R_1(x)u(x,t)\,dx, \quad t \in (0,T), \tag{5}$$

$$u(1,t) = 0, \quad t \in (0,T). \tag{6}$$

Нелокальные задачи I и II в случаях $N_1(x) \equiv 0$, $N_2(x) \equiv 0$, $\beta_1(t) \equiv 0$ и $R_1(x) \equiv 0$ соответственно являются нелокальными задачами с обобщенным условием Самарского — Ионкина; в случае $b(x,t) \equiv 0$, $\alpha_1(t) \equiv \text{const}$, $\alpha_2(t) \equiv \text{const}$ эти задачи изучены в работе [3]. Наличие в условиях (3)–(6) дополнительных слагаемых, представляющих интегралы от решения с ядрами $N_1(x)$,

$N_2(x)$, $R_1(x)$, отражает тот факт, что изучаемые задачи являются задачами с интегрально-возмущенными обобщенными условиями Самарского — Ионкина. Ранее такие задачи для квазипараболических уравнений (1) не были исследованы.

2. Разрешимость нелокальной задачи I

Доказательство разрешимости нелокальной задачи I будет проведено с помощью метода регуляризации и метода продолжения по параметру. Поскольку для применения метода регуляризации и для применения метода продолжения по параметру нужны будут априорные оценки, установим вначале их наличие.

При получении оценок будем предполагать, что решение $u(x,t)$ имеет все производные, которые требуются при проведении тех или иных выкладок. Необходимые обоснования будут приведены ниже.

Введем обозначения:

$$N_{j_0} = \left(\int\limits_0^1 x^{-1} N_j^2(x)\,dx\right)^{1/2}, \quad j = 1, 2,$$

$$\alpha_{10} = \max_{[0,T]} |\alpha_1(t)|, \quad \gamma_1 = \min_{[0,T]} \bigl[1 - \alpha_1^2(t) + 2\beta_1(t) - b(1,t)\bigr] - N_{10},$$

$$\gamma_2 = \min_{\overline{Q}} \left[\frac{1}{2x}(xb(x,t))_x - c(x,t)\right].$$

Определим квадратичную форму

$$F(\xi,\eta) = \gamma_1 \xi^2 - 2(\alpha_{10} N_{10} + N_{20})\xi\eta + \gamma_2 \eta^2.$$

Лемма 1. *Пусть выполняются следующие условия:*

$$b(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad b_x(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad \frac{1}{x} b(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad c(x,t) \in C(\overline{Q});$$

$$\alpha_1(t) \in C([0,T]), \quad \beta_1(t) \in C([0,T]);$$

$$x^{-1/2} N_j(x) \in L_2([0,T]), \quad j = 1, 2;$$

$$F(\xi,\eta) \geq \gamma_0 \xi^2, \quad \gamma_0 > 0, \quad (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2.$$

Тогда для решений $u(x,t)$ нелокальной задачи I из пространства $W_2^{2,3}(Q)$ выполняется оценка

$$\int\limits_0^1 x u_t^2(x,T)\,dx + \int\limits_Q \bigl(x u_x^2 + x u^2\bigr)\,dxdt \leq M_1 \int\limits_Q x f^2\,dxdt \tag{7}$$

с постоянной M_1, определяющейся лишь функциями $b(x,t)$, $c(x,t)$, $\alpha_1(t)$, $\beta_1(t)$, $N_1(x)$ и $N_2(x)$.

Доказательство. Умножим уравнение (1) на функцию $-xu(x,t)$ и проинтегрируем по прямоугольнику Q. После несложных преобразований с использованием формулы интегрирования по частям получим равенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 x u_t^2(x,T)\,dx + \int\limits_Q x u_x^2\,dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_0^T \bigl[1 - \alpha_1^2(t) - b(1,t) + 2\beta_1(t)\bigr] u^2(1,t)\,dt$$

$$+\int\limits_Q x\left[\frac{1}{2x}(xb(x,t))_x - c(x,t)\right]u^2(x,t)\,dxdt = \int\limits_Q xfu(x,t)\,dxdt$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^T\left(\int\limits_0^1 N_1(x)u(x,t)\,dx\right)^2 dt + \int\limits_0^T \alpha_1(t)u(1,t)\left(\int\limits_0^1 N_1(x)u(x,t)\,dx\right)dt$$

$$+\int\limits_0^T u(1,t)\left(\int\limits_0^1 N_2(x)u(x,t)\,dx\right)dt. \quad (8)$$

Оценивая каждое слагаемое правой части (8) с помощью неравенства Гёльдера и учитывая условия леммы, нетрудно получить требуемую оценку (7). Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть выполняются все условия леммы* 1. *Тогда нелокальная задача* I *не может иметь в пространстве* $W_2^{2,3}(Q)$ *более одного решения.*

Доказательство. Пусть в уравнении (1) $f(x,t)$ есть тождественно нулевая в Q функция. Вследствие оценки (7) будут выполняться равенства

$$\int\limits_Q xu_x^2(x,t)\,dxdt = 0, \quad \int\limits_Q xu^2(x,t)\,dxdt = 0. \quad (9)$$

Далее, имеет место неравенство

$$u^2(1,t) \le \delta^2\int\limits_0^1 xu_x^2(x,t)\,dx + \left(2+\frac{1}{\delta^2}\right)\int\limits_0^1 xu^2(x,t)\,dx, \quad (10)$$

в котором δ — произвольное положительное число (см. [8, 12]). Из этого неравенства, равенств (9) и условий (3) и (4) следует, что для функции $u(x,t)$ выполняются условия $u(0,t)=0$, $u_x(1,t)=0$, $t\in(0,T)$. Но тогда функция $u(x,t)$ представляет собой решение однородной корректной краевой задачи для дифференциального уравнения (1). Очевидно, что это решение может быть только нулевой в Q функцией. А это и означает, что нелокальная задача I не может иметь в пространстве $W_2^{2,3}(Q)$ более одного решения. Теорема доказана.

Лемма 2. *Пусть выполняются условия леммы* 1, *и дополнительно пусть для функций* $c(x,t)$, $\alpha_1(t)$ *и* $\beta_1(t)$ *выполняются включения*

$$\frac{\partial^k b(x,t)}{\partial t^k}\in C(\overline{Q}), \quad \frac{\partial^{k+1} b(x,t)}{\partial x\partial t^k}\in C(\overline{Q}), \quad \frac{\partial^k c(x,t)}{\partial t^k}\in C(\overline{Q}), \quad k=1,2,3,$$

$$\alpha_1(t)\in C^3([0,T]), \quad \beta_1(t)\in C^3([0,T]).$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ *такой, что*

$$\frac{\partial^k f(x,t)}{\partial t^k}\in L_2(Q), \quad k=0,1,2,3,$$

$$f(x,0)=f_t(x,0)=f(x,T)=0, \quad x\in[0,1],$$

и для любого решения $u(x,t)$ нелокальной задачи I *такого, что* $u(x,t) \in W_2^{2,3}(Q)$, $u_{ttt}(x,t) \in W_2^{2,3}(Q)$ *выполняется оценка*

$$\int_0^1 x u_{tttt}^2(x,T)\,dx + \int_Q \left(x u_{xttt}^2 + x u_{ttt}^2\right) dxdt \le M_2 \int_Q \left(x f^2 + x f_{ttt}^2\right) dxdt \tag{11}$$

с постоянной M_2, определяющейся лишь функциями $b(x,t)$, $c(x,t)$, $\alpha_1(t)$, $\beta_1(t)$, $N_1(x)$ и $N_2(x)$.

Доказательство. Условия леммы позволяют перейти от уравнения (1) к продифференцированному трижды по переменной t уравнению, при этом от условий (3) и (4) также можно перейти к трижды продифференцированным по переменной t условиям. Вследствие указанных выше условий на функции $f(x,t)$ для функции $v(x,t) = u_{ttt}(x,t)$ будут выполняться условия (2). Повторяя доказательство леммы 1 для функции $v(x,t)$ и используя оценку (7) и условия леммы, нетрудно получить требуемую оценку (11).

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть выполняются все условия леммы* 2. *Тогда для решений $u(x,t)$ нелокальной задачи* I *таких, что $u(x,t) \in W_2^{2,3}(Q)$, $u_{ttt}(x,t) \in W_2^{2,3}(Q)$, справедлива оценка*

$$\int_0^T \left[u_{ttt}^2(0,t) + u_{ttt}^2(1,t)\right] dt \le M_3 \int_Q \left(f^2 + f_{ttt}^2\right) dxdt \tag{12}$$

с постоянной M_3, определяющейся лишь функциями $b(x,t)$, $c(x,t)$, $\alpha_1(t)$, $\beta_1(t)$, $N_1(x)$ и $N_2(x)$.

Доказательство. Указанная в формулировке леммы принадлежность функций $u(x,t)$, $u_{ttt}(x,t)$ пространству $W_2^{2,3}(Q)$ означает, что от условия (3) можно перейти к продифференцированному трижды по переменной t условию

$$u_{ttt}(0,t) = \alpha_1(t)u_{ttt}(1,t) + 3\alpha_1'(t)u_{tt}(1,t) + 3\alpha_1''(t)u_t(1,t) + \alpha_1'''(t)u(1,t) + \int_0^1 N_1(x)u_{ttt}(x,t)\,dx. \tag{13}$$

Вследствие оценки (9) и неравенства (10) правая часть в (13) принадлежит пространству $L_2([0,T])$. Но тогда и функция $u_{ttt}(0,t)$ будет принадлежать пространству $L_2([0,T])$. Вместе с неравенством (10) это и означает требуемое.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть выполняются все условия леммы* 2. *Тогда для решений $u(x,t)$ нелокальной задачи* I *таких, что $u(x,t) \in W_2^{2,3}(Q)$, $u_{ttt}(x,t) \in W_2^{2,3}(Q)$, справедлива оценка*

$$\int_Q \left(u^2 + u_{xx}^2\right) dxdt + \int_0^1 u_{xt}^2(x,T)\,dx \le M_4 \int_Q \left(f^2 + f_{ttt}^2\right) dxdt, \tag{14}$$

постоянная M_4 в которой определяется лишь функциями $b(x,t)$, $c(x,t)$, $\alpha_1(t)$, $\beta_1(t)$, $N_1(x)$ и $N_2(x)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что из равенства

$$\int\limits_Q u^2\,dxdt = \int\limits_0^T u^2(1,t)\,dt - 2\int\limits_Q xuu_x\,dxdt$$

и оценок (7), (10) следует оценка

$$\int\limits_Q u^2\,dxdt \le M_5\int\limits_Q \left(f^2 + f_{ttt}^2\right)dxdt \tag{15}$$

с постоянной M_5, определяющейся лишь функциями $b(x,t)$, $c(x,t)$, $\alpha_1(t)$, $\beta_1(t)$, $N_1(x)$ и $N_2(x)$.

Умножим уравнение (1) на функцию $u_{xx}(x,t)$ и проинтегрируем по прямоугольнику Q. После несложных выкладок получим равенство

$$\int\limits_Q u_{xx}^2\,dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 u_{xt}^2(x,T)\,dx = \int\limits_0^T u_x(0,t)u_{ttt}(0,t)\,dt - \int\limits_0^T u_x(1,t)u_{ttt}(1,t)\,dt$$
$$-\int\limits_Q bu_xu_{xx}\,dxdt - \int\limits_Q cuu_{xx}\,dxdt + \int\limits_Q fu_{xx}\,dxdt. \tag{16}$$

Оценивая слагаемые в правой части (16) с помощью неравенства Юнга, оценок (12) и (15), а также неравенств

$$\int\limits_0^T [u_x^2(0,t) + u_x^2(1,t)]\,dt \le \delta\int\limits_Q u_{xx}^2\,dxdt + C(\delta)\int\limits_Q u^2\,dxdt,$$

$$\int\limits_Q u_x^2\,dxdt \le \delta\int\limits_Q u_{xx}^2\,dxdt + C(\delta)\int\limits_Q u^2\,dxdt$$

($\delta > 0$ — произвольное число), нетрудно получить требуемую оценку (14).

Лемма доказана.

Полученных оценок достаточно для доказательства разрешимости нелокальной задачи I.

Теорема 2. *Пусть выполняются все условия леммы 2. Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что*

$$\frac{\partial^k f(x,t)}{\partial t^k} \in L_2(Q), \quad \frac{\partial^{k+1} f(x,t)}{\partial x\partial t^k} \in L_2(Q), \quad f(x,0) = f_t(x,0) = f(x,T) = 0,$$

$k = 1,\ 2,\ 3$, $x \in [0,1]$, *нелокальная задача* I *имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству $W_2^{2,3}(Q)$.*

Доказательство. Воспользуемся методом регуляризации и методом продолжения по параметру.

Пусть ε — положительное число. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$Lu - \varepsilon u_{xxtttttt} = f(x,t) \tag{17}$$

и такую, что для выполняются условия (2)–(4), *а также условия*

$$u_{ttt}(x,0) = u_{ttt}(x,T) = u_{tttt}(x,T) = 0, \quad x \in (0,1). \tag{18}$$

Заметим, что для регулярных решений $u(x,t)$ краевой задачи (17), (2)–(4), (18) при фиксированном ε справедливы оценки лемм 1–4, но с постоянными, определяющимися функциями $b(x,t)$, $c(x,t)$, $\alpha_1(t)$, $\beta_1(t)$, $N_1(x)$ и $N_2(x)$, а также числом ε и нормой функции $f(x,t)$ в пространстве $L_2(Q)$. Кроме того, для функции $u(x,t)$ будет выполняться еще одна оценка

$$\int\limits_Q \left(u_{ttt}^2 + u_{xx}^2 + u_{xxtttttt}^2\right) dxdt \leq M_6 \int\limits_Q f^2\, dxdt,$$

постоянная M_6 в которой определяется функциями $b(x,t)$, $c(x,t)$, $\alpha_1(t)$, $\beta_1(t)$, $N_1(x)$ и $N_2(x)$, а также числом ε.

Для доказательства названных оценок достаточно проанализировать последовательно равенства

$$\int\limits_Q x(Lu - \varepsilon u_{xxtttttt})u\, dxdt = \int\limits_Q xfu\, dxdt, \tag{19}$$

$$\int\limits_Q x(Lu - \varepsilon u_{xxtttttt})u_{tttttt}\, dxdt = \int\limits_Q xfu_{tttttt}\, dxdt, \tag{20}$$

$$\int\limits_Q x(Lu - \varepsilon u_{xxtttttt})u_{xx}\, dxdt = \int\limits_Q xfu_{xx}\, dxdt, \tag{21}$$

$$\int\limits_Q x(Lu - \varepsilon u_{xxtttttt})u_{xxtttttt}\, dxdt = \int\limits_Q xfu_{xxtttttt}\, dxdt, \tag{22}$$

при этом в правой части этих равенств использовать лишь неравенство Юнга.

Из вышеназванных оценок следует, что краевая задача (17), (2)–(4), (18) при фиксированном ε имеет регулярное решение. Доказательство этого факта следует из установленных выше оценок и теоремы о методе продолжения по параметру [13, гл. III, § 14], если применить эту теорему к уравнению

$$u_{ttt} - \varepsilon u_{xxtttttt} + \lambda[u_{xx} + bu_x + cu] = f$$

с условиями (2), а также с условиями

$$u(0,t) = \lambda\left[\alpha_1(t)u(1,t) + \int\limits_0^1 N_1(x)u(x,t)\, dx\right], \quad t \in [0,T],$$

$$u_x(1,t) = \lambda \left[\int\limits_0^1 N_2(x)u(x,t)\,dx - \beta_1(t)u(1,t) \right], \quad t \in [0,T]$$

(λ — число из отрезка $[0,1]$).

Дальнейшие рассуждения основаны на априорных оценках, равномерных по ε. Требуемые оценки легко выводятся с помощью тех же равенств (19)–(22), но при этом в интегралах с функцией $f(x,t)$ необходимо выполнить интегрирование по частям (в целом можно сказать, что требуемые оценки доказываются так же, как доказывались оценки лемм 1–4). Помимо оценок (10)–(12), (14) в результате получим, что для решений $u(x,t)$ краевой задачи (17), (2)–(4), (18) выполняется оценка

$$\varepsilon \int\limits_Q u^2_{xxtttttt}\,dxdt \le M_7 \int\limits_Q \left(f^2 + f^2_{ttt} + f^2_{xttt}\right) dxdt \tag{23}$$

с постоянной M_7, определяющейся лишь функциями $b(x,t)$, $c(x,t)$, $\alpha_1(t)$, $\beta_1(t)$, $N_1(x)$ и $N_2(x)$.

Оценок (10)–(12), (14), (23) достаточно для организации процедуры предельного перехода. Действительно, выберем последовательность $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ такую, что $\varepsilon_m > 0$, $\varepsilon_m \to 0$ при $m \to \infty$. Числам ε_m соответствуют решения $u_m(x,t)$ краевой задачи (17), (2)–(4), (18) с $\varepsilon = \varepsilon_m$. Из оценок (10)–(12), (14), (23) и свойства рефлексивности гильбертова пространства следует, что существует подпоследовательность $\{u_{m_k}(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$, сходящаяся к решению $u(x,t)$ нелокальной задачи I.

Принадлежность предельной функции $u(x,t)$ пространству $W_2^{2,3}(Q)$ вытекает из свойств слабого предела.

Теорема доказана.

3. Разрешимость нелокальной задачи II

Следуя [14], преобразуем нелокальную задачу II к нелокальной задаче I.

Положим $v(x,t) = u_x(x,t)$ и дополнительно потребуем, чтобы при $t \in (0,T)$ выполнялось равенство $u(1,t) = 0$. Для функции $v(x,t)$ выполняются уравнение

$$v_{ttt} + v_{xx} + b(x,t)v_x + [c(x,t) + b_x(x,t)]v - c_x(x,t) \int\limits_x^1 v(y,t)\,dy = f_x(x,t), \tag{24}$$

а также условия (2) и условия

$$v(0,t) = \alpha_2(t)v(1,t) - \int\limits_0^1 R_2(x) \left(\int\limits_x^1 v(y,t)\,dy \right) dx, \quad t \in (0,T), \tag{25}$$

$$v_x(1,t) + b(1,t)v(1,t) = f(1,t). \tag{26}$$

Пусть выполняются условия

$$f(1,t) = 0, \quad t \in (0,T).$$

Тогда задача (24), (2), (25), (26) лишь незначительно будет отличаться от задачи I. Используя технику доказательства теорем 1 и 2, нетрудно получить результаты о единственности и существовании решения как задачи (24), (2), (25), (26), так и задачи II. Не повторяя все выкладки, приведем лишь окончательный результат.

Определим пространство

$$V_0 = \big\{v(x,t) : v(x,t) \in W_2^{2,3}(Q),\ v_x(x,t) \in W_2^{2,3}(Q)\big\}.$$

Обозначим $c_1(x,t) = c(x,t) + b_x(x,t)$, $\alpha_{20} = \max\limits_{[0,T]} |\alpha_2(t)|$.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия*

$$b(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad b_x(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad c(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad c_x(x,t) \in C(\overline{Q}),$$

$$c_{xx}(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad \alpha_2(t) \in C([0,T]),$$

$$(xb(x,t))_x - 2xc_1(x,t) - 2x\|R_1\|_{L_2([0,1])} > 0, \quad (xc_x(x,t))_x \le 0, \quad (x,t) \in Q;$$

$$1 + b(1,t) - 2\alpha_{20} \ge 0, \quad t \in [0,T].$$

Тогда нелокальная задача I *не может иметь в пространстве* V_0 *более одного решения.*

Доказательство этой теоремы проводится с помощью анализа равенства, получаемого с помощью умножения уравнения (24) на функцию $-xv(x,t)$ и интегрирования по прямоугольнику Q.

Теорема 4. *Пусть выполняются все условия теоремы* 3, *и пусть дополнительно выполняются условия*

$$\frac{\partial^k b(x,t)}{\partial t^k} \in C(\overline{Q}), \quad \frac{\partial^{k+1} b(x,t)}{\partial x \partial t^k} \in C(\overline{Q});$$

$$\frac{\partial^k c(x,t)}{\partial t^k} \in C(\overline{Q}), \quad \frac{\partial^{k+1} c(x,t)}{\partial x \partial t^k} \in C(\overline{Q});$$

$$\frac{\partial^{k+2} c(x,t)}{\partial x^2 \partial t^k} \in C(\overline{Q}), \quad k = 1, 2, 3.$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ *такой, что*

$$\frac{\partial^k f(x,t)}{\partial t^k} \in L_2(Q), \quad \frac{\partial^{k+1} f(x,t)}{\partial x \partial t^k} \in L_2(Q),$$

$$f(x,0) = f_t(x,0) = f(x,T) = 0 \text{ при } x \in [0,1],\ f(1,t) = 0 \text{ при } t \in [0,T],$$

нелокальная задача II *имеет решение* $u(x,t)$, *принадлежащее пространству* V_0.

Доказательство. Краевая задача (24), (2), (25), (26) имеет решение $v(x,t)$, принадлежащее пространству $W_2^{2,3}(Q)$. Доказывается это так же, как доказывалась теорема 2, т. е. с помощью метода регуляризации, метода продолжения по параметру и априорных оценок. Определим функцию $u(x,t)$ как решение задачи

$$u_x(x,t) = v(x,t), \quad u(1,t) = 0.$$

Эта функция и будет требуемым решением нелокальной задачи II.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ионкин Н. И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.
2. *Самарский А. А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений. Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 11. С. 1925–1935.
3. *Ионкин Н. И.* Об устойчивости одной задачи теории теплопроводности с нелокальным краевым условием // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 7. С. 1279–1283.
4. *Ионкин Н. И., Моисеев Е. И.* О задаче для уравнения теплопроводности с двухточечными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 7. С. 1284–1295.
5. *Юрчук Н. И.* Смешанная задача с интегральным условием для некоторых параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 12. С. 2117–2126.
6. *Beilin S. A.* Existence of solutions for one-dimensional wave equations with nonlocal conditions // Electron. J. Differ. Equ. 2001. V. 2001, N 76. P. 1–8.
7. *Berdyshev A. S., Cabada A., Kadizkulov B. J.* The Samarskii–Ionkin type problem for the fourth order parabolic equation with fractional differential operator // Comput. Math. Appl. 2011. V. 62, N 10. P. 3884–3893.
8. *Кожанов А. И., Абдрахманов А. М.* Пространственно–нелокальные краевые задачи с обобщенным условием Самарского — Ионкина для квазипараболических уравнений // Сиб. электрон. мат. изв. 2023. Т. 20, № 1. С. 110–123.
9. *Соболев С. Л.* Некоторые приложения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
10. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.
11. *Triebel H.* Interpolation theory. Functional spaces. Differential operators. Berlin: VEB Deutsch. Verl. Wiss., 1978.
12. *Kozhanov A. I.* Initial-boundary value problems with generalized Samarskii–Ionkin condition for parabolic equations with arbitrary evolution direction // J. Math. Sci. 2023. V. 274, N 2. P. 228–240.
13. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
14. *Кожанов А. И.* Нелокальные задачи с обобщенным условием Самарского — Ионкина для некоторых классов нестационарных дифференциальных уравнений // Докл. АН. 2023. Т. 509. С. 50–53.

Поступила в редакцию 1 ноября 2023 г.
После доработки 1 ноября 2023 г.
Принята к публикации 30 ноября 2023 г.

Кожанов Александр Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
kozhanov@math.nsc.ru

Хромченко Дмитрий Сергеевич
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
dmtrkh12144@vk.com

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2023. Том 30, № 4

UDC 519.95

NONLOCAL PROBLEMS WITH AN INTEGRALLY–DISTURBED A. A. SAMARSKII CONDITION FOR THIRD ORDER QUASI–PARABOLIC EQUATIONS

A. I. Kozhanov and D. S. Khromchenko

Abstract: We study the solvability in anisotropic Sobolev spaces of nonlocal boundary problems for the third order quasi-parabolic equations with an integrally-disturbed Samarskii condition. A uniqueness and existence theorem is proved for regular solutions (i. e. the solutions that have all generalized derivatives that were used in equation).

DOI: 10.25587/2411-9326-2023-4-12-23

Keywords: quasi-parabolic equations, nonlocal problems, Samarsky condition, regular solution, existence, uniqueness.

REFERENCES

1. *Ionkin N. I.*, "Solution of a boundary value problem of heat conduction theory with a nonclassical boundary condition," Differents. Uravn., **13**, No. 2, 294–304 (1977).
2. *Samarskij A. A.*, "On some problems of the theory of differential equations,". Differents. Uravn., **16**, No. 11, 1925–1935 (1980).
3. *Ionkin N. I.*, "On the stability of a problem in the theory of heat conduction with a nonlocal boundary condition," Differents. Uravn., **15**, No. 7, 1279–1283 (1979).
4. *Ionkin N. I. and Moiseev E. I.*, "On the problem for the heat equation with two-point boundary conditions," Differents. Uravn., **15**, No. 7, 1284–1295 (1979).
5. *Yurchuk N. I.*, "Mixed problem with integral condition for some parabolic equations," Differents. Uravn., **22**, No. 12, 2117–2126 (1986).
6. *Beilin S. A.*, "Existence of solutions for one-dimensional wave equations with nonlocal conditions," Electron. J. Differ. Equ., **2001**, No. 76, 1–8 (2001).
7. *Berdyshev A. S., Cabada A., and Kadizkulov B. J.*, "The Samarskii–Ionkin type problem for the fourth order parabolic equation with fractional differential operator," Comput. Math. Appl., **62**, No. 10, 3884–3893 (2011).
8. *Kozhanov A. I. and Abdrahmanov A. M.*, "Spatially nonlocal boundary value problems with the generalized Samarskii–Ionkin condition for quasi-parabolic equations," Sib. Elektron. Mat. Izv., **20**, No. 1, 110–123 (2023).
9. *Sobolev S. L.*, Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics, Nauka, Moscow (1988).
10. *Ladyzjenskaya O. A. and Ural'tseva N. N.*, Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type, Nauka, Moscow (1964).
11. *Triebel H.*, Interpolation Theory, Functional Spaces, Differential Operators, VEB Deutsch. Verl. Wiss., Berlin (1978).
12. *Kozhanov A. I.*, "Initial-boundary value problems with a generalized Samarskii–Ionkin condition for parabolic equations with arbitrary evolution direction," J. Math. Sci., **274**, No. 2, 228–240 (2023).

13. *Trenogin V. A.*, Functional Analysis, Nauka, Moscow (1980).
14. *Kozhanov A. I.*, "Nonlocal problems with a generalized Samarskii–Ionkin condition for some classes of nonstationary differential equations," Dokl. Akad. Nauk, **509**, 50–53 (2023).

Submitted November 1, 2023
Revised November 1, 2023
Accepted November 30, 2023

Aleksandr I. Kozhanov
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia
kozhanov@math.nsc.ru

Dmitrii S. Khromchenko
Novosibirsk State University,
1 Pirogov Street, 630090 Novosibirsk, Russia
dmtrkh12144@vk.com

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2023. Том 30, № 4

УДК 514.765

ЛЕВОИНВАРИАНТНЫЕ МЕТРИКИ НЕКОТОРЫХ ТРЕХМЕРНЫХ ГРУПП ЛИ

В. А. Кыров

Аннотация. Г. Г. Михайличенко была построена полная классификация двумерных геометрий максимальной подвижности, которая содержит кроме хорошо известных геометрий еще и три геометрии гельмгольцева типа (собственно гельмгольцева, псевдогельмгольцева и дуальногельмгольцева). Каждая из этих геометрий задается функцией пары точек (аналог евклидова расстояния) и является геометрией локальной максимальной подвижности, т. е. допускает трехпараметрическую группу движений. Группам движений этих геометрий однозначно сопоставляются неунимодулярные матричные трехмерные группы Ли, изучению которых и посвящена данная статья.

В этой работе построены левоинвариантные метрики изучаемых матричных групп Ли, найдены связности Леви-Чивиты, а также найдена кривизна на этих группах Ли. Исследованы геодезические на таких группах Ли.

DOI: 10.25587/2411-9326-2023-4-24-36

Ключевые слова: геометрии локальной максимальной подвижности, левоинвариантные римановы метрики, кривизна, геодезическая.

Введение

В данной работе интерес представляют следующие геометрии из списка Г. Г. Михайличенко двумерных феноменологически симметричных геометрий (двумерных геометрий локальной максимальной подвижности) [1, с. 54]:

псевдогельмгольцева геометрия:

$$f(1,2) = \frac{(y_1 - y_2)^\alpha}{(x_1 - x_2)^\beta}; \tag{1}$$

собственно гельмгольцева геометрия:

$$f(1,2) = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2] e^{2\gamma \operatorname{arctg} \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}}; \tag{2}$$

дуальногельмгольцева геометрия:

$$f(1,2) = (x_1 - x_2) e^{\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}}, \tag{3}$$

причем $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha \neq \pm\beta$, $\gamma \neq 0$, f — функция пары точек (аналог евклидова расстояния) плоскости R^2, $1 = (x_1, y_1)$ и $2 = (x_2, y_2)$ — точки этой плоскости.

Группы движений этих геометрий, т. е. преобразований плоскости R^2, сохраняющих функции пары точек (1)–(3), являются подгруппами аффинной группы плоскости и задаются соответственно следующими уравнениями [2, с. 41; 3, 4]:

$$x' = e^{\alpha a}x + b, \quad y' = e^{\beta a}y + c; \tag{4}$$

$$x' = xe^{-\gamma a}\cos a - ye^{-\gamma a}\sin a + b, \quad y' = xe^{-\gamma a}\sin a + ye^{-\gamma a}\cos a + c; \tag{5}$$

$$x' = e^{a}x + b, \quad y' = -ae^{a}x + e^{a}y + c, \tag{6}$$

причем a, b, c — параметры групп движений.

1. Матричные группы Ли и их алгебры Ли

Группам движений (4)–(6) можно однозначно поставить в соответствие неунимодулярные матричные группы Ли:

$$G_1 : \begin{pmatrix} e^{\alpha z} & 0 & x \\ 0 & e^{\beta z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{7}$$

$$G_2 : \begin{pmatrix} e^{-\gamma z}\cos z & -e^{-\gamma z}\sin z & x \\ e^{-\gamma z}\sin z & e^{-\gamma z}\cos z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{8}$$

$$G_3 : \begin{pmatrix} e^{z} & 0 & x \\ -ze^{z} & e^{z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где (x, y, z) — точка группы Ли, α, β, γ — постоянные, о которых говорится во введении. Как известно автору, данные группы Ли ранее не изучались, хотя если в (7) допустить $\alpha = -1$, $\beta = 1$, то эта группа будет совпадать с хорошо изученной группой Sol [5–7].

Алгебры Ли групп Ли из списка (7)–(9) вычисляются просто. Приведем их образующие, которые обозначим через e_1, e_2 и e_3 соответственно:

алгебра Ли AG_1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

алгебра Ли AG_2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\gamma & -1 & 0 \\ 1 & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

алгебра Ли AG_3:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Первое коммутационное соотношение для всех трех алгебр Ли одинаковое: $[e_1, e_2] = 0$, а остальные различные:

$$AG_1: \quad [e_2, e_3] = -\beta e_2, \quad [e_3, e_1] = \alpha e_1;$$

$$AG_2\colon\quad [e_2, e_3] = e_1 + \gamma e_2, \quad [e_3, e_1] = e_2 - \gamma e_1;$$

$$AG_3\colon\quad [e_2, e_3] = -e_2, \quad [e_3, e_1] = e_1 - e_2.$$

Нетрудно доказать неизоморфность и разрешимость этих алгебр Ли [8, с. 183]. Каждая из этих трех алгебр Ли является полупрямой суммой двумерного абелева радикала с образующими e_1, e_2 и одномерной подалгебры с образующей e_3 [8, с. 184]. Алгебры Ли AG_1–AG_3 изоморфны алгебрам Ли из классификации Бианки трехмерных вещественных алгебр Ли [9, с. 197]. Так, алгебра AG_1 изоморфна алгебре VI_a, $0 < |a| < 1$, для чего надо перейти к новому базису $e_1 = (f_2 + f_3)/2$, $e_2 = (f_2 - f_3)/2$, $e_3 = \alpha f_1/(a-1)$ при α и β разного знака и к базису $e_2 = (f_2 + f_3)/2$, $e_1 = (f_2 - f_3)/2$, $e_3 = \alpha f_1/(a-1)$ при α и β одного знака; алгебра AG_2 изоморфна алгебре VII_a, $a > 0$, что вытекает при переходе к новому базису $e_1 = f_3$, $e_2 = f_2$, $e_3 = -f_1$, и ввести обозначение $\gamma = a$; алгебра AG_3 изоморфна алгебре IV, в чем легко убедиться, перейдя к базису $e_1 = -f_2$, $e_2 = f_3$, $e_3 = f_1$.

Метрика $\langle \xi, \eta \rangle$ на группе Ли G называется *левоинвариантной* [5; 9, с. 181], если она инвариантна относительно левых сдвигов: $L_g : G \longrightarrow G$, $h \to gh$, $h \in G$, т. е.

$$\langle \xi, \eta \rangle = \langle L_g^* \xi, L_g^* \eta \rangle, \quad \xi, \eta \in T_h G,\ g, h \in G.$$

Отметим, что изучение трехмерных групп Ли актуально в современной геометрии. Так, в частности, исследуются различные связности, кривизны и уравнения Эйнштейна на трехмерных группах Ли [10].

2. Вычисление левоинвариантных метрик

Процедура вычисления левоинвариантных метрик хорошо известна (см., например, [5]).

1. Левоинвариантная метрика группы Ли G_1. Произвольный элемент и обратный к нему элемент:

$$g = \begin{pmatrix} e^{\alpha z} & 0 & x \\ 0 & e^{\beta z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-\alpha z} & 0 & -xe^{-\alpha z} \\ 0 & e^{-\beta z} & -ye^{-\beta z} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Касательный вектор к группе G_1 в единице:

$$\Xi = \begin{pmatrix} \alpha Z & 0 & X \\ 0 & \beta Z & Y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{\Xi} = \begin{pmatrix} \alpha Z & 0 \\ 0 & \beta Z \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$L_g^* \Xi = g^{-1} \Xi = \begin{pmatrix} \alpha Z e^{-\alpha z} & 0 & X e^{-\alpha z} \\ 0 & \beta Z e^{-\beta z} & Y e^{-\beta z} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Скалярное произведение в единице группы Ли G_1:

$$\langle \Xi, \Xi \rangle = pX^2 + qY^2 + \frac{r}{\alpha\beta} \det \overline{\Xi} = pX^2 + qY^2 + rZ^2.$$

Легко получить, что

$$\langle g^{-1}\Xi, g^{-1}\Xi\rangle = pe^{-2\alpha z}X^2 + qe^{-2\beta z}Y^2 + re^{-(\alpha+\beta)z}Z^2.$$

Левоинвариантная метрика для группы Ли G_1 принимает вид

$$ds^2 = pe^{-2\alpha z}\,dx^2 + qe^{-2\beta z}\,dy^2 + re^{-(\alpha+\beta)z}\,dz^2.$$

2. Левоинвариантная метрика группы Ли G_2. Произвольный элемент и обратный к нему элемент:

$$g = \begin{pmatrix} e^{-\gamma z}\cos z & -e^{-\gamma z}\sin z & x \\ e^{-\gamma z}\sin z & e^{-\gamma z}\cos z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} e^{\gamma z}\cos z & e^{\gamma z}\sin z & -e^{\gamma z}(x\cos z + y\sin z) \\ -e^{\gamma z}\sin z & e^{\gamma z}\cos z & e^{\gamma z}(x\sin z - y\cos z) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Касательный вектор к группе G_2 в единице:

$$\Xi = \begin{pmatrix} -\gamma Z & -Z & X \\ Z & -\gamma Z & Y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{\Xi} = \begin{pmatrix} -\gamma Z & -Z \\ Z & -\gamma Z \end{pmatrix}.$$

Скалярное произведение в единице группы Ли G_2:

$$\langle \Xi, \Xi\rangle = pX^2 + qY^2 + \frac{r}{1+\gamma^2}\det\overline{\Xi} = pX^2 + qY^2 + rZ^2.$$

Тогда

$$\langle g^{-1}\Xi, g^{-1}\Xi\rangle = e^{2\gamma z}((p\cos^2 z + q\sin^2 z)X^2 \\ + (p-q)\sin 2z XY + (p\sin^2 z + q\cos^2 z)Y^2 + rZ^2).$$

Левоинвариантная метрика группы Ли G_2 принимает вид

$$ds^2 = e^{2\gamma z}((p\cos^2 z + q\sin^2 z)\,dx^2 + (p-q)\sin 2z\,dxdy + (p\sin^2 z + q\cos^2 z)\,dy^2 + r\,dz^2).$$

3. Левоинвариантная метрика для группы Ли G_3. Произвольный элемент и обратный к нему элемент:

$$g = \begin{pmatrix} e^z & 0 & x \\ -ze^z & e^z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-z} & 0 & -xe^{-z} \\ ze^{-z} & e^{-z} & -ye^{-z} - xze^{-z} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Касательный вектор к группе G_3 в единице:

$$\Xi = \begin{pmatrix} Z & 0 & X \\ -Z & Z & Y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{\Xi} = \begin{pmatrix} Z & 0 \\ -Z & Z \end{pmatrix}.$$

Скалярное произведение в единице группы Ли G_3:

$$\langle \Xi, \Xi\rangle = pX^2 + qY^2 + r\det\overline{\Xi} = pX^2 + qY^2 + rZ^2.$$

Тогда

$$\langle g^{-1}\Xi, g^{-1}\Xi\rangle = e^{-2z}[(p+qz^2)X^2 + 2zqXY + qY^2 + rZ^2].$$

Левоинвариантная метрика для группы Ли G_3 будет иметь вид

$$ds^2 = (p+qz^2)e^{-2z}\,dx^2 + 2zqe^{-2z}\,dxdy + qe^{-2z}\,dy^2 + re^{-2z}\,dz^2.$$

Легко установить для всех трех алгебр AG_1, AG_2 и AG_3:

$$\langle e_1, e_1\rangle = p, \quad \langle e_2, e_2\rangle = q, \quad \langle e_3, e_3\rangle = r,$$

т. е. скалярное произведение не ортонормировано.

3. Связность Леви-Чивиты

Найдем связности на группах Ли G_1, G_2 и G_3. Связность Леви-Чивиты в ортогональном, но не ортонормированном базисе имеет вид [5, 11]

$$\nabla_{e_k} e_j = \frac{1}{2}\sum_i (\alpha_{kji} + \alpha_{ikj} + \alpha_{ijk})e_i, \quad \alpha_{ijk} = \langle [e_i, e_j], e_k\rangle, \quad i,j,k = 1,2,3.$$

Результаты вычислений следующие:

для группы G_1:

$$\nabla_{e_1} e_1 = p\alpha e_3, \quad \nabla_{e_1} e_2 = 0, \quad \nabla_{e_1} e_3 = -p\alpha e_1, \quad \nabla_{e_2} e_1 = 0,$$

$$\nabla_{e_2} e_2 = q\beta e_3, \quad \nabla_{e_2} e_3 = -q\beta e_2, \quad \nabla_{e_3} e_1 = 0, \quad \nabla_{e_3} e_2 = 0, \quad \nabla_{e_3} e_3 = 0;$$

для группы G_2:

$$\nabla_{e_1} e_1 = -\gamma p e_3, \quad \nabla_{e_1} e_2 = \frac{1}{2}(q-p)e_3, \quad \nabla_{e_1} e_3 = \gamma p e_1 + \frac{1}{2}(p-q)e_2,$$

$$\nabla_{e_2} e_1 = \frac{1}{2}(q-p)e_3, \quad \nabla_{e_2} e_2 = -\gamma q e_3, \quad \nabla_{e_2} e_3 = \frac{1}{2}(p-q)e_1 + \gamma q e_2,$$

$$\nabla_{e_3} e_1 = \frac{1}{2}(p+q)e_2, \quad \nabla_{e_3} e_2 = -\frac{1}{2}(p+q)e_1, \quad \nabla_{e_3} e_3 = 0;$$

для группы G_3:

$$\nabla_{e_1} e_1 = pe_3, \quad \nabla_{e_1} e_2 = -\frac{1}{2}qe_3, \quad \nabla_{e_1} e_3 = -pe_1 + \frac{1}{2}qe_2, \quad \nabla_{e_2} e_1 = -\frac{1}{2}qe_3,$$

$$\nabla_{e_2} e_2 = qe_3, \quad \nabla_{e_2} e_3 = \frac{1}{2}qe_1 - qe_2, \quad \nabla_{e_3} e_1 = -\frac{1}{2}qe_2, \quad \nabla_{e_3} e_2 = \frac{1}{2}qe_1, \quad \nabla_{e_3} e_3 = 0.$$

Заметим, что если в группе G_1 допустить $\alpha = -1$, $\beta = 1$ и $p = q = 1$, то ее связность совпадет со связностью группы Sol [5]. Также заметим, что связность не зависит от r.

4. Геодезические на группе G_1

Как известно, в локальных координатах геодезические в связности Леви-Чивиты задаются уравнениями [12]

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}, \quad i,j,k = 1,2,3. \tag{10}$$

Ниже используются более удобные обозначения для координат: $x = x^1$, $y = x^2$, $z = x^3$. Для группы G_1 уравнения (10) принимают следующий вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \alpha p\frac{dx}{dt}\frac{dz}{dt} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} - \beta q\frac{dy}{dt}\frac{dz}{dt} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} + \alpha p\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \beta q\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 0.$$

Решим первое уравнение разделением переменных:

$$\frac{x''}{x'} = \alpha p z', \quad x' = \frac{dx}{dt}, \quad z' = \frac{dz}{dt}.$$

Интегрируя, имеем

$$\ln|x'| = \alpha p z + c_0,$$

следовательно

$$\frac{dx}{dt} = c_1 e^{\alpha p z}.$$

Аналогично поступаем и со вторым уравнением:

$$\frac{dy}{dt} = c_2 e^{\beta q z}.$$

Найденное подставляем в третье уравнение геодезической:

$$z'' + \alpha p c_1^2 e^{2\alpha p z} + \beta q c_2^2 e^{2\beta q z} = 0.$$

Умножая на z', получаем

$$z'z'' + \left(\alpha p c_1^2 e^{2\alpha p z} + \beta q c_2^2 e^{2\beta q z}\right)z' = 0.$$

Далее, имеем

$$z'\,dz' + \left(\alpha p c_1^2 e^{2\alpha p z} + \beta q c_2^2 e^{2\beta q z}\right)dz = 0,$$

затем интегрируем:

$$z'^2 + c_1^2 e^{2\alpha p z} + c_2^2 e^{2\beta q z} - c_3 = 0,$$

следовательно,

$$z' = \sqrt{c_3 - c_1^2 e^{2\alpha p z} - c_2^2 e^{2\beta q z}}.$$

В результате получаем векторное поле геодезической:

$$\left(c_1 e^{\alpha p z}, \quad c_2 e^{\beta q z}, \quad \sqrt{c_3 - c_1^2 e^{2\alpha p z} - c_2^2 e^{2\beta q z}}\right). \tag{11}$$

В статье [5] для группы Sol, определяемой матрицами

$$\begin{pmatrix} e^{-z} & 0 & x \\ 0 & e^{z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

задается левоинвариантная метрика

$$ds^2 = e^{2x}dx^2 + e^{-2y}dy^2 + dz^2. \tag{13}$$

Вычисляется связность:

$$\nabla_{e_1}e_1 = -e_3, \quad \nabla_{e_1}e_2 = 0, \quad \nabla_{e_1}e_3 = e_1, \quad \nabla_{e_2}e_1 = 0,$$

$$\nabla_{e_2}e_2 = e_3, \quad \nabla_{e_2}e_3 = -e_2, \quad \nabla_{e_3}e_1 = 0, \quad \nabla_{e_3}e_2 = 0, \quad \nabla_{e_3}e_3 = 0.$$

Тогда уравнения на геодезическую принимают следующий вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt}\frac{dz}{dt} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{dz}{dt} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 0.$$

Интегрируя один раз, получаем векторные поля на геодезическую:

$$\bigl(c_1e^{-z}, \quad c_2e^{z}, \quad \sqrt{c_3 - c_1^2e^{-2z} - c_2^2e^{2z}}\bigr). \tag{14}$$

Сравнивая формулы (11) и (14), приходим к выводу: *геодезические на группе G_1 с левоинвариантной метрикой при $p = -1/\alpha$ и $q = 1/\beta$ совпадают с геодезическими на группе* Sol *с левоинвариантной метрикой* (13).

5. Геодезические на группе G_2

Для группы G_2 уравнения (10) принимают следующий вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma p\frac{dx}{dt}\frac{dz}{dt} - q\frac{dy}{dt}\frac{dz}{dt} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dx}{dt}\frac{dz}{dt} + \gamma q\frac{dy}{dt}\frac{dz}{dt} = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} - \gamma p\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \gamma q\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + (q-p)\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} = 0.$$

Возможны следующие случаи.

1) $p - q = 0$. Решая первые два уравнения, получаем

$$\frac{dx}{dt} = e^{-\gamma pz}(c_1\sin pz - c_2\cos pz), \quad \frac{dy}{dt} = e^{-\gamma pz}(c_1\cos pz + c_2\sin pz).$$

Подставляя в третье, будем иметь

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \gamma p\bigl(c_1^2 + c_2^2\bigr)e^{-2\gamma pz},$$

поэтому

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{c_3 - \bigl(c_1^2 + c_2^2\bigr)e^{-2\gamma pz}}.$$

В результате получаем векторное поле геодезической

$$\bigl(e^{-\gamma pz}(c_1\sin pz - c_2\cos pz), \quad e^{-\gamma pz}(c_1\cos pz + c_2\sin pz), \quad \sqrt{c_3 - \bigl(c_1^2 + c_2^2\bigr)e^{-2\gamma pz}}\bigr).$$

2) $p - q \neq 0$, $\gamma^2 = 4pq/(p-q)^2$. Решая первые два уравнения, получаем

$$\frac{dx}{dt} = q(c_1z + c_2)e^{-z\frac{p+q}{p-q}\sqrt{pq}}, \quad \frac{dy}{dt} = (c_1\sqrt{pq}z + c_1 + c_2\sqrt{pq})e^{-z\frac{p+q}{p-q}\sqrt{pq}}.$$

3) $p-q\neq 0$, $D=\gamma^2(p-q)^2-4pq>0$. Из первых двух уравнений будем иметь

$$\frac{dx}{dt}=Re^{-\frac{p+q}{2}\gamma z}\operatorname{ch}(\sqrt{D}z/2+\alpha),$$

$$\frac{dy}{dt}=Re^{-\frac{p+q}{2}\gamma z}\left(\frac{(p-q)\gamma}{2pq}\operatorname{ch}(\sqrt{D}z/2+\alpha)+\frac{\sqrt{D}}{2pq}\operatorname{sh}(\sqrt{D}z/2+\alpha)\right).$$

4) $p-q\neq 0$, $d=-\gamma^2(p-q)^2+4pq>0$. Тогда

$$\frac{dx}{dt}=Re^{-\frac{p+q}{2}\gamma z}\cos(\sqrt{d}z/2+\alpha),$$

$$\frac{dy}{dt}=Re^{-\frac{p+q}{2}\gamma z}\left(\frac{(p-q)\gamma}{2pq}\cos(\sqrt{d}z/2+\alpha)-\frac{\sqrt{d}}{2pq}\sin(\sqrt{d}z/2+\alpha)\right).$$

6. Геодезические на группе G_3

Для группы G_3 уравнения (10) принимают следующий вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2}-p\frac{dx}{dt}\frac{dz}{dt}+q\frac{dy}{dt}\frac{dz}{dt}=0,\quad \frac{d^2y}{dt^2}-q\frac{dy}{dt}\frac{dz}{dt}=0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}+p\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+q\left(\frac{dy}{dt}\right)^2-q\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}=0.$$

Возможны два случая

1) $p=q$. Решая первые два уравнения, получаем

$$\frac{dx}{dt}=(c_1-c_2pz)e^{pz},\quad \frac{dy}{dt}=c_2e^{pz}.$$

Найденное подставляем в третье уравнение:

$$\frac{d^2z}{dt^2}=p\big(-c_2^2+(c_2(c_1-c_2pz)-(c_1-c_2pz)^2)\big)e^{2pz}.$$

Интегрируя, имеем

$$\frac{dz}{dt}=\sqrt{c_3-(c_1-c_2pz)^2e^{2pz}-c_2^2e^{2pz}}.$$

В результате приходим к векторному полю геодезической

$$\big((c_1-c_2pz)e^{pz},\quad c_2e^{pz},\quad \sqrt{c_3-(c_1-c_2pz)^2e^{2pz}-c_2^2e^{2pz}}\big).$$

2) $p\neq q$. Решая первые два уравнения, получаем

$$\frac{dx}{dt}=c_1e^{pz}+c_2e^{qz},\quad \frac{dy}{dt}=c_2\frac{p-q}{q}e^{qz}.$$

7. Тензор кривизны

Тензор кривизны на группе Ли связности Леви-Чивиты задается формулой [12]

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Вычисления дают следующие ненулевые результаты для компонент тензора кривизны, причем надо помнить, что по последним двум нижним индексам тензор антисимметричен:

для группы G_1:

$$R^1_{221} = pq\alpha\beta, \quad R^2_{121} = pq\alpha\beta, \quad R^3_{131} = -p\alpha^2,$$

$$R^1_{331} = p\alpha^2, \quad R^3_{232} = -q\beta^2, \quad R^2_{332} = q\beta^2;$$

для группы G_2:

$$R^2_{121} = -R^1_{221} = (p-q)^2/4 - pq\gamma^2,$$

$$R^3_{131} = -R^1_{331} = (p^2-q^2)/4 - \gamma^2 p + (p-q)/2,$$

$$R^3_{231} = -R^2_{331} = -(p+q)p\gamma/2 + \gamma(q-p)/2 + \gamma q,$$

$$R^3_{132} = -R^1_{332} = (p+q)q\gamma/2 + \gamma(q-p)/2 - \gamma p,$$

$$R^3_{232} = -R^2_{332} = -(p^2-q^2)/4 + (q-p)/2 - \gamma^2 q;$$

для группы G_3:

$$R^2_{121} = -R^1_{221} = q^2/4 - pq, \quad R^3_{131} = -R^1_{331} = -q^2/4 - p - q/2,$$

$$R^3_{231} = -R^2_{331} = -qp/2 + 3q/2,$$

$$R^3_{132} = -R^1_{332} = q^2/2 + q/2, \quad R^3_{232} = -R^2_{332} = q^2/4 - q.$$

8. Тензор кривизны Риччи и скалярная кривизна

Тензор кривизны Риччи определяется формулой [10]

$$r(X,Y) = \mathrm{tr}(Z \to R(X,Z)Y).$$

Вычисления дают следующие ненулевые результаты:

для группы G_1:

$$r_{11} = -pq\alpha\beta - p\alpha^2, \quad r_{22} = -pq\alpha\beta - q\beta^2, \quad r_{33} = -p\alpha^2 - q\beta^2;$$

для группы G_2:

$$r_{11} = (p-q)(p+1)/2 - \gamma^2 p(q+1), \quad r_{22} = -(p-q)(q+1)/2 - \gamma^2 q(p+1),$$

$$r_{33} = -\gamma^2(p+q), \quad r_{12} = \gamma q(p+q)/2 - \gamma p - \gamma(p-q), \quad r_{21} = \gamma p(p+q)/2 + \gamma q - \gamma(p-q);$$

для группы G_3:

$$r_{11} = -pq - p - q/2, \quad r_{12} = q^2/2 + q/2, \quad r_{21} = -pq/2 + 3q/2,$$

$$r_{22} = q^2/2 - q - pq, \quad r_{33} = -p - 3q/2.$$

Скалярная кривизна определяется формулой

$$S = r_{ij} g^{ij},$$

причем

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1/p & 0 & 0 \\ 0 & 1/q & 0 \\ 0 & 0 & 1/r \end{pmatrix}.$$

Вычисления дают следующие результаты:

для группы G_1:

$$S = -q\alpha\beta - \alpha^2 - p\alpha\beta - \beta^2 - p\alpha^2/r - q\beta^2/r;$$

для группы G_2:

$$S = (p - q)\left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{2q}\right) - \gamma^2(p + q + 2) - (p + q)\gamma^2/r;$$

для группы G_3:

$$S = -q/2p - q/2 - p - 2 - p/r - 3q/2r.$$

Заключение

В работе найдены левоинвариантные метрики и символы Кристоффеля связности Леви-Чивиты матричных групп Ли (7)–(9), компоненты тензоров Римана и Риччи, а также векторные поля геодезических. Все полученные результаты можно отнести к дважды инвариантным метрикам, если положить $p = q = 1$, $r = \alpha^2 + \beta^2$ для G_1, $r = 2(1 + \gamma)^2$ для G_2 и $r = 3$ для G_3. Исследования в этом направлении можно продолжить, например, изучить двумерные поверхности этих групп Ли, в частности, минимальные поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михайличенко Г. Г.* Математические основы и результаты теории физических структур. Горно-Алтайск: Изд. ГАГУ, 2016.
2. *Бредон Г.* Введение в теорию компактных групп преобразований. М.: Наука, 1980.
3. *Кыров В. А.* Гельмгольцевы пространства размерности два // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, №6. С. 1341–1359.
4. *Богданова Р. А.* Группы движений двумерных гельмгольцевых геометрий как решение функционального уравнения // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12, № 4. С. 12–22.
5. *Бердинский Д. А., Тайманов И. А.* Поверхности в трехмерных группах Ли // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 6. С. 1248–1264.
6. *Thurston W. P.* Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. V. 6, N 3. P. 357–381.
7. *Scott P.* The geometries of 3-manifolds // Bull. Lond. Math. Soc. 1982. V. 15, N 5. P. 401–487.
8. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1976.
9. *Новиков С. П., Тайманов И. А.* Современные геометрические структуры и поля. М.: Наука, 2005.

10. *Клепиков П. Н., Родионов Е. Д., Хромова О. П.* Уравнение Эйнштейна на трехмерных локально однородных (псевдо)римановых пространствах с векторным кручением// Мат. заметки СВФУ. 2021. Т. 28, № 4. С. 30–47. DOI: 10.25587/SVFU.2021.26.84.003.

11. *Milnor J. W.* Curvatures of left invariant metrics on Lie groups // Adv. Math. 1976. V. 21, N 3. P. 293–329.

12. *Gromoll D., Klingenberg W., Meyer W.* Riemannsche geometrie im grossen. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1968.

Поступила в редакцию 30 января 2023 г.
После доработки 25 сентября 2023 г.
Принята к публикации 30 ноября 2023 г.

Кыров Владимир Александрович
Горно-Алтайский государственный университет,
кафедра математика, физики и информатики,
ул. Ленкина, 1, Горно-Алтайск 649000
kyrovVA@yandex.ru

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2023. Том 30, № 4

UDC 514.765

LEFT–INVARIANT METRICS OF SOME THREE–DIMENSIONAL LIE GROUPS

V. A. Kyrov

Abstract: Mikhailichenko constructed a complete classification of two-dimensional geometries of maximum mobility, which contains, in addition to well-known geometries, also three geometries of the Helmholtz type (actually Helmholtz, pseudo-Helmholtz, and dual Helmholtz). Each of these geometries is specified by a function of a pair of points (an analogue of the Euclidean distance) and is a geometry of local maximum mobility, that is, it allows a three-parameter group of movements. The groups of motions of these geometries are uniquely associated with non-unimodular matrix three-dimensional Lie groups, the study of which is the subject of this article.

In this work, left-invariant metrics of the studied matrix Lie groups are constructed, and Levi-Civita connections are found, as well as curvature on these Lie groups. Geodesics on such Lie groups are studied.

DOI: 10.25587/2411-9326-2023-4-24-36

Keywords: geometry of local maximum mobility, left-invariant Riemannian metrics, curvature, geodesic.

REFERENCES

1. *Mikhailichenko G. G.*, Mathematical basics and results of the theory of physical structures [in Russian], Izdat. GASU, Gorno-Altaisk (2016).
2. *Bredon G.*, Introduction to the theory of compact transformation groups [in Russian], Nauka, Moscow (1980).
3. *Kyrov V. A.*, “Helmholtz spaces of dimension two [in Russian],” Sib. Math. J., **46**, No. 6, 1341–1359 (2005).
4. *Bogdanova R. A.*, “Groups of motions of two-dimensional Helmholtz geometries as a solution of a functional equation [in Russian],” Sib. J. Ind. Math., **12**, No. 4, 12–22 (2009).
5. *Berdinsky D. A. and Taimanov I. A.*, “Surfaces in three-dimensional Lie groups [in Russian],” Sib. Math. J., **46**, No. 6, 1248–1264 (2005).
6. *Thurston W. P.*, “Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry,” Bull. Amer. Math. Soc., **6**, No. 3, 357–381 (1982).
7. *Scott P.*, “The geometries of 3-manifolds,” Bull. Lond. Math. Soc., **15**, No. 5. 401–487 (1982).
8. *Ovsyannikov L. V.*, Group analysis of differential equations [in Russian], Nauka, Moscow (1976).
9. *Novikov S.P. and Taimanov I. A.*, Modern geometric structures and fields [in Russian], Nauka, Moscow (2005).
10. *Klepikov P. N., Rodionov E. D., and Khromova O. P.*, “Einstein equation on three-dimensional locally homogeneous (pseudo) Riemannian manifolds with vectorial torsion [in Russian],” Mat. Zamet. SVFU, **28**, No. 4, 30–47 (2021). DOI: https://doi.org/10.25587/SVFU.2021.26.84.003
11. *Milnor J. W.*, “Curvatures of left invariant metrics on Lie groups,” Adv. Math., **21**, No. 3, 293–329 (1976).

12. *Gromoll D., Klingenberg W., and Meyer W.*, Riemannsche geometrie im grossen, Springer, Berlin; Heidelberg; New York (1968).

Submitted January 30, 2023
Revised September 25, 2023
Accepted November 30, 2023

Vladimir A. Kyrov
Gorno-Altaisk State University,
Lenkina st., 1, Gorno-Altaisk 649000, Russia
`kyrovVA@yandex.ru`

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2023. Том 30, № 4

УДК 517.929.4

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ЛИНЕЙНЫХ ЧЛЕНАХ

И. И. Матвеева, А. В. Хмиль

Аннотация. Рассматривается класс систем разностных уравнений с переменным запаздыванием и периодическими коэффициентами в линейных членах. Указаны условия асимптотической устойчивости нулевого решения и получены оценки, характеризующие скорость стабилизации решений на бесконечности.

DOI: 10.25587/2411-9326-2023-4-37-48

Ключевые слова: разностные уравнения с запаздыванием, асимптотическая устойчивость, функционал Ляпунова — Красовского, оценки решений.

1. Введение

В работе рассматриваются системы разностных уравнений с периодическими коэффициентами в линейных членах следующего вида:

$$x_{n+1} = A(n)x_n + B(n)x_{n-\tau(n)} + F(n, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-\tau}), \quad n = 0, 1, \dots, \tag{1.1}$$

где $\{A(n)\}$, $\{B(n)\}$ — последовательности N-периодических матриц размера $m \times m$, т. е.

$$A(n+N) = A(n), \quad B(n+N) = B(n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

$\tau(n) \in \mathbb{N}$ — параметр запаздывания, $1 \leq \tau(n) \leq \tau < \infty$, $F(n, v_0, v_1, \dots, v_\tau)$ — непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая оценке

$$\|F(n, v_0, v_1, \dots, v_\tau)\| \leq q_0\|v_0\| + q_1\|v_1\| + \dots + q_\tau\|v_\tau\|, \quad n = 0, 1, \dots, \quad v_j \in \mathbb{R}^m, \tag{1.2}$$

$q_j \geq 0$, $j = 0, 1, \dots, \tau$. Цель работы — изучение асимптотической устойчивости нулевого решения систем вида (1.1) и получение оценок решений $\{x_n\}$, характеризующих скорость стабилизации при $n \to \infty$.

Обыкновенные разностные уравнения и уравнения с запаздыванием используются при моделировании различных процессов в биологии, экономике,

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

социологии и др. Одной из важных является проблема устойчивости решений возникающих уравнений и систем. Систематическое изучение устойчивости для разностных уравнений началось в 50-е гг. прошлого столетия (см., например, [1–3]). Это было обусловлено развитием численных методов и математического моделирования. В настоящее время имеется ряд монографий по разностным уравнениям, в которых изложены различные результаты по теории устойчивости и методы, которыми они получены (см., например, [4–6]).

В последнюю четверть века проводятся активные исследования устойчивости решений разностных уравнений с запаздыванием (см., например, [7–17] и ссылки в этих работах). При изучении устойчивости применяются аналоги методов, используемых в теории функционально-дифференциальных уравнений (спектральные методы, метод неравенств типа Халаная, метод функций Ляпунова, построение решения в операторном виде, установление связей между обыкновенными дифференциальными уравнениями и разностными уравнениями с запаздыванием и т. д.).

Системы вида (1.1) с постоянными коэффициентами ($A(n) \equiv A$, $B(n) \equiv B$) рассматривались в [19, 20]. С использованием функционала Ляпунова — Красовского в работе [19] исследовалась устойчивость нулевого решения в линейном случае ($F(n, u_0, u_1, \dots, u_\tau) \equiv 0$), в [20] — в нелинейном случае. В [21] изучалась асимптотическая устойчивость нулевого решения линейной системы вида (1.1) ($F(n, u_0, u_1, \dots, u_\tau) \equiv 0$) с N-периодическими коэффициентами.

В данной работе при изучении асимптотической устойчивости нулевого решения систем вида (1.1) с N-периодическими коэффициентами в линейных членах будем использовать функционал Ляпунова — Красовского

$$v(n, x) = \langle H(n)x_n, x_n\rangle + \sum_{j=n-\tau}^{n-1} \langle K_{n-j-1}x_j, x_j\rangle, \tag{1.3}$$

где $H(n)$, $K_0, K_1, \dots, K_{\tau-1}$ — некоторые эрмитовы положительно определенные матрицы. Этот функционал был предложен в работе [21] и является дискретным аналогом функционала Ляпунова — Красовского

$$V(t, y) = \langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds,$$

$$H(t) = H^*(t) > 0, \quad K(s) = K^*(s) > 0, \quad s \in [0, \tau],$$

введенного в работе [22] для исследования асимптотической устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с запаздыванием и периодическими коэффициентами в линейных членах [23]

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > 0,$$

где $A(t)$, $B(t)$ — матрицы с T-периодическими коэффициентами. Используя функционал (1.3), мы установим достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения нелинейных систем вида (1.1) и получим оценки на скорость стабилизации решений на бесконечности.

2. Предварительные сведения

Рассмотрим линейную систему разностных уравнений с запаздыванием и периодическими коэффициентами

$$x_{n+1} = A(n)x_n + B(n)x_{n-\tau(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{2.1}$$

где $\{A(n)\}$, $\{B(n)\}$ — последовательности N-периодических матриц размера $m \times m$, $\tau(n) \in \mathbb{N}$ — параметр запаздывания, $1 \le \tau(n) \le \tau < \infty$. Очевидно, эту систему можно записать в виде следующей системы линейных разностных уравнений с переменными коэффициентами:

$$x_{n+1} = A(n)x_n + \sum_{j=1}^{\tau} B_j(n)x_{n-j}, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{2.2}$$

где

$$B_j(n) = \begin{cases} B(n) & \text{при} \quad j = \tau(n), \\ 0 & \text{при} \quad j \ne \tau(n). \end{cases} \tag{2.3}$$

При изучении асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2.2) в работе [21] использовался функционал Ляпунова — Красовского (1.3). Были установлены достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2.2), а следовательно, и (2.1), при этом также получены оценки на скорость убывания решения $\{x_n\}$ системы (2.1) с заданными начальными условиями

$$x_0,\ x_{-1}, \dots, x_{-\tau} \tag{2.4}$$

при $n \to \infty$. Приведем соответствующие результаты из работы [21]. Всюду далее $S > 0\,(S < 0)$ означает, что S — эрмитова положительно (отрицательно) определенная матрица.

Теорема 1.1 [21]. *Предположим, что существуют эрмитовы положительно определенные матрицы $H(n)$, K_j, $j = 0, 1, \dots, \tau$, такие, что*

$$H(0) = H(N), \quad \Delta_j = K_{j-1} - K_j > 0, \quad j = 1, \dots, \tau,$$

и составные матрицы

$$C(n) = -\begin{pmatrix} C_{00}(n) & A^*(n)H(n+1)B_1(n) & \dots & A^*(n)H(n+1)B_\tau(n) \\ B_1^*(n)H(n+1)A(n) & C_{11}(n) & \dots & B_1^*(n)H(n+1)B_\tau(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_\tau^*(n)H(n+1)A(n) & B_\tau^*(n)H(n+1)B_1(n) & \dots & C_{\tau\tau}(n) \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

с элементами

$$C_{00}(n) = A^*(n)H(n+1)A(n) - H(n) + K_0,$$

$$C_{jj}(n) = B_j^*(n)H(n+1)B_j(n) - \frac{1}{2}\Delta_j, \quad j = 1, \dots, \tau - 1,$$

$$C_{\tau\tau}(n) = B_\tau^*(n)H(n+1)B_\tau(n) - K_\tau,$$

положительно определены. Тогда нулевое решение системы (2.1) *асимптотически устойчиво.*

Из определения матриц $B_j(n)$ вытекает, что количество различных матриц $\{C(n)\}$ конечно. Следовательно, при выполнении условий теоремы 1.1 существует константа $c_1 > 0$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$\left\langle C(n) \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_\tau \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_\tau \end{pmatrix} \right\rangle \geq c_1 \sum_{i=0}^{\tau} \|v_i\|^2, \quad v_i \in \mathbb{R}^m.$$

Теорема 1.2 [21]. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 1.1. *Пусть* $\varkappa_j \in (0,1)$, $j = 1, 2, \dots, \tau$, *такие, что*

$$-\frac{1}{2}\Delta_i + \varkappa_i K_{i-1} \leq 0, \quad i = 1, \dots, \tau - 1, \quad -\Delta_\tau + \varkappa_\tau K_{\tau-1} \leq 0. \tag{2.6}$$

Тогда для решения начальной задачи (2.1), (2.4) *справедлива оценка*

$$\|x_n\|^2 \leq (h_1(n))^{-1} \prod_{j=0}^{n-1} (1 - \varepsilon_j) v(0, x), \tag{2.7}$$

где $h_1(n) > 0$ — *минимальное собственное значение матрицы* $H(n)$,

$$v(0, x) = \langle H(0)x_0, x_0 \rangle + \sum_{j=-\tau}^{-1} \langle K_{-j-1} x_j, x_j \rangle, \tag{2.8}$$

$$\varepsilon_j = \min \left\{ \varkappa_1, \dots, \varkappa_\tau, \frac{c_1}{\|H(j)\|} \right\}, \quad 0 < \varepsilon_j < 1.$$

3. Основной результат

В этом разделе исследуем асимптотическую устойчивость решений нелинейных систем разностных уравнений с запаздыванием вида (1.1). Поскольку запаздывание ограничено, систему (1.1) можно записать в виде

$$x_{n+1} = A(n)x_n + \sum_{j=1}^{\tau} B_j(n) x_{n-j} + F(n, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-\tau}), \quad n = 0, 1, \dots, \tag{3.1}$$

где матрицы $B_j(n)$ определены в (2.3). Рассмотрим для системы (1.1) (она же (3.1)) начальную задачу с заданными начальными условиями

$$x_0, x_{-1}, \dots, x_{-\tau}. \tag{3.2}$$

Будем предполагать, что выполнены условия теоремы 1.1 и определены матрицы $H(n)$, K_j, $j = 0, \dots, \tau$. Введем следующие обозначения:

$$\alpha_0 = \alpha_0(n) = 2q_0 \|H(n+1)\| \|A(n)\| + q_0^2 \|H(n+1)\|,$$

$$\alpha_i = \alpha_i(n) = 2\|H(n+1)\| (\|A(n)\| q_i + q_0 \|B_i(n)\| + q_0 q_i), \quad i = 1, 2, \dots, \tau,$$

$$\alpha_0^j = \alpha_0^j(n) = 2q_j\|H(n+1)\|\|B_j(n)\| + q_j^2\|H(n+1)\|, \quad j = 1,2,\dots,\tau,$$

$$\alpha_i^j = \alpha_i^j(n) = 2q_i\|H(n+1)\|(\|B_i(n)\| + q_i\theta(i-j)), \quad i,j = 1,2,\dots\tau, \quad i \neq j, \tag{3.3}$$

где

$$\theta(i-j) = \begin{cases} 1, & i > j, \\ 0, & i < j, \end{cases}$$

$$D(n) = \begin{pmatrix} \alpha_0(n) & \frac{\alpha_1(n)}{2} & \frac{\alpha_2(n)}{2} & \frac{\alpha_3(n)}{2} & \dots & \frac{\alpha_\tau(n)}{2} \\ \frac{\alpha_1(n)}{2} & \alpha_0^1(n) & \frac{\alpha_1^2(n)+\alpha_2^1(n)}{2} & \frac{\alpha_1^3(n)+\alpha_3^1(n)}{2} & \dots & \frac{\alpha_1^\tau(n)+\alpha_\tau^1(n)}{2} \\ \frac{\alpha_2(n)}{2} & \frac{\alpha_1^2(n)+\alpha_2^1(n)}{2} & \alpha_0^2(n) & \frac{\alpha_2^3(n)+\alpha_3^2(n)}{2} & \dots & \frac{\alpha_2^\tau(n)+\alpha_\tau^2(n)}{2} \\ \frac{\alpha_3(n)}{2} & \frac{\alpha_1^3(n)+\alpha_3^1(n)}{2} & \frac{\alpha_2^3(n)+\alpha_3^2(n)}{2} & \alpha_0^3(n) & \dots & \frac{\alpha_3^\tau(n)+\alpha_\tau^3(n)}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\alpha_\tau(n)}{2} & \frac{\alpha_1^\tau(n)+\alpha_\tau^1(n)}{2} & \frac{\alpha_2^\tau(n)+\alpha_\tau^2(n)}{2} & \frac{\alpha_3^\tau(n)+\alpha_\tau^3(n)}{2} & \dots & \alpha_0^\tau(n) \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Отметим, что количество различных матриц $\{D(n)\}$ конечно. Следовательно, существуют $d_j \geq 0$ такие, что для любого $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$\left\langle D(n)\begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_\tau \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_\tau \end{pmatrix} \right\rangle \leq \sum_{j=0}^{\tau} d_j u_j^2. \tag{3.5}$$

Введем матрицу

$$C_d(n) = C(n) - \begin{pmatrix} d_0 I & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_\tau I \end{pmatrix}.$$

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.1. *Если параметры* $q_0, q_1, \dots, q_\tau$ *такие, что*

$$\left\langle C_d(n)\begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_\tau \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_\tau \end{pmatrix} \right\rangle \geq d\|v_0\|^2, \quad d > 0, \; v_j \in \mathbb{R}^m, \tag{3.6}$$

то нулевое решение системы (1.1) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — решение начальной задачи (1.1), (3.2). Рассмотрим на этом решении функционал $v(n,x)$, определенный в (1.3). В силу условий на матрицы $H(n)$, K_j, $j = 0,\dots,\tau$, будет $v(n,x) > 0$ при $\{x_n\} \neq 0$. Рассмотрим разность $v(n+1,x) - v(n,x)$. Используя обозначения для матриц Δ_j, имеем

$$v(n+1,x) - v(n,x) = \langle H(n+1)x_{n+1}, x_{n+1}\rangle - \langle H(n)x_n, x_n\rangle$$

$$+ \sum_{j=n+1-\tau}^{n} \langle K_{n-j}x_j, x_j\rangle - \sum_{j=n-\tau}^{n-1} \langle K_{n-j-1}x_j, x_j\rangle = \langle H(n+1)x_{n+1}, x_{n+1}\rangle - \langle H(n)x_n, x_n\rangle$$

$$+ \langle K_0 x_n, x_n\rangle - \sum_{j=n-\tau}^{n-1} \langle \Delta_{n-j}x_j, x_j\rangle - \langle K_\tau x_{n-\tau}, x_{n-\tau}\rangle.$$

Учитывая, что $\{x_n\}$ является решением эквивалентной задачи (3.1), (3.2), получаем

$$v(n+1,x)-v(n,x)=\langle A^*(n)H(n+1)A(n)x_n,x_n\rangle-\langle H(n)x_n,x_n\rangle+\langle K_0x_n,x_n\rangle$$
$$+\sum_{j=1}^{\tau}\langle A^*(n)H(n+1)B_j(n)x_{n-j},x_n\rangle+\sum_{j=1}^{\tau}\langle B_j^*(n)H(n+1)A(n)x_n,x_{n-j}\rangle$$
$$+\sum_{j,i=1}^{\tau}\langle B_j^*(n)H(n+1)B_i(n)x_{n-i},x_{n-j}\rangle-\sum_{j=n-\tau}^{n-1}\langle\Delta_{n-j}x_j,x_j\rangle-\langle K_\tau x_{n-\tau},x_{n-\tau}\rangle$$
$$+2\operatorname{Re}\langle H(n+1)A(n)x_n,F(n,x_n,x_{n-1},\dots,x_{n-\tau})\rangle$$
$$+2\sum_{j=1}^{\tau}\operatorname{Re}\langle H(n+1)B_j(n)x_{n-j},F(n,x_n,x_{n-1},\dots,x_{n-\tau})\rangle$$
$$+\langle H(n+1)F(n,x_n,x_{n-1},\dots,x_{n-\tau}),F(n,x_n,x_{n-1},\dots,x_{n-\tau})\rangle.$$

Используя матрицу $C(n)$, заданную в (2.5), разность $v(n+1,x)-v(n,x)$ можно переписать в виде

$$v(n+1,x)-v(n,x)=-\left\langle C(n)\begin{pmatrix}x_n\\ \vdots\\ x_{n-\tau}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_n\\ \vdots\\ x_{n-\tau}\end{pmatrix}\right\rangle$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{j=n-\tau+1}^{n-1}\langle\Delta_{n-j}x_j,x_j\rangle-\langle\Delta_\tau x_{n-\tau},x_{n-\tau}\rangle+W(n,x),\qquad(3.7)$$

где

$$W(n,x)=2\operatorname{Re}\langle H(n+1)A(n)x_n,F(n,x_n,x_{n-1},\dots,x_{n-\tau})\rangle$$
$$+\ 2\sum_{j=1}^{\tau}\operatorname{Re}\langle H(n+1)B_j(n)x_{n-j},F(n,x_n,x_{n-1},\dots,x_{n-\tau})\rangle$$
$$+\ \langle H(n+1)F(n,x_n,x_{n-1},\dots,x_{n-\tau}),F(n,x_n,x_{n-1},\dots,x_{n-\tau})\rangle.$$

В силу (1.2) имеем

$$|W(n,x)|\le 2\|H(n+1)\|\|A(n)\|\|x_n\|\left(q_0\|x_n\|+q_1\|x_{n-1}\|+\dots+q_\tau\|x_{n-\tau}\|\right)$$
$$+2\|H(n+1)\|\left(q_0\|x_n\|+q_1\|x_{n-1}\|+\dots+q_\tau\|x_{n-\tau}\|\right)\sum_{j=1}^{\tau}\|B_j(n)\|\|x_{n-j}\|$$
$$+\|H(n+1)\|\left(q_0\|x_n\|+q_1\|x_{n-1}\|+\dots+q_\tau\|x_{n-\tau}\|\right)^2$$
$$=\Bigg[\big(2\|H(n+1)\|\|A(n)\|q_0+q_0^2\|H(n+1)\|\big)\|x_n\|^2$$
$$+2\|H(n+1)\|\|x_n\|\sum_{j=1}^{\tau}(\|A(n)\|q_j+q_0\|B_j(n)\|+q_0q_j)\|x_{n-j}\|\Bigg]$$
$$+\sum_{j=1}^{\tau}\Bigg\{\big(2q_j\|H(n+1)\|\|B_j(n)\|+q_j^2\|H(n+1)\|\big)\|x_{n-j}\|^2$$

$$+ 2q_j\|H(n+1)\|\left(\sum_{k=1,k\neq j}^{\tau}\|B_k(n)\|\|x_{n-k}\| + \sum_{i=j+1}^{\tau} q_i\|x_{n-i}\|\right)\|x_{n-j}\|\Bigg\} = V(n).$$

Используя обозначения (3.3), $V(n)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} V(n) &= \alpha_0 u_0^2 + u_0(\alpha_1 u_1 + \ldots \alpha_\tau u_\tau) \\ &\quad + \alpha_0^1 u_1^2 + u_1\big(\alpha_2^1 u_2 + \alpha_3^1 u_3 + \cdots + \alpha_\tau^1 u_\tau + \alpha_1^2 u_2 + \alpha_1^3 u_3 + \cdots + \alpha_1^\tau u_\tau\big) \\ &\quad + \alpha_0^2 u_2^2 + u_2\big(\alpha_3^2 u_3 + \alpha_4^2 u_4 + \cdots + \alpha_\tau^2 u_\tau + \alpha_2^3 u_3 + \alpha_2^4 u_4 + \cdots + \alpha_2^\tau u_\tau\big) \\ &\quad + \alpha_0^3 u_3^2 + u_3\big(\alpha_4^3 u_4 + \alpha_5^3 u_5 + \cdots + \alpha_\tau^3 u_\tau + \alpha_3^4 u_4 + \alpha_3^5 u_5 + \cdots + \alpha_3^\tau u_\tau\big) \\ &\quad + \cdots + \alpha_0^\tau u_\tau^2, \end{aligned}$$

где $u_j = \|x_{n-j}\|$, $j = 0, 1, \ldots, \tau$. Перегруппировав слагаемые, получаем

$$\begin{aligned} V(n) &= \alpha_0 u_0^2 + u_0(\alpha_1 u_1 + \ldots \alpha_\tau u_\tau) \\ &\quad + \alpha_0^1 u_1^2 + u_1\big((\alpha_1^2 + \alpha_2^1)u_2 + (\alpha_1^3 + \alpha_3^1)u_3 + \cdots + (\alpha_\tau^1 + \alpha_1^\tau)u_\tau\big) \\ &\quad + \alpha_0^2 u_2^2 + u_2\big((\alpha_2^3 + \alpha_3^2)u_3 + (\alpha_2^4 + \alpha_4^2)u_4 + \cdots + (\alpha_\tau^2 + \alpha_2^\tau)u_\tau\big) \\ &\quad + \alpha_0^3 u_3^2 + u_3\big((\alpha_3^4 + \alpha_4^3)u_4 + (\alpha_3^5 + \alpha_5^3)u_5 + \cdots + (\alpha_\tau^3 + \alpha_3^\tau)u_\tau\big) + \cdots + \alpha_0^\tau u_\tau^2 \\ &= \left\langle D(n)\begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_\tau \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_\tau \end{pmatrix}\right\rangle, \end{aligned}$$

где матрица $D(n)$ определена в (3.4). Следовательно, из (3.5) вытекает оценка

$$|W(n,x)| \le V(n) \le d_0\|x_n\|^2 + \cdots + d_\tau\|x_{n-\tau}^2\|.$$

Учитывая приведенные выше неравенства, из (3.7) получаем

$$\begin{aligned} v(n+1,x) - v(n,x) \le -\left\langle C_d(n)\begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_{n-\tau} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_{n-\tau} \end{pmatrix}\right\rangle \\ - \frac{1}{2}\sum_{j=n-\tau+1}^{n-1}\langle \Delta_{n-j}x_j, x_j\rangle - \langle \Delta_\tau x_{n-\tau}, x_{n-\tau}\rangle. \end{aligned}$$

Используя (3.6), имеем

$$0 \le v(n+1,x) \le v(n,x) - d\|x_n\|^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=n-\tau+1}^{n-1}\langle \Delta_{n-j}x_j, x_j\rangle - \langle \Delta_\tau x_{n-\tau}, x_{n-\tau}\rangle. \quad (3.8)$$

В силу положительной определенности матриц Δ_j получаем

$$v(n+1,x) - v(n,x) \le -d\|x_n\|^2.$$

Поскольку $d > 0$, имеем $v(n+1,x) - v(n,x) < 0$ при $\{x_n\} \neq 0$. Тогда последовательность $\{v(n,x)\}$ является монотонно убывающей и ограниченной снизу. По теореме Вейерштрасса она имеет предел. В силу единственности предела

$$0 \le d\|x_n\|^2 \le v(n,x) - v(n+1,x) \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Отсюда вытекает асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (3.1) и, следовательно, системы (1.1).

Теорема доказана.

Теорема 3.2. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 3.1. *Тогда для решения начальной задачи* (3.1), (3.2) *справедливо неравенство*

$$\|x_n\|^2 \le (h_1(n))^{-1} \prod_{j=0}^{n-1} (1 - \widetilde{\varepsilon_j}) v(0, x), \tag{3.9}$$

где $h_1(n) > 0$ — *минимальное собственное значение матрицы* $H(n)$,

$$\widetilde{\varepsilon_j} = \min \left\{ \varkappa_1, \dots, \varkappa_\tau, \frac{d}{\|H(j)\|} \right\}, \quad 0 < \widetilde{\varepsilon_j} < 1,$$

$\varkappa_j$, $v(0, x)$ *определены в* (2.6) *и* (2.8) *соответственно.*

Доказательство. В силу (2.6) имеем

$$\frac{1}{2} \sum_{j=n-\tau+1}^{n-1} \langle \Delta_{n-j} x_j, x_j \rangle + \langle \Delta_\tau x_{n-\tau}, x_{n-\tau} \rangle \\ \ge \sum_{j=n-\tau+1}^{n-1} \varkappa_{n-j} \langle K_{n-j-1} x_j, x_j \rangle + \varkappa_\tau \langle K_{\tau-1} x_{n-\tau}, x_{n-\tau} \rangle.$$

Следовательно, из (3.8) получаем

$$0 \le v(n+1, x) \le v(n, x) - d\|x_n\|^2 - \sum_{j=n-\tau}^{n-1} \varkappa_{n-j} \langle K_{n-j-1} x_j, x_j \rangle. \tag{3.9}$$

Тогда

$$v(n+1, x) \le v(n, x) - \frac{d}{\|H(n)\|} \langle H(n) x_n, x_n \rangle - \sum_{j=n-\tau}^{n-1} \varkappa_{n-j} \langle K_{n-j-1} x_j, x_j \rangle.$$

Учитывая условия теоремы 3.2 и определение $\widetilde{\varepsilon}$, имеем

$$v(n+1, x) \le v(n, x) - \widetilde{\varepsilon_n} \left(\langle H(n) x_n, x_n \rangle + \sum_{j=n-\tau}^{n-1} \langle K_{n-j-1} x_j, x_j \rangle \right) = (1 - \widetilde{\varepsilon_n}) v(n, x).$$

Следовательно,

$$v(n, x) \le \prod_{j=0}^{n-1} (1 - \widetilde{\varepsilon_j}) v(0, x),$$

где $v(0, x)$ определено в (2.8). Тогда

$$\|x_n\|^2 \le (h_1(n))^{-1} \langle H(n) x_n, x_n \rangle \le (h_1(n))^{-1} v(n, x) \le (h_1(n))^{-1} \prod_{j=0}^{n-1} (1 - \widetilde{\varepsilon_j}) v(0, x).$$

Теорема доказана.

Замечание. Если $q_j = 0$, $j = 0, \dots, \tau$, то имеем линейную систему и $d = c_1$. Тогда оценка (3.9) дает неравенство (2.7), а утверждения теорем 3.1 и 3.2 переходят в утверждения теорем 1.1 и 1.2, полученных в работе [21].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коваль П. И.* Приводимые системы разностных уравнений и устойчивость их решений // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 6. С. 143–146.

2. *Hahn W.* Über die Adwendung der Methode von Ljapunov auf Differenzengleichungen // Math. Ann. 1958. Bd 136, Heft 1. S. 430–441.

3. *Jury E. I.* A simplified stability criterion for linear discrete systems // Proc. IRE. 1962. V. 50, N 6. P. 1493–1500.

4. *Hahn W.* Theorie und Adwendung der Direkten Methode von Ljapunov. Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer-Verl., 1959.

5. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971.

6. *Elaydi S. N.* An introduction to difference equations. New York: Springer-Verl., 1999.

7. *Gyori I., Pituk M.* Asymptotic formulae for solutions of a linear delay difference equation // J. Math. Anal. Appl. 1995. V. 195, N 2. P. 376–392.

8. *Erbe L. H., Xia H., Yu J. S.* Global stability of a linear nonautonomous delay difference equation // J. Differ. Equ. Appl. 1995. V. 1, N 2. P. 151–161.

9. *Yu J. S.* Asymptotic stability of a linear difference equation with variable delay // Comput. Math. Appl. 1998. V. 36, N 10–12. P. 203–210.

10. *Agarwal R. P., Kim Y. H., Sen S. K.* Advanced discrete Halanay-type inequalities: stability of difference equations // J. Inequal. Appl. 2009. Article ID 535849.

11. *Berezansky L., Braverman E.* Exponential stability of difference equations with several delays: recursive approach // Adv. Differ. Equ. 2009. Article ID 104310.

12. *Хусаинов Д. Я., Шатырко А. В.* Исследование абсолютной устойчивости разностных систем с запаздыванием вторым методом Ляпунова // Журн. вычисл. и прикл. математики. 2010. № 4. С. 118–126.

13. *Куликов А. Ю.* Устойчивость линейного неавтономного разностного уравнения с ограниченными запаздываниями // Изв. вузов. Математика. 2010. № 11. С. 22–30.

14. *Куликов А. Ю., Малыгина В. В.* Устойчивость линейного разностного уравнения и оценки его фундаментального решения // Изв. вузов. Математика. 2011. № 12. С. 30–41.

15. *Stojanovic S. B., Debeljkovic D. L. J., Dimitrijevic N.* Stability of discrete-time systems with time-varying delay: delay decomposition approach // Intern. J. Comput. Commun. Control. 2012. V. 7, N 4. P. 775–783.

16. *Baštinec J., Demchenko H., Diblik J., Khusainov D. Ya.* Exponential stability of linear discrete systems with multiple delays // Discrete Dyn. Nat. Soc. 2018. Article ID 9703919.

17. *Ngoc P.H.A., Trinh H., Hieu L. T., Huy N. D.* On contraction of nonlinear difference equations with time-varying delays // Math. Nachr. 2019. V. 292, N 4. P. 859–870.

18. *Park J.H., Lee T. H., Liu Y., Chen J.* Dynamic systems with time delays: Stability and control. Singapore: Springer, 2019.

19. *Демиденко Г. В., Балданов Д. Ш.* Об асимптотической устойчивости решений разностных уравнений с запаздыванием // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2015. Т. 15, № 4. С. 50–62.

20. *Матвеева И. И., Хмиль А. В.* Устойчивость решений одного класса нелинейных систем разностных уравнений с запаздыванием // Мат. заметки СВФУ. 2021. Т. 28, № 3. С. 31–44.

21. *Demidenko G. V., Baldanov D. Sh.* Exponential stability of solutions to delay difference equations with periodic coefficients // Continuum Mechanics, Applied Mathematics and Scientific Computing: Godunov's Legacy – A Liber Amicorum to Professor Godunov (Editors: Demidenko G. V., Romenski E., Toro E., Dumbser M.). Cham: Springer Nature, 2020. P. 93–100.

22. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, № 3. С. 20–28.

23. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах //

Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1025–1040.

Поступила в редакцию 30 октября 2023 г.
После доработки 30 октября 2023 г.
Принята к публикации 30 ноября 2023 г.

Матвеева Инесса Изотовна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
i.matveeva@g.nsu.ru

Хмиль Арсений Владимирович
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
khmilarseniy@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2023. Том 30, № 4

UDC 517.929.4

STABILITY OF SOLUTIONS TO ONE CLASS OF DIFFERENCE EQUATIONS WITH TIME–VARYING DELAY AND PERIODIC COEFFICIENTS IN LINEAR TERMS

I. I. Matveeva and A. V. Khmil

Abstract: We consider a class of systems of difference equations with time-varying delay and periodic coefficients in linear terms. Conditions for the asymptotic stability of the zero solution are established and estimates characterizing stabilization rates of solutions at infinity are obtained.

DOI: 10.25587/2411-9326-2023-4-37-48

Keywords: delay difference equations, asymptotic stability, Lyapunov–Krasovskii functional, estimates for solutions.

REFERENCES

1. *Koval' P. I.*, Reducible systems of difference equations and stability of their solutions," Uspekhi Mat. Nauk, **12**, No. 6, 143–146 (1957).
2. *Hahn W.*, Über die Anwendung der Methode von Ljapunov auf Differenzengleichungen," Math. Ann., **136**, No. 1, 430–441 (1958).
3. *Jury E. I.*, "A simplified stability criterion for linear discrete systems," ERL Rep. Ser., No. 60, 373 (1961).
4. *Hahn W.*, Theorie und Anwendung der direkten Methode von Ljapunov, Springer, Berlin; Göttingen; Heidelberg (1959).
5. *Halanay A. and Wexler D.*, Qualitative Theory of Impulse Systems. Rom. Acad. Press, Bucharest (1968).
6. *Elaydi S. N.*, An Introduction to Difference Equations, Springer, New York (1999).
7. *Györi I. and Pituk M.*, "Asymptotic formulae for the solutions of a linear delay difference equation," J. Math. Anal. Appl., **195**, No. 2, 376–392 (1995).
8. *Erbe L.H., Xia H., and Yu J. S.*, Global stability of a linear nonautonomous delay difference equation," J. Differ. Equ. Appl., **1**, No. 2, 151–161 (1995).
9. *Yu J. S.*, "Asymptotic stability of a linear difference equation with variable delay," Comput. Math. Appl., **36**, No. 10–12, 203–210 (1998).
10. *Agarwal R. P., Kim Y. H., and Sen S. K.*, "Advanced discrete Halanay-type inequalities: stability of difference equations," J. Inequal. Appl., article ID 535849 (2009).
11. *Berezansky L., Braverman E.*, Exponential stability of difference equations with several delays: recursive approach," Adv. Differ. Equ., article ID 104310 (2009).
12. *Khusainov D. Ya. and Shatyrko A. V.*, "Research of absolute stability of difference systems with delay via the second method of Lyapunov [in Russian]," J. Vychisl. Prikl. Mat., No. 4, 118–126 (2010).
13. *Kulikov A.Yu.*, "Stability of a linear nonautonomous difference equation with bounded delays," Rus. Math., **54**, No. 11, 18–26 (2010).
14. *Kulikov A. Yu. and Malygina V. V.*, "Stability of a linear difference equation and estimation of its fundamental solution," Russ. Math., **55**, No. 12, 23–33 (2011).

15. *Stojanovic S. B., Debeljkovic D. L. J., and Dimitrijevic N.*, "Stability of discrete-time systems with time-varying delay: delay decomposition approach," Int. J. Comput. Commun. Control, **7**, No. 4, 775–783 (2012).
16. *Baštinec J., Demchenko H., Diblik J., and Khusainov D. Ya.*, "Exponential stability of linear discrete systems with multiple delays," Discrete Dyn. Nature Soc., article ID 9703919 (2018).
17. *Ngoc P. H. A., Trinh H., Hieu L. T., and Huy N. D.*, "On contraction of nonlinear difference equations with time-varying delays," Math. Nachr., **292**, No. 4, 859–870 (2019).
18. *Park J. H., Lee T. H., Liu Y., and Chen J.*, Dynamic Systems with Time Delays: Stability and Control. Singapore: Springer, 2019.
19. *Demidenko G. V. and Baldanov D. Sh.*, "On asymptotic stability of solutions to delay difference equations," J. Math. Sci., **221**, No. 6, 815–825 (2017).
20. *Matveeva I. I. and Kmhil A. V.*, "Stability of solutions to one class of nonlinear systems of delay difference equations," Mat. Zamet. SVFU, **28**, No. 3, 31–44 (2021).
21. *Demidenko G. V. and Baldanov D. Sh.*, Exponential stability of solutions to delay difference equations with periodic coefficients," in: Continuum Mechanics, Applied Mathematics and Scientific Computing: Godunov's Legacy — A Liber Amicorum to Professor Godunov (Demidenko G. V., Romenski E., Toro E., Dumbser M., eds.), pp. 93–100, Springer Nature, Cham (2020).
22. *Demidenko G. V. and Matveeva I. I.*, Asymptotic properties of solutions to delay differential equations," Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform., **5**, No. 3, 20–28 (2005).
23. *Demidenko G. V. and Matveeva I. I.*, "Stability of solutions to delay differential equations with periodic coefficients of linear terms," Sib. Math. J., **48**, No. 5, 824–836 (2007).

Submitted October 30, 2023
Revised October 30, 2023
Accepted November 30, 2023

Inessa I. Matveeva
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Avenue, Novosibirsk 630090, Russia;
Novosibirsk State University,
1 Pirogov Street, Novosibirsk 630090, Russia
i.matveeva@g.nsu.ru

Arseniy V. Khmil
Novosibirsk State University,
1 Pirogov Street, Novosibirsk 630090, Russia
khmilarseniy@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2023. Том 30, № 4

УДК 517.929.4

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ В МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИИ РЕПТИЛИЙ

М. А. Скворцова

Аннотация. Рассматривается модель динамики популяции рептилий, у которых пол будущей особи зависит от температуры окружающей среды. Модель описывается системой дифференциальных уравнений с запаздыванием, которое отвечает за время нахождения особей в молодом возрасте. Изучается случай полного вымирания всей популяции и случай стабилизации численности популяции к постоянной величине. В каждом случае построены функционалы Ляпунова — Красовского, с помощью которых указаны оценки, характеризующие скорость вымирания популяции в первом случае и скорость стабилизации численности популяции во втором случае. С помощью полученных оценок можно оценить время, за которое численность популяции достигнет равновесного состояния.

DOI: 10.25587/2411-9326-2023-4-49-65

Ключевые слова: динамика популяции рептилий, уравнение с запаздывающим аргументом, положение равновесия, асимптотическая устойчивость, оценки решений, функционал Ляпунова — Красовского.

1. Введение

Настоящая работа продолжает исследования асимптотических свойств решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (см., например, работы [1–8] для общих классов уравнений с запаздыванием и работы [9–12] для конкретных биологических моделей). В данной работе рассмотрена модель динамики популяции рептилий, у которых пол будущей особи зависит от температуры окружающей среды, в которой находилось яйцо с зародышем [13]. В модели предполагается, что самки могут откладывать яйца на трех территориях, на каждой территории — своя температура. Самки предпочитают территорию с той температурой, где они сами родились, если же там нет места, то они переходят на более теплую территорию.

Первая территория — мокрое болото, где температура самая низкая. На этой территории появляются только самки.

Вторая территория — сухое болото, где температура средняя. На этой территории появляются и самки, и самцы.

Третья территория — сухая насыпь, где температура самая высокая. На этой территории появляются только самцы.

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

На первой территории изменения численности популяции описываются дифференциальными уравнениями следующего вида:

$$\frac{d}{dt}F_1(t) = \nu B_1(F_1(t-\tau)) - aF_1(t), \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}f_1(t) = B_1(F_1(t)) - \nu B_1(F_1(t-\tau)) - \alpha f_1(t), \tag{2}$$

где $F_1(t)$ — численность взрослых самок, рожденных на первой территории, $f_1(t)$ — численность молодых самок, рожденных на первой территории, $\tau > 0$ — время нахождения в молодом возрасте, $a > 0$ — коэффициент смертности взрослых особей, $\alpha > 0$ — коэффициент смертности молодых особей, $\nu = e^{-\alpha\tau}$ — вероятность выживания особи к моменту достижения взрослого возраста, $B_1(F_1)$ — функция рождаемости:

$$B_1(F_1) = bF_1\left(\frac{k_1}{k_1+F_1}\right), \tag{3}$$

$b > 0$ — коэффициент рождаемости, $k_1 > 0$ — коэффициент, отвечающий за ограниченность ресурсов на первой территории.

На второй территории изменения численности популяции описываются следующими дифференциальными уравнениями:

$$\frac{d}{dt}F_2(t) = \frac{\nu}{2}B_2(F_1(t-\tau), F_2(t-\tau)) - aF_2(t), \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}f_2(t) = \frac{1}{2}B_2(F_1(t), F_2(t)) - \frac{\nu}{2}B_2(F_1(t-\tau), F_2(t-\tau)) - \alpha f_2(t), \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}M_2(t) = \frac{\nu}{2}B_2(F_1(t-\tau), F_2(t-\tau)) - aM_2(t), \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt}m_2(t) = \frac{1}{2}B_2(F_1(t), F_2(t)) - \frac{\nu}{2}B_2(F_1(t-\tau), F_2(t-\tau)) - \alpha m_2(t), \tag{7}$$

где $F_2(t)$ — численность взрослых самок, рожденных на второй территории, $f_2(t)$ — численность молодых самок, рожденных на второй территории, $M_2(t)$ — численность взрослых самцов, рожденных на второй территории, $m_2(t)$ — численность молодых самцов, рожденных на второй территории, $B_2(F_1, F_2)$ — функция рождаемости:

$$B_2(F_1, F_2) = b\left(\frac{F_1^2(t)}{k_1+F_1} + F_2\right)\left(\frac{k_2}{k_2+F_1+F_2}\right), \tag{8}$$

$k_2 > 0$ — коэффициент, отвечающий за ограниченность ресурсов на второй территории.

Наконец, приведем дифференциальные уравнения, описывающие изменения численности популяции на третьей территории:

$$\frac{d}{dt}M_3(t) = \nu B_3(F_1(t-\tau), F_2(t-\tau)) - aM_3(t), \tag{9}$$

$$\frac{d}{dt}m_3(t) = B_3(F_1(t), F_2(t)) - \nu B_3(F_1(t-\tau), F_2(t-\tau)) - \alpha m_3(t), \tag{10}$$

где $M_3(t)$ — численность взрослых самцов, рожденных на третьей территории, $m_3(t)$ — численность молодых самцов, рожденных на третьей территории, $B_3(F_1, F_2)$ — функция рождаемости:

$$B_3(F_1, F_2) = b\left(\frac{F_1^2}{k_1 + F_1} + F_2\right)\left(\frac{F_1 + F_2}{k_2 + F_1 + F_2}\right)\left(\frac{k_3}{k_3 + F_1 + F_2}\right), \qquad (11)$$

$k_3 > 0$ — коэффициент, отвечающий за ограниченность ресурсов на третьей территории.

Для системы (1)–(11) зададим начальные условия:

$$F_1(t) = \varphi_1(t) \geq 0, \quad t \in [-\tau, 0], \quad F_1(+0) = \varphi_1(0) \geq 0, \qquad (12)$$

$$F_2(t) = \varphi_2(t) \geq 0, \quad t \in [-\tau, 0], \quad F_2(+0) = \varphi_2(0) \geq 0, \qquad (13)$$

$$f_1(0) = f_{10} \geq 0, \quad f_2(0) = f_{20} \geq 0, \qquad (14)$$

$$M_2(0) = M_{20} \geq 0, \quad M_3(0) = M_{30} \geq 0, \qquad (15)$$

$$m_2(0) = m_{20} \geq 0, \quad m_3(0) = m_{30} \geq 0, \qquad (16)$$

где $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in C([-\tau, 0])$ — заданные непрерывные функции. Хорошо известно, что решение начальной задачи (1)–(16) существует и единственно. Более того, компоненты решения $F_1(t)$, $F_2(t)$, $M_2(t)$, $M_3(t)$ неотрицательны при всех $t > 0$. Компоненты решения $f_1(t)$, $f_2(t)$, $m_2(t)$, $m_3(t)$ будут неотрицательными только при выполнении дополнительного условия. Действительно, для определенности рассмотрим уравнение (2). Применяя метод вариации произвольной постоянной и учитывая, что $\nu = e^{-\alpha\tau}$, получим интегральное представление для функции $f_1(t)$:

$$f_1(t) = \left(f_{10} - \int\limits_{-\tau}^{0} e^{\alpha s} B_1(F_1(s))\, ds\right) e^{-\alpha t} + \int\limits_{t-\tau}^{t} e^{-\alpha(t-s)} B_1(F_1(s))\, ds.$$

Тем самым для неотрицательности функции $f_1(t)$ достаточно потребовать выполнение условия

$$f_{10} \geq \int\limits_{-\tau}^{0} e^{\alpha s} B_1(F_1(s))\, ds.$$

С биологической точки зрения данное неравенство означает, что численность молодых особей в момент времени $t = 0$ больше или равна численности особей, которые родились в промежуток времени $t \in [-\tau, 0]$ и дожили до момента времени $t = 0$. Аналогичным образом можно получить условия на начальные данные f_{20}, m_{20}, m_{30}, гарантирующие неотрицательность функций $f_2(t)$, $m_2(t)$, $m_3(t)$. Также нетрудно показать, что при выполнении вышеперечисленных условий все компоненты решения начальной задачи (1)–(16) будут ограничены сверху.

Теперь рассмотрим положения равновесия системы (1)–(11). В зависимости от коэффициентов системы имеется не более трех положений равновесия с неотрицательными компонентами:

$$(F_1(t), F_2(t), M_2(t), M_3(t), f_1(t), f_2(t), m_2(t), m_3(t)) \equiv (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$(F_1(t), F_2(t), M_2(t), M_3(t), f_1(t), f_2(t), m_2(t), m_3(t)) \equiv (0, F_2^*, M_2^*, M_3^*, 0, f_2^*, m_2^*, m_3^*),$$

$$(F_1(t), F_2(t), M_2(t), M_3(t), f_1(t), f_2(t), m_2(t), m_3(t)) \equiv (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_6^*, x_7^*, x_8^*),$$

где

$$F_2^* = k_2\left(\frac{b\nu - 2a}{2a}\right) > 0, \quad M_2^* = \frac{\nu}{2a}B_2(0, F_2^*), \quad M_3^* = \frac{\nu}{a}B_3(0, F_2^*),$$

$$f_2^* = \frac{(1-\nu)}{2\alpha}B_2(0, F_2^*), \quad m_2^* = \frac{(1-\nu)}{2\alpha}B_2(0, F_2^*), \quad m_3^* = \frac{(1-\nu)}{\alpha}B_3(0, F_2^*),$$

$$x_1^* = k_1\left(\frac{b\nu - a}{a}\right) > 0, \tag{17}$$

$x_2^* > 0$ — положительный корень уравнения

$$\frac{b\nu}{2}\left(\frac{k_2}{k_2 + x_1^* + x_2^*}\right) = \frac{a x_2^*}{\left(\frac{(x_1^*)^2}{k_1 + x_1^*} + x_2^*\right)}, \tag{18}$$

$$x_3^* = \frac{\nu}{2a}B_2(x_1^*, x_2^*), \quad x_4^* = \frac{\nu}{a}B_3(x_1^*, x_2^*), \quad x_5^* = \frac{(1-\nu)}{\alpha}B_1(x_1^*),$$

$$x_6^* = \frac{(1-\nu)}{2\alpha}B_2(x_1^*, x_2^*), \quad x_7^* = \frac{(1-\nu)}{2\alpha}B_2(x_1^*, x_2^*), \quad x_8^* = \frac{(1-\nu)}{\alpha}B_3(x_1^*, x_2^*).$$

Первое положение равновесия соответствует полному вымиранию всей популяции, второе положение равновесия — постоянной численности популяции, когда детеныши появляются на свет только на второй и на третьей территориях, третье положение равновесия — постоянной численности популяции, когда детеныши появляются на свет на всех трех территориях. Второе положение равновесия имеет биологический смысл только при $2a < b\nu$, третье — только при $a < b\nu$.

Приведем условия устойчивости положений равновесия. С помощью теоремы об устойчивости по первому приближению нетрудно получить, что первое положение равновесия асимптотически устойчиво при $b\nu < a$, и неустойчиво при $a < b\nu$. Второе положение равновесия неустойчиво при любых значениях параметров. Третье положение равновесия асимптотически устойчиво при $a < b\nu$ [13].

Наша цель — при выполнении условий, гарантирующих асимптотическую устойчивость положений равновесия системы (1)–(11), получить оценки, характеризующие скорость стабилизации решений на бесконечности.

Учитывая структуру системы (1)–(11), оценки достаточно получить для компонент решения $F_1(t)$ и $F_2(t)$ [13]. Действительно, предположим, что для функций $F_1(t)$ и $F_2(t)$ справедливы неравенства

$$|F_1(t) - x_1^*| \le C_1 e^{-\sigma t}, \quad |F_2(t) - x_2^*| \le C_2 e^{-\sigma t}, \quad t > 0.$$

Тогда каждая из компонент решения $M_2(t)$, $M_3(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$, $m_2(t)$, $m_3(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению следующего вида:

$$\frac{d}{dt}z(t) = f(t) - az(t),$$

где
$$|f(t) - f^*| \le Ce^{-\sigma t}, \quad t > 0.$$
С учетом обозначения $z^* = \frac{f^*}{a}$, используя метод вариации произвольной постоянной, для функции $z(t)$ нетрудно получить представление
$$z(t) - z^* = e^{-at}(z(0) - z^*) + \int_0^t e^{-a(t-s)}(f(s) - f^*)\,ds,$$
откуда следует оценка
$$|z(t) - z^*| \le |z(0) - z^*|e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-s)}|f(s) - f^*|\,ds$$
$$\le |z(0) - z^*|e^{-at} + C\int_0^t e^{-a(t-s)}e^{-\sigma s}\,ds \le |z(0) - z^*|e^{-at} + Cte^{-\min\{a,\sigma\}t}. \quad (19)$$
Оценки такого вида характеризуют скорость сходимости компонент решения $M_2(t)$, $M_3(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$, $m_2(t)$, $m_3(t)$ к соответствующим компонентам положения равновесия x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_6^*, x_7^*, x_8^*.

Перейдем к получению оценок для функций $F_1(t)$ и $F_2(t)$. Для дальнейших рассуждений нам будет удобнее ввести переобозначения
$$x_1(t) = F_1(t), \quad x_2(t) = F_2(t).$$
Тогда согласно (1), (4), (12), (13) вектор-функция $(x_1(t), x_2(t))$ является решением следующей начальной задачи:
$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x_1(t) = \nu B_1(x_1(t-\tau)) - ax_1(t), \\ &\frac{d}{dt}x_2(t) = \frac{\nu}{2}B_2(x_1(t-\tau), x_2(t-\tau)) - ax_2(t), \end{aligned} \quad (20)$$
$$\begin{aligned} x_1(t) = \varphi_1(t) \ge 0, \quad t \in [-\tau, 0], \quad x_1(+0) = \varphi_1(0) \ge 0, \\ x_2(t) = \varphi_2(t) \ge 0, \quad t \in [-\tau, 0], \quad x_2(+0) = \varphi_2(0) \ge 0, \end{aligned} \quad (21)$$
где $B_1(x_1)$ определено в (3), $B_2(x_1, x_2)$ определено в (8). В последующих разделах получим оценки скорости сходимости решения $(x_1(t), x_2(t))$ к положению равновесия $(0, 0)$ (в случае $b\nu < a$) и оценки скорости сходимости решения $(x_1(t), x_2(t))$ к положению равновесия (x_1^*, x_2^*) (в случае $a < b\nu$).

2. Оценки скорости сходимости к положению равновесия $(0, 0)$

В этом разделе будем предполагать, что выполнено условие $b\nu < a$, гарантирующее асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (20). Получим оценки для решения начальной задачи (20), (21), характеризующие скорость убывания на бесконечности. Для первой компоненты решения $x_1(t)$ соответствующая оценка была получена в работе [12]. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1 [12]. *Пусть выполнено условие $b\nu < a$. Тогда для первой компоненты решения $x_1(t)$ начальной задачи (20), (21) справедливы оценки*

$$0 \le x_1(t) \le \sqrt{U_1(0,\varphi_1)}e^{-\delta_1 t/2}, \quad t > 0, \tag{22}$$

где

$$U_1(0,\varphi_1) = \varphi_1^2(0) + \int\limits_{-\tau}^{0} p_1 e^{\delta_1 s}\varphi_1^2(s)\left(\frac{k_1}{k_1+\varphi_1(s)}\right) ds, \quad p_1 = b\nu e^{\delta_1\tau/2},$$

$\delta_1 > 0$ — положительный корень уравнения

$$\delta_1 = 2(a - b\nu e^{\delta_1\tau/2}).$$

Укажем оценки для второй компоненты решения $x_2(t)$. Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть выполнено условие $b\nu < a$. Тогда для второй компоненты решения $x_2(t)$ начальной задачи (20), (21) справедливы следующие оценки:*

1) *если $t \in [0,\tau]$, то*

$$0 \le x_2(t) \le \left(\sqrt{U_2(0,\varphi_1,\varphi_2)} + b\nu\left(\frac{\varphi_{1,\max}^2}{k_1+\varphi_{1,\max}}\right)\frac{(e^{\delta_2\tau/2}-1)}{\delta_2}\right)e^{-\delta_2 t/2}, \tag{23}$$

где

$$U_2(0,\varphi_1,\varphi_2) = \varphi_2^2(t) + \int\limits_{-\tau}^{0} p_2 e^{\delta_2 s}\varphi_2^2(s)\left(\frac{k_2}{k_2+\varphi_1(s)+\varphi_2(s)}\right) ds, \; p_2 = \frac{b\nu}{2}e^{\delta_2\tau/2}, \tag{24}$$

$\delta_2 > 0$ — положительный корень уравнения

$$\delta_2 = 2a - b\nu e^{\delta_2\tau/2}, \tag{25}$$

$$\varphi_{1,\max} = \max_{t\in[-\tau,0]}\varphi_1(t),$$

2) *если $t > \tau$, то*

$$\begin{aligned} 0 \le x_2(t) \le \left(\sqrt{U_2(0,\varphi_1,\varphi_2)} + b\nu\left(\frac{\varphi_{1,\max}^2}{k_1+\varphi_{1,\max}}\right)\frac{(e^{\delta_2\tau/2}-1)}{\delta_2}\right)e^{-\delta_2 t/2} \\ + b\nu\left(\frac{U_1(0,\varphi_1)}{k_1+\sqrt{U_1(0,\varphi_1)}}\right)\frac{(e^{-\delta_1(t-\tau)/2}-e^{-\delta_2(t-\tau)/2})}{(\delta_2-\delta_1)}. \end{aligned} \tag{26}$$

Доказательство. Если $\varphi_1(t) = 0$ при $t \in [-\tau,0]$, то $x_1(t) = 0$ при $t > 0$ и оценки (23), (26) на функцию $x_2(t)$ следуют из теоремы 1.

В дальнейшем будем предполагать, что $\varphi_1(t) \not\equiv 0$, $t \in [-\tau,0]$. Отсюда, в частности, вытекают неравенства $x_1(t) > 0$, $x_2(t) > 0$ при всех $t > 0$.

Рассмотрим функционал Ляпунова — Красовского следующего вида:

$$U_2(t, x_1, x_2) = x_2^2(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} p_2 e^{-\delta_2(t-s)} x_2^2(s) h_0(x_1(s), x_2(s))\, ds, \tag{27}$$

где $h_0(x_1, x_2) = \frac{k_2}{k_2+x_1+x_2}$. Продифференцируем его вдоль решения начальной задачи (20), (21):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}U_2(t, x_1, x_2) = 2x_2(t)\Bigg(\frac{b\nu}{2}\left(\frac{x_1^2(t-\tau)}{k_1 + x_1(t-\tau)} + x_2(t-\tau)\right)\\ \times h_0(x_1(t-\tau), x_2(t-\tau)) - a x_2(t)\Bigg)\\ + p_2 x_2^2(t) h_0(x_1(t), x_2(t)) - p_2 e^{-\delta_2\tau} x_2^2(t-\tau) h_0(x_1(t-\tau), x_2(t-\tau))\\ - \delta_2 \int\limits_{t-\tau}^{t} p_2 e^{-\delta_2(t-s)} x_2^2(s) h_0(x_1(s), x_2(s))\, ds.\end{aligned}$$

Учитывая неравенства

$$b\nu x_2(t) x_2(t-\tau) - p_2 e^{-\delta_2\tau} x_2^2(t-\tau) \le \frac{e^{\delta_2\tau}}{p_2}\left(\frac{b\nu}{2}\right)^2 x_2^2(t),$$

$$h_0(x_1(\xi), x_2(\xi)) \le 1, \quad \xi \ge -\tau,$$

и используя обозначение (24) величины p_2, отсюда получим оценку

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}U_2(t, x_1, x_2) \le b\nu x_2(t)\left(\frac{x_1^2(t-\tau)}{k_1 + x_1(t-\tau)}\right) - (2a - b\nu e^{\delta_2\tau/2}) x_2^2(t)\\ - \delta_2 \int\limits_{t-\tau}^{t} p_2 e^{-\delta_2(t-s)} x_2^2(s) h_0(x_1(s), x_2(s))\, ds.\end{aligned}$$

В силу определения (25) величины δ_2 и определения функционала $U_2(t, x_1, x_2)$ из этой оценки следует неравенство

$$\frac{d}{dt}U_2(t, x_1, x_2) \le b\nu\left(\frac{x_1^2(t-\tau)}{k_1 + x_1(t-\tau)}\right)\sqrt{U_2(t, x_1, x_2)} - \delta_2 U_2(t, x_1, x_2),$$

при этом $U_2(t, x_1, x_2) > 0$ при всех $t > 0$. Следовательно, это неравенство можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}(\sqrt{U_2(t, x_1, x_2)}) \le \frac{b\nu}{2}\left(\frac{x_1^2(t-\tau)}{k_1 + x_1(t-\tau)}\right) - \frac{\delta_2}{2}\sqrt{U_2(t, x_1, x_2)}.$$

Отсюда нетрудно установить оценку

$$\begin{aligned}x_2(t) \le \sqrt{U_2(t, x_1, x_2)} \le \sqrt{U_2(0, \varphi_1, \varphi_2)}\, e^{-\delta_2 t/2}\\ + \frac{b\nu}{2}\int\limits_0^t e^{-\delta_2(t-s)/2}\left(\frac{x_1^2(s-\tau)}{k_1 + x_1(s-\tau)}\right) ds.\end{aligned} \tag{28}$$

1. Вначале рассмотрим случай $t \in [0,\tau]$. Учитывая, что при $s \in (0,t)$ справедливо $x_1(s-\tau) = \varphi_1(s-\tau) \le \varphi_{1,\max}$, из неравенства (28) получим оценку

$$x_2(t) \le \left(\sqrt{U_2(0,\varphi_1,\varphi_2)} + \frac{b\nu}{2} \int\limits_0^\tau e^{\delta_2 s/2} \left(\frac{\varphi_1^2(s-\tau)}{k_1 + \varphi_1(s-\tau)} \right) ds \right) e^{-\delta_2 t/2}$$

$$\le \left(\sqrt{U_2(0,\varphi_1,\varphi_2)} + b\nu \left(\frac{\varphi_{1,\max}^2}{k_1 + \varphi_{1,\max}} \right) \frac{(e^{\delta_2 \tau/2} - 1)}{\delta_2} \right) e^{-\delta_2 t/2}.$$

Неравенство (23) доказано.

2. Теперь предположим, что $t > \tau$. В этом случае оценку (28) можно переписать в виде

$$x_2(t) \le \left(\sqrt{U_2(0,\varphi_1,\varphi_2)} + \frac{b\nu}{2} \int\limits_0^\tau e^{\delta_2 s/2} \left(\frac{\varphi_1^2(s-\tau)}{k_1 + \varphi_1(s-\tau)} \right) ds \right) e^{-\delta_2 t/2}$$

$$+ \frac{b\nu}{2} \int\limits_\tau^t e^{-\delta_2 (t-s)/2} \left(\frac{x_1^2(s-\tau)}{k_1 + x_1(s-\tau)} \right) ds.$$

Первое слагаемое оценивается так же, как и в предыдущем случае. Оценим второе слагаемое. Для этого воспользуемся неравенством (22). Имеем

$$\frac{b\nu}{2} \int\limits_\tau^t e^{-\delta_2 (t-s)/2} \left(\frac{x_1^2(s-\tau)}{k_1 + x_1(s-\tau)} \right) ds$$

$$\le \frac{b\nu}{2} \left(\frac{U_1(0,\varphi_1)}{k_1 + \sqrt{U_1(0,\varphi_1)}} \right) \int\limits_\tau^t e^{-\delta_2 (t-s)/2} e^{-\delta_1 (s-\tau)/2} ds$$

$$= b\nu \left(\frac{U_1(0,\varphi_1)}{k_1 + \sqrt{U_1(0,\varphi_1)}} \right) \frac{(e^{-\delta_1 (t-\tau)/2} - e^{-\delta_2 (t-\tau)/2})}{(\delta_2 - \delta_1)}.$$

Отсюда вытекает оценка (26).

Теорема доказана.

Замечание. С биологической точки зрения оценки (22), (23), (26), а также оценки вида (19) характеризуют скорость вымирания всей популяции при условии, что особей умирает больше, чем доживает до взрослого возраста.

3. Оценки скорости сходимости к положению равновесия (x_1^*, x_2^*)

В этом разделе будем предполагать, что выполнено условие $a < b\nu$, гарантирующее асимптотическую устойчивость положения равновесия (x_1^*, x_2^*) системы (20), где x_1^* и x_2^* определены в (17), (18). Получим оценки для решения $(x_1(t), x_2(t))$ начальной задачи (20), (21), характеризующие скорость сходимости к положению равновесия (x_1^*, x_2^*). Сделаем замену переменных

$$x_1(t) = x_1^* + y_1(t), \quad x_2(t) = x_2^* + y_2(t).$$

Тогда начальная задача (20), (21) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y_1(t) &= \frac{a^2}{b\nu}y_1(t-\tau)\left(\frac{\frac{b\nu k_1}{a}}{\frac{b\nu k_1}{a}+y_1(t-\tau)}\right) - ay_1(t), \\ \frac{d}{dt}y_2(t) &= g(y_1(t-\tau))h(y_1(t-\tau),y_2(t-\tau)) \\ &\quad + \left(\frac{b\nu}{2}-\frac{ax_2^*}{k_2}\right)y_2(t-\tau)h(y_1(t-\tau),y_2(t-\tau)) - ay_2(t), \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \varphi_1(t) - x_1^* \ge -x_1^*, \quad t\in[-\tau,0], \\ y_1(+0) &= \varphi_1(0) - x_1^* \ge -x_1^*, \\ y_2(t) &= \varphi_2(t) - x_2^* \ge -x_2^*, \quad t\in[-\tau,0], \\ y_2(+0) &= \varphi_2(0) - x_2^* \ge -x_2^*, \end{aligned} \tag{30}$$

где

$$g(y_1) = \frac{b\nu}{2}\left(\frac{(x_1^*+y_1)^2}{k_1+x_1^*+y_1} - \frac{(x_1^*)^2}{k_1+x_1^*}\right) - \frac{ax_2^*}{k_2}y_1, \tag{31}$$

$$h(y_1,y_2) = \frac{k_2}{k_2+x_1^*+x_2^*+y_1+y_2}. \tag{32}$$

Для первой компоненты решения $y_1(t)$ оценки скорости сходимости были получены в работе [12]. Приведем соответствующий результат. Вначале введем обозначения:

$$\varphi_{1,\min} = \min_{t\in[-\tau,0]}\varphi_1(t), \quad \varphi_{1,\max} = \max_{t\in[-\tau,0]}\varphi_1(t).$$

Справедлива следующая

Теорема 3 [12]. *Пусть выполнено условие $a < b\nu$.*

1 *Если $\varphi_{1,\min} \ge x_1^*$, то для первой компоненты решения $y_1(t)$ начальной задачи (29), (30) справедливы оценки*

$$0 \le y_1(t) \le \sqrt{V_0(0,\varphi_1-x_1^*)}e^{-\varepsilon_0 t/2}, \quad t>0,$$

где

$$V_0(0,\varphi_1-x_1^*) = (\varphi_1(0)-x_1^*)^2 + \int\limits_{-\tau}^{0} q_0 e^{-\varepsilon_0(t-s)}(\varphi_1(s)-x_1^*)^2\left(\frac{\frac{b\nu k_1}{a}}{\frac{b\nu k_1}{a}+\varphi_1(s)-x_1^*}\right)ds,$$

$$q_0 = \frac{a^2}{b\nu}e^{\varepsilon_0\tau/2},$$

$\varepsilon_0 > 0$ — положительный корень уравнения

$$\varepsilon_0 = \frac{2a}{b\nu}(b\nu - ae^{\varepsilon_0\tau/2}).$$

2 *Если $0 < \varphi_{1,\min} < x_1^*$, $\varphi_{1,\max} > x_1^*$, то для первой компоненты решения $y_1(t)$ начальной задачи (29), (30) справедливы оценки*

$$-\sqrt{V_1(0,\varphi_1-x_1^*)}e^{-\varepsilon_1 t/2} \le y_1(t) \le \sqrt{V_1(0,\varphi_1-x_1^*)}e^{-\varepsilon_1 t/2}, \quad t>0,$$

где

$$V_1(0,\varphi_1-x_1^*)=(\varphi_1(0)-x_1^*)^2+\int\limits_{-\tau}^{0} q_1 e^{-\varepsilon_1(t-s)}(\varphi_1(s)-x_1^*)^2\left(\frac{\frac{b\nu k_1}{a}}{\frac{b\nu k_1}{a}+\varphi_1(s)-x_1^*}\right)ds,$$

$$q_1=\frac{a^2}{b\nu}e^{\varepsilon_1\tau/2},$$

$\varepsilon_1>0$ *— положительный корень уравнения*

$$\varepsilon_1=2a\left(1-e^{\varepsilon_1\tau/2}\left(\frac{k_1}{k_1+\varphi_{1,\min}}\right)\right).$$

3 *Если* $0<\varphi_{1,\min}<x_1^*$, $\varphi_{1,\max}\le x_1^*$, *то для первой компоненты решения* $y_1(t)$ *начальной задачи* (29), (30) *справедливы оценки*

$$-\sqrt{V_1(0,\varphi_1-x_1^*)}e^{-\varepsilon_1 t/2}\le y_1(t)\le 0,\quad t>0.$$

Следствие [12]. *Пусть выполнены условия* $a<b\nu$ *и* $\varphi_{1,\min}>0$. *Тогда для первой компоненты решения* $y_1(t)$ *начальной задачи* (29), (30) *справедливо неравенство*

$$|y_1(t)|\le\sqrt{V(0,\varphi_1-x_1^*)}e^{-\varepsilon t/2},\quad t>0, \tag{33}$$

где

$$V(0,\varphi_1-x_1^*)=(\varphi_1(0)-x_1^*)^2+\int\limits_{-\tau}^{0} q e^{-\varepsilon(t-s)}(\varphi_1(s)-x_1^*)^2\left(\frac{\frac{b\nu k_1}{a}}{\frac{b\nu k_1}{a}+\varphi_1(s)-x_1^*}\right)ds,$$

$$q=\frac{a^2}{b\nu}e^{\varepsilon\tau/2},\quad \varepsilon=\min\{\varepsilon_0,\varepsilon_1\}.$$

Перейдем к получению оценок для второй компоненты решения $y_2(t)$. Вначале сформулируем вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть выполнено условие* $a<b\nu$. *Тогда справедливы следующие неравенства:*

$$0<\left(\frac{b\nu}{2}-\frac{ax_2^*}{k_2}\right)\left(\frac{k_2}{k_2+x_1^*}\right)<a, \tag{34}$$

где $x_1^*>0$ *и* $x_2^*>0$ *определены в* (17), (18).

Доказательство. Оценки (34) получаются из формул (17), (18) путем несложных арифметических преобразований.

Лемма доказана.

Сформулируем основной результат данного раздела.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие $a < b\nu$ и $(y_1(t), y_2(t))$ — решение начальной задачи (29), (30) с начальной вектор-функцией $(\varphi_1(t)-x_1^*, \varphi_2(t)-x_2^*)$ такой, что $\varphi_{1,\min} > 0$. Тогда для второй компоненты решения $y_2(t)$ справедливы следующие оценки:*

1) *если $t \in [0, \tau]$, то*

$$|y_2(t)| \le e^{J_0}(\sqrt{W(0, \varphi_1 - x_1^*, \varphi_2 - x_2^*)} + \varkappa_0 \psi_{1,\max}) e^{-\omega t/2}, \tag{35}$$

где

$$W(0, \varphi_1 - x_1^*, \varphi_2 - x_2^*) = (\varphi_2(0) - x_2^*)^2 + \int\limits_{-\tau}^{0} r e^{\omega s} (\varphi_2(s) - x_2^*)^2 \left(\frac{k_2}{k_2 + \varphi_1(s) + \varphi_2(s)} \right) ds, \tag{36}$$

$$r = \left(\frac{b\nu}{2} - \frac{a x_2^*}{k_2} \right) e^{\omega\tau/2},$$

$\omega > 0$ — положительный корень уравнения

$$\omega = 2 \left(a - \left(\frac{b\nu}{2} - \frac{a x_2^*}{k_2} \right) \left(\frac{k_2}{k_2 + x_1^*} \right) e^{\omega\tau/2} \right), \tag{37}$$

$$J_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{b\nu}{2} - \frac{a x_2^*}{k_2} \right) \frac{e^{\omega\tau/2}}{k_2 + x_1^*} \left(\tau \psi_{1,\max} + \frac{2}{\varepsilon}(1 - e^{-\varepsilon\tau/2}) \sqrt{V(0, \varphi_1 - x_1^*)} \right), \tag{38}$$

$$\varkappa_0 = \left(\frac{b\nu}{2} + \frac{a x_2^*}{k_2} \right) \frac{2}{\omega} (e^{\omega\tau/2} - 1), \tag{39}$$

$$\psi_{1,\max} = \max_{t \in [-\tau, 0]} |\varphi_1(t) - x_1^*|, \tag{40}$$

2) *если $t > \tau$, то*

$$|y_2(t)| \le e^{J}((\sqrt{W(0, \varphi_1 - x_1^*, \varphi_2 - x_2^*)} + \varkappa_0 \psi_{1,\max}) e^{-\omega t/2} + \sigma_0 \sqrt{V(0, \varphi_1 - x_1^*)} (t - \tau) e^{-\mu(t-\tau)/2}), \tag{41}$$

где

$$J = \frac{1}{2} \left(\frac{b\nu}{2} - \frac{a x_2^*}{k_2} \right) \frac{e^{\omega\tau/2}}{k_2 + x_1^*} \left(\tau \psi_{1,\max} + \frac{4}{\varepsilon} \sqrt{V(0, \varphi_1 - x_1^*)} \right), \tag{42}$$

$$\sigma_0 = \left(\frac{b\nu}{2} + \frac{a x_2^*}{k_2} \right), \tag{43}$$

$$\mu = \min\{\omega, \varepsilon\}. \tag{44}$$

Доказательство. Рассмотрим функционал Ляпунова — Красовского следующего вида:

$$W(t, y_1, y_2) = y_2^2(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} r e^{-\omega(t-s)} y_2^2(s) h(y_1(s), y_2(s))\, ds, \tag{45}$$

где $h(y_1,y_2)$ определено в (32). Продифференцируем его вдоль решения начальной задачи (29), (30):

$$\frac{d}{dt}W(t,y_1,y_2)=2y_2(t)\bigg(g(y_1(t-\tau))h(y_1(t-\tau),y_2(t-\tau))\\
+\left(\frac{b\nu}{2}-\frac{ax_2^*}{k_2}\right)y_2(t-\tau)h(y_1(t-\tau),y_2(t-\tau))-ay_2(t)\bigg)\\
+ry_2^2(t)h(y_1(t),y_2(t))-re^{-\omega\tau}y_2^2(t-\tau)h(y_1(t-\tau),y_2(t-\tau))\\
-\omega\int\limits_{t-\tau}^{t}re^{-\omega(t-s)}y_2^2(s)h(y_1(s),y_2(s))\,ds.$$

Учитывая неравенства

$$2\left(\frac{b\nu}{2}-\frac{ax_2^*}{k_2}\right)y_2(t)y_2(t-\tau)-re^{-\omega\tau}y_2^2(t-\tau)\le\frac{e^{\omega\tau}}{r}\left(\frac{b\nu}{2}-\frac{ax_2^*}{k_2}\right)^2y_2^2(t),$$

$$h(y_1(\xi),y_2(\xi))\le\frac{k_2}{k_2+x_1^*+y_1(\xi)},\quad \xi\ge-\tau,$$

и используя обозначение (36) величины r, отсюда получим оценку

$$\frac{d}{dt}W(t,y_1,y_2)\le 2|y_2(t)||g(y_1(t-\tau))|\left(\frac{k_2}{k_2+x_1^*+y_1(t-\tau)}\right)\\
-\left(2a-\left(\frac{b\nu}{2}-\frac{ax_2^*}{k_2}\right)e^{\omega\tau/2}\left(\frac{k_2}{k_2+x_1^*+y_1(t-\tau)}+\frac{k_2}{k_2+x_1^*+y_1(t)}\right)\right)y_2^2(t)\\
-\omega\int\limits_{t-\tau}^{t}re^{-\omega(t-s)}y_2^2(s)h(y_1(s),y_2(s))\,ds.$$

В силу определения (37) величины ω и определения (45) функционала $W(t,y_1,y_2)$ данное неравенство преобразуется к виду

$$\frac{d}{dt}W(t,y_1,y_2)\le 2|y_2(t)||g(y_1(t-\tau))|\left(\frac{k_2}{k_2+x_1^*+y_1(t-\tau)}\right)\\
-\left(\frac{b\nu}{2}-\frac{ax_2^*}{k_2}\right)\frac{e^{\omega\tau/2}}{k_2+x_1^*}\left(\frac{k_2y_1(t-\tau)}{k_2+x_1^*+y_1(t-\tau)}+\frac{k_2y_1(t)}{k_2+x_1^*+y_1(t)}\right)y_2^2(t)\\
-\omega W(t,y_1,y_2).$$

Отсюда, используя неравенства

$$\frac{k_2}{k_2+x_1^*+y_1(\xi)}\le 1,\ \xi\ge-\tau,\quad y_2^2(t)\le W(t,y_1,y_2),$$

получим оценку

$$\frac{d}{dt}W(t,y_1,y_2)\le 2|g(y_1(t-\tau))|\sqrt{W(t,y_1,y_2)}\\
+\left[\left(\frac{b\nu}{2}-\frac{ax_2^*}{k_2}\right)\frac{e^{\omega\tau/2}}{k_2+x_1^*}(|y_1(t-\tau)|+|y_1(t)|)-\omega\right]W(t,y_1,y_2).$$

Теперь оценим $|g(y_1(t-\tau))|$. Учитывая явный вид (31) функции $g(y_1)$, получим представление

$$g(y_1) = \left(\frac{b\nu}{2}\left(\frac{k_1x_1^* + (x_1^* + y_1)(k_1 + x_1^*)}{(k_1 + x_1^* + y_1)(k_1 + x_1^*)}\right) - \frac{ax_2^*}{k_2}\right) y_1.$$

Следовательно,

$$|g(y_1(t-\tau))| \le \left(\frac{b\nu}{2} + \frac{ax_2^*}{k_2}\right)|y_1(t-\tau)|.$$

Итак, для производной от функционала $W(t, y_1, y_2)$ справедлива следующая оценка:

$$\frac{d}{dt}W(t,y_1,y_2) \le \beta(t)\sqrt{W(t,y_1,y_2)} + (\gamma(t) - \omega)\,W(t,y_1,y_2),$$

где

$$\beta(t) = 2\left(\frac{b\nu}{2} + \frac{ax_2^*}{k_2}\right)|y_1(t-\tau)|, \tag{46}$$

$$\gamma(t) = \left(\frac{b\nu}{2} - \frac{ax_2^*}{k_2}\right)\frac{e^{\omega\tau/2}}{k_2 + x_1^*}(|y_1(t-\tau)| + |y_1(t)|). \tag{47}$$

Отсюда вытекает неравенство

$$|y_2(t)| \le \sqrt{W(t,y_1,y_2)} \le \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \gamma(\xi)\,d\xi\right)$$
$$\times\left(\sqrt{W(0,\varphi_1 - x_1^*, \varphi_2 - x_2^*)}e^{-\omega t/2} + \frac{1}{2}\int_0^t e^{-\omega(t-s)/2}\beta(s)\,ds\right). \tag{48}$$

1. Вначале рассмотрим случай $t \in [0,\tau]$. Из неравенства (48) получим оценку

$$|y_2(t)| \le \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^\tau \gamma(\xi)\,d\xi\right)$$
$$\times\left(\sqrt{W(0,\varphi_1 - x_1^*, \varphi_2 - x_2^*)} + \frac{1}{2}\int_0^\tau e^{\omega s/2}\beta(s)\,ds\right)e^{-\omega t/2}. \tag{49}$$

Воспользуемся определением (47) функции $\gamma(t)$, определением (40) величины $\psi_{1,\max}$ и оценкой (33):

$$\frac{1}{2}\int_0^\tau \gamma(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{b\nu}{2} - \frac{ax_2^*}{k_2}\right)\frac{e^{\omega\tau/2}}{k_2 + x_1^*}\int_0^\tau (|\varphi_1(\xi - \tau) - x_1^*| + |y_1(\xi)|)\,d\xi$$
$$\le \frac{1}{2}\left(\frac{b\nu}{2} - \frac{ax_2^*}{k_2}\right)\frac{e^{\omega\tau/2}}{k_2 + x_1^*}\int_0^\tau (\psi_{1,\max} + \sqrt{V(0,\varphi_1 - x_1^*)}e^{-\varepsilon\xi/2})\,d\xi = J_0, \tag{50}$$

где J_0 определено в (38). Далее, учитывая определение (46) величины $\beta(t)$, нетрудно установить неравенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau e^{\omega s/2}\beta(s)\,ds = \left(\frac{b\nu}{2}+\frac{ax_2^*}{k_2}\right)\int\limits_0^\tau e^{\omega s/2}|\varphi_1(s-\tau)-x_1^*|\,ds \le \varkappa_0\psi_{1,\max}, \qquad (51)$$

где $\varkappa_0$ определено в (39). Из неравенств (49)–(51) вытекает оценка (35).

2. Теперь предположим, что $t > \tau$. Используя определение (47) функции $\gamma(t)$, определение (40) величины $\psi_{1,\max}$ и неравенство (33), получим оценку

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int\limits_0^t \gamma(\xi)\,d\xi &= \frac{1}{2}\left(\frac{b\nu}{2}-\frac{ax_2^*}{k_2}\right)\frac{e^{\omega\tau/2}}{k_2+x_1^*}\\ &\times\left(\int\limits_0^\tau|\varphi_1(\xi-\tau)-x_1^*|\,d\xi+\int\limits_\tau^t|y_1(\xi-\tau)|\,d\xi+\int\limits_0^t|y_1(\xi)|\,d\xi\right)\\ \le \frac{1}{2}\left(\frac{b\nu}{2}-\frac{ax_2^*}{k_2}\right)&\frac{e^{\omega\tau/2}}{k_2+x_1^*}\left(\tau\psi_{1,\max}+2\sqrt{V(0,\varphi_1-x_1^*)}\int\limits_0^\infty e^{-\varepsilon\xi/2}\,d\xi\right)=J, \qquad (52)\end{aligned}$$

где J определено в (42). Далее, учитывая определение (46) величины $\beta(t)$, нетрудно установить неравенство

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int\limits_0^t e^{-\omega(t-s)/2}\beta(s)\,ds &= \left(\frac{b\nu}{2}+\frac{ax_2^*}{k_2}\right)\\ &\times\left(\int\limits_0^\tau e^{-\omega(t-s)/2}|\varphi_1(\xi-\tau)-x_1^*|\,ds+\int\limits_\tau^t e^{-\omega(t-s)/2}|y_1(s-\tau)|\,ds\right)\\ &\le \varkappa_0\psi_{1,\max}e^{-\omega t/2}+\sigma_0\sqrt{V(0,\varphi_1-x_1^*)}\int\limits_\tau^t e^{-\omega(t-s)/2}e^{-\varepsilon(s-\tau)/2}\,ds\\ &\le \varkappa_0\psi_{1,\max}e^{-\omega t/2}+\sigma_0\sqrt{V(0,\varphi_1-x_1^*)}(t-\tau)e^{-\mu(t-\tau)/2}, \qquad (53)\end{aligned}$$

где $\varkappa_0, \sigma_0, \mu$ определены в (39), (43), (44). Из неравенств (48), (52), (53) вытекает оценка (41).

Теорема доказана.

Замечание. С биологической точки зрения оценки (33), (35), (41), а также оценки вида (19) характеризуют скорость стабилизации численности всей популяции к постоянному значению при условии, что особей умирает меньше, чем доживает до взрослого возраста.

Благодарности. Автор выражает благодарность д.ф.-м.н. Г. В. Демиденко и д.ф.-м.н. И. И. Матвеевой за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, № 3. С. 20–28.
2. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1025–1040.
3. *Матвеева И. И.* Оценки решений одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 3. С. 122–132.
4. *Демиденко Г. В.* О втором методе Ляпунова для уравнений с запаздывающим аргументом. Новосибирск, 2014. 20 с. (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 289).
5. *Ыскак Т.* Оценки решений одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 2204–2215.
6. *Matveeva I. I.* Estimates for solutions to one class of nonlinear nonautonomous systems with time-varying concentrated and distributed delays // Сиб. электрон. мат. изв. 2021. Т. 18, № 2. С. 1689–1697.
7. *Demidenko G. V., Matveeva I. I.* The second Lyapunov method for time-delay systems // Functional differential equations and applications (Domoshnitsky A., Rasin A., Padhi S., eds.). Singapore: Springer Nature, 2021. P. 145–167. (Springer Proc. Math. Stat; vol. 379).
8. *Матвеева И. И.* Оценки для решений одного класса неавтономных систем с переменными сосредоточенным и распределенным запаздываниями // Мат. заметки СВФУ. 2022. Т. 29, № 3. С. 70–79.
9. *Скворцова М. А.* Оценки решений в модели взаимодействия популяций с несколькими запаздываниями // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Т. 188. С. 84–105.
10. *Скворцова М. А., Ыскак Т.* Асимптотическое поведение решений в одной модели «хищник-жертва» с запаздыванием // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 2. С. 402–416.
11. *Скворцова М. А., Ыскак Т.* Оценки решений дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием, описывающих конкуренцию нескольких видов микроорганизмов // Сиб. журн. индустр. математики. 2022. Т. 25, № 4. С. 193–205.
12. *Скворцова М. А.* Оценки решений для одной модели динамики популяций с запаздыванием // Мат. заметки СВФУ. 2022. Т. 29, № 3. С. 80–92.
13. *Gallegos A., Plummer T., Uminsky D., Vega C., Wickman C., Zawoiski M.* A mathematical model of a crocodilian population using delay-differential equations // J. Math. Biol. 2008. V. 57. P. 737–754.

Поступила в редакцию 12 октября 2023 г.
После доработки 26 октября 2023 г.
Принята к публикации 30 ноября 2023 г.

Скворцова Мария Александровна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
sm-18-nsu@yandex.ru

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2023. Том 30, № 4

UDC 517.929.4

ESTIMATES FOR SOLUTIONS IN A MODEL OF REPTILE POPULATION DYNAMICS

M. A. Skvortsova

Abstract: We consider a model of reptile population dynamics in which the gender of the future individuals depends on the environment temperature. The model is described by a system of delay differential equations in which the delay parameter is responsible for the time spent by individuals in immature age. We study the case of complete extinction of the entire population and the case of stabilization of the population size at a constant value. In each case Lyapunov–Krasovskii functionals are constructed, with the help of which we establish estimates characterizing the rate of extinction of the population in the first case and the rate of stabilization of the population size in the second. Using the obtained estimates, it is possible to evaluate the time for which the population size will reach the equilibrium state.

DOI: 10.25587/2411-9326-2023-4-49-65

Keywords: reptile population dynamics, delay differential equation, equilibrium point, asymptotic stability, estimates for solutions, Lyapunov–Krasovskii functional.

REFERENCES

1. *Demidenko G. V. and Matveeva I. I.*, "Asymptotic properties of solutions to delay differential equations [in Russian]," Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform., **5**, No. 3, 20–28 (2005).
2. *Demidenko G. V. and Matveeva I. I.*, "Stability of solutions to delay differential equations with periodic coefficients of linear terms," Sib. Math. J., **48**, No. 5, 824–836 (2007).
3. *Matveeva I. I.*, "Estimates for solutions to one class of nonlinear delay differential equations," J. Appl. Ind. Math., **7**, No. 4, 557–566 (2013).
4. *Demidenko G. V.*, "On the second Lyapunov method for delay equations [in Russian]," preprint No. 289, Sib. Otdel. Ross. Akad. Nauk, Inst. Mat., Novosibirsk (2014).
5. *Yskak T.*, "Estimates for solutions of one class to systems of nonlinear differential equations with distributed delay [in Russian]," Sib. Elektron. Mat. Izv., **17**, 2204–2215 (2020).
6. *Matveeva I. I.*, "Estimates for solutions to one class of nonlinear nonautonomous systems with time-varying concentrated and distributed delays," Sib. Elektron. Mat. Izv., **18**, No. 2, 1689–1697 (2021).
7. *Demidenko G. V. and Matveeva I. I.*, "The second Lyapunov method for time-delay systems," in: Functional Differential Equations and Applications (A. Domoshnitsky, A. Rasin, S. Padhi, eds.), pp. 145–167, Springer Nature, Singapore (2021) (Springer Proc. Math. Stat.; vol. 379).
8. *Matveeva I. I.*, "Estimates for solutions to one class of nonautonomous systems with time-varying concentrated and distributed delays [in Russian]," Mat. Zamet. SVFU, **29**, No. 3, 70–79 (2022).
9. *Skvortsova M. A.*, "Estimates for solutions in the model of interaction of populations with several delays [in Russian]," Itogi Nauki Tekhn., Ser. Sovrem. Mat. Prilozh., Temat. Obz., **188**, 84–105 (2020).
10. *Skvortsova M. A. and Yskak T.*, "Asymptotic behavior of solutions in one predator–prey model with delay," Sib. Math. J., **62**, No. 2, 324–336 (2021).

11. *Skvortsova M. A. and Yskak T.*, “Estimates of solutions to differential equations with distributed delay describing the competition of several types of microorganisms,” J. Appl. Ind. Math., **16**, No. 4, 800–808 (2022).
12. *Skvortsova M. A.*, “Estimates for solutions for one model of population dynamics with delay [in Russian],” Mat. Zamet. SVFU, **29**, No. 3, 80–92 (2022).
13. *Gallegos A., Plummer T., Uminsky D., Vega C., Wickman C., and Zawoiski M.*, “A mathematical model of a crocodilian population using delay-differential equations,” J. Math. Biol., **57**, 737–754 (2008).

Submitted October 12, 2023
Revised October 26, 2023
Accepted November 30, 2023

Maria A. Skvortsova
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia;
Novosibirsk State University,
1 Pirogov Street, 630090 Novosibirsk, Russia
`sm-18-nsu@yandex.ru`

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2023. Том 30, № 4

УДК 519.632

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ДВУХСКОРОСТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

М. В. Урев, Х. Х. Имомназаров, И. К. Искандаров, С. Б. Куйлиев

Аннотация. В полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$ рассматривается стационарная система двухскоростной гидродинамики с одним давлением и однородными дивергентными и неоднородными краевыми условиями для двух скоростей. Такая система является переопределенной. Решение данной системы сводится к последовательному решению двух краевых задач: задачи Стокса для одной скорости и давления и переопределенной краевой задачи для векторного уравнения Пуассона для другой скорости. При надлежащем выборе функциональных пространств доказаны существование и единственность обобщенного решения с соответствующей оценкой устойчивости.

DOI: 10.25587/2411-9326-2023-4-66-80

Ключевые слова: переопределенная система, задача Стокса, уравнение Пуассона, анизотропное весовое пространство Соболева, полуплоскость, вязкая жидкость.

Введение

В данной работе рассматривается краевая задача в полуплоскости $\mathbb{R}^2_+ = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$ двумерного евклидова пространства с границей $S = \{(x_1, 0) : x_1 \in \mathbb{R}\}$ для линеаризованной стационарной системы уравнений двухскоростной гидродинамики с неоднородными краевыми условиями нелинейной модели В. Н. Доровского [1]

$$\nu_1 \Delta \mathbf{u}_1 - \nabla p = -\rho \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0 \text{ в } \mathbb{R}^2_+, \quad \mathbf{u}_1|_S = \mathbf{a}_1(x_1), \tag{1}$$

$$\nu_2 \Delta \mathbf{u}_2 - \nabla p = -\rho \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_2 = 0 \text{ в } \mathbb{R}^2_+, \quad \mathbf{u}_2|_S = \mathbf{a}_2(x_1), \tag{2}$$

и условием ограниченности $|\mathbf{u}_i(x_1, x_2)|$ при $|\mathbf{x}| \to +\infty$, где $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ — массовая сила, $\mathbf{u}_i = (u_{i1}, u_{i2})$, $i = 1, 2$, ∇ — оператор градиента по $\mathbf{x}$, $\rho = \rho_1 + \rho_2$, ρ_i — парциальная плотность i-й фазы, ν_1 и ν_2 — соответствующие сдвиговые вязкости фаз.

Работа Искандарова И. К. выполнена в Дальневосточном центре математических исследований при финансовой поддержке Минобрнауки России, соглашение № 075-02-2023-932 от 16 февраля 2023 г. по реализации программ развития региональных научно-образовательных математических центров.

Решение системы (1), (2) с одним давлением p сводится к последовательному решению двух краевых задач. Либо сначала решается задача Стокса (1) для $\mathbf{u}_1$ и p, а затем определяется скорость $\mathbf{u}_2$ как решение задачи (2) при найденном из (1) давлении p:

$$\Delta \mathbf{u}_2 = \nu_2^{-1}(\nabla p - \rho \mathbf{f}), \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_2 = 0 \text{ в } \mathbb{R}^2_+, \quad \mathbf{u}_2|_S = \mathbf{a}_2(x_1). \tag{3}$$

Другими словами, давление p перенормирует массовую силу $\mathbf{f}$ и поле скорости $\mathbf{u}_2$ является соленоидальным решением краевой задачи для векторного уравнения Пуассона. Либо сначала определяются $\mathbf{u}_2$ и p из задачи Стокса (2), а затем при известном p определяется $\mathbf{u}_1$ из (1). Нетрудно видеть, что последовательное решение системы (1), (2) в любом порядке приводит к одному и тому же результату. В стационарном случае, когда имеет место равновесие фаз по давлению и диссипация энергии происходит только за счет вязкостей фаз, система уравнений (1), (2) оказывается переопределенной [2]. Система (1), (2) с неоднородными дивергентными и граничными условиями в ограниченных областях $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ рассматривалась в работе [3]. В [4] получено классическое решение второй краевой задачи для стационарной системы типа Стокса (1), (2) в полупространстве $\mathbb{R}^3_+$. В [5] двумерная система (1), (2) изучается в полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$ при однородных дивергентных и краевых условиях.

В [6] рассмотрена задача в полупространстве для системы односкоростной гидродинамики для случая регулярных данных в пространстве функций конечной гладкости. В [7] также рассмотрена задача в полупространстве для системы односкоростной гидродинамики в весовых пространствах Соболева.

Обобщенное решение системы (1), (2) так же, как и решение задачи Стокса в двумерных неограниченных областях, в частности в полуплоскости, имеет существенное отличие от трехмерного случая [8, 9]. Именно, в двумерном случае для скоростей невозможно удовлетворить наперед поставленным условиям на бесконечности и ставится условие ограниченности на бесконечности. В [10] показано, что обобщенное решение $\mathbf{u}_1$ задачи Стокса (1), принадлежащее $\mathbf{V}(\mathbb{R}^2_+)$, имеет вполне определенный предел $\lim\limits_{x_2 \to +\infty} \mathbf{u}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_1^\infty = \mathrm{const}$, если $\mathbf{f}$ имеет компактный носитель или достаточно быстро убывает при $|\mathbf{x}| \to +\infty$. Таким образом, вектор $\mathbf{u}_1^\infty$ определяется $\mathbf{f}$ и граничной функцией $\mathbf{a}_1$ и не может задаваться произвольно. Напротив, в трехмерном случае на бесконечности возможно задание произвольного постоянного вектора [9, с. 58].

В п. 2 приводятся вспомогательные сведения. Выводится неравенство типа Лэре в полуплоскости и вводится анизотропное весовое пространство Соболева. Рассматривается решение уравнения Пуассона в полуплоскости, что является наряду с дивергентным уравнением необходимым шагом к решению уравнений Стокса в полуплоскости. Неоднородная задача Стокса (1) сводится к однородной задаче.

В п. 3 показана разрешимость однородной краевой задачи Стокса, полученной в п. 2, и разрешимость переопределенной краевой задачи для векторного уравнения Пуассона. Там же установлены некоторые основные свойства оператора дивергенции в полуплоскости, т. е. теорема о следе и соответствующая формула Грина.

2. Вспомогательные сведения

Векторы и пространства, состоящие из вектор-функций $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, будем обозначать полужирными буквами. Кроме того, будем применять следующие обозначения:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad |\mathbf{u}| = (u_1^2 + u_2^2)^{1/2}, \quad |\mathbf{u_x}| = |\nabla \mathbf{u}| = \left(\sum_{i,k=1}^{2} u_{ix_k}^2 \right)^{1/2}.$$

Через $\mathscr{D}(\Omega)$ обозначим основное пространство всех бесконечно дифференцируемых финитных в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ функций [11, с. 85], через $\mathscr{D}'(\Omega)$ — двойственное пространство, называемое пространством обобщенных функций, $\mathbf{D}(\Omega) := (\mathscr{D}(\Omega))^2$, $\mathbf{L}_2(\Omega) := (L_2(\Omega))^2$ — гильбертово пространство вектор-функций $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ с компонентами u_i из $L_2(\Omega)$. Скалярное произведение в $\mathbf{L}_2(\Omega)$ определяется равенством

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (u_1 v_1 + u_2 v_2) \, d\mathbf{x}.$$

Определим $\mathscr{D}(\overline{\Omega})$ и $\mathbf{D}(\overline{\Omega})$:

$$\mathscr{D}(\overline{\Omega}) := \{\phi|_{\Omega} : \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)\}, \quad \mathbf{D}(\overline{\Omega}) := (\mathscr{D}(\overline{\Omega}))^2.$$

Пусть

$$\omega(x_2) = 1/((3 + x_2) \ln(3 + x_2)), \quad L_{2,\omega}(\mathbb{R}_+^2) = \{u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}_+^2) : \omega u \in L_2(\mathbb{R}_+^2)\}.$$

Пусть $u(\mathbf{x}) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_+^2)$. Тогда для такой $u(\mathbf{x})$ верно неравенство

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{u^2(\mathbf{x})}{(3 + x_2)^2 \ln^2(3 + x_2)} \, d\mathbf{x} \le 4 \int_{\mathbb{R}_+^2} u_{x_2}^2(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \tag{4}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
2 \int_{\mathbb{R}_+^2} u_{x_2} u \frac{1}{(3 + x_2) \ln(3 + x_2)} \, d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\partial u^2}{\partial x_2} \frac{1}{(3 + x_2) \ln(3 + x_2)} \, d\mathbf{x} \\
&= -\int_{\mathbb{R}_+^2} u^2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{(3 + x_2) \ln(3 + x_2)} \right) d\mathbf{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{u^2}{(3 + x_2)^2 \ln(3 + x_2)} \, d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{u^2}{(3 + x_2)^2 \ln^2(3 + x_2)} \, d\mathbf{x} \\
&\ge \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{u^2}{(3 + x_2)^2 \ln^2(3 + x_2)} \, d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Применим неравенство Коши — Буняковского:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2_+} \frac{u^2}{(3+x_2)^2\ln^2(3+x_2)}\,d\mathbf{x} \le 2\int\limits_{\mathbb{R}^2_+} u_{x_2}u\frac{1}{(3+x_2)\ln(3+x_2)}\,d\mathbf{x}$$

$$\le 2\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^2_+} \frac{u^2}{(3+x_2)^2\ln^2(3+x_2)}\,d\mathbf{x}\Bigg)^{1/2}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^2_+} u^2_{x_2}\,d\mathbf{x}\Bigg)^{1/2}.$$

Отсюда следует неравенство (4).

Введем в $\mathscr{D}(\mathbb{R}^2_+)$ скалярное произведение

$$[u,v] = \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} (\nabla u\cdot\nabla v)\,d\mathbf{x} = \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} (u_{x_1}v_{x_1} + u_{x_2}v_{x_2})\,d\mathbf{x}. \tag{5}$$

Из неравенства (4) видно, что (5) действительно определяет скалярное произведение в $\mathscr{D}(\mathbb{R}^2_+)$, которому соответствует норма

$$\|u\|_{\mathscr{D}(\mathbb{R}^2_+)} = \sqrt{[u,u]}.$$

Обозначим через $V^1_0(\mathbb{R}^2_+)$ пополнение $\mathscr{D}(\mathbb{R}^2_+)$ в метрике, соответствующей этому скалярному произведению и с соответствующей этому замыканию нормой $\|u\|_{V^1_0(\mathbb{R}^2_+)}$, $u\in V^1_0(\mathbb{R}^2_+)$, после чего $V^1_0(\mathbb{R}^2_+)$ становится гильбертовым пространством со скалярным произведением (5). После замыкания по норме пространства $V^1_0(\mathbb{R}^2_+)$, неравенство (4) становится верным для всех $u\in V^1_0(\mathbb{R}^2_+)$.

Покажем, что на каждой линии $\Gamma_h = (x_2 = h)$ для п.в. $h>0$ функция $u\in V^1_0(\mathbb{R}^2_+)$ квадратично суммируема и $u=0$ как элемент $L_2(S)$.

Для $u\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^2_+)$ имеем

$$[u(x_1,h)]^2 = \Bigg(\int\limits_0^h u_{x_2}\,dx_2\Bigg)^2 \le h\int\limits_0^h u^2_{x_2}\,dx_2 \le h\int\limits_0^{+\infty} u^2_{x_2}\,dx_2. \tag{6}$$

Проинтегрируем обе части неравенства (6) по линии Γ_h:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} u^2(x_1,h)\,dx_1 \le h\int\limits_{\mathbb{R}^2_+} u^2_{x_2}\,d\mathbf{x} \le h\int\limits_{\mathbb{R}^2_+} |\nabla u|^2\,d\mathbf{x} = h\|u\|^2_{V^1_0(\mathbb{R}^2_+)}. \tag{7}$$

В неравенстве (7) выполним замыкание в норме пространства $V^1_0(\mathbb{R}^2_+)$, после чего (7) становится верным при п.в. $h>0$ для всех $u\in V^1_0(\mathbb{R}^2_+)$. Теперь из (7) следует, что $u|_{\Gamma_h}\in L_2(\Gamma_h)$, $u\in V^1_0(\mathbb{R}^2_+)$ при п.в. $h>0$ и

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2(x_1,h)\,dx_1 = 0.$$

Обозначим через $V^{-1}(\mathbb{R}^2_+)$ пространство ограниченных линейных функционалов над $V^1_0(\mathbb{R}^2_+)$. Рассмотрим для уравнения Пуассона в $\mathbb{R}^2_+$ обобщенную постановку в $V^1_0(\mathbb{R}^2_+)$ задачи Дирихле

$$-\Delta u = f \text{ в } \mathbb{R}^2_+, \quad u|_S = 0.$$

Для $f \in V^{-1}(\mathbb{R}^2_+)$ требуется найти $u \in V^1_0(\mathbb{R}^2_+)$:

$$[u,v] = f(v) \quad \forall v \in V^1_0(\mathbb{R}^2_+). \tag{8}$$

Непрерывность билинейной формы $[u,v] : V^1_0(\mathbb{R}^2_+) \times V^1_0(\mathbb{R}^2_+) \to \mathbb{R}$ следует из неравенства Буняковского, а коэрцитивность — из равенства

$$[u,u] = \|\nabla u\|^2_{\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2_+)} = \|u\|^2_{V^1_0(\mathbb{R}^2_+)}.$$

Теперь существование и единственность решения $u \in V^1_0(\mathbb{R}^2_+)$ задачи (8) следует из леммы Лакса — Мильграма с оценкой

$$\|u\|_{V^1_0(\mathbb{R}^2_+)} = \|\nabla u\|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2_+)} \le \|f\|_{V^{-1}(\mathbb{R}^2_+)}.$$

Функционал f в правой части (8) часто имеет вид обычной функции $f(\mathbf{x})$, которая определяет функционал как элемент пространства $V^{-1}(\mathbb{R}^2_+)$, если $f(\mathbf{x}) \in L_{2,\omega^{-1}}(\mathbb{R}^2_+)$ и

$$f(v) = (f,v) \qquad \forall v \in V^1_0(\mathbb{R}^2_+),$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R}^2_+)$. Для таких f покажем непрерывность линейной формы (f,v) на $V^1_0(\mathbb{R}^2_+)$. Из неравенства (4) следует, что

$$\|v\|_{L_{2,\omega}(\mathbb{R}^2_+)} \le 2\|v\|_{V^1_0(\mathbb{R}^2_+)} \quad \forall v \in V^1_0(\mathbb{R}^2_+). \tag{9}$$

Применяя неравенство Буняковского и неравенство (9), получим

$$|(f,v)| = |(\omega^{-1}f, \omega v)| \le \|f\|_{L_{2,\omega^{-1}}(\mathbb{R}^2_+)}\|v\|_{L_{2,\omega}(\mathbb{R}^2_+)} \le C\|v\|_{V^1_0(\mathbb{R}^2_+)},$$

где $C = 2\|f\|_{L_{2,\omega^{-1}}(\mathbb{R}^2_+)}$.

Введем гильбертово пространство $V^1(\mathbb{R}^2_+)$:

$$V^1(\mathbb{R}^2_+) := \big\{u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2_+) : u \in L_{2,\omega}(\mathbb{R}^2_+),\ \nabla u \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2_+)\big\},$$

снабженное нормой

$$\|u\|_{1,\omega} = \|u\|_{L_{2,\omega}(\mathbb{R}^2_+)} + \|\nabla u\|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2_+)}, \quad u \in V^1(\mathbb{R}^2_+).$$

Из определения пространства $V^1(\mathbb{R}^2_+)$ и теоремы Фубини следует, что на каждой линии Γ_h для п.в. $h \ge 0$ функция $u \in V^1(\mathbb{R}^2_+)$ квадратично суммируема.

Рассмотрим вопрос о следе функции $u \in V^1(\mathbb{R}^2_+)$ на линии $x_2 = 0$. Пусть $a > 0$ и $\phi_a(t) \in C^\infty([0,\infty))$ определяется как $\phi_a(t) = 1$, если $0 \le t \le a$, $0 \le \phi_a(t) \le 1$, если $t \in [a,2a]$, $\phi_a(t) = 0$, если $t \ge 2a$. Для каждой $u \in V^1(\mathbb{R}^2_+)$ функция $u_a(x_1,x_2) = \phi_a(x_2)u(x_1,x_2)$ принадлежит $H^1(\mathbb{R}^2_+)$ и $\gamma_0 u_a$ — след u_a на S — совпадает с $\gamma_0 u$ — следом u на S. По теореме о следах функций из $H^k(\mathbb{R}^n_+)$ [12, с. 87] $\gamma_0 u = \gamma_0 u_a \in H^{1/2}(\mathbb{R})$ и

$$\|\gamma_0 u\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \le C\|u_a\|_{H^1(\mathbb{R}^2_+)} \le C_1\|u\|_{V^1(\mathbb{R}^2_+)}.$$

Справедлива также «обратная» теорема [12, с. 88], которая для нашего частного случая пространства $H^1(\mathbb{R}^2_+)$ формулируется так: существует линейное ограниченное отображение

$$Z : H^{1/2}(\mathbb{R}) \to H^1(\mathbb{R}^2_+)$$

такое, что если $g \in H^{1/2}(\mathbb{R})$, то $\gamma_0 u = g$ для $u = Zg$. Отсюда следует, что существует линейное ограниченное отображение

$$\widetilde{Z} : H^{1/2}(\mathbb{R}) \to V^1(\mathbb{R}^2_+)$$

такое, что если $g \in H^{1/2}(\mathbb{R})$, то $\gamma_0 \widetilde{u} = g$ для $\widetilde{u} = \widetilde{Z} g$.

Сведем решение неоднородной задачи Стокса (1) относительно $(\mathbf{u}_1, p)$ к решению однородной задачи Стокса для пары $(\mathbf{v}_1, p)$. Для этого представим $\mathbf{u}_1$ в виде суммы: $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{z}_0^{(1)} + \mathbf{z}_1^{(1)}$. Пусть граничное условие $\mathbf{a}_1(x_1)$ в (1) принадлежит $\mathbf{H}^{1/2}(\mathbb{R}) = (H^{1/2}(\mathbb{R}))^2$. Тогда для $\mathbf{z}_0^{(1)} = \widetilde{Z}\mathbf{a}_1 \in \mathbf{V}^1(\mathbb{R}^2_+) = (V^1(\mathbb{R}^2_+))^2$ имеем $\gamma_0 \mathbf{z}_0^{(1)} = \mathbf{a}_1(x_1)$.

Для определения $\mathbf{z}_1^{(1)}$ рассмотрим следующую дивергентную задачу: требуется найти $\mathbf{z}_1^{(1)} \in \mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+) = \big(V_0^1(\mathbb{R}^2_+)\big)^2$ такую, что

$$\operatorname{div} \mathbf{z}_1^{(1)} = -\operatorname{div} \mathbf{z}_0^{(1)} \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^2_+, \tag{10}$$

$$\big\|\mathbf{z}_1^{(1)}\big\|_{\mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+)} \le C \big\|\operatorname{div} \mathbf{z}_0^{(1)}\big\|_{L_2(\mathbb{R}^2_+)}. \tag{11}$$

Имеем $\mathbf{z}_0^{(1)} \in \mathbf{V}^1(\mathbb{R}^2_+)$, откуда $\operatorname{div} \mathbf{z}_0^{(1)} \in L_2(\mathbb{R}^2_+)$. Решение более общей дивергентной задачи, чем (10), с соответствующей оценкой решения получено в явном виде М. Е. Боговским [13, с. 65; 14]. Для нашего двумерного гильбертова случая в $\mathbb{R}^2_+$ это будет соответствовать существованию решения задачи (10) в $\mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+)$ с оценкой (11).

Функцию $\mathbf{v}_1$ определим как решение следующей задачи Стокса с однородными дивергентными и краевыми условиями:

$$\nu_1 \Delta \mathbf{v}_1 - \nabla p = -\mathbf{f}_1, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0 \text{ в } \mathbb{R}^2_+, \quad \mathbf{v}_1|_S = \mathbf{0}, \tag{12}$$

где $-\mathbf{f}_1 = -\rho \mathbf{f} - \nu_1 \Delta \mathbf{z}^{(1)}$, $\mathbf{z}^{(1)} = \mathbf{z}_0^{(1)} + \mathbf{z}_1^{(1)} \in \mathbf{V}^1(\mathbb{R}^2_+)$, так как $\mathbf{z}_0^{(1)} \in \mathbf{V}^1(\mathbb{R}^2_+)$ и $\mathbf{z}_1^{(1)} \in \mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+) \subset \mathbf{V}^1(\mathbb{R}^2_+)$. Линейный функционал $\Delta \mathbf{z}^{(1)}$ над пространством $\mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+)$ определяется формулой

$$\langle \Delta \mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{v} \rangle = -\int\limits_{\mathbb{R}^2_+} (\nabla \mathbf{z}^{(1)}(\mathbf{x}) : \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} = -\sum_{i,j=1}^{2} \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} \frac{\partial z_i^{(1)}}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+),$$

и является ограниченным на $\mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+)$:

$$|\langle \Delta \mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{v} \rangle| \le C \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+)}, \quad \text{где} \quad C = \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^2_+} |\nabla \mathbf{z}^{(1)}|^2 \, d\mathbf{x} \Bigg)^{1/2}.$$

Пусть массовая сила $\mathbf{f}$ в (1) и (2) принадлежит $\mathbf{V}^{-1}(\mathbb{R}^2_+)$, тогда $\mathbf{f}_1$ в (12) также принадлежит $\mathbf{V}^{-1}(\mathbb{R}^2_+)$.

3. Обобщенное решение однородной системы (12)

Обозначим через $\dot{\mathbf{J}}(\mathbb{R}^2_+)$ множество бесконечно дифференцируемых финитных в $\mathbb{R}^2_+$ соленоидальных векторов. В $\dot{\mathbf{J}}(\mathbb{R}^2_+)$ введем скалярное произведение

$$[\mathbf{u},\mathbf{v}] = \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} \mathbf{u}_{\mathbf{x}} : \mathbf{v}_{\mathbf{x}}\, d\mathbf{x} = \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} (\mathbf{u}_{x_1}\cdot \mathbf{v}_{x_1} + \mathbf{u}_{x_2}\cdot \mathbf{v}_{x_2})\, d\mathbf{x}.$$

Из (4) получим неравенство

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_{2,\omega}(\mathbb{R}^2_+)} \le 2\|\mathbf{u}_{\mathbf{x}}\|_{(\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2_+))^2}, \quad \mathbf{u}\in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2_+), \tag{13}$$

из которого следует, что $[\mathbf{u},\mathbf{v}]$ действительно определяет скалярное произведение в $\dot{\mathbf{J}}(\mathbb{R}^2_+)\subset \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2_+)$, которому соответствует норма

$$\|\mathbf{u}\|_{\dot{\mathbf{J}}(\mathbb{R}^2_+)} = \sqrt{[\mathbf{u},\mathbf{u}]} \equiv \|\mathbf{u}_{\mathbf{x}}\|_{(\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2_+))^2}.$$

Обозначим через $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+)$ пополнение $\dot{\mathbf{J}}(\mathbb{R}^2_+)$ по введенной норме с соответствующей этому замыканию нормой $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+)}$, $\mathbf{u}\in\mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+)$. Легко видеть, что $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+)$ является замкнутым подпространством в гильбертовом пространстве вектор-функций $\mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+) = \big(V_0^1(\mathbb{R}^2_+)\big)^2$. После замыкания по норме пространства $\mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+)$ неравенство (13) становится верным для всех $\mathbf{u}\in\mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+)$.

Обозначим через $\widehat{\mathbf{Z}}(\mathbb{R}^2_+)$ замкнутое подпространство в $\mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+)$, определяемое как

$$\widehat{\mathbf{Z}}(\mathbb{R}^2_+) = \big\{\mathbf{v}\in\mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+) : \operatorname{div}\mathbf{v} = 0\big\}.$$

Хейвудом доказано [15, теорема 9], что $\widehat{\mathbf{Z}}(\mathbb{R}^2_+) = \mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+)$ (в его обозначениях $J_0^*(\mathbb{R}^2_+) = J_0(\mathbb{R}^2_+)$).

Перейдем к рассмотрению однородной задачи Стокса (12) относительно пары $(\mathbf{v}_1, p)$. Введем линейный непрерывный оператор $\pi\in\mathscr{L}(\mathbf{V}^{-1}(\mathbb{R}^2_+);\mathbf{Z}'(\mathbb{R}^2_+))$:

$$\langle \pi\mathbf{g},\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{g},\mathbf{v}\rangle, \quad \mathbf{g}\in\mathbf{V}^{-1}(\mathbb{R}^2_+),\ \mathbf{v}\in\mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+),$$

$$\|\pi\mathbf{g}\|_{\mathbf{Z}'(\mathbb{R}^2_+)} \le \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{V}^{-1}(\mathbb{R}^2_+)}.$$

В работах О. А. Ладыженской [8, 9] предложена и исследована обобщенная формулировка задачи Стокса (12) в пространстве $\mathbf{Z}(\Omega)$ для любых областей $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n = 2,3$ $(\Omega\ne\mathbb{R}^2)$, в частности, для $\Omega = \mathbb{R}^2_+$: *найти функцию* $\mathbf{v}_1\in\mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+)$, *для которой выполняется тождество*

$$\nu_1[\mathbf{v}_1,\mathbf{z}] = \langle\pi\mathbf{f}_1,\mathbf{z}\rangle \quad \forall\mathbf{z}\in\mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+). \tag{14}$$

Оказывается [8, 9], что (14) несет ту же информацию, что и система (12), и позволяет полностью отделить нахождение $\mathbf{v}_1$ от p. Последующее нахождение p следует из теоремы, доказанной О. А. Ладыженской [9, с. 42]. Из этой теоремы следует разложение Вейля для случая ограниченной области с достаточно гладкой границей [9, с. 41], которое также справедливо и для полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$ [13, с. 43], а именно, пространство $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2_+)$ раскладывается в прямую сумму

$$\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2_+) = \mathring{\mathbf{J}}(\mathbb{R}^2_+)\oplus\mathbf{G}(\mathbb{R}^2_+),$$

где $\overset{\circ}{\mathbf{J}}(\mathbb{R}^2_+)$ — замыкание $\dot{\mathbf{J}}(\mathbb{R}^2_+)$ по норме $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2_+)$, а $\mathbf{G}(\mathbb{R}^2_+)$ — ортогональное дополнение $\overset{\circ}{\mathbf{J}}(\mathbb{R}^2_+)$ в $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2_+)$.

Для краткости обозначим через $\mathbf{X} = \mathbf{V}^1_0(\mathbb{R}^2_+)$, $M = L_2(\mathbb{R}^2_+)$, $\mathbf{X}' = \mathbf{V}^{-1}(\mathbb{R}^2_+)$ пространства с нормами $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$, $\|\cdot\|_M$, $\|\cdot\|_{\mathbf{X}'}$, и пусть $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — отношение двойственности между элементами $\mathbf{X}'$ и $\mathbf{X}$. Теоретическое исследование задачи (12) весьма просто: надо воспользоваться обобщенной формулировкой (14) и применить лемму Лакса — Мильграма. Другое дело, когда в рамках данного подхода рассматривается численное решение методом конечных элементов. Тогда возникают трудности с построением соленоидального конечноэлементного решения. Чтобы обойти эти трудности, будем рассматривать для задачи (12) смешанную обобщенную постановку в исходных переменных, при которой скорость ищется во всем пространстве $\mathbf{V}^1_0(\mathbb{R}^2_+)$, а не в его соленоидальном подпространстве: для заданной $\mathbf{f}_1 \in \mathbf{X}'$ требуется найти вектор-функцию $\mathbf{v}_1 \in \mathbf{X}$ и функцию $p \in M$, удовлетворяющие равенствам

$$\begin{cases} a_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}) + b_1(\mathbf{v}, p) = \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{v}\rangle, & \mathbf{v} \in \mathbf{X}, \\ b_1(\mathbf{v}_1, q) = 0, & q \in M, \end{cases} \tag{15}$$

и оценке

$$\|\mathbf{v}_1\|_{\mathbf{X}} + \|p\|_M \le C\|\mathbf{f}_1\|_{\mathbf{X}'}, \tag{16}$$

где билинейные формы $a_1(\cdot,\cdot) : \mathbf{X}\times\mathbf{X} \to \mathbb{R}$ и $b_1(\cdot,\cdot) : \mathbf{X}\times M \to \mathbb{R}$ определяются как

$$a_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nu_1 \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} (\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x}) : \nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} = \nu_1 \sum_{i,j=1}^{2} \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{X},$$

$$b_1(\mathbf{v}, q) = -\int\limits_{\mathbb{R}^2_+} q \operatorname{div}\mathbf{v}\, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{X},\ q \in M.$$

Теорема 1. *Для задачи Стокса* (12) *существует единственное обобщенное решение* $(\mathbf{v}_1, p) \in \mathbf{V}^1_0(\mathbb{R}^2_+) \times L_2(\mathbb{R}^2_+)$ *как решение системы* (15) *с оценкой* (16).

Доказательство. Для доказательства существования и единственности решения задачи (15) вместе с оценкой (16) нужно показать [16, с. 61], что билинейные формы $a_1(\cdot,\cdot)$ и $b_1(\cdot,\cdot)$ непрерывны, билинейная форма $a_1(\cdot,\cdot)$ является $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+)$-эллиптичной, т. е. существует такая положительная постоянная $\alpha > 0$, что

$$a_1(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \ge \alpha\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{X}}, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+), \tag{17}$$

а билинейная форма $b_1(\cdot,\cdot)$ удовлетворяет inf-sup условию: существует константа $\beta > 0$ такая, что

$$\inf_{q\in M\setminus\{0\}} \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{X}\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{b_1(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}\|q\|_M} \ge \beta. \tag{18}$$

Неравенство $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+)$-эллиптичности (17) очевидно, так как

$$a_1(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \nu_1\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{X}}, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+).$$

Для доказательства (18) рассмотрим следующую дивергентную задачу. Дана $q \in M$, требуется найти $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{X}$:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_0 = q \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^2_+, \tag{19}$$

$$\|\mathbf{v}_0\|_{\mathbf{X}} \le C\|q\|_M. \tag{20}$$

Решение более общей дивергентной задачи в $\mathbb{R}^n_+$, $n \ge 2$, с соответствующей оценкой решения получено в явном виде М. Е. Боговским [13, с. 65; 14]. Для нашего двумерного гильбертова случая это будет соответствовать существованию решения $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{X}$ задачи (19) с оценкой (20). Пусть теперь q — любая функция из M. Функции q сопоставим вектор-функцию $-\mathbf{v}_0 \in \mathbf{X}$, где $\mathbf{v}_0$ — решение задачи (19) с оценкой (20). Имеем

$$\sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{X}\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{b_1(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}} \ge \frac{b_1(\mathbf{v}_0, q)}{\|\mathbf{v}_0\|_{\mathbf{X}}} \ge \frac{1}{C\|q\|_M} \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} q^2(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \frac{1}{C}\|q\|_M,$$

что доказывает (18) с $\beta = C^{-1}$. Таким образом, получаем существование и единственность обобщенного решения $(\mathbf{v}_1, p) \in \mathbf{X} \times M$ задачи Стокса (15) с оценкой (16). $\square$

Перейдем к рассмотрению второй неоднородной системы уравнений (3) относительно скорости $\mathbf{u}_2$ второй фазы жидкости с уже известным давлением $p \in M$. Аналогично сведению неоднородной задачи Стокса (1) к однородной задаче (12) выполним аналогичные действия для неоднородной задачи (3). Для этого представим $\mathbf{u}_2$ в виде суммы: $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{z}_0^{(2)} + \mathbf{z}_1^{(2)}$, где $\mathbf{z}_0^{(2)} = \widetilde{Z}\mathbf{a}_2 \in \mathbf{V}^1(\mathbb{R}^2_+)$, а $\mathbf{z}_1^{(2)}$ — решение дивергентной задачи, аналогичной задаче (10), (11): найти вектор-функцию $\mathbf{z}_1^{(2)} \in \mathbf{V}^1_0(\mathbb{R}^2_+)$ такую, что

$$\operatorname{div} \mathbf{z}_1^{(2)} = -\operatorname{div} \mathbf{z}_0^{(2)} \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^2_+, \tag{21}$$

$$\big\|\mathbf{z}_1^{(2)}\big\|_{\mathbf{X}} \le C\big\|\operatorname{div} \mathbf{z}_0^{(2)}\big\|_M. \tag{22}$$

Для $p \in M = L_2(\mathbb{R}^2_+)$ градиент ∇p есть линейный непрерывный функционал над пространством $\mathbf{X} = \mathbf{V}^1_0(\mathbb{R}^2_+)$, действующий по правилу

$$\langle \nabla p, \mathbf{v}\rangle = -\int\limits_{\mathbb{R}^2_+} p(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{X},$$

т. е. $\nabla p \in \mathbf{X}' = \mathbf{V}^{-1}(\mathbb{R}^2_+)$.

Лемма 1. *Справедливо неравенство*

$$\|p\|_M \le C\|\nabla p\|_{\mathbf{X}'}, \quad p \in M,$$

где $C > 0$ *— постоянная из неравенства* (20).

Доказательство.

$$\|\nabla p\|_{\mathbf{X}'} = \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{X}\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{\langle \nabla p, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}} = \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{X}\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{-1}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}} \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} p(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Для $p \in M$ возьмем $-\mathbf{v}_0 \in \mathbf{X}$, где $\mathbf{v}_0$ — решение дивергентной задачи (19) с правой частью p и оценкой (20). Тогда

$$\|\nabla p\|_{\mathbf{X}'} \geq \frac{\|p\|_M^2}{\|\mathbf{v}_0\|_{\mathbf{X}}} \geq C^{-1}\|p\|_M \quad \forall p \in M. \quad \square$$

Функцию $\mathbf{v}_2$ определим как решение следующей переопределенной задачи для векторного уравнения Пуассона с однородными дивергентными и краевыми условиями:

$$\Delta \mathbf{v}_2 = -\mathbf{f}_2, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_2 = 0 \text{ в } \mathbb{R}^2_+, \quad \mathbf{v}_2|_S = \mathbf{0}, \tag{23}$$

где $-\mathbf{f}_2 = \nu_2^{-1}(\nabla p - \rho \mathbf{f}) - \Delta \mathbf{z}_0^{(2)} - \Delta \mathbf{z}_1^{(2)}$, $\mathbf{z}_0^{(2)} \in \mathbf{V}^1(\mathbb{R}^2_+)$, $\mathbf{z}_1^{(2)} \in \mathbf{V}^1_0(\mathbb{R}^2_+) \subset \mathbf{V}^1(\mathbb{R}^2_+)$. Имеем $\nabla p \in \mathbf{X}'$ и в (23) правая часть $-\mathbf{f}_2$, как и в задаче (12), принадлежит $\mathbf{X}'$. Существование и единственность обобщенного решения переопределенной задачи (23), следуя [8, 9], можно достаточно просто установить в замкнутом подпространстве $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+)$ соленоидальных векторных функций пространства $\mathbf{X}$. Требуется найти $\mathbf{v}_2 \in \mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+)$:

$$[\mathbf{v}_2, \mathbf{v}] = \langle \pi \mathbf{f}_2, \mathbf{v} \rangle, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+). \tag{24}$$

Имеем

$$[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{X}}, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+),$$

т. е. билинейная форма в левой части (24) $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+)$ коэрцитивна. Правая часть в (24) есть линейный непрерывный функционал над элементами пространства $\mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+)$. Тогда по лемме Лакса — Мильграма задача (24) имеет единственное решение $\mathbf{v}_2 \in \mathbf{Z}(\mathbb{R}^2_+)$ и

$$\|\mathbf{v}_2\|_{\mathbf{X}} \leq C\|\mathbf{f}_2\|_{\mathbf{X}'}.$$

Однако для численного решения методом конечных элементов переопределенной задачи (23) ее удобно расширить путем введения в первое уравнение системы (23) дополнительного неизвестного слагаемого в виде градиента скалярной функции с нулевым граничным условием. Более подробно для случая ограниченной области см. [3, 17].

Введем гильбертово пространство $\mathbf{H}_\omega(\operatorname{div}; \mathbb{R}^2_+)$:

$$\mathbf{H}_\omega(\operatorname{div}; \mathbb{R}^2_+) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{D}'(\mathbb{R}^2_+) : \mathbf{v} \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2_+),\, \omega^{-1} \operatorname{div} \mathbf{v} \in L_2(\mathbb{R}^2_+)\},$$

снабженное нормой

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_\omega(\operatorname{div}; \mathbb{R}^2_+)} = \left(\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2_+)} + \|\omega^{-1} \operatorname{div} \mathbf{v}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2_+)}\right)^{1/2}.$$

Лемма 2. $\mathbf{D}(\overline{\mathbb{R}^2_+})$ *плотно в* $\mathbf{H}_\omega(\operatorname{div}; \mathbb{R}^2_+)$.

Доказательство основывается на следующей характеристике плотного линеала D в гильбертовом пространстве V [18, с. 60]: *линеал D плотен в V в том и только в том случае, если любой непрерывный линейный функционал, определенный на V и обращающийся в нуль на D, обращается в нуль также и на V.*

Пусть $\mathscr{L}$ принадлежит $(\mathbf{H}_\omega(\mathrm{div};\mathbb{R}^2_+))'$. По теореме Рисса существует $\mathbf{l} \in \mathbf{H}_\omega(\mathrm{div};\mathbb{R}^2_+)$:

$$\langle \mathscr{L}, \mathbf{u}\rangle = (\mathbf{l}, \mathbf{u}) + (\omega^{-1}\operatorname{div}\mathbf{l}, \omega^{-1}\operatorname{div}\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{H}_\omega(\mathrm{div};\mathbb{R}^2_+).$$

Предположим, что $\mathscr{L}$ обращается в нуль на $\mathbf{D}(\overline{\mathbb{R}^2_+})$, т. е.

$$(\mathbf{l}, \mathbf{v}) + (\omega^{-1}\operatorname{div}\mathbf{l}, \omega^{-1}\operatorname{div}\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{D}(\overline{\mathbb{R}^2_+}).$$

Для $\mathbf{l} = (l_1, l_2)$ и $l_3 = \omega^{-2}\operatorname{div}\mathbf{l}$ обозначим через $\widetilde{\mathbf{l}} = (\widetilde{l}_1, \widetilde{l}_2)$ и $\widetilde{l}_3$ продолжение функций l_i, $i = 1, 3$, нулем в $\mathbb{R}^2$. Тогда предыдущая формула может быть переписана в виде

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} (\widetilde{l}_1 v_1 + \widetilde{l}_2 v_2 + \widetilde{l}_3 \operatorname{div}\mathbf{v})\, d\mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{D}(\mathbb{R}^2).$$

Это равенство показывает, что

$$\widetilde{\mathbf{l}} = \mathbf{grad}\, \widetilde{l}_3$$

в смысле обобщенных функций в $\mathbb{R}^2$. Так как $\widetilde{\mathbf{l}} \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2)$, то $\widetilde{l}_3 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ и по теореме 1.2.2^0 из [16, с. 5] $l_3 \in H^1_0(\mathbb{R}^2_+)$. Тогда l_3 — предел функций $\{\psi_n\}_{n\ge 1} \subset \mathscr{D}(\mathbb{R}^2_+)$ по норме пространства $H^1(\mathbb{R}^2_+)$ и окончательно получаем

$$\langle \mathscr{L}, \mathbf{u}\rangle = \lim_{n\to\infty} \{(\mathbf{grad}\,\psi_n, \mathbf{u}) + (\psi_n, \operatorname{div}\mathbf{u})\} = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}_\omega(\mathrm{div};\mathbb{R}^2_+). \quad \square$$

Отметим, что аналогично доказательству леммы 2 можно показать, что $\mathscr{D}(\overline{\mathbb{R}^2_+})$ плотно в $V^1(\mathbb{R}^2_+)$. Ниже для $f \in H^{-1/2}(\mathbb{R})$, $g \in H^{1/2}(\mathbb{R})$ через $\langle f, g\rangle_{-1/2,1/2}$ будем обозначать скалярное произведение между $H^{-1/2}(\mathbb{R})$ и $H^{1/2}(\mathbb{R})$.

Лемма 3. *Отображение* $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \to v_2(x_1, 0)$, *определенное на* $\mathbf{D}(\mathbb{R}^2_+)$, *можно продолжить до линейного непрерывного отображения* $\mathbf{H}_\omega(\mathrm{div};\mathbb{R}^2_+) \to H^{-1/2}(\mathbb{R})$ (*также обозначаемого через* $\mathbf{v} \to v_2(x_1, 0)$). *Кроме того, имеет место формула Грина*

$$(\mathbf{v}, \nabla\varphi) + (\operatorname{div}\mathbf{v}, \varphi) = -\langle v_2, \varphi\rangle_{-1/2,1/2}, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{H}_\omega(\mathrm{div};\mathbb{R}^2_+),\ \varphi \in V^1(\mathbb{R}^2_+).$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{v} \in \mathbf{D}(\overline{\mathbb{R}^2_+})$ и $\varphi \in \mathscr{D}(\overline{\mathbb{R}^2_+})$. Тогда

$$(\mathbf{v}, \nabla\varphi) + (\operatorname{div}\mathbf{v}, \varphi) = -\int\limits_{\mathbb{R}} v_2\varphi\, dx_1.$$

Так как $\mathscr{D}(\overline{\mathbb{R}^2_+})$ плотно в $V^1(\mathbb{R}^2_+)$, это равенство остается справедливым, когда φ из $V^1(\mathbb{R}^2_+)$ и $\mathbf{v}$ из $\mathbf{D}(\overline{\mathbb{R}^2_+})$. Поэтому

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}} v_2\varphi\, dx_1\right| \le \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_\omega(\mathrm{div};\mathbb{R}^2_+)} \|\varphi\|_{V^1(\mathbb{R}^2_+)}, \quad \varphi \in V^1(\mathbb{R}^2_+),\ \mathbf{v} \in \mathbf{D}(\overline{\mathbb{R}^2_+}).$$

Пусть g — произвольный элемент из $H^{1/2}(\mathbb{R})$. Возьмем $\varphi = \widetilde{Z}g \in V^1(\mathbb{R}^2_+)$ так, что $\gamma_0\varphi = g$ (см. выше). Тогда

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}} v_2 g\, dx_1\right| \le c_0\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_\omega(\mathrm{div};\mathbb{R}^2_+)}\|g\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \quad \forall g \in H^{1/2}(\mathbb{R}),\ \mathbf{v} \in \mathbf{D}(\overline{\mathbb{R}^2_+}),$$

где c_0 — норма оператора $\widetilde{Z}$. Следовательно,

$$g \to \int\limits_{\mathbb{R}} v_2(x_1, 0)g(x_1)\, dx_1$$

— непрерывное линейное отображение из $H^{1/2}(\mathbb{R})$ в R. По теореме Рисса существует $f = f(\mathbf{v}) \in H^{-1/2}(\mathbb{R})$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} v_2(x_1, 0)g(x_1)\, dx_1 = \langle f, g\rangle_{-1/2,1/2}.$$

Отображение $\mathbf{v} \to f(\mathbf{v})$ линейно и

$$\|f\|_{H^{-1/2}(\mathbb{R})} \le c_0\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_\omega(\mathrm{div};\mathbb{R}^2_+)}, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{D}(\overline{\mathbb{R}^2_+}).$$

Это доказывает, что отображение $\mathbf{v} \to f(\mathbf{v}) = v_2(x_1, 0)$, определенное в $\mathbf{D}(\overline{\mathbb{R}^2_+})$, непрерывно в норме $\mathbf{H}_\omega(\mathrm{div};\mathbb{R}^2_+)$. Так как $\mathbf{D}(\overline{\mathbb{R}^2_+})$ плотно в $\mathbf{H}_\omega(\mathrm{div};\mathbb{R}^2_+)$, это отображение может быть продолжено по непрерывности до отображения из $\mathbf{H}_\omega(\mathrm{div};\mathbb{R}^2_+)$ в $H^{-1/2}(\mathbb{R})$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Доровский В. Н., Перепечко Ю. В.* Теория частичного плавления // Геология и геофизика. 1989. № 9. С. 56–64.
2. *Жабборов Н. М., Имомназаров Х. Х.* Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред. Ташкент, 2012.
3. *Урев М. В., Имомназаров Х. Х., Жиан-Ган Тан.* Краевая задача для одной переопределенной стационарной системы, возникающей в двухскоростной гидродинамике // Сиб. журн. вычисл. математики. 2017. Т. 20, № 4. С. 425–437.
4. *Имомназаров Х. Х., Имомназаров Ш. Х., Урев М. В., Бахрамов Р. Х.* Решение одной переопределенной стационарной системы типа Стокса в полупространстве // Сиб. журн. индустр. математики. 2021. Т. 24, № 4. С. 54–63.
5. *Имомназаров Х. Х., Искандаров И. К., Куйлиев С. Б., Урев М. В.* Краевая задача для одной переопределенной системы, возникающей в двухжидкостной гидродинамике // Мат. заметки СВФУ. 2022. Т. 29, № 1. С. 14–24.
6. *Tanaka N.* On the boundary value problem for the stationary Stores system in the half-space // J. Differ. Equ. 1995. V. 115. P. 70–74.
7. *Boulmezaoud Tahar Z.* On the Stokes system and on the biharmonic equation in the half-space: an approach via weighted Sobolev spaces // Math. Meth. Appl. Sci. 2002. V. 25. P. 373–398.
8. *Ладыженская О. А., Солонников В. А.* О некоторых задачах векторного анализа и обобщенных постановках краевых задач для уравнений Навье — Стокса // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1976. Т. 59. С. 81–116.
9. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
10. *Попов А. Н.* Применение теории потенциала к решению линеаризованной системы уравнений Навье — Стокса в двумерном случае // Тр. МИАН СССР. 1971. Т. 116. С. 162–180.

11. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
12. *Nečas J.* Direct methods in the theory of elliptic equations. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2012.
13. *Боговский М. Е.* Аналитико-численные методы для уравнений Навье — Стокса. М.: РУДН, 2008.
14. *Боговский М. Е.* Решение некоторых задач векторного анализа, связанных с операторами div и grad // Тр. семинара С. Л. Соболева. Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1980. Вып. 1. С. 5–40.
15. *Heywood J. G.* On uniqueness questions in the theory of viscous flow // Acta Math. 1976. V. 136. P. 61–102.
16. *Girault V., Raviart P.-A.* Finite element methods for Navier–Stokes equations. Berlin: Springer-Verl., 1986.
17. *Гудович И. С., Крейн С. Г., Куликов И. М.* Краевые задачи для уравнений Максвелла // Докл. АН СССР. 1972. Т. 207, № 2. С. 321–324.
18. *Обэн Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач. М.: Мир, 1977.

Поступила в редакцию 27 сентября 2023 г.
После доработки 25 октября 2023 г.
Принята к публикации 30 ноября 2023 г.

Урев Михаил Вадимович
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
пр. Академика Лаврентьева, 6, Новосибирск 630090
urev@nmsf.sscc.ru

Имомназаров Холматжон Худайназарович
Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН,
пр. Академика Лаврентьева, 6, Новосибирск 630090
imom@omzg.sscc.ru

Искандаров Илхом Кучкарович
Тихоокеанский государственный университет,
Тихоокеанская ул., 136, Хабаровск 680035
iskandarovilkham@mail.ru

Куйлиев Сарвар Бахрон угли
Самаркандский государственный университет,
Университетский бульвар, 15, Самарканд 140104, Узбекистан
sarvarqb@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2023. Том 30, № 4

UDC 519.632

A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ONE OVERDETERMINED SYSTEM ARISING IN TWO–SPEED HYDRODYNAMICS

M. V. Urev, Kh. Kh. Imomnazarov, I. K. Iskandarov, and S. B. Quiliev,

Abstract: In the half-plane $\mathbb{R}^2_+$ we consider a stationary system of two-velocity hydrodynamics with one pressure and homogeneous divergent and inhomogeneous boundary conditions for two velocities. Such system is overridden. The solution to this system is reduced to the sequential solution of two boundary value problems: the Stokes problem for one velocity and pressure and an overdetermined boundary value problem for the vector Poisson equation for the other speed. With an appropriate choice of function spaces, the existence and uniqueness are proven for generalized solution with the corresponding stability estimate.

DOI: 10.25587/2411-9326-2023-4-66-80

Keywords: overdetermined system, Stokes problem, Poisson equation, anisotropic weighted space Sobolev, half-plane, viscous liquid.

REFERENCES

1. *Dorovsky V. N. and Perepechko Yu. V.*, “Theory of partial melting [in Russian],” Geol. Geofiz., No. 9, 56–64 (1989).

2. *Zhabborov N. M. and Imomnazarov Kh. Kh.*, Some Initial Boundary Value Problems Mechanics of Two-Velocity Media [in Russian], Universtitet, Tashkent (2012).

3. *Urev M. V., Imomnazarov Kh. Kh. and Tang J.-G.*, “Boundary value problem for one overdetermined stationary system, arising in two-velocity hydrodynamics [in Russian],” Numer. Anal. Appl., **10**, No. 4, 347–357 (2017).

4. *Imomnazarov Kh. Kh., Imomnazarov Sh. Kh., Urev M. V., and Bahramov R. Kh.*, “Solving one overdetermined stationary Stokes-type systems in a half-space [in Russian],” Sib. Zhurn. Ind. Mat., **24**, No. 4, 54–63 (2021).

5. *Imomnazarov Kh. Kh., Iskandarov I. K., Quiliev S. B., and Urev M. V.*, “Boundary value problem for one overdetermined system arising in two-fluid hydrodynamics [in Russian],” Mat. Zamet. SVFU, **29**, No. 1, 14–24 (2022).

6. *Tanaka N.*, “On the value boundary problem for the stationary Stores system in the half-space,” J. Differ. Equ., **115**, 70–74 (1995).

7. *Boulmezaoud Tahar Z.*, “On the Stokes system and on the biharmonic equation in the half-space: an approach via weighted Sobolev spaces,” Math. Meth. Appl. Sci., **25**, 373–398 (2002).

8. *Ladyzhenskaya O. A. and Solonnikov V. A.*, “On some problems of vector analysis and generalized formulations of boundary value problems for the Navier–Stokes equations,” Sov. Math., No. 10, 257–286 (1978).

9. *Ladyzhenskaya O. A.*, Mathematical Problems in the Dynamics of a Viscous Incompressible Fluid [in Russian], Nauka, Moscow (1970).

10. *Popov A. N.*, “Application of potential theory to the solution of the linearized system of Navier–Stokes equations in the two-dimensional case [in Russian],” Tr. Steklov Math. Inst. USSR, **116**, 162–180 (1971).
11. *Vladimirov V. S.*, Equations of Mathematical Physics [in Russian], Nauka, Moscow (1981).
12. *Nečas J.*, Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations, Springer-Verl., Berlin; Heidelberg (2012).
13. *Bogovsky M. E.*, Analytical-Numerical Methods for the Navier–Stokes Equations [in Russian], RUDN, Moscow (2008).
14. *Bogovsky M. E.*, “Solution of some problems of vector analysis related to the operators div and grad [in Russian],” Proc. S. L. Sobolev Seminar, No. 1, 5–40 (1980).
15. *Heywood J. G.*, “On uniqueness questions in the theory of viscous flow,” Acta Math., **136**, 61–102 (1976).
16. *Girault V. and Raviart P. A.*, Finite Element Methods for Navier–Stokes Equations, Springer, Berlin (1986).
17. *Gudovich I. S., Krein S. G., and Kulikov I. M.*, “Boundary value problems for the Maxwell equations [in Russian],” Dokl. Akad. Nauk, 1972. **207**, No. 2, 321–324.
18. *Aubin J. P.*, Approximate Solution of Elliptic Boundary Value Problems, Kansas, MO (1977).

Submitted September 27, 2023
Revised October 25, 2023
Accepted November 30, 2023

Mikhail V. Urev
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics,
6 Lavrentiev Avenue, Novosibirsk 630090, Russia
urev@nmsf.sscc.ru

Kholmatzhon Kh. Imomnazarov
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics,
6 Lavrentiev Avenue, Novosibirsk 630090, Russia
imom@omzg.sscc.ru

Ilkhom K. Iskandarov
Pacific State University,
136 Tikhookeanskaya Street, Khabarovsk 680035, Russia
iskandarovilkham@mail.ru

Sarvar B. Kuyliev
Samarkand State University,
15 Universitetskii Boulevard, Samarkand 140104, Uzbekistan
sarvarqb@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2023. Том 30, № 4

УДК 539.3

ЗАДАЧА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ РЕЛЕЯ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ СРЕДЫ КОССЕРА В СЛУЧАЕ ОДНОРОДНЫХ И УПРУГО–СТЕСНЕННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Ю. М. Григорьев, А. А. Гаврильева

Аннотация. Исследуется задача о распространении поверхностной волны Рэлея в бесконечном полупространстве в рамках микрополярной теории упругости. Предполагается, что деформированное состояние среды описывается независимыми векторами перемещения и вращения (среда Коссера). Получено общее решение, описывающей распространение поверхностной волны Рэлея. Методом построения мажорант показано, что не существует поверхностных волн Релэя в полупространстве упругой среды Коссера, когда на поверхности заданы однородные граничные условия, соответствующие основным задачам классической теории упругости: «жесткая заделка», «скользящая заделка», «жесткая сетка». Для случаев граничных условий, соответствующих задачам классической теории упругости: «свободная поверхность», «упругого стеснения», методом построения мажорант показано, что существует поверхностная волна Рэлея, когда моментные напряжения равны нулю на поверхности, при этом фазовая скорость волны стремится к конечному пределу при больших частотах волны; когда вектор вращения равен нулю на поверхности найдены достаточные условия на параметры среды Коссера существования поверхностных волн Релэя, при этом фазовая скорость волны стремится к конечному пределу при больших частотах волны. Качественный анализ полученных дисперсионных соотношений показал, что поверхностная волна Рэлея обладает дисперсией, упругое стеснение приводит к отсутствию поверхностной волны при малых частотах. В случае микрополярной среды из полиуретановой пены построены численные значения параметров волны и деформации среды. Затухание вектора перемещений с глубиной в микрополярной теории упругости более медленное, чем затухание в классической теории упругости. Значительное отличие в значениях вектора перемещения в классической и микрополярной среде наблюдается по направлению упругого стеснения.

DOI: 10.25587/2411-9326-2023-4-81-104

Ключевые слова: микрополярная теория упругости, среда Коссера, поверхностная волна Рэлея, дисперсионное соотношение, свободная поверхность, жесткая заделка, скользящий контакт, жесткая сетка, упруго-стесненная граница.

Введение

В 1885 г. Рэлей теоретически обосновал существование плоских волн, распространяющихся вдоль свободной поверхности однородного несжимаемого изотропного линейно-упругого полупространства и экспоненциально затухающих

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-20079).

с глубиной [1], которые сейчас называются волнами Рэлея. При этом волны Рэлея не испытывают дисперсию, скорость волн определяется из трансцендентного дисперсионного уравнения Рэлея, а частицы свободной поверхности движутся по эллипсам. Детальное исследование уравнения Рэлея проведено в [2] и показано, что только одно решение уравнения Рэлея имеет физический смысл. В случае неоднородной среды в монографии [3] детально описаны эффекты гравитации, искривления поверхности.

Экспериментальное и теоретическое изучение поверхностных волн имеет неослабевающее практическое значение. Дело в том, что вскоре после работы Рэлея были обнаружены поверхностные волны, генерированные землетрясениями. Выявлено, что поверхностные сейсмические волны имеют дисперсию и являются основной причиной разрушительных явлений, так как они являются основными переносчиками энергии при землетрясениях [4]. Высокочастотные рэлеевские и другие типы поверхностных волн находят широкое применение в методах неразрушающего контроля при обследовании поверхностного слоя материалов, в акустоэлектронике и для других технических целей [5]. Более того, практическую значимость имеет изучение закономерностей распространения поверхностных волн в тонкостенных элементах конструкций — пластинах и оболочках. На сегодняшний день с целью теоретического объяснения наблюдаемых на практике свойств поверхностных волн исследуются усложненные модели деформируемых сред. В [6] использован формализм Стро при исследовании микрополярных волн Рэлея. В [7, 8] применяется шестимерный подход, отличный от формализма Стро, позволяющий эффективно решать проблемы поверхностных волн в анизотропных средах. Огромное количество работ публикуется по поверхностным волнам типа Рэлея для деформируемых сред с сопряжениями различных физических полей.

В данной работе мы изучаем поверхностные волны в рамках линейной микрополярной теории упругости. Эта модель деформируемого тела представляет собой один из вариантов модели обобщенной среды, когда элемент среды обладает шестью степенями свободы и его кинематика описывается независимыми векторами перемещения и вращения (среда Коссера). В отличие от классической модели деформируемого тела учет вектора вращения позволяет описать поведение материала со сложной внутренней структурой. Идея модели среды с вращательным взаимодействием ее частиц восходит к трудам Фойхта [9] 1887 г. Первая попытка полного построения теорий упругости с несимметричным тензором напряжений и моментных напряжений была изложена в работе Эжена и Франсуа Коссера в 1909 г. [10]. Далее активное развитие микрополярной теории упругости относится уже к 60-м годам XX века. Оно связано с именами В. Гюнтера, К. А. Трусделла, Дж. Л. Эриксена, Р. А. Тупина, Р. Д. Миндлина, Г. Ф. Тирстена, В. Т. Койтера, А. К. Эрингена, А. Е. Грина, В. Новацкого, Е. В. Кувшинского, Э. Л. Аэро, В. А. Пальмова, Г. Н. Савина [11–16] и многих других.

В обзоре [17] детально разобраны достоинства и недостатки различных обозначений упругих постоянных, применяемые в линейной микрополярной упругости. Отмечено, что неудачные обозначения, используемые Эрингеном [13] и др., приводят к некоторым ошибочным результатам. Учитывая выводы этой работы, мы применяем подход и обозначения В. Новацкого [15]. В этой теории волны Рэлея впервые рассмотрены в [14]. В [18] исследованы микрополярные термоупругие поверхностные волны и, как частный случай, сделаны выводы по микрополярным волнам Рэлея. Отмечается, что результаты статьи [14] по волнам Рэлея являются приближенными и справедливы только для определенного частного случая микрополярной среды. В [19] проведено более полное исследование плоских волн Рэлея, отмечено наличие дисперсии и показан экстремальный характер частотной зависимости минимального по абсолютной величине коэффициента затухания амплитуды. В [20] показано, что поверхностная волна рэлеевского типа может распространяться на микрополярной цилиндрической поверхности, если смещения частиц являются чисто азимутальными и что благодаря микрополярному эффекту скорость волны Рэлея увеличивается. В этой работе отсутствуют ссылки на предыдущие исследования по микрополярным волнам Рэлея. В цикле работ М. А. Кулеша (см. [21, 22] и др.) использованы два подхода для изучения микрополярных волн Рэлея, в том числе рассматривались решения в форме волновых пакетов, определяемых спектром Фурье произвольной формы.

Не менее практическую и теоретическую значимость имеют исследования распространения поверхностных волн в случае несвободной от напряжений поверхности. Такие задачи актуальны с точки зрения разработки сейсмических барьеров для защиты сооружений от поверхностных волн [23, 24]. Вместе с тем в работе [25] показана возможность защиты чувствительных к разрушительным волнам Рэлея конструкций. Механизм защиты заключается в том, что разрушительные волны Рэлея перенаправляются микрополярным материалом, накрывающим конструкцию, не достигая защищаемую конструкцию. В настоящее время в случае классической теории упругости показано, что могут возникать трехмерные поверхностные волны в полупространстве в случае смешанных граничных условий на поверхности [26].

В данной работе сначала методом построения мажорант будет показано, что не существует поверхностных волн Релэя в полупространстве упругой среды Коссера, когда на поверхности заданы однородные граничные условия, соответствующие основным задачам классической теории упругости: «жесткая заделка», «скользящая заделка», «жесткая сетка». Затем для случаев однородных граничных условий, соответствующих задачам классической теории упругости: «свободная поверхность», «упругого стеснения», методом построения мажорант будет показано существование поверхностных волн Релэя, будут найдены достаточные условия на параметры среды существования конечного предела фазовой скорости распространения волны при больших частотах колебания волны и сам предел. В завершение в случае среды из полиуретановой пены будут построены численные значения параметров волны и деформации среды с целью выявления количественного отличия решений, построенных в классической теории упругости и в микрополярной теории упругости при однородных и «упруго-стесненных» граничных условиях.

1. Постановка задач

Рассматривается упругая изотропная среда Коссера $D(\rho,\mu,\lambda,\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,j)$, упруго-динамическое состояние которой, соответствующее массовой силе $\boldsymbol{X}$ и массовому моменту $\boldsymbol{Y}$, описывается четверткой $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega},\widetilde{\sigma},\widetilde{\mu})$ [15]:

$$\begin{gathered}\nabla\cdot\widetilde{\sigma}+\boldsymbol{X}=\rho\ddot{\boldsymbol{u}},\quad \widetilde{\sigma}^T:\widetilde{\boldsymbol{E}}+\nabla\cdot\widetilde{\mu}+\boldsymbol{Y}=j\ddot{\boldsymbol{\omega}};\\ \widetilde{\gamma}=\nabla\boldsymbol{u}-\widetilde{\boldsymbol{E}}\cdot\boldsymbol{\omega},\quad \widetilde{\chi}=\nabla\boldsymbol{\omega};\\ \widetilde{\sigma}=2\mu\widetilde{\gamma}^{(S)}+2\alpha\widetilde{\gamma}^{(A)}+\lambda I_1(\widetilde{\gamma})\widetilde{e},\quad \widetilde{\mu}=2\gamma\widetilde{\chi}^{(S)}+2\varepsilon\widetilde{\chi}^{(A)}+\beta I_1(\widetilde{\chi})\widetilde{e}.\end{gathered}\tag{1.1}$$

Исключая $\widetilde{\sigma}$ и $\widetilde{\mu}$ в (1.1), получим уравнение динамики в перемещениях $\boldsymbol{u}$ и вектор вращения $\boldsymbol{\omega}$:

$$\begin{gathered}(2\mu+\lambda)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}-(\mu+\alpha)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u}+2\alpha\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{X}=\rho\ddot{\boldsymbol{u}},\\ (2\gamma+\beta)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{\omega}-(\gamma+\varepsilon)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}+2\alpha\operatorname{rot}\mathbf{u}-4\alpha\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{Y}=j\ddot{\boldsymbol{\omega}},\end{gathered}\tag{1.2}$$

где $\widetilde{\gamma}$, $\widetilde{\chi}$ — тензоры деформаций и изгиба-кручения; $\widetilde{\sigma}$, $\widetilde{\mu}$ — тензоры напряжений и моментных напряжений; μ, λ — постоянные Ламе; α, β, γ, ε — физические постоянные материала в рамках упругой среды Коссера; ρ — плотность; j – плотность момента инерции (мера инерции среды при вращении); $\widetilde{\boldsymbol{E}}$ — тензор Леви-Чевиты третьего ранга; $(\cdot)^{(S)}$ — операция симметрирования; $(\cdot)^{(A)}$ — операция альтернирования; $\nabla(\cdot)$ — набла-оператор; $I_1(\cdot)$ — первый инвариант тензора; $\widetilde{e}$ — единичный тензор.

Упругая изотропная среда заполняет полупространство, массовые силы и моменты отсутствуют. Оси декартовых координат x и y направлены по поверхности, а ось z — вглубь полупространства.

Поверхностная волна Релэя ищется в виде

$$\begin{gathered}\boldsymbol{u}(x,y,t)=(U_x(z),0,U_z(z))\exp(i(kx-ft)),\\ \boldsymbol{\omega}(x,y,t)=(0,W_y(z),0)\exp(i(kx-ft)),\end{gathered}\tag{1.3}$$

где $i=\sqrt{-1}$ — мнимая единица; k — вещественное волновое число; f — вещественная круговая частота; $U_x(z)$, $U_z(z)$, $W_y(z)$ — амплитудные функции, зависящие от глубины. Физический смысл имеют вещественные части рассматриваемых комплекснозначных решений.

Далее исследуются 16 краевых задач распространения поверхностных волн Рэлея в упругом полупространстве Коссера в случае однородных граничных условий основных задач микрополярной теории упругости на поверхности, сформулированных В. Д. Купрадзе [27], и 8 краевых задач — в случае граничных условий «упруго-стесненной» поверхности [33].

1.1. Построение общего решения. Все величины приведем к безразмерному виду с использованием характерного размера X_0 и характерной частоты f_0:

$$A = X_0\sqrt{\frac{\mu}{B(\gamma+\varepsilon)}}, \quad B = \frac{\alpha+\mu}{\alpha};$$
$$C_1^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho X_0^2 f_0^2}, \quad C_2^2 = \frac{\mu}{\rho X_0^2 f_0^2}, \quad C_3^2 = \frac{\alpha+\mu}{\rho X_0^2 f_0^2}, \quad C_4^2 = \frac{\gamma+\varepsilon}{j X_0^2 f_0^2}. \tag{1.4}$$

Здесь первые две величины, как и две последние, обусловлены наличием новых материальных констант среды Коссера.

Подставляя безразмерное точное решение (1.3) в безразмерное уравнение динамики (1.2), получим систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами второго порядка для амплитудных функций U_x, U_z, W_y:

$$\begin{gathered}
\frac{d^2U_x}{dz^2} + \left(\frac{f^2}{C_3^2} - k^2\frac{C_1^2}{C_3^2}\right)U_x + ik\frac{C_1^2 - C_3^2}{C_3^2}\frac{dU_z}{dz} - \frac{2}{B}\frac{dW_y}{dz} = 0,\\
\frac{d^2U_z}{dz^2} + \left(\frac{f^2}{C_1^2} - k^2\frac{C_3^2}{C_1^2}\right)U_z + ik\frac{C_1^2 - C_3^2}{C_1^2}\frac{dU_x}{dz} + \frac{2ikC_3^2}{BC_1^2}W_y = 0,\\
\frac{d^2W_y}{dz^2} + \left(\frac{f^2}{C_4^2} - k^2 - \frac{4A^2B}{B-1}\right)W_y + \frac{2A^2B}{B-1}\frac{dU_x}{dz} - \frac{2ikA^2B}{B-1}U_z = 0.
\end{gathered} \tag{1.5}$$

Построим общее решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами второго порядка (1.5). Применив замену искомых функций в виде

$$U_x(z) = ikF(z) - \frac{dY(z)}{dz}, \quad U_z(z) = \frac{dF(z)}{dz} + ikY(z), \quad W_y(z) = \Omega(z), \tag{1.6}$$

получим равносильную систему уравнений третьего порядка (1.7)–(1.9):

$$\frac{d^2\Omega}{dz^2} + \left(\frac{f^2}{C_4^2} - k^2 - \frac{4A^2B}{B-1}\right)\Omega + 2\frac{4A^2B}{B-1}\left(-\frac{d^2Y}{dz^2} + k^2Y\right) = 0, \tag{1.7}$$

$$ik\frac{C_1^2}{C_3^2}\left(\frac{d^2F}{dz^2} + \left(\frac{f^2}{C_1^2} - k^2\right)F\right) - \frac{d}{dz}\left(\frac{d^2Y}{dz^2} + \left(\frac{f^2}{C_3^2} - k^2\right)Y\right) = 2\frac{C_3^2 - C_2^2}{C_3^2}\frac{d\Omega}{dz}, \tag{1.8}$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{d^2F}{dz^2} + \left(\frac{f^2}{C_1^2} - k^2\right)F\right) + ik\frac{C_3^2}{C_1^2}\left(\frac{d^2Y}{dz^2} + \left(\frac{f^2}{C_3^2} - k^2\right)Y\right) = -2ik\frac{C_3^2 - C_2^2}{C_1^2}\Omega. \tag{1.9}$$

Заметим, что сложение продифференцированного по z уравнения (1.9) и умноженного на $ik\frac{C_1^2}{C_3^2}$ уравнения (1.8) приводит к одному уравнению только на искомую функцию $F(z)$:

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{d^2F}{dz^2} + \left(\frac{f^2}{C_1^2} - k^2\right)F\right) - k^2\left(\frac{d^2F}{dz^2} + \left(\frac{f^2}{C_1^2} - k^2\right)\right)F = 0,$$

общее решение которого

$$F(z) = \frac{C_1^2}{f^2}F_0'e^{kz} + \frac{C_1^2}{f^2}F_0e^{-kz} + D_0'e^{\nu_0 z} + D_0e^{-\nu_0 z}, \quad \nu_0 \equiv \sqrt{k^2 - f^2/C_1^2}, \tag{1.10}$$

где F_0, F_0', D_0, D_0' — произвольные постоянные.

Далее, умножаем уравнение (1.8) на $\frac{C_3^2}{C_1^2}$ и дифференцируем по z, умножаем на i уравнение (1.9). Полученные уравнения подставляем в умноженное на $2\frac{C_3^2-C_2^2}{C_1^2}$ уравнение (1.7), получим уравнение на искомую функцию $Y(z)$:

$$\frac{C_1^2}{C_3^2}\left(\frac{f^2}{C_4^2}-\frac{4A^2B}{B-1}\right)(iF_0e^{-kz}-iF_0'e^{kz})+\frac{d^4Y}{dz^4}+\left(\frac{f^2}{C_3^2}+\frac{f^2}{C_4^2}-2k^2-4A^2\right)\frac{d^2Y}{dz^2}$$
$$+\left(\left(\frac{f^2}{C_4^2}-k^2\right)\left(\frac{f^2}{C_3^2}-k^2\right)-4A^2\left(\frac{f^2}{C_2^2}-k^2\right)\right)Y=0.$$

Общее решение последнего уравнения

$$Y(z)=D_1e^{-\nu_1 z}+D_2e^{-\nu_2 z}+D_1'e^{\nu_1 z}+D_2'e^{\nu_2 z}-iC_1^2F_0e^{-kz}/f^2+iC_1^2F_0'e^{kz}/f^2, \quad (1.11)$$

где D_1, D_2, D_1', D_2' — произвольные постоянные, $\nu_1\equiv\sqrt{k^2-a_1}$, $\nu_2\equiv\sqrt{k^2-a_2}$,

$$a_{1,2}\equiv\frac{f^2}{2C_3^2}+\frac{f^2}{2C_4^2}-2\frac{C_2^2}{C_3^2}A^2\pm\sqrt{\left(2A^2\frac{C_2^2}{C_3^2}-\frac{C_3^2-C_4^2}{2C_3^2C_4^2}f^2\right)^2+4A^2f^2\frac{C_3^2-C_2^2}{C_3^4}}.$$

Наконец, подставляя $F(z)$ (1.10), $Y(z)$ (1.11) в (1.6) и в (1.9), получим решение, соответствующее затухающей поверхностной волне Релэя (1.3) исходной системы (1.5):

$$\begin{aligned}U_x(z)&=ikD_0e^{-\nu_0 z}+D_1\nu_1e^{-\nu_1 z}+D_2\nu_2e^{-\nu_2 z},\\ U_z(z)&=-\nu_0D_0e^{-\nu_0 z}+ikD_1e^{-\nu_1 z}+ikD_2e^{-\nu_2 z},\\ W_y(z)&=(B/2)\big(D_1\big(k^2-\nu_1^2-f^2/C_3^2\big)e^{-\nu_1 z}+D_2\big(k^2-\nu_2^2-f^2/C_3^2\big)e^{-\nu_2 z}\big),\end{aligned} \quad (1.12)$$

где D_0, D_1, D_2 — произвольные постоянные; ν_0, ν_1, ν_2 — положительные вещественные собственные значения, определяемые выражениями

$$\nu_0=\sqrt{k^2-f^2/C_1^2}>0,\quad \nu_1=\sqrt{k^2-a_1}>0,\quad \nu_2=\sqrt{k^2-a_2}>0, \quad (1.13)$$

в которых

$$a_{1,2}=\frac{f^2}{2C_3^2}+\frac{f^2}{2C_4^2}-2A^2\pm\sqrt{\left(2A^2-\frac{C_3^2-C_4^2}{2C_3^2C_4^2}f^2\right)^2+4A^2f^2\frac{C_3^2-C_2^2}{C_3^2C_2^2}}.$$

Отметим, что согласно (1.13) фазовая скорость $C_{0,1,2}(f)\le\min(C_1,C_3,C_4)$ при $f\to\infty$.

Принимая во внимание, что $\alpha>0$ [27], нетрудно показать, что верны следующие оценки.

Оценка 1. $0<\nu_0<k$.

Оценка 2. $0<\nu_1<k$.

Оценка 3. $0<\nu_1<\nu_2$.

Оценка 4. $\nu_2^2>k^2-f^2/C_3^2$.

Оценка 5. $\nu_1^2<k^2-f^2/C_3^2$.

Выпишем размерное затухающее решение для вектора перемещения и поворота:

$$\boldsymbol{u} = X_0(U_x, 0, U_z)e^{i(kx-ft)}, \quad \boldsymbol{\omega} = (0, W_y, 0)e^{i(kx-ft)},$$

где U_x, U_z и W_y из (1.12), f, k, t, x, z — безразмерные величины. Согласно геометрическому соотношению и физическому уравнению (1.1) выпишем размерное решение для тензора напряжений и моментных напряжений

$$\widetilde{\sigma} = \mu \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} e^{i(kx-ft)}, \quad \widetilde{\mu} = \frac{\gamma+\varepsilon}{X_0} \begin{pmatrix} 0 & \mu_{xy} & 0 \\ \mu_{yx} & 0 & \mu_{yz} \\ 0 & \mu_{zy} & 0 \end{pmatrix} e^{i(kx-ft)}, \tag{1.15}$$

где безразмерные амплитудные компоненты тензора напряжений

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \Big(\frac{f^2}{C_2^2} - \frac{2f^2}{C_1^2} - 2k^2\Big)D_0e^{-\nu_0 z} + 2ik\nu_1D_1e^{-\nu_1 z} + 2ik\nu_2D_2e^{-\nu_2 z},\\
\sigma_{xz} &= -2\nu_0ikD_0e^{-\nu_0 z} - \left(2\nu_1^2 + \frac{f^2}{C_2^2}\right)D_1e^{-\nu_1 z} - \left(2\nu_2^2 + \frac{f^2}{C_2^2}\right)D_2e^{-\nu_2 z},\\
\sigma_{yy} &= -\left(\frac{f^2}{C_2^2} - \frac{2f^2}{C_1^2}\right)D_0e^{-\nu_0 z},\\
\sigma_{zx} &= -2\nu_0ikD_0e^{-\nu_0 z} - \left(2k^2 - \frac{f^2}{C_2^2}\right)D_1e^{-\nu_1 z} - \left(2k^2 - \frac{f^2}{C_2^2}\right)D_2e^{-\nu_2 z},\\
\sigma_{zz} &= \big(2k^2 - f^2/C_2^2\big)D_0e^{-\nu_0 z} - 2\nu_1ikD_1e^{-\nu_1 z} - 2\nu_2ikD_2e^{-\nu_2 z}
\end{aligned} \tag{1.16}$$

и безразмерные амплитудные компоненты тензора моментных напряжений

$$\begin{aligned}
\mu_{xy} &= ik\frac{B}{2}\left(\left(-\nu_1^2 - \frac{f^2}{C_3^2} + k^2\right)D_1e^{-\nu_1 z} + \left(-\nu_2^2 - \frac{f^2}{C_3^2} + k^2\right)D_2e^{-\nu_2 z}\right),\\
\mu_{yx} &= \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}ik\frac{B}{2}\left(\left(-\nu_1^2 - \frac{f^2}{C_3^2} + k^2\right)D_1e^{-\nu_1 z} + \left(-\nu_2^2 - \frac{f^2}{C_3^2} + k^2\right)D_2e^{-\nu_2 z}\right),\\
\mu_{yz} &= \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{B}{2}\left(-\nu_1\left(k^2 - \nu_1^2 - \frac{f^2}{C_3^2}\right)D_1e^{-\nu_1 z} - \nu_2\left(k^2 - \nu_2^2 - \frac{f^2}{C_3^2}\right)D_2e^{-\nu_2 z}\right),\\
\mu_{zy} &= \frac{B}{2}\left(-\nu_1\left(k^2 - \nu_1^2 - \frac{f^2}{C_3^2}\right)D_1e^{-\nu_1 z} - \nu_2\left(k^2 - \nu_2^2 - \frac{f^2}{C_3^2}\right)D_2e^{-\nu_2 z}\right).
\end{aligned} \tag{1.17}$$

2. Основные однородные краевые задачи

Рассмотрим шестнадцать однородных основных краевых задач динамики микрополярной теории упругости [27], соответствующих основным задачам классической теории упругости с однородными граничными условиями: «жесткая заделка», «скользящая заделка», «жесткая сетка», «свободная поверхность».

2.1. Случай «жесткой заделки» на поверхности. Исследуем краевые задачи: первые три условия соответствуют первой основной задаче в классической теории упругости — «жесткая заделка», последние три условия возникают в микрополярной теории упругости,

$$\begin{gathered} u_x = 0,\ u_y \equiv 0,\ u_z = 0,\ \omega_x \equiv 0,\ \omega_y = 0,\ \omega_z \equiv 0, \\ u_x = 0,\ u_y \equiv 0,\ u_z = 0,\ \omega_x \equiv 0,\ \omega_y = 0,\ \mu_{zz} \equiv 0; \end{gathered} \tag{2.1}$$

$$\begin{gathered} u_x = 0,\ u_y \equiv 0,\ u_z = 0,\ \mu_{zx} \equiv 0,\ \mu_{zy} = 0,\ \mu_{zz} \equiv 0, \\ u_x = 0,\ u_y \equiv 0,\ u_z = 0,\ \mu_{zx} \equiv 0,\ \mu_{zy} = 0,\ \omega_z \equiv 0. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Рассмотрим граничные условия (2.1). Подставляя общее решение для вектора перемещения и вектора поворота (1.14) в граничные условия (2.1), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных D_k:

$$\begin{pmatrix} ik & \nu_1 & \nu_2 \\ -\nu_0 & ik & ik \\ 0 & a_1 - f^2/C_3^2 & a_2 - f^2/C_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = 0. \tag{2.3}$$

Условием существования нетривиального решения этой системы является равенство нулю ее определителя. Это приводит к следующему дисперсионному уравнению:

$$(\nu_2 - \nu_1)\big(\nu_0 f^2/C_3^2 - (k^2(\nu_0 - \nu_1 - \nu_2) + \nu_0\nu_1\nu_2)\big) = 0. \tag{2.4}$$

Рассмотрим дисперсионную функцию

$$d_1(f,k) \equiv (\nu_2 - \nu_1)\big(\nu_0 f^2/C_3^2 - (k^2(\nu_0 - \nu_1 - \nu_2) + \nu_0\nu_1\nu_2)\big). \tag{2.5}$$

1. Пусть $\nu_2 \geq k$. В силу оценки 2 верна цепочка неравенств $-(k^2(\nu_0 - \nu_1 - \nu_2) + \nu_0\nu_1\nu_2) > (\nu_2 - k)(k - \nu_1) \geq 0$, тогда согласно оценке 3 и $d_1(f,k) > 0$.

2. Пусть $\nu_2 < k$. Согласно оценке 4 и оценке 1

$$\nu_0 f^2/C_3^2 - \big(k^2(\nu_0 - \nu_1 - \nu_2) + \nu_0\nu_1\nu_2\big) > (\nu_1 + \nu_2)(k^2 - \nu_2\nu_0) > 0,$$

тогда согласно оценки 3 и $d_1(f,k) > 0$.

Следовательно, дисперсионное уравнение (2.4) имеет только тривиальное решение.

Аналогично рассмотрим дисперсионную функцию в случае граничных условий (2.2):

$$d_2(f,k) \equiv (\nu_2 - \nu_1)\big(k^2\big(f^2/C_3^2 - k^2 + \nu_2^2\big) + (k^2 - \nu_0\nu_2)\big(\nu_1^2 + \nu_1\nu_2\big)\big). \tag{2.6}$$

1. Пусть $\nu_2 < k$. В силу оценок 4, 1 и 3 видно, что $d_2(f,k) > 0$.

2. Пусть $\nu_2 \geq k$. В силу оценки 1 и оценки 2

$$-k^4 + k^2\nu_2^2 + (k^2 - \nu_0\nu_2)\big(\nu_1^2 + \nu_1\nu_2\big) > (\nu_2 - k)(k^2(\nu_2 + k) - k\nu_1(\nu_2 + \nu_1)) > 0,$$

поэтому согласно оценке 3 $d_2(f,k) > 0$.

Следовательно, дисперсионное уравнение для (2.6) имеет только тривиальное решение.

Таким образом, поверхностная волна Рэлея (1.3), (1.12) в случае граничных условиях «жесткая заделка» (2.1), (2.2) на поверхности не существует.

2.2. Случай «скользящей заделки» на поверхности. Исследуем краевые задачи: первые три условия соответствуют третьей основной задаче в классической теории упругости — «скользящая заделка» — и оставшиеся условия соответствуют граничным условиям микрополярной теории:

$$\begin{gathered}\sigma_{zx}=0, \sigma_{zy}\equiv 0, u_z=0, \omega_x\equiv 0, \omega_y=0, \omega_z\equiv 0,\\ \sigma_{zx}=0, \sigma_{zy}\equiv 0, u_z=0, \omega_x\equiv 0, \omega_y=0, \mu_{zz}\equiv 0;\end{gathered} \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered}\sigma_{zx}=0,\ \sigma_{zy}\equiv 0,\ u_z=0,\ \mu_{zx}\equiv 0,\ \mu_{zy}=0,\ \mu_{zz}\equiv 0,\\ \sigma_{zx}=0,\ \sigma_{zy}\equiv 0,\ u_z=0,\ \mu_{zx}\equiv 0,\ \mu_{zy}=0,\ \omega_z\equiv 0.\end{gathered} \tag{2.8}$$

Рассмотрим дисперсионную функцию в случае граничных условий (2.7):

$$d_5(f,k)\equiv f^2\nu_0\big(\nu_2^2-\nu_1^2\big)/C_2^2. \tag{2.9}$$

Согласно оценке 1 $\nu_0>0$ и оценке 3 $\nu_2>\nu_1$, тогда $d_5(f,k)>0$. Следовательно, дисперсионное уравнение для (2.9) имеет только тривиальное решение.

Дисперсионная функция в случае граничных условий (2.7) будет иметь вид

$$d_6(f,k)\equiv \nu_0(\nu_2-\nu_1)\big(f^2/C_3^2-k^2+\nu_1^2+\nu_1\nu_2+\nu_2^2\big)f^2/C_2^2. \tag{2.10}$$

Согласно оценке 1 $\nu_0>0$, оценке 3 $\nu_2>\nu_1$ и согласно оценке 5 $\nu_2^2>k^2-f^2/C_3^2$, откуда видно, что верна оценка снизу

$$d_6(f,k)\equiv f^2\nu_0(\nu_2-\nu_1)\big(f^2/C_3^2-k^2+\nu_1^2+\nu_1\nu_2+\nu_2^2\big)>0.$$

Аналогично дисперсионное уравнение для (2.10) имеет только тривиальное решение.

Следовательно, поверхностная волна Рэлея (1.3), (1.12) в случае граничных условий «скользящей заделки» (2.7), (2.8) не существует.

2.3. Случай поверхности, армированной жесткой сеткой. Исследуем краевые задачи: первые три граничных условия соответствуют четвертой основной задаче в классической теории упругости, в которой касательные перемещения на границе отсутствуют, а сетка при этом не сопротивляется изгибу; последние три граничные условия возникают в микрополярной теории упругости:

$$\begin{gathered}u_x=0,\ u_y\equiv 0,\ \sigma_{zz}=0,\ \omega_x\equiv 0,\ \omega_y=0,\ \omega_z\equiv 0\\ u_x=0,\ u_y\equiv 0,\ \sigma_{zz}=0,\ \omega_x\equiv 0,\ \omega_y=0,\ \mu_{zz}\equiv 0;\end{gathered} \tag{2.11}$$

$$\begin{gathered}u_x=0,\ u_y\equiv 0,\ \sigma_{zz}=0,\ \mu_{zx}\equiv 0,\ \mu_{zy}=0,\ \mu_{zz}\equiv 0,\\ u_x=0,\ u_y\equiv 0,\ \sigma_{zz}=0,\ \mu_{zx}\equiv 0,\ \mu_{zy}=0,\ \omega_z\equiv 0.\end{gathered} \tag{2.12}$$

Дисперсионная функция для граничных условий (2.11) будет иметь вид

$$d_7(f,k)\equiv -(\nu_2-\nu_1)\big(k^2-f^2/C_3^2+\nu_1\nu_2\big)f^2/C_2^2. \tag{2.13}$$

Из оценки 5 $k^2-f^2/C_2^3>\nu_1^2$, тогда и $k^2-f^2/C_2^3+\nu_1\nu_2>\nu_1^2+\nu_1\nu_2>0$ в силу $\nu_1>0$ и $\nu_2>0$, наконец, из оценки 3 следует, что $d_7(f,k)<0$.

Далее, дисперсионная функция в случае граничных условий (2.12) будет иметь вид

$$d_8(f,k) \equiv f^2\nu_1\nu_2\bigl(\nu_1^2-\nu_2^2\bigr). \tag{2.14}$$

Согласно оценке 2 $\nu_1>0$ и оценке 3 $\nu_2>\nu_1>0$, так что дисперсионная функция $d_8(f,k)<0$.

Итак, не существует поверхностной волны Рэлея (1.3), (1.12) в случае поверхности, армированной жесткой сеткой (2.11) и (2.12).

2.4. Случай свободной поверхности. Исследуем краевые задачи: первые три условия соответствуют второй основной задаче в классической теории упругости — «свободной поверхности», и вторые три граничных условия соответствуют микрополярной теории упругости:

$$\begin{gathered}\sigma_{zx}=0,\ \sigma_{zy}\equiv 0,\ \sigma_{zz}=0,\ \mu_{zx}\equiv 0,\ \mu_{zy}=0,\ \mu_{zz}\equiv 0,\\ \sigma_{zx}=0,\ \sigma_{zy}\equiv 0,\ \sigma_{zz}=0,\ \mu_{zx}\equiv 0,\ \mu_{zy}=0,\ \omega_z\equiv 0;\end{gathered} \tag{2.15}$$

$$\begin{gathered}\sigma_{zx}=0,\ \sigma_{zy}\equiv 0,\ \sigma_{zz}=0,\ \omega_x\equiv 0,\ \omega_y=0,\ \omega_z\equiv 0,\\ \sigma_{zx}=0,\ \sigma_{zy}\equiv 0,\ \sigma_{zz}=0,\ \omega_x\equiv 0,\ \omega_y=0,\ \mu_{zz}\equiv 0.\end{gathered} \tag{2.16}$$

Решение (1.3), (1.12), (1.15) удовлетворим граничным условиям (2.15), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных D_k:

$$\begin{pmatrix} 2ik\nu_0 & 2k^2-f^2/C_2^2 & 2k^2-f^2/C_2^2\\ 2k^2-f^2/C_2^2 & -2ik\nu_1 & -2ik\nu_2\\ 0 & \nu_1\bigl(a_1-f^2/C_3^2\bigr) & \nu_2\bigl(a_2-f^2/C_3^2\bigr)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D_0\\ D_1\\ D_2\end{pmatrix}=0. \tag{2.17}$$

Определитель этой системы формирует дисперсионную функцию в виде

$$\begin{aligned}d_3(f,k)\equiv{}&\nu_2\bigl(f^2/C_3^2+\nu_2^2-k^2\bigr)\Bigl(\bigl(f^2/C_2^2-2k^2\bigr)^2-4k^2\nu_0\nu_1\Bigr)\\ &-\nu_1\bigl(f^2/C_3^2+\nu_1^2-k^2\bigr)\Bigl(\bigl(f^2/C_2^2-2k^2\bigr)^2-4k^2\nu_0\nu_2\Bigr).\end{aligned} \tag{2.18}$$

Покажем, что дисперсионное уравнение для (2.18) имеет нетривиальное решение.

1. Рассмотрим асимптотику дисперсионной функции:

$$\begin{aligned}d_3(f,k)\sim{}&-4\frac{C_1^2\bigl(C_3^2-C_2^2\bigr)+C_3^2\bigl(C_1^2-C_2^2\bigr)}{C_1^2C_2^2C_3^2}f^2\\ &\times\sqrt{\left(2A^2-\frac{\bigl(C_3^2-C_4^2\bigr)f^2}{2C_3^2C_4^2}\right)^2+\frac{4A^2\bigl(C_3^2-C_2^2\bigr)f^2}{C_2^2C_3^2}}\,k^3,\quad k\to+\infty.\end{aligned}$$

Для изотропной упругой среды Коссера $3\lambda+2\mu>0$, $\mu>0$, $\alpha>0$ [27], тогда по определению (1.4) $C_3^2-C_2^2>0$ и $C_1^2-C_2^2>0$, следовательно, для $f>0$ $d_3(f,k)\to-\infty$ при $k\to+\infty$.

2. Пусть выполняется $\nu_0(f_0,k_0)=0$ и $\nu_1(f_0,k_0)\ge 0$, тогда согласно оценке 4 и оценке 5 дисперсионная функция неотрицательна:

$$\begin{aligned}d_3(f_0,k_0)={}&\nu_2\bigl(f_0^2/C_3^2+\nu_2^2-k_0^2\bigr)\bigl(f_0^2/C_2^2-2k_0^2\bigr)^2\\ &-\nu_1\bigl(f_0^2/C_3^2+\nu_1^2-k_0^2\bigr)\bigl(f_0^2/C_2^2-2k_0^2\bigr)^2\ge 0.\end{aligned}$$

3. Пусть теперь выполняется случай $\nu_1(f_1, k_1) = 0$ и $\nu_0(f_1, k_1) \geq 0$, тогда согласно оценке 4 дисперсионная функция неотрицательна:

$$d_3(f_1, k_1) = \nu_2\big(f_1^2/C_3^2 + \big(\nu_2^2 - k_1^2\big)\big)\big(f_1^2/C_2^2 - 2k_1^2\big)^2 \geq 0.$$

В силу непрерывности дисперсионной функции обязательно найдутся решения дисперсионного соотношения $d_3(f^*, k^*) = 0$.

Таким образом, в случае граничных условиях (2.15) на поверхности существует поверхностная волна Релэя (1.3), (1.12), где константы связаны соотношениями

$$\begin{aligned} D_1 &= ik^* \frac{2\nu_0\nu_2\big(a_2 - f^{*2}/C_3^2\big)}{\big(2k^{*2} - f^{*2}/C_2^2\big)\big(\nu_1\big(a_1 - f^{*2}/C_3^2\big) - \nu_2\big(a_2 - f^{*2}/C_3^2\big)\big)} D_0, \\ D_2 &= -ik^* \frac{2\nu_0\nu_1\big(a_1 - f^{*2}/C_3^2\big)}{\big(2k^{*2} - f^{*2}/C_2^2\big)\big(\nu_1(a_1 - f^{*2}/C_3^2\big) - \nu_2\big(a_2 - f^{*2}/C_3^2\big)\big)} D_0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

При этом фазовая скорость распространения $C_R(f) = f/k(f)$ поверхностной волны Релэя стремится к конечному пределу при $f \to \infty$.

Действительно, асимптотика дисперсионной функции (2.18) имеет вид

$$\begin{aligned} d_3(C_R, k) \sim \operatorname{sign}(C_4^2 - C_3^2)\sqrt{1 - \frac{C_R^2}{C_4^2}}\left(\frac{C_R^2}{C_3^2} - \frac{C_R^2}{C_4^2}\right) \\ \times 4\left[\left(1 - \frac{C_R^2}{2C_2^2}\right)^2 - \sqrt{1 - \frac{C_R^2}{C_1^2}}\sqrt{1 - \frac{C_R^2}{C_3^2}}\right]k^7, \quad f \to \infty. \end{aligned}$$

Видно, что корнями асимптотики являются $C_R^a = C_4$, $C_R^a = 0$ и корни полинома третьего порядка $R\big(C_R^2\big)$:

$$R(C_R^2) \equiv \left(\frac{1}{C_1^2} + \frac{1}{C_3^2} - \frac{2}{C_2^2}\right) + \left(\frac{3}{2C_2^4} - \frac{1}{C_1^2C_3^2}\right)C_R^2 - \frac{1}{2C_2^6}C_R^4 + \frac{1}{16C_2^8}C_R^6, \tag{2.20}$$

так как множитель в квадратных скобках однозначно преобразуется в

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{C_R^2}{2C_2^2}\right)^2 - \sqrt{1 - \frac{C_R^2}{C_1^2}}\sqrt{1 - \frac{C_R^2}{C_3^2}} \\ &\qquad = C_R^2 \frac{\big(\frac{1}{C_1^2} + \frac{1}{C_3^2} - \frac{2}{C_2^2}\big) + \big(\frac{3}{2C_2^4} - \frac{1}{C_1^2C_3^2}\big)C_R^2 - \frac{C_R^4}{2C_2^6} + \frac{C_R^6}{16C_2^8}}{\big(1 - \frac{C_R^2}{2C_2^2}\big)^4 + \sqrt{1 - \frac{C_R^2}{C_1^2}}\sqrt{1 - \frac{C_R^2}{C_3^2}}}. \end{aligned}$$

Полином $R(C_R^2)$ обладает следующими свойствами:

$$R(0) = \frac{1}{C_1^2} + \frac{1}{C_3^2} - \frac{2}{C_2^2} < 0, \quad R(C_1^2) > 0, \ R(C_3^2) > 0.$$

Тогда минимальный корень C_R^p полинома удовлетворяет неравенству $0 < C_R^p < \min(C_1, C_3)$.

Асимптотическому корню $C_R = 0$ соответствует тривиальное решение (1.14). Таким образом, предел фазовой скорости при $f \to \infty$

$$C_R^a = \min(C_R^p, C_4) < \infty.$$

Граничные условия (2.16) формирует следующую дисперсионную функцию:

$$d_4(f,k) \equiv (\nu_2 - \nu_1)\big((\nu_1+\nu_2)\big(f^2/C_2^2 - 2k^2\big)^2 + 4k^2\nu_0\big(f^2/C_3^2 - (\nu_1\nu_2 + k^2)\big)\big). \quad (2.22)$$

Покажем, что дисперсионное уравнение для (2.22) имеет нетривиальное решение.

1. Для этого рассмотрим асимптотику дисперсионной функции (2.22):

$$d_4(f,k) \sim -4\frac{C_1^2\big(C_3^2 - C_2^2\big) + C_3^2\big(C_1^2 - C_2^2\big)}{C_1^2C_2^2C_3^2} \times f^2\sqrt{\left(2A^2 - \frac{\big(C_3^2 - C_4^2\big)f^2}{2C_3^2C_4^2}\right)^2 + \frac{4A^2\big(C_3^2 - C_2^2\big)f^2}{C_2^2C_3^2}}\,k^2, \quad k \to +\infty.$$

Согласно определению изотропной среды и (1.4) всегда $C_3^2 - C_2^2 > 0$ и $C_1^2 - C_2^2 > 0$, следовательно, $d_4(f,k) \to -\infty$ при $k \to +\infty$.

2. Пусть параметры среды таковы, что выполняется случай $\nu_0(f_0,k_0) = 0$, $\nu_1(f_0,k_0) \geq 0$, тогда

$$d_4(f_0,k_0) = C_3^2(\nu_1+\nu_2)\big(f_0^2 - 2C_2^2k_0^2\big)^2 \geq 0.$$

3. Пусть параметры среды таковы, что выполняется случай $\nu_1(f_1,k_1) = 0$, $\nu_0(f_1,k_1) \geq 0$, тогда

$$d_4(f_1,k_1(f_1)) \sim \frac{4A^2}{C_2^4}f_1^4 > 0, \quad f_1 \to 0.$$

Таким образом, в силу непрерывности обязательно найдутся решения дисперсионного соотношения $d_4(f^*,k^*) = 0$, где $f^* > 0$, $k^* > 0$. Компоненты вектора перемещения и поворота примут вид (1.3), (1.12) с константами

$$\begin{aligned} D_1 &= ik^*\frac{2\nu_0\big(a_2 - f^{*2}/C_3^2\big)}{\big(2k^{*2} - f^{*2}/C_2^2\big)(a_1 - a_2)}D_0,\\ D_2 &= -ik^*\frac{2\nu_0\big(a_1 - f^{*2}/C_3^2\big)}{\big(2k^{*2} - f^{*2}/C_2^2\big)(a_1 - a_2)}D_0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

При этом фазовая скорость распространения стремится к конечному пределу при $f \to \infty$, только если $C_4 \geq C_R^p$.

Действительно, асимптотика дисперсионной функции (2.22) выглядит следующим образом:

$$d_4(C_R,k) \sim \operatorname{sign}(C_4^2 - C_3^2)\left(\frac{C_R^2}{C_3^2} - \frac{C_R^2}{C_4^2}\right) \times 4\left[\left(1 - \frac{C_R^2}{2C_2^2}\right)^2 - \sqrt{1 - \frac{C_R^2}{C_1^2}}\sqrt{1 - \frac{C_R^2}{C_3^2}}\right]k^7, \quad f \to \infty,.$$

корни которой равны $C_R^a = 0$ и корням полинома третьего порядка. Аналогично исключаем $C_R^a = 0$ и существует асимптотический корень

$$C_R^a = \min\bigl(C_R^p, C_1, C_3\bigr), \quad C_4 \ge C_R^p, \tag{2.24}$$

но если $C_4 < C_R^p$, то $d_4(C_R, k) < 0$ при $f \to \infty$.

Таким образом, существует поверхностная волна Рэлея в случае граничных условий «свободной поверхности» (2.15), при этом фазовая скорость волны стремится к конечному пределу $C_R^a = \min\bigl(C_R^p, C_4\bigr)$ при $f \to \infty$. Существует поверхностная волна Рэлея в случае граничных условий «свободной поверхности» (2.16), при этом фазовая скорость волны стремится к конечному пределу $C_R^a = \min\bigl(C_R^p, C_1, C_3\bigr)$ при $f \to \infty$ в том и только в том случае, если $C_4 \ge C_R^p$.

3. Случай упруго-стесненной поверхности

Сформулируем граничные условия в случае упруго-стесненной поверхности в микрополярной теории упругости. В первом случае нормальное напряжение стесненно в направлении перпендикулярной к поверхности нормали, так что $\sigma_{zz} = \eta u_z$, где $\eta > 0$ — коэффициент упругости [33], а касательное равно нулю. Во втором случае нормальное напряжение равно нулю, а касательное напряжение $\sigma_{xz} = \theta u_x$, где $\theta > 0$ — коэффициент упругости [33], стесненно. И в третьем случае касательные перемещения на границе отсутствуют, а сетка упруго сопротивляется изгибу $\sigma_{zz} = \eta u_z$, где $\eta > 0$. В микрополярной теории в каждом случае добавляются четыре граничных условия.

В первом случае со стороны упругой заделки действует поперечная сила на поверхность:

$$\begin{gathered}\sigma_{zx} = 0,\ \sigma_{zy} \equiv 0,\ \sigma_{zz} - \eta u_z = 0,\ \mu_{zx} \equiv 0,\ \mu_{zy} = 0,\ \mu_{zz} \equiv 0,\\ \sigma_{zx} = 0,\ \sigma_{zy} \equiv 0,\ \sigma_{zz} - \eta u_z = 0,\ \mu_{zx} \equiv 0,\ \mu_{zy} = 0,\ \omega_z \equiv 0;\end{gathered} \tag{3.1}$$

$$\begin{gathered}\sigma_{zx} = 0,\ \sigma_{zy} \equiv 0,\ \sigma_{zz} - \eta u_z = 0,\ \omega_x \equiv 0,\ \omega_y = 0,\ \omega_z \equiv 0,\\ \sigma_{zx} = 0,\ \sigma_{zy} \equiv 0,\ \sigma_{zz} - \eta u_z = 0,\ \omega_x \equiv 0,\ \omega_y = 0,\ \mu_{zz} \equiv 0.\end{gathered} \tag{3.2}$$

Рассмотрим задачу с граничными условиями (3.1), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных D_k:

$$\begin{pmatrix} 2ik\nu_0 & 2k^2 - f^2/C_2^2 & 2k^2 - f^2/C_2^2 \\ 2k^2 - f^2/C_2^2 + \eta\nu_0 & -2\nu_1 ik - \eta ik & -2\nu_2 ik - \eta ik \\ 0 & \nu_1(a_1 - f^2/C_3^2) & \nu_2(a_2 - f^2/C_3^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = 0. \tag{3.3}$$

Определитель этой системы формирует дисперсионное уравнение в виде

$$\begin{aligned} d_9(f,k) \equiv{}& \nu_2\bigl(f^2/C_3^2 + \nu_2^2 - k^2\bigr)\Bigl(\bigl(f^2/C_2^2 - 2k^2\bigr)^2 - 4k^2\nu_0\nu_1 - \eta\nu_0 f^2/C_2^2\Bigr) \\ &- \nu_1\bigl(f^2/C_3^2 + \nu_1^2 - k^2\bigr)\Bigl(\bigl(f^2/C_2^2 - 2k^2\bigr)^2 - 4k^2\nu_0\nu_2 - \eta\nu_0 f^2/C_2^2\Bigr) = 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

В силу того, что вклад от упругой заделки (слагаемое с η) на порядок меньше по f и по k, чем вклад от «свободной поверхности» ($\eta = 0$), обязательно найдутся решения дисперсионного соотношения $d_9(f^*, k^*) = 0$ и фазовая скорость распространения поверхностной волны (3.1) стремится к конечному пределу при больших частотах колебаний волны.

Рассмотрим задачу с граничными условиями (3.2), формирующими дисперсионную функцию в виде

$$d_{10}(f,k) \equiv (\nu_2 - \nu_1)\big((\nu_1 + \nu_2)\big(\big(f^2/C_2^2 - 2k^2\big)^2 - \eta\nu_0 f^2/C_2^2\big) \\ + 4k^2\nu_0\big(f^2/C_3^2 - (\nu_1\nu_2 + k^2)\big)\big). \quad (3.5)$$

1. Асимптотика дисперсионной функции $d_{10}(f,k) \to -\infty$ при $k \to +\infty$, так как вклад от упругой заделки с $\eta \neq 0$ на три порядка меньше, чем в случае $\eta = 0$.

2. Пусть $\min\big(C_1^2, C_3^2, C_4^2\big) = C_1^2$, тогда $\nu_0 \sim 0$, $\nu_1 > 0$, $\nu_2 > 0$ и $d_{10} \sim \big(\nu_2^2 - \nu_1^2\big)\big(f^2/C_2^2 - 2k^2\big)^2 > 0$ при $f \to \infty$.

3. Пусть $\min\big(C_1^2, C_3^2, C_4^2\big) = C_3^2$, тогда $\nu_0 > 0$, $\nu_1^2 \sim k^2 - f^2/C_3^2$, $\nu_2 > 0$ и $d_{10} \sim \big(\nu_2^2 - \nu_1^2\big)\big(\big(f^2/C_2^2 - 2k^2\big)^2 - 4k^2\nu_0\nu_1\big) > 0$ при $f \to \infty$, если $\nu_1^2 \sim 0$, то $d_{10} > 0$.

4. Пусть $\min\big(C_1^2, C_3^2, C_4^2\big) = C_4^2$, тогда $\nu_0 > 0$, $\nu_1^2 \sim k^2 - f^2/C_4^2$, $\nu_2^2 \sim k^2 - f^2/C_3^2$ и $d_{10} \sim \big(\nu_2^2 - \nu_1^2\big)\big(\big(f^2/C_2^2 - 2k^2\big)^2 - 4k^2\nu_0\sqrt{k^2 - f^2/C_3^2}\big)$ при $f \to \infty$, если $C_4 \geq C_R^p$, то $d_{10} \geq 0$, но в случае $C_4 < C_R^p$ будет $d_{10} < 0$ при $f \to \infty$.

Таким образом, в силу непрерывности дисперсионной функции обязательно найдутся нетривиальные решения дисперсионного соотношения для (3.5) при выполнении условия $C_4 \geq C_R^p$. При этом фазовая скорость стремится к конечному пределу при больших частотах колебаний волны.

Во втором случае исследуем краевую задачу динамики с граничными условиями

$$\begin{gathered} \sigma_{zx} - \theta u_x = 0,\ \sigma_{zy} \equiv 0,\ \sigma_{zz} = 0,\ \mu_{zx} \equiv 0, \mu_{zy} = 0,\ \mu_{zz} \equiv 0, \\ \sigma_{zx} - \theta u_x = 0,\ \sigma_{zy} \equiv 0,\ \sigma_{zz} = 0,\ \mu_{zx} \equiv 0,\ \mu_{zy} = 0,\ \omega_z \equiv 0; \end{gathered} \quad (3.6)$$

$$\begin{gathered} \sigma_{zx} - \theta u_x = 0,\ \sigma_{zy} \equiv 0,\ \sigma_{zz} = 0,\ \omega_x \equiv 0,\ \omega_y = 0,\ \omega_z \equiv 0, \\ \sigma_{zx} - \theta u_x = 0,\ \sigma_{zy} \equiv 0,\ \sigma_{zz} = 0,\ \omega_x \equiv 0,\ \omega_y = 0,\ \mu_{zz} \equiv 0. \end{gathered} \quad (3.7)$$

Определитель в случае граничных условий (3.6) равен разности определителя в случае граничных условий (2.15) и определителя в случае граничных условий (2.12), умноженного на θ. Вследствие того, что последний на порядок ниже и положителен, краевая задача (1.1), (3.6) будет иметь нетривиальные решения и фазовая скорость распространения поверхностной волны (3.6) стремится к конечному пределу при больших частотах колебаний волны.

Аналогично определитель в случае граничных условий (3.7) равен разности определителя в случае граничных условий (2.16) и определителя в случае граничных условий (2.11), умноженного на θ. В силу того, что последний положителен и на порядок ниже, краевая задача (1.1), (3.7) будет иметь нетривиальные решения и фазовая скорость распространения поверхностной волны

(3.7) будет стремиться к конечному пределу при больших частотах колебаний волны при выполнении достаточных условий $C_4 \geq C_R^p$.

Наконец, исследуем задачу упругой заделки с граничными условиями

$$\begin{gathered} u_x = 0,\ u_y \equiv 0,\ \sigma_{zz} - \eta u_z = 0,\ \omega_x \equiv 0,\ \omega_y = 0,\ \omega_z \equiv 0, \\ u_x = 0,\ u_y \equiv 0,\ \sigma_{zz} - \eta u_z = 0,\ \omega_x \equiv 0,\ \omega_y = 0,\ \mu_{zz} \equiv 0; \end{gathered} \tag{3.8}$$

$$\begin{gathered} u_x = 0,\ u_y \equiv 0,\ \sigma_{zz} - \eta u_z = 0,\ \mu_{zx} \equiv 0,\ \mu_{zy} = 0,\ \mu_{zz} \equiv 0, \\ u_x = 0,\ u_y \equiv 0,\ \sigma_{zz} - \eta u_z = 0,\ \mu_{zx} \equiv 0,\ \mu_{zy} = 0,\ \omega_z \equiv 0. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Определитель в случае граничных условий (3.8) равен разности определителя в случае граничных условий (2.11) и определителя в случае граничных условий (2.1), умноженного на η. В силу знакопостоянства последнего дисперсионное уравнение в случае граничных условий (3.8) не имеет нетривиальных решений. Аналогично можно показать, что дисперсионное уравнение в случае граничных условий (3.9) не имеет нетривиальных решений.

Таким образом, в полупространстве среды Коссера в случаях упругого стеснения вида (3.1), (3.6) на поверхности существует поверхностная волна Рэлея, при этом фазовая скорость волны стремится к конечному пределу $C_R^a = \min(C_R^p, C_4)$ при $f \to \infty$. В случае упругого стеснения вида (3.2), (3.7) на поверхности будет существовать поверхностная волна Рэлея при выполнении достаточных условий $C_4 \geq C_R^p$ на физические параметры среды Коссера с асимптотическими свойствами фазовой скорости $C_R^a = \min\bigl(C_R^p, C_1, C_3\bigr)$ при $f \to \infty$. Наконец, в случае упругого стеснения вида (3.8), (3.9) на поверхности не существует поверхностной волны Рэлея.

4. Параметрический анализ решений

Цель параметрического анализа — выявление качественной и количественной взаимосвязей решений рассмотренных в этой работе краевых задач динамики. Параметрами анализа являются «упругий» параметр неоднородных граничных условий η или θ и физические параметры среды Коссера $(\alpha, \beta, \gamma, \epsilon)$.

4.1. Решения, связанные с упругим параметром η. В случае, когда нормальное напряжение стесненно в направлении перпендикулярной к поверхности нормали при $\eta \neq 0$ и $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon \to 0$, решение задачи для микрополярной среды со стеснением типа (3.1) сводится к решению задачи распространения волны с тем же типом стеснения в классической среде, рассмотренной М. В. Белубекяном в [33].

В микрополярной среде при $\eta \to 0$ и $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon \neq 0$ задача распространения волны с упругой заделкой (3.1) сводится к задаче со «свободной поверхностью» (2.15). В классической среде при $\eta \to 0$ и $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon = 0$ волна с тем же стеснением типа [33] сводится к классической волне Рэлея.

Для микрополярной среды при $\eta \to \infty$ и $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon \neq 0$ задача с упругой заделкой типа (3.1) сводится к задаче «скользящего контакта» (2.7). Для классической среды, как известно, также при $\eta \to \infty$ и $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon = 0$ задача с упругой заделкой рассматриваемого типа сводится к классической задаче «скользящего контакта» [33]. Следовательно, при $\eta \to \infty$ поверхностной волны не существует как для классической, так и для микрополярной среды.

Таким образом, сравниваются задачи упругого стеснения типа (2.15) и типа (3.1) микрополярной среды с соответствующими задачами для классической среды [33]. Из вида дисперсионных соотношений в случае микрополярной среды (2.18), (3.4) и в случае классической среды [33] следует, что скорость волны не зависит от частоты только для классической среды со «свободной поверхностью». В остальных рассматриваемых случаях волна обладает дисперсией. При этом дисперсия волны Релэя (2.18) для среды Коссера согласуется с экспериментальными исследованиями [32]. В случае упругой заделки возникает конечная нижняя граница для (f, k) и (C_R, k) в отличие от случая однородных граничных условий в связи с тем, что в «упругих» дисперсионных функциях (3.4) и [33] «упругий» вклад всегда отрицателен и более низкого порядка относительно «неупругого» вклада.

Для количественного анализа решений возьмем микрополярную среду с физическими постоянными полиуретановой пены с ячейками $r = 1.2\,\text{мм}$ [31]: $\rho = 30\,\text{кг}/\text{м}^3$, $\lambda = 1023\,\text{Н}/\text{м}^2$, $\mu = 45 \cdot 10^3\,\text{Н}/\text{м}^2$, $\alpha = 9093\,\text{Н}/\text{м}^2$, $\gamma + \varepsilon = 15\,\text{Н}$, плотность момента инерции оценим как $j \sim \rho r^2 = 4 \cdot 10^{-5}\,\text{кг}/\text{м}$. Характерные величины $X_0 = 1$, $f_0 = 1$. Сплошные линии соответствуют решениям в микрополярной среде, штриховые — для классической среды.

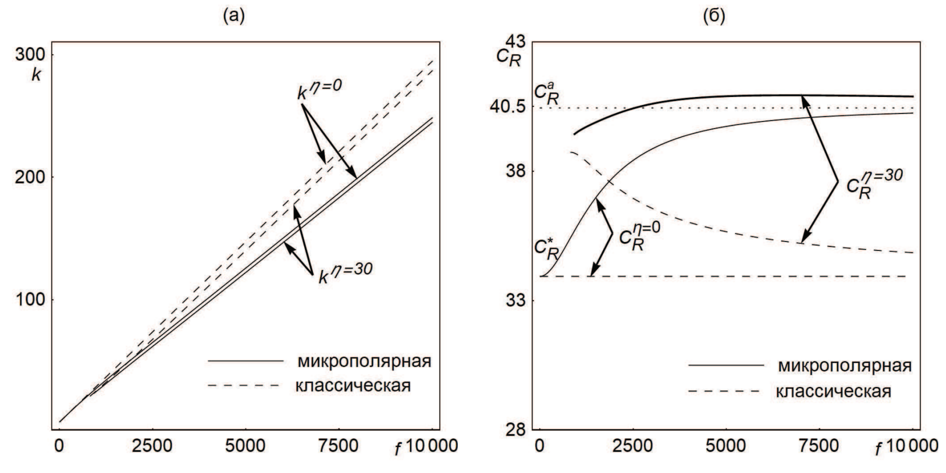

Рис. 1.

На рис. 1(а),(б) представлена зависимость безразмерного волнового числа волны и безразмерной фазовой скорости распространения поверхностной волны от безразмерной круговой частоты колебаний волны. Сравнительный анализ полученных численных решений подтверждают следующие качественные выводы: волновые числа классической и микрополярной сред различаются; скорость волны не зависит от частоты только для классической среды со «свободной» поверхностью; в случае «упругой заделки» возникает конечная нижняя граница для (f, k) и (C_R, k), т. е. для малых (f, k) и (C_R, k) не существует поверхностной волны; скорость волны в микрополярной среде в случае (2.15) при малых частотах исходит от скорости волны в классическом случае $C_R^* \approx 33.94$, в случае (3.1) исходит от нижнего предела скорости волны, а при больших частотах скорость волны в случае (2.15) и (3.1) стремится к одному конечному пределу $C_R^a \approx 40.5$. Зависимости параметров волны в микрополярной среде в случае (3.1) мало отличается от случая (2.15). Зависимости параметров волны в классической среде в случае [33] мало отличаются от классического случая волны Рэлея. А вот зависимости параметров волны в микрополярной среде и классической среде относительно большое.

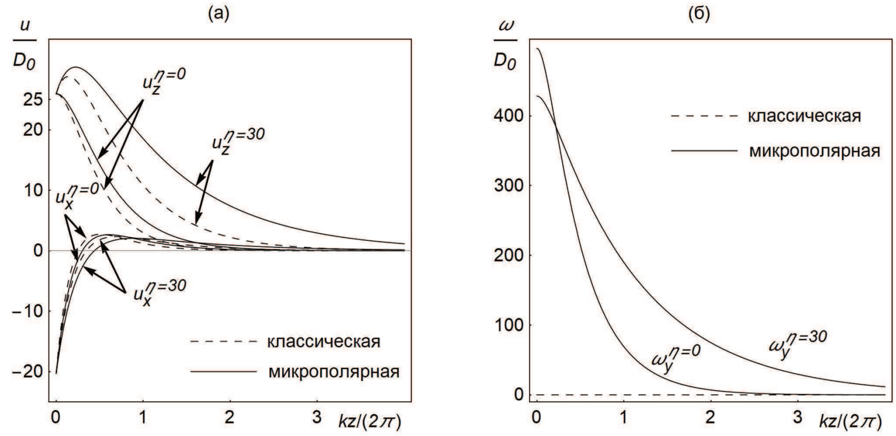

Рис. 2.

Зависимость безразмерных компонент вектора перемещений и вращения от относительной глубины показана на рис. 2(а),(б), глубина отнесена к длине волны ($f = 2000$) в случае граничных условий (3.1). Упругое стеснение по направлению z приводит в микрополярной теории упругости к значительному увеличению z-компоненты вектора перемещений, тогда как увеличение x-компоненты вектора перемещений незначительно по сравнению с классической теории упругости. Затухание вектора перемещений и вектора вращения с глубиной в микрополярной теории упругости более медленное, чем затухание в классической теории упругости.

4.2. Решения, связанные с упругим параметром θ. В случае, когда касательное напряжение стесненно при $\theta \neq 0$ и $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon \to 0$, решение задачи для микрополярной среды с таким стеснением (3.6) сводится к решению задачи с соответствующим стеснением, найденному М. В. Белубекяном в [33].

Опять-таки в микрополярной среде при $\theta \to 0$ и $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon \neq 0$ задача распространения волны с «упругой поверхностью» (3.6) сводится к задаче со «свободной поверхностью» (2.11). В классической среде при $\theta \to 0$ и $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon = 0$ волна с «упругой поверхностью» [33] сводится к классической волне Рэлея.

Для микрополярной среды при $\theta \to \infty$ и $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon \neq 0$ задача с «упругой поверхностью» (3.6) сводится к задаче «жесткой сетки» (2.11). Для классической среды, как известно, при $\theta \to \infty$ и $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon = 0$ граничные условия с «упругой поверхностью» (3.6) сводятся к условиям Навье [33]. Следовательно, при $\theta \to \infty$ поверхностной волны не существует как для классической, так и для микрополярной среды.

Таким образом, сравниваются решения задач с граничными условиями (2.15), (3.6) микрополярной среды и соответствующие решения задач для классической среды [33]. Скорость волны также не зависит от частоты только для классической среды со свободной поверхностью. Во всех задачах существует решение дисперсионных соотношений.

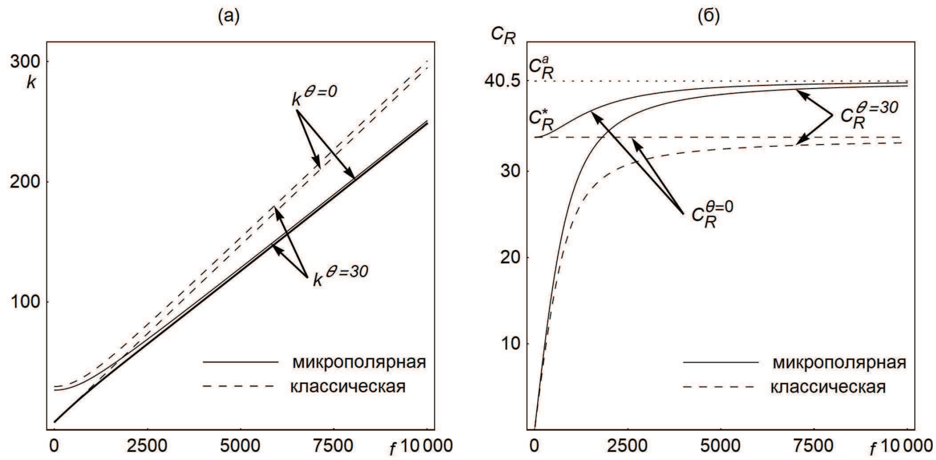

Рис. 3.

Для количественного анализа решений также возьмем микрополярную среду с физическими постоянными полиуретановой пены. На рис. 3(а),(б) представлена зависимость безразмерного волнового числа волны и безразмерной фазовой скорости распространения поверхностной волны от безразмерной круговой частоты колебаний волны. Сравнительный анализ полученных численных решений подтверждают следующие качественные выводы: волновые числа классической и микрополярной сред различаются; скорость волны не зависит от частоты только для классической среды со «свободной» поверхностью; во всех случаях существует поверхностная волна; скорость волны в микрополярной среде в случае (2.15) при малых частотах исходит от скорости волны в классическом случае $C_R^* \approx 33.94$, в случае (3.6) — от нулевой скорости волны, а при больших частотах скорость волны в случае (2.15) и (3.6) стремится к одному конечному пределу $C_R^a \approx 40.5$. Зависимости параметров волны в микрополярной среде в случае (3.6) мало отличаются от случая (2.15) только при больших частотах f. Аналогично зависимости параметров волны в классической среде в случае [33] мало отличаются от классического случая волны Рэлея только при больших частотах f. А вот отличие зависимости параметров волны в микрополярной среде и классической среде при увеличении частоты растет.

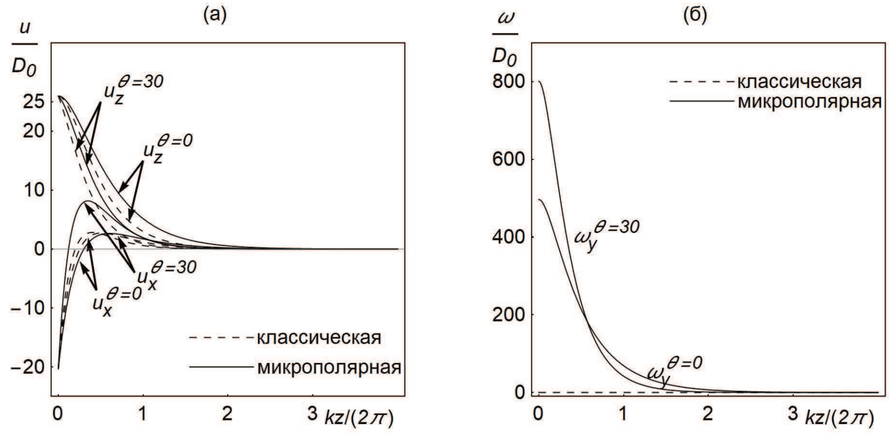

Рис. 4.

Зависимость безразмерных компонент вектора перемещений и вращения от относительной глубины показана на рис. 4(а),(б), глубина отнесена к длине волны (при $f = 2000$) в случае граничных условий (3.6). Упругое стеснение по направлению x приводит в микрополярной теории упругости к значительному увеличению x-компоненты вектора перемещений, тогда как увеличение z-компоненты вектора перемещений в микрополярной теории упругости незначительно по сравнению с классической теорией упругости. Затухание вектора перемещений и вектора вращения с глубиной в микрополярной теории упругости более медленное, чем затухание в классической теории упругости.

5. Заключение

В настоящей работе в рамках линейной микрополярной теории упругости (среда Коссера) рассмотрена задача о распространении поверхностной волны Рэлея в бесконечном полупространстве, когда на поверхности заданы однородные граничные условия, соответствующие задачам классической теории упругости: «жесткая заделка», «скользящая заделка», «жесткая сетка», «свободная поверхность», «упругого стеснения». Предполагалось отсутствие массовых сил и массовых моментов. Для описания упругих свойств среды Коссера использовались физические постоянные в обозначениях В. Новацкого. Найдено общее решение в виде затухающей поверхностной волны Рэлея для вектора перемещения (1.3) и вращения (1.12) для несимметричного тензора напряжений (1.16) и моментных напряжений (1.17).

Построением мажорант и асимптотики дисперсионного соотношения доказано, что в случаях однородных граничных условиях «жесткого закрепления» (2.1), (2.2) «скользящего контакта» (2.7), (2.8) на поверхности в случае поверхности, армированной нерастяжимой сеткой (2.11), (2.12), и в случае граничных условий на поверхности, когда касательные перемещения на границе отсутствуют, а сетка упруго сопротивляется изгибу согласно (3.8), (3.9), не существует поверхностной волны Рэлея.

Существует поверхностная волна Рэлея в случае граничных условий «свободной поверхности» (2.15), упругого стеснения (3.1) и (3.6), когда моментные напряжения равны нулю на поверхности, при этом фазовая скорость волны стремится к конечному пределу (2.21) при больших частотах волны. Найдены достаточные условия на параметры среды Коссера существования поверхностной волны Рэлея в случае граничных условий «свободной поверхности» (2.16), упругого стеснения (3.2) и (3.7), когда вектор вращения равен нулю на поверхности, при этом фазовая скорость волны стремится к конечному пределу (2.24) при больших частотах волны. Качественный анализ полученных дисперсионных соотношений показал, что поверхностная волна Рэлея обладает дисперсией. Количественный анализ полученных решений для классической и микрополярной сред с физическими постоянными полиуретановой пены, показал, что упругое стеснение вида (3.1) приводит к отсутствию поверхностной волны при малых частотах. Затухание вектора перемещений с глубиной в микрополярной теории упругости более медленное, чем затухание в классической теории упругости. Значительное отличие в значениях вектора перемещения в классической и микрополярной средах наблюдается по направлению упругого стеснения.

В число перспективных направлений применения результатов настоящей работы входит развитие теории возникновения трехмерных поверхностных волн Рэлея.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rayleigh J. W.* On waves propagated along the plane surface of an elastic solid // Proc. Lond. Math. Soc. 1885. V. 17. P. 4–11.

2. *Hayes M., Rivlin R. S.* A note on the secular equation for Rayleigh waves // ZAMP. 1962. V. 13, N 1. P. 80–83.

3. *Ewing W. M., Jardetzky W. S., Press F.* Elastic waves in layered media. New York: McGraw-Hill, 1957.

4. *Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология. Теория и методы. М.: Мир, 1983.

5. *Викторов И. А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981.

6. *Chiriţă S., Ghiba I.-D.* Rayleigh waves in Cosserat elastic materials // Int. J. Eng. Sci. 2012. V. 51. P. 117–127.

7. *Kuznetsov S. V.* "Forbidden" planes for Rayleigh waves // Q. Appl. Math. 2002. V. 60, N 1. P. 87–97.

8. *Kuznetsov S. V.* Surface waves of non-Rayleigh type // Q. Appl. Math. 2003. V. 61, N 3. P. 575–582.
9. *Voigt W.* Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle // Abh. König. Gesell. Wiss. Gött. 1887. V. 34. P. 3–52.
10. *Cosserat E., Cosserat F.* Théorie des corps déformables. Paris: Hermann et Fils, 1909.
11. *Mindlin D.* Micro-structure in linear elasticity // Arch. Rational Mech. Anal. 1964. V. 16, N 1. P. 51–78.
12. *Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В.* Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // Физика твердого тела. 1960. Т. 2, № 7. С. 1399–1409.
13. *Эринген А. К.* Теория микрополярной упругости // Разрушение. Т. 2. М.: Мир, 1975. С. 646–751.
14. *Eringen A. C., Suhubi E. S.* Nonlinear theory of micro-elastic solids. II // Int. J. Eng. Sci. 1964. V. 2, N 4. P. 389–404.
15. *Nowacki W.* Theory of asymmetric elasticity. Oxford; New York; Toronto; Sydney; Paris; Frankfurt: Pergamon-Press, 1986.
16. *Пальмов В. А.* Основные уравнения теории несимметричной упругости // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, вып. 3. С. 401–408.
17. *Hassanpour S., Heppler G. R.* Micropolar elasticity theory: a survey of linear isotropic equations, representative notations, and experimental investigations // Math. Mech. Solids. 2017. V. 22, N 2. P. 224–242.
18. *Chandrasekharaiah D. S.* Surface waves in micropolar thermoelasticity // Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.). 1983. V. 92, N 2. P. 109–120.
19. *Лялин А. Е., Пирожков В. А., Степанов Р. Д.* О распространении поверхностных волн в среда Коссера // Акуст. журн. 1982. Т. 28, № 6. С. 838–840.
20. *Mrithyumjaya R. K., Reddy M. P.* Rayleigh-type wave propagation on a micropolar cylindrical surface // J. Appl. Mech. 1993. V. 60, N 4. P. 857–65.
21. *Кулеш М. А., Матвеенко В. П., Шардаков И. Н.* Построение и анализ аналитического решения для поверхностной волны Рэлея в рамках континуума Коссера // Прикл. механика и техн. физика. 2005. Т. 46, № 4. С. 116–124.
22. *Кулеш М. А., Матвеенко В. П., Шардаков И. Н.* Дисперсия и поляризация поверхностных волн Рэлея для среды Коссера // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2007. № 4. С. 100–113.
23. *Кузнецов С. В., Мкртычев О. В., Нафасов А. Э.* Барьер для защиты застроенных территорий от поверхностных сейсмических волн. Патент РФ на изобретение № RU2475595. 20.02.2013.
24. *Godoy E., Durán M., Nédélec J.-C.* On the existence of surface waves in an elastic half-space with impedance boundary conditions // Wave Motion. 2012. V. 49. P. 585–594.
25. *Khlopotin A., Olsson P., Larsson F.* Transformational cloaking from seismic surface waves by micropolar metamaterials with finite couple stiffness // Wave Motion. 2015 V. 58. P. 53–67.
26. *Ардазишвили Р. В., Вильде М. В., Коссович Л. Ю.* Трехмерная поверхностная волна в полупространстве и кромочные волны в пластинах в случае смешанных граничных условий на поверхности распространения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2014 № 4. С. 53–64.
27. *Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976.
28. *Ерофеев В. И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999.
29. *Манукян В. Ф.* О существовании поверхностных сдвиговых волн в микрополярных средах // Изв. НАН Армении. 1997. Т. 50, № 2. С. 75–79.
30. *Eremeyev V. A., Lebedev L. P., Altenbach H.* Foundations of micropolar mechanics. Heidelberg: Springer, 2013.
31. *Rueger Z., Lakes R. S.* Experimental Cosserat elasticity in open-cell polymer foam // Philos. Magaz. 2016. V. 96. P. 93–111.
32. *Gauthier R. D., Jahmans W. E.* A quest for micropolar elastic constants. Pt 2 // Arch. Mech. 1981. V. 33, N 5. P. 717–737.

33. *Белубекян М. В.* Волна Рэлея в случае упруго-стесненной границы // Изв. НАН Армении. 2011. Т. 64, № 4. С. 3–6.

Поступила в редакцию 3 октября 2023 г.
После доработки 17 ноября 2023 г.
Принята к публикации 30 ноября 2023 г.

$\boxed{\text{Григорьев Юрий Михайлович}}$

Гаврильева Анна Андреевна
ФГБУН ФИЦ «Якутский научный центр
Сибирского отделения Российской академии наук»,
Институт физико-технических проблем Севера
им В. П. Ларионова Сибирского отделения Российской академии наук,
ул. Октябрьская, 1, Якутск 677980
gav-ann@yandex.ru

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2023. Том 30, № 4

UDC 539.3

PROPAGATION PROBLEM OF A RAYLEIGH SURFACE WAVE IN THE HALF–SPACE OF A COSSERAT MEDIUM IN THE CASE OF HOMOGENEOUS AND ELASTICALLY CONSTRAINED BOUNDARY CONDITION

Yu. M. Grigor'ev and A. A. Gavrilieva

Abstract: The problem of propagation of a Rayleigh surface wave in an infinite half-space is studied within the framework of the micropolar theory of elasticity. It is assumed that the deformed state of the medium is described by independent vectors of displacement and rotation (a Cosserat medium). A general solution describing the propagation of a surface Rayleigh wave is obtained. Using the method of constructing majorants, it is shown that there are no surface Rayleigh waves when boundary conditions are specified on the surface corresponding to the main problems of the classical theory of elasticity: "rigid embedding", "sliding embedding", and "rigid mesh". For the cases of boundary conditions "free surface" and "elastic constraint," corresponding to the problems of the classical theory of elasticity, it is shown by the method of constructing majorants that there is a surface Rayleigh wave when moment stresses are zero on the surface, while the phase velocity of the wave tends to a finite limit at high wave frequencies; when the rotation vector is equal to zero on the surface, sufficient conditions are found for the parameters of the Cosserat medium for the existence of surface Rayleigh waves, while the phase velocity of the wave tends to a finite limit at high wave frequencies. A qualitative analysis of the obtained dispersion relations showed that the Rayleigh surface wave has dispersion; the elastic constraint leads to the absence of a surface wave at low frequencies. In the case of a micropolar medium made of polyurethane foam, numerical values of the parameters of the wave and deformation of the medium are constructed. The attenuation of the displacement vector with depth in the micropolar theory of elasticity is slower than the attenuation in the classical theory of elasticity. A significant difference in the values of the displacement vector in the classical and micropolar environments is observed in the direction of elastic constraint.

DOI: 10.25587/2411-9326-2023-4-81-104

Keywords: micropolar theory of elasticity, Cosserat medium, Rayleigh surface wave, dispersion relation, free surface, rigid embedment, sliding contact, rigid mesh, elastically constrained boundary.

REFERENCES

1. *Rayleigh J. W.*, "On waves propagated along the plane surface of an elastic solid," Proc. Lond. Math. Soc., **17**, 4–11 (1885).
2. *Hayes M. and Rivlin R. S.*, "A note on the secular equation for Rayleigh waves," ZAMP, **13**, No. 1, 80–83 (1962).
3. *Ewing W. M., Jardetzky W. S., and Press F.*, Elastic waves in layered media, McGraw-Hill, New York (1957).

4. *Aki K. and Richards P. G.*, Quantitative Seismology, Theory and Methods, Freeman, San Francisco, CA (1980).
5. *Viktorov I. A.*, Sound Surface Waves in Solids [in Russian], Nauka, Moscow (1981).
6. *Chiriţă S. and Ghiba I.-D.*, "Rayleigh waves in Cosserat elastic materials," Int. J. Eng. Sci., **51**, 117–127 (2012).
7. *Kuznetsov S. V.*, ""Forbidden" planes for Rayleigh waves," Q. Appl. Math., **60**, No. 1, 87–97 (2002).
8. *Kuznetsov S. V.*, "Surface waves of non-Rayleigh type," Q. Appl. Math., **61**, No. 3, 575–582 (2003).
9. *Voigt W.*, "Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle," Abh. König. Gesell. Wiss. Gött., **34**, 3–52 (1887).
10. *Cosserat E. and Cosserat F.*, Théorie des Corps Déformables, Hermann et Fils, Paris (1909).
11. *Mindlin D.*, "Micro-structure in linear elasticity," Arch. Rat. Mech. Anal., **16**, No. 1, 51–78 (1964).
12. *Aero E. L. and Kuvshinsky E. V.*, "Basic equations of the theory of elasticity of media with rotational interaction of particles [in Russian]," Fiz. Tvyord. Tela, **2**, No. 7, 1399–1409 (1960).
13. *Eringen A. C.*, "Linear theory of micropolar elasticity," J. Math. Mech., **15**, No. 6, 909–923.
14. *Eringen A. C. and Suhubi E. S.*, "Nonlinear theory of micro-elastic solids, II," Int. J. Eng. Sci., **2**, No. 4, 389–404 (1964).
15. *Nowacki W.*, Theory of Asymmetric Elasticity, Pergamon-Press, Oxford; New York; Toronto; Sydney; Paris; Frankfurt (1986).
16. *Pal'mov V. A.*, "Basic equations of the theory of asymmetric elasticity [in Russian]," Prikl. Mat. Mekh., **28**, No. 3, 401–408 (1964).
17. *Hassanpour S. and Heppler G. R.*, "Micropolar elasticity theory: a survey of linear isotropic equations, representative notations, and experimental investigations," Math. Mech. Solids, **22**, No. 2, 224–242 (2017).
18. *Chandrasekharaiah D. S.*, "Surface waves in micropolar thermoelasticity," Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.), **92**, No. 2, 109–120 (1983).
19. *Lyalin A. E., Pirozhkov V. A., and Stepanov R. D.*, "On the propagation of surface waves in the Cosserat medium [in Russian]," Akust. Zhurn., **28**, No. 6, 838–840 (1982).
20. *Mrithyumjaya Rao K. and Reddy M. P.*, "Rayleigh-type wave propagation on a micropolar cylindrical surface," J. Appl. Mech., **60**, No. 4, 857–865 (1993).
21. *Kulesh M. A., Matveenko V. P., and Shardakov I. N.*, "Construction and analysis of an analytical solution for a Rayleigh surface wave in the framework of the Cosserat continuum [in Russian]," Prikl. Mekh. Tekhn. Fizika, **46**, No. 4, 116–124 (2005).
22. *Kulesh M. A., Matveenko V. P., and Shardakov I. N.*, "Dispersion and polarization of Rayleigh surface waves for a Cosserat medium [in Russian]," Izv. Akad. Nauk, Mekh. Tvyord. Tela, № 4, 100–113 (2007).
23. *Kuznetsov S. V., Mkrtychev O. V., and Nafasov A. E.*, "A barrier to protect built-up areas from surface seismic waves [in Russian]," RF Patent No. RU2475595. 20.02.2013.
24. *Godoy E., Durán M., and Nédélec J.-C.*, "On the existence of surface waves in an elastic half-space with impedance boundary conditions," Wave Motion, **49**, 585–594 (2012).
25. *Khlopotin A., Olsson P., and Larsson F.*, "Transformational cloaking from seismic surface waves by micropolar metamaterials with finite couple stiffness," Wave Motion, **58**, 53–67 (2015).
26. *Ardazishvili R. V., Vilde M. V., and Kossovich L. Yu.*, "Three-dimensional surface wave in half-space and edge waves in plates in the case of mixed boundary conditions on the propagation surface [in Russian]," Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki, No. 4, 53–64 (2014).
27. *Kupradze V. D., Hegelia T. G., Basheleishvili M. O., and Burchuladze T. V.*, Three-Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity [in Russian], Nauka, Moscow (1976).
28. *Erofeev V. I.*, Wave Processes in Solids with Microstructure [in Russian], Izdat. Mosk. Univ., Moscow (1999).
29. *Manukyan V. F.*, "On the existence of surface shear waves in micropolar media [in Russian]," Izv. NAN Armenii, **50**, No. 2, 75–79 (1997).

30. *Eremeyev V. A., Lebedev L. P., and Altenbach H.*, Foundations of Micropolar Mechanics, Springer, Heidelberg (2013).

31. *Rueger Z. and Lakes R. S.*, "Experimental Cosserat elasticity in open-cell polymer foam," Philos. Magaz., **96**, 93–111 (2016).

32. *Gauthier R. D. and Jahmans W. E.*, "A quest for micropolar elastic constants, Pt. 2," Arch. Mech., **33**, No. 5, 717–737 (1981).

33. *Belubekyan M. V.*, "Rayleigh wave in the case of an elastically constrained boundary [in Russian]," Izv. NAN Armenii, **64**, No. 4, 3–6 (2011).

Submitted October 3, 2023
Revised November 17, 2023
Accepted November 30, 2023

$\boxed{\text{Yuri M. Grigor}'\text{ev}}$

Anna A. Gavrilieva
Larionov Institute of the Physical-Technical Problems of the North
of the Siberian Branch of the RAS,
Division of Federal Research Centre
"The Yakut Scientific Centre of the Siberian Branch
of the Russian Academy of Sciences,"
1 Oktyabrskaya street, Yakutsk 677980, Russia
gav-ann@yandex.ru

Математическая жизнь
Межгородской научно-исследовательский семинар «Неклассические задачи математической физики»

23 сентября 2023 г.

«Воспоминания о будущем».

Докладчик: А. И. Кожанов (Институт математики СО РАН им. С. Л. Соболева, Новосибирск, Россия).

«Математическое моделирование в науке и технике».

Докладчик: С. Г. Пятков (Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, Россия).

Обсуждаются некоторые аспекты создания и анализа математических моделей, связанных с протекающими в биосфере динамическими процессами.

7 октября 2023 г.

«Разрушение решений нелинейных уравнений типа Соболева».

Докладчик: М. О. Корпусов (Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия).

В докладе рассмотрены модельные нелинейные уравнения соболевского типа теории волн в плазме и магнетиках. Для соответствующих задач Коши получены результаты о существовании так называемых критических показателей, разграничивающих области, где нет локальной во времени разрешимости в слабом смысле и где есть локальная во времени разрешимость.

21 октября 2023 г.

«Воронежская математическая школа по сингулярным дифференциальным уравнениям» (к столетию со дня рождения И. А. Киприянова).

Докладчик: С. М. Ситник (Белгородский государственный университет, Белгород, Россия).

В докладе сделан исторический обзор основных результатов, полученных в Воронежской математической школе по сингулярным дифференциальным уравнениям под научным руководством Ивана Александровича Киприянова, к столетию которого приурочен доклад. Наряду с кратким обзором основных результатов самого И. А.Киприянова также приведены результаты его учеников В. В. Катрахова и В. З. Мешкова. Более подробно рассмотрена задача В. В. Катрахова с существенными особыми точками для уравнения Пуассона. Также в докладе рассмотрена известная задача Е. М. Ландиса об убывании решений стационарного уравнения Шрёдингера, неожиданное решение которой было получено другим учеником И. А. Киприянова — В. З. Мешковым. В последние годы эта задача получила неожиданное продолжение. В конце приведены некоторые последние публикации последователей школы И. А. Киприянова.

18 ноября 2023 г.

«Регулярные решения уравнения дробной диффузии с переменным показателем производной».

Докладчик: А. Н. Артюшин (Институт математики СО РАН им. С. Л. Соболева, Новосибирск, Россия).

Рассмотрена смешанная задача для уравнения дробной диффузии с переменным показателем производной (зависит от пространственных переменных). Начальные данные однородные. Рассмотрены вопросы существования регулярных решений для гладких и негладких показателей производной.

2 декабря 2023 г.

«Вырождающиеся решения нелинейного параболического уравнения второго порядка».

Докладчик: А. Л. Казаков (Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия)

Доклад посвящен изучению нелинейного эволюционного параболического уравнения второго порядка с вырождением, являющегося математической моделью ряда физических и биологических процессов. Для него рассматриваются решения, имеющие тип диффузионной (тепловой, фильтрационной) волны, распространяющейся по нулевому фону с конечной скоростью. Доказывается теорема существования и единственности в классе кусочно-аналитических функций. Находятся и исследуются точные решения, построение которых сводится к интегрированию задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.

16 декабря 2023 г.

«Задача Самарского — Ионкина и обратные коэффициентные задачи временного типа для параболических уравнений».

Докладчики: А. И. Кожанов (Институт математики СО РАН им. С. Л. Соболева, Новосибирск, Россия), Т. Н. Шипина (Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия).

Связь обратных коэффициентных задач и нелокальных краевых задач хорошо известна. Новые результаты о разрешимости нелокальных задач часто влекут за собой новые результаты о разрешимости обратных задач. Именно о такой ситуации шла речь в докладе — о связи нелокальных задач для параболических уравнений второго порядка с обобщенным граничным условием Самарского — Ионкина и обратных коэффициентных задачах временного типа.

23 декабря 2023 г.

«Метод Фурье и построение обобщенного решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения».

Докладчик: И. С. Ломов (Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия).

При минимальных условиях на правую часть волнового уравнения построено обобщенное решение смешанной задачи. Решение представлено в виде ряда из метода Фурье, найдена его сумма. Формулируется также теорема о виде обобщенного решения смешанной задачи для неоднородного телеграфного уравнения. Рассмотрен случай достаточно общих двухточечных краевых условий на отрезке, краевые формы содержат производные. Потенциал в уравнении может зависеть от времени, что не позволяет решать задачу методом разделения переменных. Решение получено в виде быстро сходящегося ряда.

УКАЗАТЕЛЬ

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. К публикации в журнале «Математические заметки СВФУ» принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики, механики и информатики. Статьи, опубликованные ранее, а также направленные в другие издания, редакцией не рассматриваются. Редакционный совет вправе воздержаться от принятия статьи к рассмотрению, если она не соответствует профилю журнала.

2. Направляя статью в редакцию журнала, автор (соавторы) на безвозмездной основе передает(ют) издателю на срок действия авторского права по действующему законодательству РФ исключительное право на использование статьи или отдельной ее части (в случае принятия статьи к опубликованию) на территории всех государств, где авторские права в силу международных договоров Российской Федерации являются охраняемыми, в том числе следующие права: на воспроизведение, на распространение, на публичный показ, на доведение до всеобщего сведения, на перевод на иностранные языки (и исключительное право на использование переведенного произведения вышеуказанными способами), на предоставление всех вышеперечисленных прав другим лицам. Одновременно со статьей автор (соавторы) направляет в редакцию подписанный лицензионный договор на право использования научного произведения в журнале. Образец договора высылается авторам по электронной почте вместе с сообщением о принятии статьи к печати.

3. Для рассмотрения статьи на предмет ее публикации в журнале в редакцию представляются текст статьи объемом не более 1,5 авторских листов (18 страниц журнального текста), написанной на русском или, по согласованию с редакцией, на английском языке, а также сопроводительное письмо, в котором сообщается, что статья направляется именно в журнал «Математические заметки СВФУ», и информация об авторе (коллективе авторов) с указанием фамилии, имени и отчества, полного почтового адреса для переписки, места работы, подробного служебного адреса, адреса электронной почты и номера телефона. Статьи объемом более 1,5 авторских листов, как правило, не рассматриваются и могут быть приняты к рассмотрению и опубликованы лишь по специальному решению редакционного совета.

4. Статья должна быть подготовлена с использованием текстового редактора LaTeX и представлена в виде файлов форматов pdf и tex.

5. В начале статьи указывается индекс УДК и/или MSC. Статья сопровождается аннотацией объемом не менее 100 слов, желательно без формул, и списком ключевых слов. Аннотация и список должны быть представлены на русском и английском языках.

6. Список литературы печатается в конце текста. Ссылки на литературу в тексте нумеруются в порядке их появления и даются в квадратных скобках. Ссылки на неопубликованные работы нежелательны. Оформление литературы

должно соответствовать требованиям стандартов (примеры библиографических описаний см. в последних номерах журнала).

7. Издание осуществляет рецензирование всех поступающих в редакцию материалов, соответствующих ее тематике, с целью их экспертной оценки. Все рецензенты являются признанными специалистами по тематике рецензируемых материалов и имеют в течение последних 3 лет публикации по тематике рецензируемой статьи. Рецензии хранятся в редакции издания в течение 5 лет.

8. Принятая к рассмотрению статья направляется на анонимное рецензирование. На основании рецензии редсовет принимает решение о возможности публикации статьи, которое сообщается автору. Автор вправе сообщить свои замечания и возражения к рецензии. Повторное решение редсовета по статье является окончательным.

9. Редакция издания направляет авторам представленных материалов копии рецензий или мотивированный отказ, а также обязуется направлять копии рецензий в Министерство науки и высшего образования Российской Федерации при поступлении в редакцию издания соответствующего запроса.

10. После редакционной подготовки непосредственно перед публикацией автору высылается корректура. По возможности в наиболее короткие сроки необходимо ее прочесть, внести исправления (правка против авторского оригинала нежелательна) и направить в редакцию. Статья выходит в свет только после получения от автора (коллектива авторов) авторской корректуры, подписанной автором (всеми соавторами) в печать.

11. В соответствии с международными законами об авторском праве Редакция уведомляет авторов журнала об их ответственности за получение ими в случае необходимости письменного разрешения на использование охраняемых авторским правом материалов, таких, как цитаты, воспроизведение данных, иллюстраций и любых иных материалов, которые могут быть использованы в их публикациях, а также о том, что вытекающая отсюда ответственность за нарушение таких авторских прав лежит на авторах. Плата за опубликование с авторов или учреждений, где работают авторы, не взимается, и опубликованные статьи не оплачиваются.

12. Права авторов на использование материалов статей и переводов статей из журнала «Математические заметки СВФУ» в иных публикациях определяются общими международными и российскими законами об авторских правах.

16+

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций
Свидетельство о регистрации № ПИ № ФС 77–59001 от 11.08.2014 г.
Учредитель: ФГАОУ ВО «Северо-Восточный
федеральный университет имени М. К. Аммосова»
ул. Белинского, 58, Якутск, 677000

Подписано в печать 10.01.2024. Формат 70х108/16.
Печать цифровая. Печ. л. 7,0. Уч.-изд. л. 7,25. Тираж 50 экз. Заказ № 9.

Издательский дом Северо-Восточного федерального университета,
677891, г. Якутск, ул. Петровского, 5.
Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии ИД СВФУ