



СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. К. АММОСОВА

ISSN 2411-9326

Математические заметки СВФУ

Том 31
№ 1. 2024

Редакционный совет

Главный редактор: Егоров И. Е., д.ф.-м.н., профессор, СВФУ

Зам. главного редактора: Кожанов А. И., д.ф.-м.н., профессор, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Зам. главного редактора: Попов С. В., д.ф.-м.н., профессор, СВФУ

Ответственный секретарь: Евсеев З. И., СВФУ

Члены редакционного совета:

Бородин О. В., д.ф.-м.н., профессор, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Вабищевич П. Н., д.ф.-м.н., профессор, Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН

Васильев В. И., д.ф.-м.н., профессор, СВФУ

Григорьев Ю. М., д.ф.-м.н., доцент, СВФУ

Зикиров О. С., д.ф.-м.н., профессор, Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Узбекистан

Морозов А. С., д.ф.-м.н., профессор, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Пятков С. Г., д.ф.-м.н., профессор, Югорский государственный университет

Хлуднев А. М., д.ф.-м.н., профессор, Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

Itou H., Ph.D., Professor, Tokyo University of Science, Japan

Ruzhansky M., Professor, Ghent University, Belgium

Tani A., Professor, Keio University, Japan

Xin-Lin Gao, Professor, Southern Methodist University, USA

СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М. К. АММОСОВА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ СВФУ

ОСНОВАН В 1994 ГОДУ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ВЫХОДИТ 4 РАЗА В ГОД

Том 31, № 1 (121)

Январь—март, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Жизнь, связанная с математикой (к 75-летию д.ф.-м.н., профессора В.И. Васильева)	3
Аюпова Н. Б., Волокитин Е. П., Голубятников В. П. <i>О нелокальных осцилляциях в моделях генных сетей</i>	7
N. B. Aypurova, E. P. Volokitin, V. P. Golubyatnikov <i>On non-local oscillations in gene networks models</i>	18
Булатов Ю. Н. <i>Преобразование Ганкеля — Катрахова и сингулярные К-псевдодифференциальные операторы</i>	21
Yu. N. Bulatov <i>The Hankel–Kiprianov–Katrakov transform and singular K-pseudodifferential operators</i>	33
Егоров И. Е., Сафонов С. В. <i>Разрешимость первой краевой задачи для уравнения смешанного типа в весовом пространстве</i>	35
I. E. Egorov, S. V. Safonov <i>Solvability of the first boundary value problem for a mixed type equation in a weight space</i>	46
Кожанов А. И. <i>К вопросу о разрешимости нелокальных задач с условиями Ионкина для дифференциальных уравнений с частными производными. II</i>	48
A. I. Kozhanov <i>On solvability of nonlocal problems with Ionkin conditions for partial differential equations. II</i>	54
Кожанов А. И., Ашуррова Г. Р. <i>Параболические уравнения с вырождением и неизвестным коэффициентом</i>	56
A. I. Kozhanov, G. R. Ashurova <i>Parabolic equations with degeneracy and unknown coefficient</i>	68

J. Ettayb <i>Structured pseudospectrum and structured essential pseudospectrum of closed linear operator pencils on ultrametric Banach spaces</i>	70
K. S. Kumar, B. Rath, D. V. Krishna, G. K. S. Viswanadh <i>The sharp bound of the generalized Zalcman conjecture for initial coefficient and the certain second Hankel determinants of k^{th}-root transformation for a subclass of analytic functions</i>	81
Математическое моделирование	
Жуков В. В., Крюков Ю. А., Трубицын К. В., Кудинов В. А., Котова Е. В. <i>Исследование нелинейного параболического и линейного гиперболического операторов теплопроводности</i>	88
V. V. Zhukov, Yu. A. Kryukov, K. V. Trubitsyn, V. A. Kudinov, E. V. Kotova <i>Study of linear parabolic and linear hyperbolic thermal conduction operators</i>	99
Семёнов С. П, Дюкарев Е. А., Ташкин А. О. <i>Математическая модель для расчета динамики углерода в болотных экосистемах холодных регионов Западной Сибири</i>	102
S. P. Semenov, E. A. Dyukarev, A. O. Tashkin <i>Mathematical model for calculating carbon dynamics in wetland ecosystems of cold regions of Western Siberia</i>	113
Математическая жизнь	116

АДРЕС ИЗДАТЕЛЯ:
СВФУ, ул. Белинского, 58, Якутск, 677000

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
СВФУ, ул. Кулаковского, 48, каб. 543, Якутск, 677000
Телефон: 8(4112)32-14-99, Факс: 8(4112)36-43-47;
<http://mzsvfu.ru>
e-mail: prokopevav85@gmail.com; yktmatzam@gmail.com;
ivanegorov51@mail.ru

© Северо-Восточный федеральный университет
имени М. К. Аммосова, 2024



Жизнь, связанная с математикой **(к 75-летию д.ф.-м.н., профессора В.И. Васильева)**

2 апреля 2024 года исполнится 75 лет Василию Ивановичу Васильеву, доктору физико-математических наук, профессору, заведующему кафедрой «Вычислительные технологии» Института математики и информатики Северо-Восточного федерального университета имени М. К. Аммосова, председателю Диссертационного Совета 24.2.396.02 при СВФУ имени М. К. Аммосова по специальности 1.2.2 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

Василий Иванович Васильев родился 1949 г. в I Култукском наслеге Верхневилуйского района Якутской АССР в семье колхозников. Отец — Иван Михайлович Титов, участник Великой Отечественной войны, был председателем колхоза, погиб в 1951 г. в авиакатастрофе. Мать — Мария Никифоровна Васильева, работала счетоводом колхоза им. П. Осипенко, умерла в 1953 г. Оставшись в детстве без родителей, Василий воспитывался у бабушки с ее детьми.

В 1956 г. поступил в подготовительный класс Далярской средней школы. Далярская средняя школа, богатая своими традициями, известна в республике своими выдающимися педагогами, которые впервые начали движение политехнического образования. Еще в школьные годы у Василия проявились интерес и способности к математике. Под руководством своего учителя математики А. А. Мачкасынова Василий в 1964-68 гг. успешно выступал на районных и республиканских турах Всесоюзной олимпиады школьников по математике.

Окончив Далярскую среднюю школу в 1967 г., Василий, успешно сдав вступительные экзамены, поступил на механико-математический факультет Новосибирского государственного университета, а через год, в 1968 г., вновь поступил на физико-математический факультет Якутского государственного университета, который окончил в 1973 г. С третьего курса по индивидуальному плану под руководством к.ф.-м.н., доцента Н. М. Охлопкова специализировался по вычислительной математике. Работа, написанная В. И. Васильевым и А. М. Кардашевским под научным руководством доцента Н. М. Охлопкова, в 1973 г. на Всесоюзном конкурсе студенческих научных работ была отмечена дипломом МВ и ССО СССР и ЦК ВЛКСМ.

После окончания университета в 1973-1974 гг. прошел годичную стажировку в Новосибирском государственном университете. С 1974 по 1980 гг. работал на физико-математическом, затем на математическом факультете ЯГУ в должности ассистента, математика-программиста, директора студенческого вычислительного центра.

С апреля 1980 г. по 1991 г. работал в ИФТПС СО РАН, где прошел путь от младшего до ведущего научного сотрудника, члена ученого совета института.

В 1983 г. в Институте математики АН БССР под научным руководством профессоров В. Н. Абрашина и Э. А. Бондарева защитил диссертацию «Численное исследование неклассических задач подземной газодинамики» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.07 «Вычислительная математика» (ведущая организация — ВЦ РАН, официальные оппоненты: профессор А. Н. Коновалов и доцент В. В. Бобков). В годы работы в ИФТПС им был выполнен ряд хоздоговорных работ по заказу СибНИИНП и ЦНИИСМ. В 1986 г. ему присвоено ученое звание старшего научного сотрудника по специальности «вычислительная математика». В институте был создан и функционировал филиал кафедры прикладной математики ЯГУ, которым руководил В. И. Васильев.

В апреле 1992 г. вернулся на математический факультет ЯГУ. Принимал участие в создании на базе математического факультета ЯГУ и отдела прикладной математики ЯФ СО АН СССР научно-исследовательского института прикладной математики и информатики при ЯГУ и, до избрания директором ИМИ, по совместительству работал заместителем директора по научной работе НИИПМИ. В том же 1993 г. в ЯГУ был создан диссертационный совет по защите кандидатских диссертаций по специальностям 05.13.16 «Применение вычислительной техники, математического моделирования и математических методов в научных исследованиях», 01.02.04 «Механика деформируемого твердого тела», В. И. Васильев был назначен ученым секретарем совета. В 1995 г. Василий Иванович в ВЦ СО РАН защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 05.13.16 на тему «Численное моделирование процессов тепло- и массопереноса в криолитозоне» (ведущая организация — ИПНГ РАН, оппоненты: д.ф.-м.н., профессор П. Н. Вабищевич, ИММ РАН; д.ф.-м.н., профессор А. В. Федоров, ИТПМ СО РАН; д.ф.-м.н., профессор В. И. Дробышевич, ВЦ СО РАН).

В октябре 1995 г. В. И. Васильев был избран на должность декана математического факультета, в 1996–2014 гг. заведовал кафедрой прикладной математики. В 1997 г. ему присвоено ученое звание профессора по кафедре прикладной математики. В 1999 г. В. И. Васильев избран на должность директора института математики и информатики ЯГУ, созданного на базе математического факультета по инициативе первого президента РС(Я) М. Е. Николаева.

В 2003 г. в ЯГУ по инициативе В. И. Васильева был создан и функционирует диссертационный совет Д 212.306.04 (по новой номенклатуре 24.2.396.02) по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук по специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические и технические науки)».

В мае 2004 г. В. И. Васильев был назначен первым проректором ЯГУ и проработал в этой должности 10 лет. В 2009 г. была создана республиканская комиссия по подготовке к реорганизации ЯГУ в федеральный университет и разработке главного конкурсного документа «Программы развития создаваемого федерального университета» под руководством вице-президента РС (Я)

Е. И. Михайловой. Василий Иванович Васильев был одним из членов данной комиссии. 2 апреля 2010 г. вышло распоряжение Правительства РФ №599-р об открытии Северо-Восточного федерального университета имени М. К. Аммосова. В 2014 г. В. И. Васильев, добровольно оставив пост первого проректора университета, создал кафедру «Вычислительные технологии» и был избран на должность заведующего.

В. И. Васильев является известным специалистом по вычислительной математике, математическому моделированию термомеханического взаимодействия инженерных сооружений и зданий с окружающими средами в криолитозоне, процессов разработки месторождений природного газа, по численным методам решения обратных задач. Им опубликовано 178 статей, научных и научно-методических работ, в том числе 5 монографий, 4 учебных пособия, он осуществляет руководство аспирантами. Бывшие его дипломники О. А. Тихонова, В. В. Попов, Ф. Ф. Широких, М. Н. Павлов и аспирант Су Линдэ из Китая под его руководством защитили диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. В 2016 г. совместно с профессором Техасского агротехнического университета Ялчином Эфендиевым кафедра «Вычислительные технологии» приняла участие в конкурсе Мегагрантов Правительства РФ (5 очередь) с проектом “Multiscale model reduction”. Проект вошел в число победителей конкурса и финансировался 5 лет. Это был первый выигранный Мегагрант в СВФУ.

С 2017 г., благодаря мегагранту, кафедра В. И. Васильева с привлечением целой плеяды ведущих ученых, научно-исследовательской лаборатории, созданной на базе мегагранта с участием молодых ребят, вчерашних выпускников и молодых ученых осуществила большой научный прорыв в СВФУ: защищены 12 диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук; опубликовано свыше 250 статей в научных изданиях, индексируемых в Web of Science и Scopus, в том числе свыше 100 в математических журналах 1 и 2 квартилей; выиграны 10 грантов Российского научного фонда, из них 6 грантов являются коллективными; проведены 15 международных научных конференций в Якутске, Москве, Владивостоке и Сочи. Пятеро молодых ученых получили Государственную премию РС (Я) по науке и технике и две премии по науке и технике Государственного собрания (Ил Тумэн) Республики Саха (Якутия); молодые сотрудники лаборатории выступали на конференциях ведущих математических центров страны, в университетах Северной Америки, Европы и Азии, двое удостоены гранта Президента РФ, трое — гранта Ил Дархана и др., четверо сотрудников кафедры готовят докторские диссертации. Установлены крепкие научные связи с университетами Китая, так, в 2024-25 гг. под научным руководством профессора В. И. Васильева обучение в аспирантуре завершают три аспиранта.

В. И. Васильев внес большой личный вклад в развитие высшей школы и науки в Республике Саха (Якутия), в становлении федерального университета, в дело подготовки специалистов с высшим образованием, научных и научно-

педагогических кадров высшей квалификации.

В 2002 г. Василий Иванович стал Лауреатом Государственной премии РС(Я) в области науки и техники, в 2006 г. ему присвоено почетное звание «Заслуженный работник высшей школы Российской Федерации», в 2013 г. — «Заслуженный деятель науки Республики Саха (Якутия)», он является кавалером Ордена Дружбы, награжден медалью Министерства образования и науки РФ «За безупречный труд и отличие 3 степени». Также имеет нагрудные знаки «Почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации», «За выдающийся вклад в науку республики», Медаль академика Н. В. Черского.

Василий Иванович с супругой Татьяной Семеновной воспитали и вырастили двух дочерей.

От имени многочисленных друзей, коллег, учеников поздравляем уважаемого Василия Ивановича с 75-летним юбилеем, желаем крепкого здоровья, бодрости, дальнейших успехов в работе, хороших научных достижений, активного долголетия, счастья!

*П. Н. Вабищевич, Я. Эфендиев, В. И. Афанасьев, И. Е. Егоров,
Н. П. Лазарев, Н. Р. Пинигина, С. В. Попов, Ю. И. Трофимцев*

Математические заметки СВФУ
Январь—март, 2024. Том 31, № 1

УДК 517.938

О НЕЛОКАЛЬНЫХ ОСЦИЛЛЯЦИЯХ В МОДЕЛЯХ ГЕННЫХ СЕТЕЙ

Н. Б. Аюрова, Е. П. Волокитин,
В. П. Голубятников

Аннотация. Рассматриваются вопросы неединственности циклов в фазовых портретах систем обыкновенных дифференциальных уравнений биохимической кинетики с блочно-линейными правыми частями, моделирующими функционирование простейших молекулярных репрессиляторов и других кольцевых генных сетей. Для таких моделей различных размерностей ранее были установлены условия существования циклов и исследована их устойчивость.

В настоящей работе описана трехмерная динамическая система такого типа, у которой в фазовом портрете построено три кусочно-линейных цикла, а также описаны гомеоморфные торы их инвариантные окрестности, что позволяет локализовать положение этих циклов и определить их взаимное расположение.

Самый маленький из этих трех циклов представляет собой несложный пример «спрятанного аттрактора» нелинейной динамической системы, два других являются примерами нелокальных колебаний в фазовом портрете.

Проведены вычислительные эксперименты, иллюстрирующие полученные результаты. Ранее примеры неединственности циклов у подобных моделей генных сетей наблюдались только у систем больших размерностей, начиная с пяти.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-1-7-20

Ключевые слова: модели кольцевых генных сетей, фазовые портреты нелинейных динамических систем, инвариантные области, многоступенчатые функции, периодические траектории.

Введение

Неединственность периодических траекторий динамических систем давно стала предметом рассмотрения во многих разделах чистой и прикладной математики, а также в небесной механике [1–4].

В наших предыдущих публикациях [5–7] (см. также [8–11]), ограниченных рамками исследования моделей функционирования генных сетей, регулируемых положительными и отрицательными связями, изучались системы дифференциальных уравнений кинетического типа, для которых в размерностях, больших пяти, были обнаружены примеры неединственности циклов и описаны взаимные расположения этих циклов в фазовых портретах. С целью выявления осциллирующих траекторий подобные системы уравнений изучаются также и во многих биологических публикациях (см., например, [12–15]).

Работа выполнена в рамках государственного задания FWNF-2022-0009 и FWNF-2022-0005.

© 2024 Аюрова Н. Б., Волокитин Е. П., Голубятников В. П.

Целью настоящей работы является построение трехмерной динамической системы биохимической кинетики, модели молекулярного репрессора, у которой имеется по крайней мере три различных цикла. Для таких систем уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = k_1(L_1(x_3) - x_1), \quad \frac{dx_2}{dt} = k_2(L_2(x_1) - x_2), \quad \frac{dx_3}{dt} = k_3(L_3(x_2) - x_3); \quad (1)$$

в случаях, когда монотонно убывающие функции L_j , моделирующие отрицательные связи между компонентами репрессора, одноступенчатые, в работах [16–18] были установлены условия существования, единственности и устойчивости циклов (см. также [8, 9]. Здесь и далее $j = 1, 2, 3$, неотрицательные переменные $x_j(t)$ обозначают концентрации этих компонент, а положительные коэффициенты k_j характеризуют скорости их естественного распада.

1. Модель простейшей многоступенчатой генной сети

Следуя [19], где были описаны обобщенные пороговые модели функционирования подобных генных сетей, для простоты изложения будем рассматривать симметричную безразмерную версию системы (1), в которой все коэффициенты k_j предполагаются равными единице, все функции L_j совпадают и монотонно убывают «пятиступенчатым» образом:

$$\begin{aligned} L(w) &= 2c \text{ при } 0 \leq w < c - \varepsilon; \quad L(w) = c + \varepsilon \text{ при } c - \varepsilon \leq w < c - \delta; \\ L(w) &= c + \delta \text{ при } c - \delta \leq w < c; \quad L(w) = c - \delta \text{ при } c \leq w < c + \delta; \\ L(w) &= c - \varepsilon \text{ при } c + \delta \leq w < c + \varepsilon; \quad L(w) = 0 \text{ при } c + \varepsilon \leq w. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $c > \varepsilon > \delta > 0$. В доказательствах основных результатов этой работы будем предполагать, что

$$c > 10\varepsilon > 100\delta. \quad (3)$$

Эти условия оказываются достаточными для существования трех циклов системы (1), (2).

Подобные динамические системы, симметричные относительно циклических перестановок уравнений и переменных, рассматривались во многих биологических и математических публикациях [20–22], в том числе и в старших размерностях, поскольку позволяют моделировать «в первом приближении» функционирование колыцевых генных сетей, несмотря на искусственность предположения о совпадении уравнений и параметров, описывающих изменение концентраций различных компонент таких сетей. Впоследствии полученные здесь результаты о периодических траекториях были распространены на более общие случаи многомерных моделей колыцевых генных сетей, не имеющих таких симметрий (см., например, [23–25]).

Так же, как и в работах [17, 18], устанавливается

Лемма 1. В фазовом портрете системы (1), (2) кубы $Q = [0; 2c] \times [0; 2c] \times [0; 2c]$, $Q^* = [c - \varepsilon; c + \varepsilon] \times [c - \varepsilon; c + \varepsilon] \times [c - \varepsilon; c + \varepsilon]$ и $\widehat{Q} = [c - \delta; c + \delta] \times [c - \delta; c + \delta] \times [c - \delta; c + \delta]$ являются положительно инвариантными областями.

Доказательство состоит в проверке знаков производных dx_j/dt на гранях перечисленных областей.

Разобьем параллелепипед Q пятнадцатью плоскостями $x_j = c - \varepsilon$, $x_j = c - \delta$, $x_j = c$, $x_j = c + \delta$ и $x_j = c + \varepsilon$ на 216 блоков, которые будем нумеровать мультииндексами $\{s_1 s_2 s_3\}$ шестибуквенного алфавита $\alpha, A, 0, 1, B, \beta$ следующим образом:

$$s_j = \alpha, \text{ если в блоке } 0 \leq x_j < c - \varepsilon; \quad s_j = A, \text{ если в блоке } c - \varepsilon \leq x_j < c - \delta;$$

$$s_j = 0, \text{ если в блоке } c - \delta \leq x_j < c; \quad s_j = 1, \text{ если в блоке } c \leq x_j < c + \delta; \quad (4)$$

$$s_j = B, \text{ если в блоке } c + \delta \leq x_j < c + \varepsilon; \quad s_j = \beta, \text{ если в блоке } c + \varepsilon \leq x_j;$$

Доказательства следующих двух лемм полностью повторяют доказательство леммы 1.

Лемма 2. Для любых двух соседних блоков S_1 и S_2 разбиения (4) инвариантной области Q траектории всех внутренних точек их общей грани $S_1 \cap S_2$ переходят либо из блока S_1 в S_2 , либо из блока S_2 в S_1 .

Будем обозначать такие переходы через $S_1 \rightarrow S_2$, соответственно через $S_2 \rightarrow S_1$. Отметим, что область Q^* лежит во внутренности области Q , а область \widehat{Q} — во внутренности области Q^* .

Лемма 3. В инвариантном кубе \widehat{Q} , состоящем из восьми блоков $\{s_1^* s_2^* s_3^*\}$ разбиения (4), у которых индексы s_j^* равны либо нулю, либо единице, перечисленные в диаграмме (5) блоки образуют инвариантную область системы (1), (2). Траектории точек этой области переходят из блока в блок в соответствии со стрелками кольцевой диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} \{001\} & \longrightarrow & \{011\} & \longrightarrow & \{010\} \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ \{101\} & \longleftarrow & \{100\} & \longleftarrow & \{110\} \end{array} \quad (5)$$

Замечание 1. В дальнейшем будем рассматривать только такие траектории системы (1), (2), которые с ростом t не пересекаются с ребрами блоков разбиения (4). В частности, все описанные ниже циклы системы (1), (2) с ребрами этого разбиения не пересекаются.

Обозначим через E точку (c, c, c) в центре куба \widehat{Q} , а объединение шести блоков, перечисленных в (5), через \widehat{W} . Из каждого блока этой диаграммы траектории могут переходить только в один соседний блок, как и в [17]; из результатов этой работы вытекает следующее утверждение.

Лемма 4. Динамическая система (1), (2) имеет в инвариантной области \widehat{W} в точности один цикл \widehat{C} . Этот цикл проходит по блокам в соответствии со стрелками диаграммы (5) и асимптотически устойчив.

Отметим, что пересечение цикла \widehat{C} с каждым блоком диаграммы (5) является прямолинейным отрезком и натянутая на этот цикл кусочно-линейная коническая поверхность Σ с вершиной E инвариантна относительно сдвигов вдоль траекторий системы (1), (2) (см. [16]).

Поведение траекторий системы (1), (2) за пределами инвариантного куба \widehat{Q} имеет более сложное описание.

Лемма 5. Внутри каждого из блоков разбиения (3) области Q система (1), (2) распадается на три независимых линейных уравнения с постоянными коэффициентами, ее траектории прямолинейны и их продолжения пересекаются в одной точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Рассмотрим блок $\{\beta\beta\alpha\}$, с которого будет начинаться построение цикла в области $Q \setminus Q^*$. В этом блоке динамическая система (1), (2) принимает вид

$$\dot{x}_1 = 2c - x_1; \quad \dot{x}_2 = -x_2; \quad \dot{x}_3 = -x_3.$$

Уравнения любого ее решения

$$x_1(t) = 2c(1 - e^{-t}) + x_1(0)e^{-t}, \quad x_2(t) = x_2(0)e^{-t}, \quad x_3(t) = x_3(0)e^{-t}$$

описывают полуправильную, проходящую через точку $(2c; 0; 0)$ при $t \rightarrow +\infty$.

Аналогичным образом устанавливается, что

продолжения траекторий точек блока $\{\beta B\alpha\}$ пересекаются в точке $(2c; 0; c - \varepsilon)$;
продолжения траекторий точек блока $\{\beta 1\alpha\}$ — в точке $(2c; 0; c - \delta)$;
продолжения траекторий точек блока $\{\beta 0\alpha\}$ — в точке $(2c; 0; c + \delta)$;
продолжения траекторий точек блока $\{\beta A\alpha\}$ — в точке $(2c; 0; c + \varepsilon)$;
продолжения траекторий точек блока $\{\beta\alpha\alpha\}$ — в точке $(2c; 0; 2c)$;
продолжения траекторий точек блока $\{\beta\alpha A\}$ — в точке $(c + \varepsilon; 0; 2c)$;
продолжения траекторий точек блока $\{\beta\alpha 0\}$ — в точке $(c + \delta; 0; 2c)$;
продолжения траекторий точек блока $\{\beta\alpha 1\}$ — в точке $(c - \delta; 0; 2c)$;
продолжения траекторий точек блока $\{\beta\alpha B\}$ — в точке $(c - \varepsilon; 0; 2c)$;
продолжения траекторий точек блока $\{\beta\alpha\beta\}$ — в точке $(2c; 0; 2c)$; и т. д.

2. Построение цикла в области $Q^* \setminus \widehat{Q}$ начнем с блока $\{BBA\}$. Точно так же, как и в первой части доказательства,

продолжения траекторий точек блока $\{BBA\}$ пересекаются в $(c + \varepsilon; c - \varepsilon; c - \varepsilon)$;
продолжения траекторий точек блока $\{B1A\}$ — в точке $(c + \varepsilon; c - \varepsilon; c - \delta)$;
продолжения траекторий точек блока $\{B0A\}$ — в точке $(c + \varepsilon; c - \varepsilon; c + \delta)$;
продолжения траекторий точек блока $\{BAA\}$ — в точке $(c + \varepsilon; c - \varepsilon; c + \varepsilon)$;
продолжения траекторий точек блока $\{BA0\}$ — в точке $(c + \delta; c - \varepsilon; c + \varepsilon)$;
продолжения траекторий точек блока $\{BA1\}$ — в точке $(c - \delta; c - \varepsilon; c + \varepsilon)$;
продолжения траекторий точек блока $\{BAB\}$ — в точке $(c - \varepsilon; c - \varepsilon; c + \varepsilon)$; и т. д.

3. Описание траекторий системы (1), (2) в остальных блоках разбиения (4) проводится подобным же образом; ограничимся здесь рассмотрением блоков, которые потребуются для формулировки основного результата этой работы. \square

Обозначим через W^* объединение перечисленных ниже в диаграмме (6) восемнадцати блоков, лежащих в $Q^* \setminus \widehat{Q}$.

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow \{BBA\} \rightarrow \{B1A\} \rightarrow \{B0A\} \rightarrow \{BAA\} \rightarrow \{BA0\} \rightarrow \{BA1\} \rightarrow \{BAB\} \\ &\rightarrow \{1AB\} \rightarrow \{0AB\} \rightarrow \{AAB\} \rightarrow \{AOB\} \rightarrow \{A1B\} \rightarrow \{ABB\} \\ &\rightarrow \{AB1\} \rightarrow \{AB0\} \rightarrow \{ABA\} \rightarrow \{0BA\} \rightarrow \{1BA\} \rightarrow \{BBA\} \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Аналогичным образом конструируется кольцевая диаграмма

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow \{\beta\beta\alpha\} \rightarrow \{\beta Ba\} \rightarrow \{\beta 1\alpha\} \rightarrow \{\beta 0\alpha\} \rightarrow \{\beta A\alpha\} \rightarrow \{\beta\alpha\alpha\} \\ &\rightarrow \{\beta\alpha A\} \rightarrow \{\beta\alpha 0\} \rightarrow \{\beta\alpha 1\} \rightarrow \{\beta\alpha B\} \rightarrow \{\beta\alpha\beta\} \rightarrow \{Ba\beta\} \rightarrow \{1\alpha\beta\} \\ &\rightarrow \{0\alpha\beta\} \rightarrow \{A\alpha\beta\} \rightarrow \{\alpha\alpha\beta\} \rightarrow \{\alpha A\beta\} \rightarrow \{\alpha 0\beta\} \rightarrow \{\alpha 1\beta\} \rightarrow \{\alpha B\beta\} \\ &\rightarrow \{\alpha\beta\beta\} \rightarrow \{\alpha\beta B\} \rightarrow \{\alpha\beta 1\} \rightarrow \{\alpha\beta 0\} \rightarrow \{\alpha\beta A\} \rightarrow \{\alpha\beta\alpha\} \\ &\rightarrow \{A\beta\alpha\} \rightarrow \{0\beta\alpha\} \rightarrow \{1\beta\alpha\} \rightarrow \{B\beta\alpha\} \rightarrow \{\beta\beta\alpha\} \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (7)$$

составленная из тридцати блоков, лежащих в области $Q \setminus Q^*$. Обозначим через W объединение блоков, перечисленных в диаграмме (7).

В отличие от диаграммы (5) траектории точек, лежащих в W^* , могут выходить из объединения W^* , а траектории точек, лежащих в W , могут выходить из W ; таким образом, области $W^* \subset Q^* \setminus \widehat{Q}$ и $W \subset Q \setminus Q^*$ не являются инвариантными.

2. Основной результат

Диаграммы (6) и (7) построены по аналогии с диаграммой (5), которая в простой ситуации одноступенчатых правых частей системы (1) без всяких предположений о ее симметричности описывает инвариантную окрестность периодической траектории этой системы. Такой подход позволяет распространить результаты [16, 17] на случай системы (1), (2).

Теорема. Если выполнено условие (3), то

1) область W содержит по крайней мере один цикл C динамической системы (1), (2). Этот цикл переходит из блока в блок согласно стрелкам диаграммы (7);

2) область W^* содержит по крайней мере один цикл C^* динамической системы (1), (2). Этот цикл переходит из блока в блок согласно стрелкам диаграммы (6).

Этапы доказательства теоремы также следуют стрелкам этих диаграмм.

Рассмотрим грань $F_0 = \{\beta\beta\alpha\} \cap \{B\beta\alpha\}$, разделяющую первые два блока первой строки диаграммы (7) и определяемую соотношениями $x_1 = c + \varepsilon$, $c + \varepsilon \leq x_2 \leq 2c$, $0 \leq x_3 \leq c - \varepsilon$.

Аналогичным образом обозначим остальные грани, разделяющие соседние блоки этой диаграммы:

$$\begin{aligned} F_1 &= \{\beta\beta\alpha\} \cap \{\beta B\alpha\}, \text{ где } x_2 = c + \varepsilon; \quad F_2 = \{\beta B\alpha\} \cap \{\beta 1\alpha\}, \text{ где } x_2 = c + \delta; \\ F_3 &= \{\beta 1\alpha\} \cap \{\beta 0\alpha\}, \text{ где } x_2 = c; \quad F_4 = \{\beta 0\alpha\} \cap \{\beta A\alpha\}, \text{ где } x_2 = c - \delta; \\ F_5 &= \{\beta A\alpha\} \cap \{\beta\alpha\alpha\}, \text{ где } x_2 = c - \varepsilon; \quad F_6 = \{\beta\alpha\alpha\} \cap \{\beta\alpha A\}, \text{ где } x_3 = c - \varepsilon; \\ F_7 &= \{\beta\alpha A\} \cap \{\beta\alpha 0\}, \text{ где } x_3 = c - \delta; \quad F_8 = \{\beta\alpha 0\} \cap \{\beta\alpha 1\}, \text{ где } x_3 = c; \\ F_9 &= \{\beta\alpha 1\} \cap \{\beta\alpha B\}, \text{ где } x_3 = c + \delta; \quad F_{10} = \{\beta\alpha B\} \cap \{\beta\alpha\beta\}, \text{ где } x_3 = c + \varepsilon. \end{aligned}$$

Подобные обозначения введем и для граней, разделяющих соседние блоки диаграммы (6):

$$\begin{aligned} F_0^* &= \{1BA\} \cap \{BBA\}, \text{ где } x_1 = c + \delta, c + \delta \leq x_2 \leq c + \varepsilon, c - \varepsilon \leq x_3 \leq c - \delta; \\ F_1^* &= \{BBA\} \cap \{B1A\}, \text{ где } c + \delta \leq x_1 \leq c + \varepsilon, x_2 = c + \delta, c - \varepsilon \leq x_3 \leq c - \delta; \\ F_2^* &= \{B1A\} \cap \{B0A\}, \text{ где } c + \delta \leq x_1 \leq c + \varepsilon, x_2 = c, c - \varepsilon \leq x_3 \leq c - \delta; \\ F_3^* &= \{B0A\} \cap \{BAA\}, \text{ где } c + \delta \leq x_1 \leq c + \varepsilon, x_2 = c - \delta, c - \varepsilon \leq x_3 \leq c - \delta; \\ F_4^* &= \{BAA\} \cap \{BA0\}, \text{ где } c + \delta \leq x_1 \leq c + \varepsilon, c - \varepsilon \leq x_2 \leq c - \delta, x_3 = c - \delta; \\ F_5^* &= \{BA0\} \cap \{BA1\}, \text{ где } c + \delta \leq x_1 \leq c + \varepsilon, c - \varepsilon \leq x_2 \leq c - \delta, x_3 = c; \\ F_6^* &= \{BA1\} \cap \{BAB\}, \text{ где } c + \delta \leq x_1 \leq c + \varepsilon, c - \varepsilon \leq x_2 \leq c - \delta, x_3 = c + \delta; \end{aligned}$$

2.1. Построение первых трех циклов C и C^* .

1. Пусть $T_0 \subset F_0$ — прямоугольный треугольник с вершиной в точке $(c + \varepsilon, c + \varepsilon, c - \varepsilon)$, с вертикальным катетом

$$\zeta_1 = \frac{2\varepsilon(\varepsilon - \delta)(c + \varepsilon)}{(c - \varepsilon)(c - \delta)} + \frac{2\delta(\varepsilon c + \delta^2)(c + \varepsilon)}{c(c - \delta)(c + \delta)}$$

и с горизонтальным катетом

$$\eta_0 = \frac{\zeta_1(c + \varepsilon)}{c - \varepsilon - \zeta_1}.$$

Продолжение гипотенузы этого треугольника пересекает ось Ox_1 в точке $x_1 = c + \varepsilon$.

Траектории точек пятиугольника $P_0 = F_0 \setminus T_0$ после прохождения через блок $\{\beta\beta\alpha\}$ попадают в прямоугольник $\Pi_1 \subset F_1$, задаваемый соотношениями

$$c + \varepsilon \leq x_1 \leq \frac{(c - \varepsilon)^2}{2c}, \quad 0 \leq x_3 \leq c - \varepsilon - \zeta_1.$$

Из первой части леммы 5 следует, что траектории точек прямоугольника Π_1 после прохождения через блоки $\{\beta B\alpha\}$, $\{\beta 1\alpha\}$, $\{\beta 0\alpha\}$ и $\{\beta A\alpha\}$ из первой строки диаграммы (7) попадают на грань $F_5 = \{\beta A\alpha\} \cap \{\beta\alpha\alpha\}$ в область Π_5 , задаваемую соотношением $x_1 \geq c + \varepsilon + \frac{2\varepsilon(c - \varepsilon)}{c + \varepsilon}$.

Аналогичным образом траектории точек области Π_5 после прохождения через следующие блоки $\{\beta\alpha A\}$, $\{\beta\alpha 0\}$, $\{\beta\alpha 1\}$ и $\{\beta\alpha B\}$ диаграммы (7) попадают на грань $F_{10} = \{\beta\alpha B\} \cap \{\beta\alpha\beta\}$ в область Π_{10} , задаваемую соотношениями

$$\frac{(c + \varepsilon)(\varepsilon - \delta)}{c - \delta} + \frac{2\delta(c^2 + \varepsilon^2)(c - \varepsilon)}{c(c^2 - \varepsilon^2)} + \frac{(c - \varepsilon)^2(3c\varepsilon - c\delta + \varepsilon^2 + \varepsilon\delta)}{(c + \varepsilon)^2(c + \delta)} \leq x_1 - c - \varepsilon; \quad (8)$$

$$0 \leq x_2 \leq \frac{(c - \varepsilon)^2}{c + \varepsilon}.$$

2. Построение цикла $C^* \subset W^*$ следует схеме построения цикла $C \subset W$, и поскольку область W^* состоит всего из восемнадцати блоков, для построения цикла C^* потребуется меньшее количество шагов, чем в описанном выше случае области W .

Пусть $T_0^* \subset F_0^*$ — прямоугольный треугольник с вершиной в точке $(c + \delta, c + \delta, c - \delta)$, с вертикальным катетом $\zeta_1^* = \frac{2\delta^2(\delta + \varepsilon)}{\varepsilon(\varepsilon - \delta)}$ и с горизонтальным катетом $\eta_0^* = \frac{\zeta_1^*(\delta + \varepsilon)}{\varepsilon - \delta - \zeta_1}$. Продолжение гипотенузы этого треугольника пересекает прямую $x_2 = c - \varepsilon$, $x_3 = c - \varepsilon$ в точке $x_1 = c + \delta$.

Траектории точек пятиугольника $P_0^* = F_0^* \setminus T_0^*$ после прохождения через блок $\{BBA\}$ попадают в прямоугольник $\Pi_1^* \subset F_1^*$, задаваемый соотношениями

$$c + \delta \leq x_1 \leq c + \delta + \frac{(\varepsilon - \delta)^2}{2\varepsilon}, \quad c - \varepsilon \leq x_3 \leq c - \delta - \zeta_1^*.$$

Из второй части леммы 5 следует, что траектории точек прямоугольника Π_1^* после прохождения через блоки $\{B1A\}$ из первой строки диаграммы (6) попадают на грань $F_3^* = \{B0A\} \cap \{BAA\}$ в область Π_3^* , которая задается соотношениями

$$c - \varepsilon - \frac{(\varepsilon - \delta)^2}{2\varepsilon} \geq x_1 \geq c + \delta + \frac{2\delta(\varepsilon - \delta)}{\delta + \varepsilon}.$$

Подобным же образом траектории точек области Π_3^* после прохождения через блоки $\{BAA\}$, $\{BA0\}$ и $\{BA1\}$ первой строки диаграммы (6) попадают на грань $F_6^* = \{\beta\alpha B\} \cap \{\beta\alpha\beta\}$ в область Π_6^* , задаваемую соотношениями

$$c + \delta + \frac{2\delta(\varepsilon - \delta)}{\varepsilon + \delta} \leq x_1 \leq c + \varepsilon - \frac{(\varepsilon - \delta)^2}{2\varepsilon}; \quad c - \varepsilon \leq x_2 \leq c - \delta - \frac{2\delta(\varepsilon - \delta)}{\varepsilon + \delta}. \quad (9)$$

2.2. Окончание доказательства теоремы. Ввиду симметричности системы (1), (2) относительно циклических перестановок переменных σ : $x_1 \Rightarrow x_2 \Rightarrow x_3 \Rightarrow x_1$ области W и W^* симметричны относительно поворотов вокруг прямой $x_1 = x_2 = x_3$ на углы, кратные $2\pi/3$. Обозначим через ψ такой поворот, который переводит грань F_0 в грань F_{10} , грань F_0^* — в грань F_{10}^* , грань F_{10} — в грань $F_{20} = \{\alpha B\beta\} \cap \{\alpha\beta\beta\}$, грань F_6^* — в грань $F_{12}^* = \{A1B\} \cap \{ABA\}$. При этом повороте грань F_{20} переходит в грань F_0 , грань F_{12}^* — в грань F_0^* , пятиугольник $P_0 \subset F_0$ переходит в пятиугольник $P_{10} \subset F_{10}$, пятиугольник P_{10} — в пятиугольник $P_{20} \subset F_{20}$ и пятиугольник $P_0^* \subset F_0^*$ переходит в пятиугольник $P_6^* \subset F_6^*$ и т. д.

Обозначим через Φ_0 сдвиг точек пятиугольника $P_0 \subset F_0$ вдоль их траекторий при прохождении через перечисленные выше блоки диаграммы (7) до грани F_{10} . При выполнении неравенств (3) выполняются также неравенства (8) и (9), откуда следует, что

$$\zeta_1 < c - \varepsilon - \frac{(c - \varepsilon)^2}{c + \varepsilon},$$

поэтому $\Phi_0(P_0) \subset P_{10}$. Пусть Φ_{10} — сдвиг точек пятиугольника $P_{10} \subset F_{10}$ вдоль их траекторий при прохождении через блоки $\{\beta\alpha\beta\}$, $\{Ba\beta\}$, $\{1\alpha\beta\}$, $\{0\alpha\beta\}$, $\{A\alpha\beta\}$, $\{\alpha\alpha\beta\}$, $\{\alpha A\beta\}$, $\{\alpha 0\beta\}$, $\{\alpha 1\beta\}$ и $\{\alpha B\beta\}$ до грани F_{20} . Аналогичным

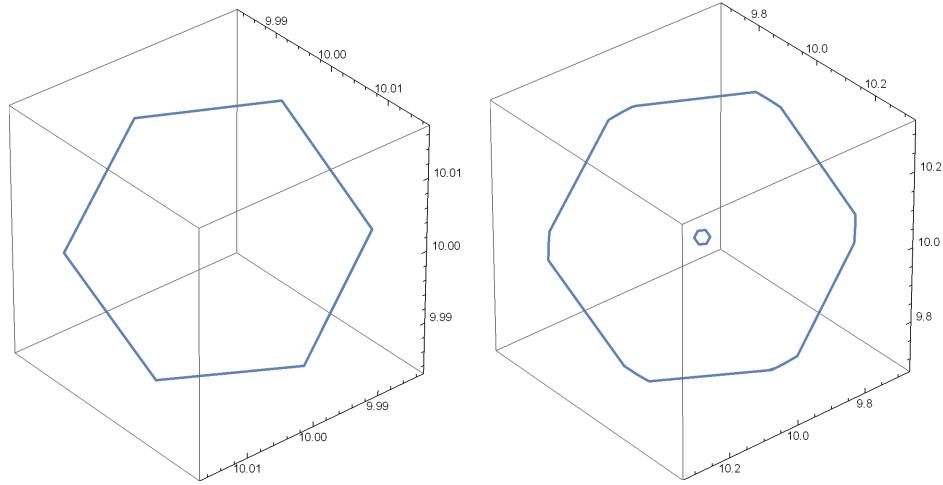
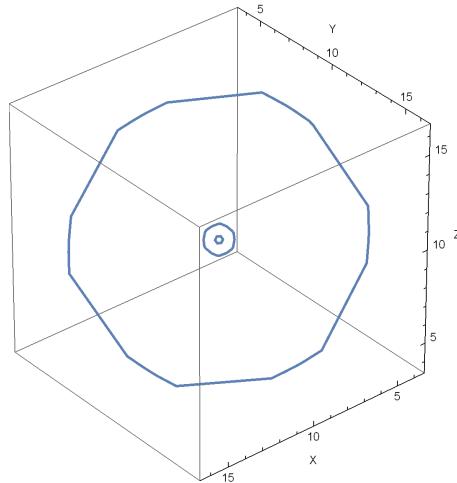
Рис. 1. Слева цикл \widehat{C} , справа циклы \widehat{C} и C^* .

Рис. 2. Три цикла системы (1), (2).

образом пусть Φ_{20} — сдвиг точек пятиугольника $P_{20} \subset F_{20}$ вдоль их траекторий при прохождении через оставшиеся блоки диаграммы (7) до грани F_0 и Φ_0^* — сдвиг точек пятиугольника

Рассмотрим композицию непрерывных отображений $\psi^{-1} \circ \Phi_0 : P_0 \rightarrow P_0$.

Пятиугольник P_0 компактен и гомеоморфен кругу. Из теоремы Брауэра о неподвижной точке, применяемой в подобных случаях при доказательствах существования циклов в фазовых портретах автономных динамических систем (см. [26]), следует, что в P_0 существует по крайней мере одна точка X такая, что $\psi^{-1} \circ \Phi_0(X) = X$. Пусть $X_1 = c + \varepsilon$, X_2 , X_3 — координаты этой точки. Тогда координаты точки $Y := \Phi_0(X)$ имеют вид $Y_1 = X_3$, $Y_2 = X_1 = c + \varepsilon$, $Y_3 = X_2$.

Эта точка Y при сдвиге Φ_{10} вдоль своей траектории перейдет в точку

$Z \in P_{20}$ с координатами $Z_1 = X_2$, $Z_2 = X_3$, $Z_3 = c + \varepsilon$. Ввиду симметричности системы (1), (2) относительно циклической перестановки σ траектория C точки X после обхода диаграммы (7) возвращается в исходное положение: $\Phi_{20}(\Phi_{10}(\Phi_0(X))) = X$, и, следовательно, является циклом.

Дословно теми же рассуждениями доказывается и вторая часть теоремы: пусть Φ_0^* — сдвиг точек пятиугольника P_0^* вдоль их траекторий при прохождении через блоки диаграммы (6) до грани F_6^* , аналогично определим и сдвиги Φ_6^* , Φ_{12}^* . Из неравенств (3), (9) вытекает оценка $\zeta_1^* < \frac{2\delta(\varepsilon-\delta)}{\varepsilon-\delta}$. Поэтому $\Phi_0^*(P_0^*) \subset P_6^*$, $\Phi_6^*(P_6^*) \subset P_{12}^*$, $\Phi_{12}^*(P_0^*) \subset P_0^*$. Композиция $\psi^{-1}\Phi_0^*$ переводит пятиугольник P_0^* в себя; согласно теореме Брауэра P_0^* содержит по крайней мере одну точку X^* такую, что $P_0^*(X^*) = \psi(X^*)$. Траектория этой точки после обхода по блокам диаграммы (6) возвращается в исходное положение и, следовательно, является циклом. \square

На рис. 1 приведены результаты вычислительных экспериментов с системой (1), (2) при $c = 10$, $\varepsilon = 0.5$, $\delta = 0.025$. Слева изображен самый маленький цикл этой системы, содержащийся в области \widehat{W} . Справа при тех же значениях параметров системы изображены устойчивые циклы \widehat{C} и C^* .

Внутренности окрестностей \widehat{W} , W^* , W циклов \widehat{C} , C^* и C попарно не пересекаются. Следовательно, границы этих окрестностей разделяют содержащиеся в них циклы.

Отметим, что неравенства (3) являются достаточными условиями существования циклов C^* и C . На рис. 2 изображены все три устойчивых цикла этой системы при $c = 10$, $\varepsilon = 1$, $\delta = 0.25$.

Все вычислительные эксперименты производились с помощью пакета *Mathematica* 12.1, лицензия 3322-8225.

Заключение

Построенные циклы $C \subset W$ и $C^* \subset W^*$ представляют собой примеры нелокальных колебаний; аналогичные периодические траектории широкого круга динамических систем изучались в [26, 27]. Цикл \widehat{C} , содержащийся в инвариантной области \widehat{W} , и натянутая на него инвариантная поверхность Σ при $\delta \rightarrow 0$ стягиваются в точку E и потому этот цикл \widehat{C} является кусочно-линейным аналогом бифуркационного цикла (см. [28]).

Полученные результаты о неединственности циклов по-видимому допускают обобщения на модели генных сетей больших размерностей и на динамические системы с правыми частями общего вида, которые моделируют описанные в [29–31] генные сети с более сложными положительными и отрицательными связями и их комбинациями.

Благодарность. Авторы искренне благодарны А. В. Глубоких и Е. А. Ситниковской за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пуанкаре А. О кривых, определяемыми дифференциальными уравнениями. М.-Л. ОГИЗ, 1947.
2. Ильяшенко Ю. С. Столетняя история 16-й проблемы Гильберта // Глобус. М.: МЦНМО, 2004. Вып. 1. С. 8–21.
3. Фет А. И. О периодической задаче вариационного исчисления. Докл. АН СССР. 1965. Т. 160, № 2. С. 287–289.
4. Llibre J., Novaes D.D., Texeira M. A. Maximum number of limit cycles for certain piecewise linear dynamical systems // Nonlinear Dynamics. 2015. V. 82, N 3. P. 1159–1175. DOI: [10.1007/s11071-015-2223-x].
5. Голубятников В. П., Кириллова Н. Е. О циклах в моделях функционирования колыцевых генных сетей. Сиб. журн. чистой и прикл. математики. 2018. Т. 18, № 1. С. 54–63.
6. Likhoshvai V. A., Golubyatnikov V. P., Khlebodarova T. M. Limit cycles in models of circular gene networks regulated by negative feedback loops // BMC Bioinformatics. 2020. V. 21 (Suppl 11). Article N 255.
7. Golubyatnikov V. P., Gradov V. S. Non-uniqueness of cycles in piecewise-linear models of circular gene networks // Sib. Adv. Math. 2021. V. 31, N 1. C. 1–12.
8. Glass L., Pasternack J. S. Stable oscillations in mathematical models of biological control systems // J. Math. Biology. 1978. V. 6. P. 207–223.
9. Системная компьютерная биология / Под ред. Н. А. Колчанова, С. С. Гончарова, В. А. Иванисенко, В. А. Лихошвай. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008.
10. Акиньшин А. А. Бифуркация Андронова — Хопфа для некоторых нелинейных уравнений с запаздыванием // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 3. С. 3–15.
11. Banks H. T., Mahaffy J. M. Stability of cyclic gene models for systems involving repression // J. Theor. Biology. 1978. V. 74. P. 323–334.
12. Baer S. M., Li B., Smith H. L. Multiple limit cycles in the standard model of three species competition for three essential resources // J. Math. Biology. 2006, V. 52. P. 745–760.
13. Tonnelier A. Cyclic negative feedback systems: what is the chance of oscillations // Bul. Math. Biology. 2014. V. 76, N 5. P. 1155–1193.
14. Лахова Т. Н., Казанцев Ф. В., Лашин С. А., Матушкин Ю. Г. Технологии поиска и исследования потенциально осциллирующих ферментативных систем // Вавиловский журн. генетики и селекции. 2021. Т. 5, № 3. С. 318–330.
15. Фрисман Е. Я., Кулаков М. П. О локальной би- и квадростабильности в пространственно-временной неоднородности: обзор математических моделей и содержательные следствия // Компьютерные исследования и моделирование. 2023. Т. 15, № 1. С. 75–109.
16. Аюрова Н. Б., Голубятников В. П. О единственности цикла в несимметричной трехмерной модели молекулярного репрессора // Сиб. журн. индустр. математики. 2014. Т. 17, № 1. С. 3–7.
17. Голубятников В. П., Иванов В. В., Минушкина Л. С. О существовании цикла в одной несимметричной модели колыцевой генной сети // Сиб. журн. чистой и прикл. математики. 2018. Т. 18, № 3. С. 27–35.
18. Голубятников В. П., Иванов В. В. Единственность и устойчивость цикла в трехмерных блочно-линейных моделях колыцевых генных сетей // Сиб. журн. чистой и прикл. математики. 2018. Т. 18, № 4. С. 19–28.
19. Galimzyanov A. V., Tchuraev R. N. Dynamic mechanism of phase variation in bacteria based on multistable gene regulatory networks // J. Theoret. Biology. 2022. V. 549. Article N 111212.
20. Buse O., Pérez R., Kuznetsov A. Dynamical properties of the repressilator model // Phys. Rev. E(3) 2010. V. 81. Article N 066206.
21. Likhoshvai V. A., Kogai V. V., Fadeev S. I., Khlebodarova T. M. Alternative splicing can lead to chaos // J. Bioinform. Comput. Biol. 2015. V. 13. Article N 1540003.
22. Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Явление буферности в колыцевых генных сетях // Теоретическая и математическая физика. 2016. Т. 187, № 3. С. 560–579.
23. Golubyatnikov V. P., Minushkina L. S. Combinatorics and geometry of circular gene networks models // Let. Vavilov J. Genetics and Breeding. 2020. V. 6, N 4. P. 188–192.
24. Кириллова Н. Е. Об инвариантных поверхностях в моделях генных сетей // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23, № 4. С. 69–76.

25. Иванов В. В. Притягивающий предельный цикл модели нечетномерной кольцевой генной сети // Сиб. журн. индустр. математики. 2022. Т. 25, № 3. С. 25–32.
26. Плисс В. А. Нелокальные проблемы теории колебаний. М. Наука. 1964.
27. Dudkowski D., Prasad A., Kapitaniak T. Perpetual points and hidden attractors in dynamical systems // Phys. Let. A. 2015. V. 379, N 40-41. P. 2591–2596.
28. Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П. Теория бифуркаций. Динамические системы. 5. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1986. Т. 5. С. 5–218. (Итоги науки и техники.)
29. Чумаков Г. А., Чумакова Н. А. Гомоклинические циклы в одной модели генной сети. Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 4. С. 97–106.
30. Минушкина Л. С. Фазовые портреты блочно-линейной динамической системы в одной модели кольцевой генной сети // Мат. заметки СВФУ. 2021. Т. 28, № 2. С. 34–46.
31. Минушкина Л. С. Периодические траектории нелинейных моделей кольцевых генных сетей // Владикавк. мат. журн. 2023. Т. 25, № 4. С. 80–90.

Поступила в редакцию 10 ноября 2023 г.

После доработки 12 декабря 2023 г.

Принята к публикации 29 февраля 2024 г.

Аюрова Наталья Борисовна, Волокитин Евгений Павлович
Голубятников Владимир Петрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Коптюга, 4, Новосибирск 630090
ayupova@math.nsc.ru, volok@math.nsc.ru,
vladimir.golubyatnikov1@fulbrightmail.org

ON NON-LOCAL OSCILLATIONS
IN GENE NETWORKS MODELS

N. B. Ayupova, E. P. Volokitin,
and V. P. Golubyatnikov

Abstract: We consider questions of non-uniqueness of cycles in phase portraits of systems of ordinary differential equations of biochemical kinetics with block-linear right-hand sides considered as models of simplest molecular repressilators functioning, and that of other circular gene networks. For these models of different dimensions, conditions of existence of cycles were elaborated previously and stability of these cycles was studied.

Now we describe a 3-dimensional dynamical system of this type and three piecewise linear cycles in its phase portrait, as well as their invariant neighborhoods, which are homeomorphic to a torus. This makes possible to localize these cycles and to determine their mutual arrangement.

The smallest of these three cycles is an elementary example of a hidden attractor of a nonlinear dynamical system. Two remaining cycles give examples of non-local oscillations in the phase portrait.

Numerical experiments with this dynamical system illustrate the results. In the previous publications, non-uniqueness of cycles was detected in higher-dimensional cases only, starting from $\dim = 5$.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-1-7-20

Keywords: circular gene network models, phase portraits of non-linear dynamical systems, invariant domains, multi-step functions, periodic trajectories.

REFERENCES

1. Poincaré H., On Curves Defined by Differential Equations [in Russian], OGIZ, Moscow, Leningrad (1947).
2. Ilyashenko Yu., “Centennial history of Hilberth’s 16-th problem,” Bull. Amer. Math. Soc., **39**, No. 3, 301–354 (2004).
3. Fet A. I., “A periodic problem in the calculus of variations,” Sov. Math. Dokl., **169**, No. 2, 85–88 (1965).
4. Llibre J., Novaes D. D., and Texeira M. A., “Maximum number of limit cycles for certain piecewise linear dynamical systems,” Nonlinear Dyn., **82**, No. 3, 1159–1175 (2015).
5. Golubyatnikov V. P. and Kirillova N. E., “On cycles in models of functioning of circular gene networks,” J. Math. Sci., **246**, No. 6, 779–788 (2020).
6. Likhoshvai V. A., Golubyatnikov V. P., and Khlebodarova T. M., “Limit cycles in models of circular gene networks regulated by negative feedback loops,” BMC Bioinform., **21** (suppl. 11), article No. 255 (2020).
7. Golubyatnikov V. P. and Gradov V. S., “Non-uniqueness of cycles in piecewise-linear models of circular gene networks,” Sib. Adv. Math., **31**, No. 1, 1–12 (2021).
8. Glass L. and Pasternack J. S., “Stable oscillations in mathematical models of biological control systems,” J. Math. Biol., **6**, 207–223 (1978).
9. Kolchanov N. A., Goncharov S. S., Ivanisenko V. A., and Likhoshvay V. A. (eds.), System Computer Biology [in Russian], Sib. Otdel. Ross. Akad. Nauk, Novosibirsk (2008).

10. Akinshin A. A., “The Andronov–Hopf bifurcation for some nonlinear delayed equations [in Russian],” *Sib. Zhurn. Industr. Mat.*, **16**, No. 3, 3–15 (2013).
11. Banks H. T. and Mahaffy J. M., “Stability of cyclic gene models for systems involving repression,” *J. Theor. Biol.*, **74**, 323–334 (1978).
12. Baer S. M., Li B., and Smith H. L., “Multiple limit cycles in the standard model of three species competition for three essential resources,” *J. Math. Biol.*, **52**, 745–760 (2006).
13. Tonnelier A., “Cyclic negative feedback systems: what is the chance of oscillations?” *Bull. Math. Biol.*, **76**, No. 5, 1155–1193 (2014).
14. Lakhova T. N., Kazantsev F. V., Lashin S. A., and Matushkin Yu. G., “The finding and researching algorithm for potentially oscillating enzymatic systems,” *Vavilov J. Genet. Breed.*, **25**, No. 3, 318–330 (2021).
15. Frisman E. Ya. and Kulakov M. P., “From local bi- and quadro-stability to space-time inhomogeneity: a review of mathematical models and meaningful conclusions,” *Comput. Res. Model.*, **15**, No. 1, 75–109 (2023).
16. Ayupova N. B. and Golubyatnikov V. P., “On the uniqueness of a cycle in an asymmetric three-dimensional model of a molecular repressilator,” *J. Appl. Ind. Math.*, **8**, No. 2, 153–157 (2014).
17. Golubyatnikov V. P., Ivanov V. V., and Minushkina L. S., “On existence of a cycle in one asymmetric gene network model [in Russian],” *Sib. J. Pure Appl. Math.*, **18**, No. 3, 27–35 (2018).
18. Golubyatnikov V. P. and Ivanov V. V., “Uniqueness and stability of a cycle in three-dimensional block-linear circular gene network models,” *Sib. J. Pure Appl. Math.*, **18**, No. 4, 19–28 (2018). [in Russian]
19. Galimzyanov A. V. and Tchuraev R. N., “Dynamic mechanism of phase variation in bacteria based on multistable gene regulatory networks,” *J. Theor. Biol.*, **549**, article No. 111212 (2022).
20. Buse O., Pérez R., and Kuznetsov A., “Dynamical properties of the repressilator model,” *Phys. Rev. E* (3), **81**, article No. 066206 (2010).
21. Likhoshvai V. A., Kogai V. V., Fadeev S. I., and Khlebodarova T. M., “Alternative splicing can lead to chaos,” *J. Bioinform. Comput. Biol.*, **13**, article No. 1540003 (2015).
22. Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., and Rozov N. Kh., “Buffering in cyclic gene networks,” *Theor. Math. Phys.*, **187**, No. 3, 560–579 (2016).
23. Golubyatnikov V. P. and Minushkina L. S., “Combinatorics and geometry of circular gene networks models,” *Lett. Vavilov J. Genet. Breed.*, **6**, No. 4, 188–192 (2020).
24. Kirillova N. E., “On invariant surfaces in gene network models,” *J. Appl. Ind. Math.*, **14**, No. 4, 666–671 (2020).
25. Ivanov V. V., “Attracting limit cycle of an odd-dimensional circular gene network model,” *J. Appl. Ind. Math.*, **16**, No. 3, 409–415 (2022).
26. Pliss V. A., Nonlocal Problems in the Theory of Oscillations, Acad. Press, New York (1966).
27. Dudkowski D., Prasad A., and Kapitaniak T., Perpetual points and hidden attractors in dynamical systems. *Phys. Lett. A*, **379**, No. 40–41, 2591–2596 (2015).
28. Arnold V. I., Afraimovich V. S., Il'yashenko Yu. S., and Shil'nikov L. P., “Bifurcation theory,” *Dyn. Syst. V*, pp. 1–205, Springer, Berlin (1994) (Encycl. Math. Sci., vol. 5).
29. Chumakov G. A. and Chumakova N. A., “Homoclinic cycles in a gene network model [in Russian],” *Mat. Zamet. SVFU*, **21**, No. 4, 97–106 (2014).
30. Minushkina L. S. “Phase portraits of a block-linear dynamical system in a model for a circular gene network [in Russian],” *Mat. Zamet. SVFU*, **28**, No. 2, 34–46 (2021).
31. Minushkina L. S., “Periodic trajectories of nonlinear circular gene network models [in Rus-

sian]," Vladikavkaz. Mat. Zhurn., **25**, No. 4, 80–90 (2023).

Submitted November 10, 2023

Revised December 12, 2023

Accepted February 29, 2024

Natalia B. Ayupova, Evgenyi P. Volokitin, and Vladimir P. Golubyatnikov
Sobolev Institute of Mathematics,

4 Koptyug Avenue, Novosibirsk 630090, Russia
ayupova@math.nsc.ru, volok@math.nsc.ru,
vladimir.golubyatnikov1@fulbrightmail.org

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГАНКЕЛЯ —
КАТРАХОВА И СИНГУЛЯРНЫЕ
К-ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ
Ю. Н. Булатов

Аннотация. Для исследования задач с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя $B_{-\gamma}$ с отрицательным параметром $-\gamma \in (-1, 0)$ в работе вводится интегральное преобразование на основе решения $u = \mathbb{J}_\mu$ сингулярного уравнения Бесселя $B_{-\gamma}u + u = 0$, которое выражено через функцию Бесселя первого рода с положительным параметром $\mu = \frac{\gamma+1}{2}$. Строятся четное, нечетное К-преобразования Бесселя (Ганкеля — Киприянова — Катрахова) и класс сингулярных К-псевдодифференциальных операторов. Получены основные теоремы о порядках сингулярных К-псевдодифференциальных операторов.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-1-21-34

Ключевые слова: сингулярный псевдодифференциальный оператор, преобразование Ганкеля — Киприянова — Катрахова, обобщенный псевдосдвиг, порядок операторов.

Введение

Применение специального преобразования Бесселя при исследовании задач для уравнений, содержащих сингулярный дифференциальный оператор Бесселя с отрицательным параметром, было предложено И. А. Киприяновым в начале 80-х гг. прошлого столетия. Такого рода исследования проведены в работе [1] для Δ_B -операторов вида

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^n B_{\gamma_i}, \quad B_\gamma = \frac{d^2}{dx_i^2} + \frac{\gamma}{x_i} \frac{d}{dx_i}$$

с параметром $\gamma \in (-1, 0)$. Представление оператора $\Delta_{B_{-\gamma}}$ в виде оператора Бельтрами на сфере позволяет считать сингулярный оператор Бесселя в качестве среднего между операторами Лапласа в \mathbb{R}_n и оператором Лапласа в \mathbb{R}_{n+1} (этот факт замечен в [2], доказан в [3]). Еще отметим, что в работе [4] исследовалась задача Коши, решение которой построено в виде ряда Фурье по функциям Бесселя $t^\mu J_\mu(x)$, где J_μ — функция Бесселя первого рода. Именно на этих функциях ($\mathbb{J}_\mu(t)$) в [5] введено специальное преобразование Бесселя, которое используется здесь для построения нового класса сингулярных псевдодифференциальных операторов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24–21–00387).

В работе вводится одномерное сингулярное преобразование Ганкеля — Киприянова — Катрахова, в рамках которого определен символ первой производной от четной функции. Этот факт позволяет получить основные теоремы о порядке введенных \mathbb{K} -псевдодифференциальных операторов в соответствующих функциональных пространствах Соболева — Киприянова.

1. Некоторые сведения, ассоциированные с оператором $B_{-\gamma}$

Отметим, что ограниченность действия оператора Бесселя B_k обеспечена применением его к четным функциям [6]. Функции, заданные на полуоси $x_i \in [0, \infty)$, будем называть *четными по Киприянову*, если возможно их четное продолжение на всю ось x_i с сохранением класса своей принадлежности [7, с. 21].

\mathbb{J} -функции Бесселя определены как линейно независимые решения сингулярного дифференциального уравнения Бесселя [5]

$$B_{-\gamma}u + u = 0, \quad -1 < -\gamma < 0. \quad (1)$$

Пусть $\mu = \frac{\gamma+1}{2}$. Фундаментальной системой решений этого уравнения являются функции

$$\mathbb{J}_{-\mu}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(1-\mu)}{m! \Gamma(m+1-\mu)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m} = \Gamma(1-\mu) 2^{-\mu} t^\mu J_{-\mu}(t),$$

$$\mathbb{J}_\mu(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(1+\mu)}{m! \Gamma(m+1+\mu)} \frac{t^{2(m+\mu)}}{2^{2m}} = \Gamma(1+\mu) 2^\mu t^\mu J_\mu(t).$$

где J_μ и $J_{-\mu}$ соответственно функции Бесселя первого рода, $\frac{1}{2} < \mu < 1$.

Константа $\Gamma(1-\mu)$ для первой из этих функций играет роль нормировочного коэффициента:

$$\mathbb{J}_{-\mu}(0) = 1.$$

Для второй функции (т. е. для $\mathbb{J}_\mu(t)$) это не так, поскольку

$$\mathbb{J}_\mu(0) = 0,$$

ввиду того, что если выполнено условие $0 > -\gamma > -1$, то $\mu = \frac{\gamma+1}{2} > 0$. Тем не менее функция \mathbb{J}_μ определена для всех положительных μ (в отличие от $\mathbb{J}_{-\mu}$), а введенная константа $\Gamma(\mu+1)$ играет важную роль при построении операторов *обобщенного Т-псевдосдвига*.

Решение $\mathbb{J}_{-\mu}$ более востребовано в спектральной теории сингулярных дифференциальных уравнений, что продемонстрировано в работах [8, 9].

1.1. Рекуррентное соотношение для производных \mathbb{J} -функции Бесселя.

Лемма 1. Имеет место следующая формула:

$$(\mathbb{J}_\mu(t))' = 2\mu t \mathbb{J}_{\mu-1}(t),$$

где $\mathbb{J}_{\mu-1}$ удовлетворяет уравнению $B_{2-\gamma}u + u = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Исходим из определения $\mathbb{J}_\mu(t) = t^{2m} j_{\mu(t)}$ [10]. Имеем

$$j_\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(k+\mu+1)} \frac{t^{2k}}{2^{2k}},$$

$$\mathbb{J}_\mu(t) = t^{2\mu} j_\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(k+\mu+1)} \frac{t^{2(k+\mu)}}{2^{2k}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (\mathbb{J}_\mu(t))' &= (t^{2\mu} j_\mu(t))' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(\mu+1)2(k+\mu)}{\Gamma(k+\mu)(k+\mu)} \frac{t^{2(k+\mu)-1}}{2^{2k}} \\ &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma([\mu-1]+1)}{\Gamma(k+[\mu-1]+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k} \right] 2\mu t^{(2\mu-2)} t \\ &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma([\mu-1]+1)}{\Gamma(k+[\mu-1]+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k} \right] 2\mu t^{2(\mu-1)} t = j_{\mu-1}(t) t^{2(\mu-1)} 2\mu t \\ &= 2\mu t \mathbb{J}_{\mu-1}(t). \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

Из леммы 1 вытекает

$$\text{Следствие 1. } (\mathbb{J}_\mu(\xi x))'_x = 2\mu \xi x \mathbb{J}_{\mu-1}(\xi x).$$

1.2. Четное, нечетное и полное \mathbb{J} -преобразования Бесселя на основе \mathbb{J} -функций Бесселя. Формула Ганкеля представления L_2 -функций, примененная к функции $u(x)x^{-\gamma} \in L_2(0, \infty)$, приводит к равенству (доказательство приведено в [5])

$$u(x) = \frac{1}{2^{2\mu} \Gamma^2(1+\mu)} \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(x\xi) \xi^{-\gamma} \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(y\xi) f(y) y^{-\gamma} dy d\xi,$$

из которого вытекают следующие определения.

Четными прямым и обратным \mathbb{J} -преобразованиями Ганкеля — Киприянова будем называть выражения

$$\mathbb{F}[f](\xi) = \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{(1)}[f](\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(\xi y) f(y) y^{-\gamma} dy,$$

$$\mathbb{F}^{-1}[f](\xi) = (\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{(1)})^{-1}[f](\xi) = \frac{1}{(\Gamma(1+\mu))^2 2^{2\mu}} \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(\xi x) \widehat{f}(\xi) \xi^{-\gamma} d\xi.$$

Обратимость этих преобразований вытекает из представления функций интегралом Фурье — Ганкеля.

Принимая во внимание [11] и следствие 1, введем нечетное \mathbb{J} -преобразование Ганкеля — Киприянова — Катрахова¹⁾, основанное на функции $\frac{1}{\xi}(\mathbb{J}_\mu(\xi x))'_x = 2\mu(\xi x)\mathbb{J}_{\mu-1}(\xi x)$, которое имеет вид

$$\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{(2)}[f](\xi) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{\xi} (\mathbb{J}_\mu(\xi x))'_x x^{-\gamma} dx.$$

Несобственный интеграл здесь, как обычно, понимается в смысле главного значения по Коши. Как видим, ядро этого преобразования нечетно, поэтому для четных функций $\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{(2)}[f](\xi) = 0$.

Лемма 2. Пусть f — четная функция из пространства основных функций Л. Шварца. Тогда

$$\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{(2)}[f'](\xi) = \xi \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{(1)}[f](\xi) = \xi \widehat{f}(\xi), \quad (2)$$

где $\widehat{f}(\xi)$ — четное \mathbb{J} -преобразование Ганкеля — Киприянова.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{(2)}[f'](\xi) &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(x)}{dx} \frac{1}{\xi} (\mathbb{J}_\mu(\xi x))'_x x^{-\gamma} dx = -\int_0^\infty \frac{df(x)}{dx} \frac{1}{\xi} (\mathbb{J}_\mu(\xi x))'_x x^{-\gamma} dx \\ &= \int_0^\infty f(x) \frac{x^\gamma}{\xi} \frac{d}{dx} (x^{-\gamma} (\mathbb{J}_\mu(\xi x))'_x) x^{-\gamma} dx. \end{aligned}$$

Поскольку $x^\gamma \frac{d}{dx} (x^{-\gamma} (\mathbb{J}_\mu(\xi x))'_x) = B_{-\gamma} \mathbb{J}_\mu(\xi x)$, имеем

$$\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{(2)}[f'(x)](\xi) = \int_0^\infty f(x) \frac{1}{\xi} B_{-\gamma} (\mathbb{J}_\mu(\xi x)) x^{-\gamma} dx.$$

Согласно равенству (1) получим

$$\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{(2)}[f'(x)](\xi) = \xi \int_0^\infty f(x) \mathbb{J}_\mu(\xi x) x^{-\gamma} dx = \xi \mathbb{F}^{(1)}[f](\xi) = \xi \widehat{f}(\xi).$$

Доказательство закончено.

Из равенства (2) видно, что преобразование $\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{(2)}$ производной четной функции свелось к преобразованию $\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{(1)}$. Поэтому удобно ввести одно преобразование со смешанным ядром

$$\frac{1}{2} \Lambda(x\xi) = \frac{1}{2} \mathbb{J}_\mu(x\xi) - \mu x \xi \mathbb{J}_{\mu-1}(x\xi).$$

¹⁾Это одно из преобразований Бесселя.

При этом, полагая

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f_{ev}(x) + f_{od}(x),$$

получим

$$\mathbb{K}[f](\xi) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \Lambda(x\xi) x^{-\gamma} dx = \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{(1)}[f_{ev}](\xi) + \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{(2)}[f_{od}](\xi),$$

где первое слагаемое представляет собой четное \mathbb{J} -преобразование Бесселя, а второе — нечетное \mathbb{J} -преобразование Бесселя²⁾.

Через $S_{ev} = S_{ev}(\mathbb{R}_1^+)$, $\mathbb{R}_1^+ = (0, \infty)$, будем обозначать пространство основных функций Л. Шварца.

Пусть α — целое неотрицательное число и $0 < \gamma < 1$. Введем сингулярный дифференциальный оператор

$$D_{B_{-\gamma}}^{\alpha} = \begin{cases} B_{-\gamma}^k, & \text{если } \alpha = 2k, \\ \frac{d}{dx} B_{-\gamma}^k, & \text{если } \alpha = 2k + 1, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad B_{-\gamma} = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{\gamma}{x} \frac{d}{dx}.$$

Заметим, что этот оператор ограниченно действует на четную функцию $u \in C_2[0, \infty)$, поскольку

$$\lim_{x \rightarrow 0} B_{\pm\gamma} u(x) = (1 \pm \gamma) u''(0).$$

Поэтому рассматриваемые далее функции удобно считать принадлежащими основному пространству функций $S_{ev}(\mathbb{R}_1^+)$, $\mathbb{R}_1^+ = (0, \infty)$.

Теорема 1 (о символе $D_{B_{-\gamma}}^{\alpha}$ -оператора). Для $f \in S(\mathbb{R}_1)$ имеет место формула

$$\mathbb{K}[D_{B_{-\gamma}}^{\alpha} f](\xi) = \begin{cases} \xi^{2k} \widehat{f}(\xi), & \text{если } \alpha = 2k \text{ четное,} \\ \xi^{2k+1} \widehat{f}(\xi), & \text{если } \alpha = 2k + 1 \text{ нечетное,} \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где $\widehat{f}(\xi)$ — четное преобразование Ганкеля — Киприянова.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что функция f четная (по Киприянову, если задана на положительной полуоси) и число $\alpha = 2k \geq 0$ четное. Тогда

$$\mathbb{K}[D_{B_{-\gamma}}^{\alpha} f](\xi) = \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{(1)}[B_{-\gamma}^k f](\xi) = \xi^{2k} \widehat{f}(\xi), \quad (4)$$

что доказано выше.

Пусть $\alpha = 2k + 1$ — нечетное число. Воспользовавшись леммой 1 и равенством (4), получим

$$\mathbb{K}[D_{B_{-\gamma}}^{\alpha} f](\xi) = \xi \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{(1)}[B_{-\gamma}^k f](\xi) = \xi^{2k+1} \widehat{f}(\xi). \quad (5)$$

Из (5) и (4) следует равенство (3).

Доказательство закончено.

²⁾Как видим, прослеживается аналогия с синус и косинус преобразованиями Фурье.

1.3. Пространства Соболева — Киприянова, ассоциированные с $D_{B_{-\gamma}}^{\alpha}$ -оператором Бесселя. Функциональные пространства формально вводятся по тем же схемам, что и в книге [6]. Весовую билинейную форму в $\mathbb{R}_1^+ = (0, \infty)$ определим равенством

$$(u, v)_{-\gamma} = \int_{\mathbb{R}_1^+} u(x)v(x)x^{-\gamma} dx. \quad (6)$$

Определение (6) порождает весовое функциональное пространство

$$L_2^{-\gamma} = L_2^{-\gamma}(0, \infty) = \{u : \|u\|_{L_2^{-\gamma}} = \sqrt{(u, u)_{-\gamma}} < \infty\}.$$

Пусть $\varphi \in S_{ev} = S_{ev}(\mathbb{R}_1^+)$, $\mathbb{R}_1^+ = (0, \infty)$. Соответствующее пространство функционалов, порожденное весовой линейной формой $(\cdot, \cdot)_{-\gamma}$, будем обозначать через S'_{ev} . Топология в S_{ev} определяется системой норм

$$|\langle u \rangle|_N = \sup |(1+x)^k D_{B_{-\gamma}}^{\ell} u(x)|,$$

где верхняя грань берется по всем $x \in \overline{\mathbb{R}_1^+}$ и всем k и ℓ с $k + \ell \leq N$, а N пробегает все целые неотрицательные числа.

Для любого вещественного s через $H_{-\gamma}^s(0, \infty)$ обозначим пополнение множества S_{ev} по норме

$$\|u\|_{H_{-\gamma}^s}^2 = \int_{\mathbb{R}_1^+} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 \xi^{-\gamma} d\xi, \quad (7)$$

где \widehat{u} — прямое \mathbb{J} -преобразование Ганкеля — Киприянова. При целом положительном $s = m$ норма (7) эквивалентна норме

$$\|u\|_{H_{-\gamma}^m}^2 = \sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\mathbb{R}_1^+} |D_{B_{-\gamma}}^{\alpha} u(x)|^2 x^{-\gamma} dx,$$

а при дробном s эквивалентна норме, содержащей киприяновские операторы дробного дифференцирования [12], порождаемые \mathbb{J} -преобразованием Ганкеля — Киприянова.

1.4. Теорема сложения для \mathbb{J}_{μ} -функции Бесселя. В статье [6] приведены свойства j -функции Бесселя

$$j_{\nu}(x) = 2^{\nu} \Gamma(\nu + 1) \frac{J_{\mu}(x)}{x^{\mu}}, \quad \nu > -\frac{1}{2},$$

и доказана следующая теорема сложения:

$$j_{\nu}(tx) j_{\nu}(ty) = T_x^y j_{\nu}(tx),$$

где T_x^y — обобщенный сдвиг Пуассона:

$$T_x^y f(tx) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{\nu}{2})} \int_0^{\pi} f(t \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha}) \sin^{2\nu} \alpha d\alpha.$$

Функции j_μ и \mathbb{J}_μ положительного индекса связаны равенством $\mathbb{J}_\mu(x) = x^{2\mu} j_\mu(x)$, из которого получаем теорему сложения для \mathbb{J}_μ -функций Бесселя:

$$\mathbb{J}_\mu(xt)\mathbb{J}_\mu(yt) = \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(xt), \quad (8)$$

где $\mu = \frac{\gamma+1}{2}$, $\frac{1}{2} < \mu < 1$ и оператор \mathbb{T}_x^y , имеет следующий вид:

$$\mathbb{T}_x^y f(tx) = \frac{\Gamma(\frac{\mu+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{\mu}{2})} (txy)^{2\mu} \int_0^\pi \frac{f(t\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha})}{(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha})^{2\mu}} \sin^{2\mu} \alpha d\alpha. \quad (9)$$

Оператор (9) будем называть *обобщенным Т-псевдосдвигом*. Он не принадлежит классу обобщенных сдвигов Левитана (так как $\mathbb{T}^0 f(x) \neq f(x)$, $\mathbb{T}_x^y 1 \neq 1$). Отметим, что далее будет указан только верхний индекс в обозначении (9), если переменная нижнего индекса очевидна.

2. Т-псевдосдвиг и некоторые свойства

Отметим, что особенность, возникающая в (9) при $x = y$ и при $\alpha = 0$, слабая.

Здесь приведены лишь необходимые для этой работы свойства Т-псевдосдвига (доказательства см. в [5]).

Свойство 1. Если f и g функции суммируемые с весом $x^{-\gamma}$, $0 < \gamma < 1$, то

$$(\mathbb{T}^y f, g)_{-\gamma} = (f, \mathbb{T}^y g)_{-\gamma}.$$

Свойство 2. Пусть f — четная дважды непрерывно дифференцируемая функция, $0 < \gamma < 1$ и $x^{-\gamma} f(x) \in L_2(0, \infty)$. Тогда

$$B_{-\gamma, x} \mathbb{T}_x^y f(x) = \mathbb{T}^y B_{-\gamma} f(x).$$

Свойство 3. Переместительность Т-псевдосдвига: если функция f представлена равномерно сходящимся рядом Фурье по \mathbb{J} -функциям Бесселя, то

$$\mathbb{T}_x^y \mathbb{T}_x^z f(x) = \mathbb{T}_x^z \mathbb{T}_x^y f(x).$$

Свойство 4. Ассоциативность Т-псевдосдвига: если функция f представлена равномерно сходящимся рядом Фурье по \mathbb{J} -функциям Бесселя, то

$$\mathbb{T}_y^z \mathbb{T}_x^y f(x) = \mathbb{T}_x^z \mathbb{T}_x^y f(x).$$

2.1. \mathbb{J} -Преобразование Киприянова псевдосвертки функций. Псевдосверткой функций будем называть выражение

$$\begin{aligned} (\varphi * \psi)_{-\gamma} &= \int_0^\infty \mathbb{T}^y \varphi(x) \psi(y) y^{-\gamma} dy \\ &= \frac{\Gamma(\frac{\gamma+3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{\gamma+2}{2})} \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{(xy)^{\gamma+1} \varphi(\sqrt{(x \xrightarrow{\alpha} y)})}{(x \xrightarrow{\alpha} y)^{\gamma+1}} \sin^{\gamma+1} \alpha d\alpha \psi(y) y^{-\gamma} dy, \end{aligned}$$

где $\gamma = 2\mu - 1$, $0 < \gamma < 1$, и $(x \xrightarrow{\alpha} y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha}$.

Теорема 2. Пусть $\varphi, \psi \in L_2^{-\gamma}(0, \infty)$ — четные функции. Тогда

$$\mathbb{F}_B^{(2)}[(\varphi * \psi)_{-\gamma}](\xi) = \mathbb{F}_B^{(1)}[(\varphi * \psi)_{-\gamma}](\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)\widehat{\psi}(\xi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, учитывая перестановочность \mathbb{T} -псевдосдвига в скалярном произведении в $L_2^{-\gamma}$ и теорему сложения (8), получим

$$\begin{aligned} \mathbb{F}[(\varphi * \psi)_{-\gamma}](\xi) &= \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(x\xi) \int_0^\infty \mathbb{T}^y \varphi(x)\psi(y)y^{-\gamma} dy x^{-\gamma} dx \\ &= \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(x\xi)\varphi(x)x^{-\gamma} dx \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(y\xi)\psi(y)y^{-\gamma} dy = \widehat{\varphi}(\xi)\widehat{\psi}(\xi). \end{aligned}$$

Следствие 2. Если положить $u = \mathbb{F}^{-1}\varphi$, а $v = \mathbb{F}^{-1}\psi$, то

$$\mathbb{F}[u v] = (\widehat{u} * \widehat{v})_{-\gamma}.$$

2.2. Представление линейного сингулярного дифференциального оператора в рамках преобразования Ганкеля — Киприянова — Катрахова. Рассмотрим линейный сингулярный дифференциальный оператор

$$L(D_{B_{-\gamma}}) = \sum_{k=0}^m a_k(x) D_{B_{-\gamma}}^k.$$

Если предположить, что функция u четная, достаточно гладкая и для нее имеет место представление $u(x) = (\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{(1)})^{-1}[\widehat{u}](x)$, то

$$L(D_{B_{-\gamma}})u(x) = \mathbb{K}_{\xi \rightarrow x}^{-1} \left[\sum_{k=0}^m a_k(x)(-\xi)^k \widehat{u}(\xi) \right] (x).$$

Обычно используемая символьная запись действия $L(B_{-\gamma})$ оператора имеет вид

$$L(B_{-\gamma})u(x) = \mathbb{K}^{-1}[a(x, \xi)\mathbb{F}[u]], \quad (10)$$

где функция

$$a(x, \xi) = \sum_{k=0}^m a_k(x)(-\xi)^k \quad (11)$$

является символом сингулярного дифференциального оператора $L(B_{-\gamma})$.

2.3. Представление $L(B_{-\gamma})$ -сопряженного оператора в рамках преобразования Ганкеля — Киприянова — Катрахова. Рассмотрим весовую линейную форму (6) в виде

$$(u, v)_{-\gamma} = \int_0^\infty u(x)\overline{v(x)}x^{-\gamma} dx.$$

Упрощая, предположим, что $u, v \in S_{ev}(0, \infty)$. Тогда

$$(L(B_{-\gamma})u, v)_{-\gamma} = \int_0^\infty L(B_{-\gamma})u(x)\overline{v(x)}x^{-\gamma} dx.$$

Исходя из \mathbb{J}_μ -представления Ганкеля оператора $L(B_{-\gamma})$, получим

$$\begin{aligned} (L(B_{-\gamma})u, v)_{-\gamma} &= \frac{1}{2^{2\mu}\Gamma^2(1+\mu)} \\ &\times \int_0^\infty x^{-\gamma} dx \int_0^\infty \xi^{-\gamma} d\xi \int_0^\infty \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(x\xi) a(x, \xi) \overline{v(x)} u(y) y^{-\gamma} dy \\ &= \frac{1}{2^{2\mu}\Gamma^2(1+\mu)} \int_0^\infty u(y) y^{-\gamma} dy \int_0^\infty \xi^{-\gamma} d\xi \int_0^\infty \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(x\xi) a(x, \xi) \overline{v(x)} x^{-\gamma} dx. \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$\tilde{L}(B_{-\gamma})v(y) = \frac{1}{2^{2\mu}\Gamma^2(1+\mu)} \int_0^\infty x^{-\gamma} dx \int_0^\infty \overline{\mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(x\xi)} \overline{a(x, \xi)} v(x) \xi^{-\gamma} d\xi.$$

Тогда

$$(L(B_{-\gamma})u, v)_{-\gamma} = (u, \tilde{L}(B_{-\gamma})v)_{-\gamma}.$$

Таким образом, оператор $\tilde{L}(B_{-\gamma})$ с комплексно сопряженным символом $\overline{a(x, \xi)}$ оказывается формально сопряженным оператору $L(B_{-\gamma})$.

Подобно (10) имеем следующую формальную запись действия сопряженного оператора:

$$L(B_{-\gamma})u(x) = \mathbb{F}^{-1}[\mathbb{F}[\overline{a(x, \xi)}u]], \quad (12)$$

где $\overline{a(x, \xi)}$ — символ оператора $\tilde{L}(B_{-\gamma})$, комплексно сопряженный символу (11).

3. Сингулярные \mathbb{J} -псевдодифференциальные операторы Киприянова

j -Псевдодифференциальные операторы введены в [13]. Оказалось, что введенные операторы образуют алгебру, истинный порядок которой -1 . Впоследствии в работе [14] введено специальное преобразование Фурье — Бесселя — Киприянова — Катрахова, которое позволило построить алгебру таких псевдодифференциальных операторов истинного порядка $-\infty$. Но введенные ниже псевдодифференциальные операторы построены по схеме j -псевдодифференциальных операторов Киприянова и образуют алгебру истинного порядка -1 .

Оператор D_B имеет смысл рассматривать на дифференцируемых четных функциях (так же, как и сингулярный дифференциальный оператор Бесселя).

Формулы (10) и (12) приводят к общим конструкциям операторов, включающих линейные сингулярные операторы типа $L(B_{-\gamma})$.

Так как норма, записанная в образах \mathbb{J} -преобразований Ганкеля — Киприянова, приведет к умножению на символ, представляющий многочлен порядка m , для многочлена с ограниченными коэффициентами справедливо неравенство

$$\left| \sum_{\alpha \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \right| \leq \sum_{|\alpha| \leq m} |a_\alpha(x)| (1 + |\xi|)^\alpha.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть s — действительное число. Через $\Xi_{-\gamma}^s = \Xi_{-\gamma}^s(\mathbb{R}_1^+ \times \mathbb{R}_1^+)$ будем обозначать класс бесконечно дифференцируемых четных по x и по ξ функций $a(x, \xi)$, удовлетворяющих неравенству

$$|(D_{B_{-\gamma}}^\alpha)_x (D_{B_{-\gamma}}^\beta)_\xi a(x, \xi)| \leq C(1 + \xi)^{s-\beta} \quad (13)$$

при любых α и β с константами $C = C_{\alpha, \beta}$, не зависящими от x и ξ . Класс функций $\Xi_{-\gamma}^s$ будем называть *пространством символов порядка s* .

Топология в $\Xi_{-\gamma}^m$ определяется счетным набором норм

$$\|a\|_N = \sup(1 + \xi^2)^{\frac{-m+\beta}{2}} |(D_{B_{-\gamma}}^\alpha)_x (D_{B_{-\gamma}}^\beta)_\xi a(x, \xi)|,$$

где верхняя грань берется по всем $x, \xi \in \overline{\mathbb{R}_1^+}$ и по всем неотрицательным целым числам a, β таким, что $\alpha + \beta \leq N$, а N пробегает все неотрицательные целые числа.

Из (13) следует, что

$$\mathbb{F}_{x \rightarrow \eta}((1 + B_{-\gamma})^p)_x (D_{B_{-\gamma}}^\beta)_\xi a(x, \xi) = (1 + \eta^2)^p (D_{B_{-\gamma}}^\beta)_\xi^1 \hat{a}(\eta, \xi) \leq C(1 + \xi^2)^{\frac{m-\beta}{2}},$$

где ${}^1\hat{a}$ — обозначение \mathbb{J} -преобразования Ганкеля — Киприянова функции $a(x, \xi)$ по первой переменной. Для любого положительного числа p найдется такая константа C , что

$$\begin{aligned} {}^1\hat{a}(\eta, \xi) &\leq C(1 + \eta^2)^{-p} (1 + \xi^2)^{\frac{m}{2}}, \\ (D_{B_{-\gamma}}^\beta)_\xi^1 \hat{a}(\eta, \xi) &\leq C(1 + \eta^2)^{-p} (1 + \xi^2)^{\frac{m-\beta}{2}}. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Операторы, действующие на функцию, принадлежащую пространству $S_{ev}(0, \infty)$, по формулам

$$Au(x) = \int_{\mathbb{R}_1} \int_{\mathbb{R}_1} \mathbb{T}_x^y \Lambda_\mu(x\xi) a(x, \xi) u(y) y^{-\gamma} dy \xi^{-\gamma} d\xi, \quad (14)$$

$$\mathcal{A}u(x) = \int_{\mathbb{R}_1} \int_{\mathbb{R}_1} \mathbb{T}_x^y \Lambda_\mu(x\xi) a(y, \xi) u(y) y^{-\gamma} dy \xi^{-\gamma} d\xi, \quad (15)$$

где $-\gamma = -2\mu + 1$, будем называть *сингулярными \mathbb{K} -псевододифференциальными операторами Киприянова — Катрахова*. Функция $a(x, \xi) \in \Xi_{-\gamma}^m$ называется *символом порядка m* этих операторов. В рамках наших исследований нечетным по переменной ξ символом является производная по переменной ξ четной по ξ функции $a(x, \xi)$. В результате преобразование Ганкеля — Киприянова — Катрахова \mathbb{K} с ядром Λ превращается в преобразование $\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{(1)}$ Ганкеля — Киприянова

четных функций с ядром \mathbb{J} после того, как первая производная интегрированием по частям окажется на функции $x^{-\gamma}(\mathbb{J}_\mu(\xi x))'_x$, что приводит к равенству

$$x^\gamma \frac{d}{dx}(x^{-\gamma}(\mathbb{J}_\mu(\xi x))'_x) = B_{-\gamma}\mathbb{J}_\mu(\xi x) = -\xi^2\mathbb{J}_\mu(\xi x).$$

После такого рода преобразований операторы с «нечетным» символом окажутся операторами с «четным» символом и мы имеем дело с четным преобразованием Ганкеля — Киприянова, для которого соответствующие результаты приведены в работах [15, 16].

Приведем формулировки теорем о порядках сингулярных \mathbb{J} -псевдодифференциальных операторов с символом из Ξ_{ev}^m и теоремы о произведении и коммутаторах.

Теорема 3. Сингулярный \mathbb{J} -псевдодифференциальный оператор (14), (15) с символом $a(x, \xi) \in \Xi_{ev}^m$ является оператором порядка m , т. е.

$$\|Au\|_{H_{-\gamma}^s} \leq C\|u\|_{H_{-\gamma}^{s+m}}.$$

Теорема 4. Сингулярный \mathbb{J} -псевдодифференциальный оператор $A - \mathcal{A}$ с символом $a(x, \xi) \in \Xi_{ev}^m$ является оператором порядка $m - 1$, т. е.

$$\|(A - \mathcal{A})u\|_{H_{-\gamma}^{s-m+1}} \leq C\|u\|_{H_{-\gamma}^s}.$$

Пусть $a_1(x, \xi) \in \Xi_{ev}^{m_1}$, $a_2(x, \xi) \in \Xi_{ev}^{m_2}$, A_1 и A_2 — соответствующие этим символам сингулярные псевдодифференциальные операторы. Утверждение, аналогичное теореме 1, справедливо для произведения $A_1 A_2$ и сингулярного псевдодифференциального оператора с символом, равным произведению символов операторов A_1 и A_2 . Этот оператор будем обозначать $A_1 \circ A_2$.

Теорема 5. Оператор $A_1 A_2 - A_1 \circ A_2$ имеет порядок $m_1 + m_2 - 1$ в пространстве $H_{-\gamma}^s(\mathbb{R}_n)$, т. е.

$$\|(A_1 A_2 - A_1 \circ A_2)u\|_{H_{-\gamma}^{s-m_1-m_2+1}} \leq C\|u\|_{H_{-\gamma}^s}.$$

Благодарность. Автор выражает благодарность профессору Л. Н. Ляхову за постановку задачи и своевременные консультации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляхов Л. Н., Санина Е. Л. Оператор Киприянова — Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B -гармонического уравнения // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 12. С. 1610–1620.
2. Metzler R., Glockle W. G., Nonnenmacher T. F. Fractional model equation for anomalous diffusion // Phys. A: Stat. Mech. Appl. 1994. V. 211, N 1. P. 13–24.
3. Ляхов Л. Н., Санина Е. Л. Дифференциальные и интегральные операции в скрытой сферической симметрии и размерность кривой Коха // Мат. заметки. 2023. Т. 113, № 4. С. 517–528.
4. Сабитов К. Б., Зайцева Н. В. Начальная задача для B -гиперболического уравнения с интегральным условием второго рода // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 1. С. 123.

5. Ляхов Л. Н., Булатов Ю. Н., Рощупкин С. А., Санина Е. Л. Псевдосдвиг и фундаментальное решение Δ_B -оператора Киприянова // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58, № 12. С. 1654–1665.
6. Левитан Б. М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. 1951. Т. 6, № 2. С. 102–143.
7. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука, 1997.
8. Сабитов К. Б., Зайцева Н. В. Вторая начально-границчная задача для В-гиперболического уравнения // Изв. вузов. Математика. 2019. № 10. С. 75–86.
9. Сабитов К. Б. О равномерной сходимости разложения функции в ряд Фурье — Бесселя // Изв. вузов. Математика. 2022. № 11. С. 89–96.
10. Ляхов Л. Н., Санина Е. Л., Рощупкин С. А., Булатов Ю. Н. Фундаментальное решение сингулярного дифференциального оператора Бесселя с отрицательным параметром // Изв. вузов. Математика. 2023. № 7. С. 52–65.
11. Киприянов И. А., Катрахов В. В. Об одном классе одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов // Мат. сб. 1977. Т. 104, № 1. С. 49–68.
12. Киприянов И. А. Об одном операторе, порожденном преобразованием Фурье — Бесселя // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 3. С. 601–620.
13. Киприянов И. А., Ляхов Л. Н. Об одном классе псевдодифференциальных операторов // Докл. АН СССР. 1974. Т. 218, № 2. С. 278–280.
14. Катрахов В. В., Ляхов Л. Н. Полное преобразование Фурье — Бесселя и алгебра сингулярных псевдодифференциальных операторов // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 5. С. 681–695.
15. Ляхов Л. Н., Рощупкин С. А., Булатов Ю. Н. Сингулярные псевдодифференциальные операторы Киприянова, порожденные J -преобразованием Бесселя // Проблемы математического анализа. 2023. № 121. С. 71–82.
16. Ляхов Л. Н., Булатов Ю. Н. О произведении и коммутаторе сингулярных J -псевдодифференциальных операторов Киприянова в \mathbb{R}_n // И. А. Киприянов–100: Сб. статей, посвященных 100-летию со дня рождения Киприянова Ивана Александровича, выдающегося подвижника математики. Воронеж: Издат.-полиграф. центр «Научная книга», 2023. С. 149–174.

Поступила в редакцию 15 ноября 2023 г.

После доработки 10 декабря 2023 г.

Принята к публикации 29 февраля 2024 г.

Булатов Юрий Николаевич
Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина,
ул. Коммунаров, 28.1, Елец 399770 Липецкой обл.
y.bulatov@bk.ru

THE HANKEL—KIPRIANOV—KATRAKHOV
TRANSFORM AND SINGULAR
 \mathbb{K} -PSEUDODIFFERENTIAL OPERATORS
Yu. N. Bulatov

Abstract: To study problems with the singular differential Bessel operator $B_{-\gamma}$ with a negative parameter $-\gamma \in (-1, 0)$, the paper introduces an integral transformation based on the solution $u = J_\mu$ of the singular Bessel equation $B_{-\gamma}u + u = 0$, which is expressed through the Bessel function of the first kind with a positive parameter $\mu = \frac{\gamma+1}{2}$. An even and an odd \mathbb{K} -Bessel (Hankel–Kipriyanov–Katrakhov) transform as well as a class of singular \mathbb{K} -pseudodifferential operators are constructed. The main theorems on the orders of singular \mathbb{K} -pseudodifferential operators with symbol from Ξ_{ev}^m (Sobolev–Kipriyanov function spaces) and a theorem on products and commutators are proved.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-1-21-34

Keywords: singular pseudodifferential operator, Hankel–Kipriyanov–Katrakhov transform, generalized pseudoshift, order of operators.

REFERENCES

1. Lyakhov L. N. and Sanina E. L., “Kipriyanov–Beltrami operator with negative dimension of the Bessel operators and the singular Dirichlet problem for the B -harmonic equation,” Differ. Equ., **56**, 1564–1574 (2020).
2. Metzler R., Glockle W. G., and Nonnenmacher Th. F., “Fractional model equation for anomalous diffusion,” Phys. A: Stat. Mech. Appl., **211**, No. 1, 13–24 (1994).
3. Lyakhov L. N. and Sanina E. L., “Differential and integral operations in hidden spherical symmetry and the dimension of the Koch curve,” Math. Notes, **113**, 502–511 (2023).
4. Sabitov K. B. and Zaitseva N. V., “Initial value problem for B -hyperbolic equation with integral condition of the second kind,” Differ. Equ., **54**, 121–133 (2018).
5. Lyakhov L. N., Bulatov Yu. N., Roshchupkin S. A., and Sanina E. L., “Pseudoshift and the fundamental solution of the Kipriyanov Δ_B -operator,” Differ. Equ., **58**, 1639–1650 (2022).
6. Levitan B. M., “Expansion in Fourier series and integrals with Bessel functions [in Russian],” Usp. Mat. Nauk, **6**, No. 2, 102–143 (1961).
7. Kipriyanov I. A., Singular Elliptic Boundary Value Problems [in Russian], Nauka, Moscow (1997).
8. Sabitov K. B. and Zaitseva N. V., “The second initial-boundary value problem for a B -hyperbolic equation,” Russ. Math., **63**, 66–76 (2019).
9. Sabitov K. B., “On the uniform convergence of the expansion of a function in the Fourier–Bessel range,” Russ. Math., **66**, 79–85 (2022).
10. Lyakhov L. N., Sanina E. L., Roshchupkin S. A., and Bulatov Yu. N., “Fundamental solution of a singular Bessel differential operator with a negative parameter,” Russ. Math., **67**, 43–54 (2023).
11. Kipriyanov I. A. and Katrakhov V. V., “On a class of one-dimensional singular pseudodifferential operators,” Math. USSR, Sb., **33**, 43–61 (1977).

12. Kipriyanov I. A., “An operator generated by the Fourier–Bessel transform,” *Sib. Math. J.*, **8**, No. 3, 433–458 (1967).
13. Kipriyanov I. A. and Lyakhov L. N., “On a class of pseudodifferential operators,” *Sov. Math., Dokl.*, **15**, 1319–1322 (1974).
14. Katrakhov V. V. and Lyakhov L. N., “Full Fourier–Bessel transform and the algebra of singular pseudodifferential operators,” *Differ. Equ.*, **47**, No. 5, 681–695 (2011).
15. Lyakhov L. N., Roshchupkin S. A., and Bulatov Yu. N., “Kipriyanov singular pseudodifferential operators generated by Bessel J -transform,” *J. Math. Sci.*, **269**, 205–216 (2023).
16. Lyakhov L. N. and Bulatov Yu. N., “Composition and commutator of singular J -pseudodifferential Kipriyanov operators in \mathbb{R}_N ,” *Lobachevskii J. Math.*, **44**, 3438–3454 (2023).

Submitted November 15, 2023

Revised December 12, 2023

Accepted February 29, 2024

Yuriy N. Bulatov

Bunin Yelets State University,

28.1 Kommunarov Street, 399770 Yelets, Lipetsk Region, Russia

y.bulatov@bk.ru

РАЗРЕШИМОСТЬ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ
ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО
ТИПА В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ
И. Е. Егоров, С. В. Сафонов

Аннотация. Изучению различных краевых задач для уравнений смешанного типа второго порядка посвящены работы Ф. Трикоми, А. В. Бицадзе, М. М. Смирнова и многих других авторов. В данных работах применялась теория сингулярных интегральных уравнений. С 1970-х гг. к исследованию краевых задач для уравнения смешанного типа начали применять функциональные методы и методы, связанные с функциональным анализом. Началось построение общей теории краевых задач для уравнений смешанного типа с произвольным многообразием изменения типа. В частности, при некоторых предположениях о знакоподопределенности коэффициента при второй производной по времени вблизи оснований цилиндрической области доказаны существование и единственность регуляярного решения краевой задачи врагова и первой краевой задачи для уравнения смешанного типа второго порядка с помощью метода регуляризации.

В 2019 г. А. Н. Артишин доказал существование, единственность обобщенного и регуляярного решений краевой задачи Врагова в весовом пространстве Соболева, когда коэффициент при второй производной по времени может менять знак на основаниях цилиндрической области.

В данной работе установлены существование обобщенного решения и однозначная регуляярная разрешимость первой краевой задачи для уравнения смешанного типа второго порядка в весовом пространстве Соболева, когда коэффициент при старшей производной уравнения по времени может менять знак на нижнем основании и отрицательный на верхнем основании цилиндрической области.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-1-35-47

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, первая краевая задача, разрешимость, оценка.

1. Введение

Изучению различных краевых задач для уравнений смешанного типа второго и высокого порядков посвящено много работ [1–11]. Краткий обзор современных работ в данной области дан в статьях [12–16]. Работа В. Н. Врагова [9] положила начало построению общей теории краевых задач для уравнений смешанного типа с произвольным многообразием изменения типа в отличие от работ [1–4], в которых применялась теория сингулярных интегральных уравнений. К исследованию краевых задач для уравнений смешанного типа начали

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания (проект № FSRG-2023-0025).

применять функциональные методы, метод вспомогательного оператора, метод регуляризации, метод Галеркина и другие методы. В частности, в [9] при некоторых условиях и знакопределенности коэффициента уравнения при старшей производной по времени вблизи оснований цилиндрической области были доказаны существование и единственность регулярного решения краевой задачи Врагова с помощью метода регуляризации. В работах [12, 13] при аналогичных условиях на коэффициенты уравнения нестационарный метод Галеркина применен к регулярной разрешимости краевой задачи Врагова и получена оценка погрешности метода Галеркина через параметр регуляризации и собственные числа задачи Дирихле для оператора Лапласа по пространственным переменным. В [16] установлены существование и единственность регулярного решения краевой задачи Врагова в весовом пространстве Соболева, когда коэффициент при старшей производной по времени может менять знак на основаниях цилиндрической области. В работе [10] впервые была сформулирована первая краевая задача для уравнения смешанного типа второго порядка и исследована регулярная разрешимость с помощью метода регуляризации, когда коэффициент при старшей производной знакопределен на основаниях цилиндрической области. При аналогичных условиях на коэффициенты уравнения в [15] с помощью нестационарного метода Галеркина исследована регулярная разрешимость первой краевой задачи и получена оценка погрешности метода Галеркина.

В данной работе будут установлены существование и единственность регулярного решения первой краевой задачи в весовом пространстве Соболева, когда коэффициент при старшей производной уравнения по времени может менять знак на нижнем основании и отрицательный на верхнем основании цилиндрической области.

2. Постановка первой краевой задачи и предварительные сведения

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей S ,

$$Q = \Omega_t \times (0, T), \quad \Gamma = S \times (0, T), \quad \Omega_t = \Omega \times t, \quad 0 \leq t \leq T.$$

В области Q рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu \equiv k(x, t)u_{tt} - \Delta u + a(x, t)u_t + c(x)u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

где коэффициенты являются достаточно гладкими функциями. Введем множества

$$\Omega_0^\pm = \{(x, 0) : k(x, 0) \geq 0, x \in \Omega\}, \quad \Omega_T^\pm = \{(x, T) : k(x, T) \geq 0, x \in \Omega\}.$$

Краевая задача I [10]. Найти решение уравнения (1) в области Q такое, что

$$u|_\Gamma = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{\overline{\Omega}_0^+} = 0, \quad u|_{\overline{\Omega}_T^-} = 0. \quad (2)$$

Пусть C_L — класс функций из $W_2^2(Q)$, удовлетворяющих краевым условиям (2).

Лемма 1 [7, 10, 15]. Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой и выполнены условия

$$k(x, T) < 0, \quad a - \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0.$$

Тогда существуют неотрицательные бесконечно дифференцируемые функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ такие, что имеет место неравенство

$$(Lu, \varphi u_t + \psi u) \geq C_1 \|u\|_1^2, \quad C_1 > 0,$$

для всех функций $u \in C_L$.

Здесь и в дальнейшем для целого $k \geq 1$ норма в пространстве Соболева $W_2^k(Q)$ обозначается через $\|u\|_k$, скалярное произведение в $L_2(Q)$ — через (u, v) для u, v из $L_2(Q)$, $\|u\|^2 = (u, u)$,

$$(f, g)_0 = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx, \quad \|f\|_0^2 = (f, f)_0, \quad f, g \in L_2(\Omega).$$

Введем обозначения: $k_0(x) = k(x, 0)$, $k_T(x) = k(x, T)$ и

$$k_0^+(x) = \begin{cases} k_0(x), & \text{если } k_0(x) > 0, \\ 0, & \text{если } k_0(x) \leq 0, \end{cases}$$

$k_0^-(x) = k_0(x) - k_0^+(x)$. Аналогично определяются срезки $k_T^\pm(x)$, $k^\pm(x, t)$. Определим пространства

$$\widetilde{W}_2^1(Q) = \{u(x, t) \in W_2^1(Q) : u|_{\Gamma} = 0, u|_{t=0} = 0, u|_{\Omega_T^-} = 0\},$$

$$\widehat{W}_2^1(Q) = \{\eta(x, t) \in W_2^1(Q) : \eta|_{\Gamma} = 0, \eta|_{t=T} = 0\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $u(x, t) \in \widetilde{W}_2^1(Q)$ называется *обобщенным решением краевой задачи I*, если найдется $\chi_0(x) \in L_2(\Omega)$ такая, что для любой функции $\eta(x, t) \in \widehat{W}_2^1(Q)$ выполнено интегральное тождество

$$\begin{aligned} a(u, \eta) &= \int_Q \left[-ku_t \eta_t + (a - k_t)u_t \eta + \sum_{i=1}^n u_{x_i} \eta_{x_i} + cu \eta \right] dQ \\ &= (f, \eta) - \int_{\Omega_0^-} \sqrt{|k_0(x)|} \chi_0(x) \eta(x, 0) dx, \quad f \in L_2(Q). \quad (3) \end{aligned}$$

При $k(x, T) < 0$, $x \in \overline{\Omega}$, будем предполагать, что для некоторой постоянной $R_0 > 0$ выполнено неравенство [16]

$$|\nabla k_0(x)|^2 \leq R_0 |k_0(x)|, \quad x \in \overline{\Omega}. \quad (4)$$

Определим вес $R(x, t)$ следующим образом:

$$R(x, t) = |k_0(x)| + t.$$

Лемма 2. Пусть выполнено условие (4). Тогда для некоторых констант $C_2, C_3 > 0$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |k(x, t)| + |\nabla k(x, t)|^2 &\leq C_2 R(x, t), \quad (x, t) \in \overline{Q}, \\ |\nabla R(x, t)|^2 &\leq C_3 R(x, t) \quad \text{для п.в. } (x, t) \in Q. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $0 \leq t \leq T$ имеет место неравенство

$$|k(x, t) - k(x, 0)| + |\nabla k(x, t) - \nabla k(x, 0)| \leq C_0(k)t.$$

С помощью условия (4) из этого неравенства нетрудно получить первую оценку для $k(x, t)$, $(x, t) \in \overline{Q}$.

Снова в силу (4) будем иметь второе неравенство леммы 2:

$$|\nabla R(x, t)|^2 \leq C_3 R(x, t) \quad \text{для п.в. } (x, t) \in Q, \quad C_3 > 0.$$

Лемма 2 доказана.

3. Разрешимость первой краевой задачи

Теорема 1. Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой, выполнены условия

$$k(x, T) < 0, \quad a - \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0$$

и δ достаточно велико.

Тогда первая краевая задача (1), (2) имеет обобщенное решение $u(x, t)$ из $\widetilde{W}_2^1(Q)$ и справедлива оценка

$$\|u\|_1 \leq C_4 \|f\|, \quad C_4 > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\varepsilon > 0$ положим

$$L_\varepsilon v = -\varepsilon D_t^3 v + Lv.$$

В качестве базисных функций берем $\varphi_k(x)$, которые являются решением спектральной задачи

$$-\Delta \varphi = \lambda \varphi, \quad \varphi|_S = 0,$$

причем функции $\varphi_k(x)$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$. Рассмотрим регуляризованную краевую задачу

$$L_\varepsilon v = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \tag{5}$$

$$v|_\Gamma = 0, \tag{6}$$

$$v|_{t=0, t=T} = 0, \quad (-\varepsilon v_{tt} + k_0^+ v_t)|_{t=0} = 0. \tag{7}$$

Приближенное решение задачи (5)–(7) ищем в виде

$$v^{N, \varepsilon}(x, t) = \sum_{k=1}^N C_k^{N, \varepsilon}(t) \varphi_k(x) = v(x, t),$$

в котором $C_k^{N,\varepsilon}(t)$ определяется как решение следующей краевой задачи для системы ОДУ третьего порядка:

$$(L_\varepsilon v^{N,\varepsilon}, \varphi_e)_0 = (f, \varphi_e)_0, \quad l = \overline{1, N}, \quad (8)$$

$$C_l^{N,\varepsilon}|_{t=0,t=T} = 0, \quad \left(-\varepsilon D_t^2 C_l^{N,\varepsilon} + \sum_{k=1}^N a_{kl} D_t C_k^{N,\varepsilon} \right)|_{t=0} = 0, \quad (9)$$

где

$$a_{kl} = \int_{\Omega} k_0^+(x) \varphi_k(x) \varphi_e(x) dx, \quad k, l = \overline{1, N}.$$

Найдется положительное число $T_0 < T$ такое что,

$$k(x, t) \leq -\delta_1 < 0, \quad t \in [T_0, T].$$

Выберем функции $\varphi_0 = T - t$, $\psi = \frac{3}{2}$. Умножим уравнения (8) на $\varphi_0(t) D_t C_l^{N,\varepsilon} + \psi(t) C_l^{N,\varepsilon}$ и просуммируем по l , затем проинтегрируем по t от 0 до T . После интегрирования по частям с учетом (9) получаем равенство

$$\begin{aligned} (f, \varphi_0 v_t + \psi v) &= \varepsilon \int_Q \varphi_0 v_{tt}^2 dQ + \int_Q \left\{ \left[\left(a - \frac{1}{2} k_t \right) (T - t) - k \right] v_t^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 + 2c(x)v^2 + \frac{3}{2}(a - k_t)v_t v \right\} dQ \\ &\quad + \frac{T}{2} \int_{\Omega_0} |k_0| v_t^2 dx + \frac{\varepsilon}{4} \int_{\Omega_T} v_t^2 dx - \frac{\varepsilon}{4} \int_{\Omega_0} v_t^2 dx. \end{aligned} \quad (10)$$

Считаем δ настолько большим, что

$$\delta(T - T_0) - \max_{\overline{Q}} |k| \geq \delta_2 > 0.$$

Тогда

$$\left(a - \frac{1}{2} k_t \right) (T - t) - k \geq \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0.$$

В силу теоремы о следах [17] справедлива оценка

$$\int_{\Omega_0} v_t^2 dx \leq \gamma \int_{\Omega \times (0, \frac{T}{2})} \left[\varphi_0 v_{tt}^2 + \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 \right] dx + C_\gamma \int_{\Omega \times (0, \frac{T}{2})} v^2 dQ, \quad \gamma > 0, \quad C_\gamma > 0.$$

Для достаточно малых $\gamma > 0$ и $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ из равенства (10) получаем оценку

$$\varepsilon \int_Q \varphi_0 v_{tt}^2 dQ + \int_{\Omega_0} |k_0| v_t^2 dQ + \|v\|_1^2 \leq C_5 \|f\|^2, \quad C_5 > 0. \quad (11)$$

Из оценки (11) получаем единственность решения краевой задачи (8), (9), из которой следует, что краевая задача (8), (9) разрешима.

Выберем число T_1 так, чтобы

$$T_0 < T_1 < T.$$

Возьмем неотрицательную функцию $\xi(t) \in C^\infty[0, T]$ такую, что

$$\xi(t) = 0, \quad t \in [0, T_0], \quad \xi(t) = 1, \quad t \in [T_1, T].$$

Умножив уравнения (8) на $-\xi(t)D_t^2C_l^{N,\varepsilon}$, как выше, получим соотношение

$$\begin{aligned} -(f, \xi v_{tt}) &= \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega_T} v_{tt}^2 dx - \frac{\varepsilon}{2} \int_Q \xi_t v_{tt}^2 dQ \\ &\quad + \int_Q \left[-k\xi v_{tt}^2 - \xi v_{tt}(av_t + cv) + \xi \sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2 - \frac{1}{2} \xi_{tt} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 \right] dQ, \end{aligned}$$

из которого в силу (11) следует неравенство

$$\int_{\Omega \times (T_1, T)} \left[v_{tt}^2 + \sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2 \right] dQ \leq C_6 \|f\|^2, \quad C_6 > 0. \quad (12)$$

Из (12) в силу оценки (11) вытекает ограниченность множества $\{\sqrt{\varepsilon}v_{tt}\}$ в $L_2(Q)$, $0 < \varepsilon < 1$. Для натурального числа m положим $v^{(m)}(x, t) = v^{m, \frac{1}{m}}$. В силу оценки (11) из последовательности $\{v^{(m)}\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{v^{(m_k)}\}$ такую, что для некоторых $u(x, t) \in \widetilde{W}_2^1(Q)$, $\chi_0(x) \in L_2(\Omega)$ имеет место сходимость

$$\begin{aligned} v^{m_k} &\longrightarrow u \text{ слабо в } W_2^1(Q), \\ \sqrt{|k_0|}v_t^{m_k}(x, 0) &\longrightarrow \chi_0(x) \text{ слабо в } L_2(\Omega) \text{ при } m_k \rightarrow \infty. \\ v^{(m_k)}(x, 0) &= 0, \quad v^{(m_k)}(x, T) = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию $\eta(x, t)$ из

$$M_p = \left\{ \eta(x, t) = \sum_{l=1}^p d_l(t) \varphi_l(x), \quad d_l(t) \in W_2^1(0, T), \quad d_l(T) = 0, \quad p < N \right\}.$$

Умножим уравнения (8) при $N = m_k$, $\varepsilon = \frac{1}{m_k}$ на $d_l(t)$ и просуммируем по l , затем проведем интегрирование по t . В полученном равенстве проведем интегрирование по частям и перейдем к пределу по m_k . В результате получим интегральное тождество (3), $\eta(x, t) \in M_P$. Так как $M = \bigcup_{P=1}^{\infty} M_p$ плотно в $\widehat{W}_2^1(Q)$, функция $u(x, t)$ является обобщенным решением краевой задачи (1), (2). Оценка теоремы 1 следует из априорной оценки (11). Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Вопрос единственности обобщенного решения краевой задачи (1), (2) рассмотрен в [11].

Введем весовое пространство Соболева

$W_L = \{u(x, t) : u \in W_2^1(Q), \Delta u \in L_2(Q); u_{tx_i} \in L_2(Q), i = \overline{1, n}, R^{\frac{1}{2}}u_{tt} \in L_2(Q)\}$ с нормой

$$\|u\|_L^2 = \|u\|_1^2 + \int_Q \left[Ru_{tt}^2 + (\Delta u)^2 + \sum_{i=1}^n u_{tx_i}^2 \right] dQ.$$

Теорема 2. Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой и выполнены условия

$$k(x, T) < 0, \quad a - \frac{1}{2}|k_t| \geq \delta > 0, \quad f, f_t \in L_2(Q)$$

и δ достаточно велико. Тогда первая краевая задача (1), (2) имеет единственное решение $u(x, t)$ из W_L и справедлива оценка

$$\|u\|_L \leq C_7(\|f\| + \|f_t\|), \quad C_7 > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим обе части уравнения (8) на $\lambda_l(\varphi_0 D_t C_l^{N,\varepsilon} + \frac{3}{2} C_l^{N,\varepsilon})$ и просуммируем по l , затем проведем интегрирование по t . После интегрирования по частям в полученном равенстве с учетом (9) получаем

$$\begin{aligned} & - \left(f, \varphi_0 \Delta v_t + \frac{3}{2} \Delta v \right) \\ &= \varepsilon \int_Q \varphi_0 \sum_{i=1}^n v_{ttx_i}^2 dQ + \int_Q \left\{ \left[\left(a - \frac{1}{2} k_t \right) (T-t) - k \right] \sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2 + 2(\Delta v)^2 \right. \\ & \quad + \varphi_0 v_{tt} \sum_{i=1}^n k_{x_i} v_{tx_i} + \varphi_0 v_t \sum_{i=1}^n a_{x_i} v_{tx_i} + \frac{3}{2} v_{tt} \sum_{i=1}^n k_{x_i} v_{x_i} \\ & \quad \left. - \frac{3}{2} k_t \sum_{i=1}^n v_{tx_i} v_{x_i} + \Delta v \left[c(\varphi_0 v)_t - \frac{3}{2} (av_t + cv) \right] \right\} dQ + I, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$I = \frac{T}{2} \int_{\Omega_0} |k_0| \sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2 dx + T \int_{\Omega_0^+} v_t \sum_{i=1}^n k_{0x_i}^+ v_{tx_i} dx + \frac{1}{4} \varepsilon \int_{\Omega_T} \sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2 dx - \frac{1}{4} \varepsilon \int_{\Omega_0} \sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2 dx.$$

Снова из уравнения (8) аналогично выводу (13) получаем равенства

$$\begin{aligned} & - (f, \varphi_0 v_{tt}) = \frac{\varepsilon}{2} \int_Q v_{tt}^2 dQ + \int_Q \left[-k \varphi_0 v_{tt}^2 + \varphi_0 \sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} (a \varphi_0)_t v_t^2 + c \varphi_0 v_t^2 - cv v_t \right] dQ - \frac{\varepsilon T}{2} \int_{\Omega_0} v_{tt}^2 dx + \frac{T}{2} \int_{\Omega_0} av_t^2 dx, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & (f, \xi \Delta v) = -\frac{21\varepsilon}{8T} \int_Q \sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2 dQ + \int_Q [\Delta v (k \xi v_{tt} + a \xi v_t + c \xi v) - \xi (\Delta v)^2] dQ \\ & \quad + \frac{7\varepsilon}{8} \int_{\Omega_0} \sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2 dx, \quad \xi = \frac{7(T-t)}{4T}. \end{aligned} \quad (15)$$

Складывая равенства (13)–(15) и объединяя соответствующие интегралы, получим соотношение

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_Q \varphi_0 (\nabla v_{tt})^2 dQ + \frac{\varepsilon}{2} \int_Q v_{tt}^2 dQ + \int_Q \left\{ \left[\left(a - \frac{1}{2} k_t \right) (T-t) - k + \varphi_0 - \frac{21}{8T} \varepsilon \right] (\nabla v_t)^2 \right. \\ & \quad \left. + (2-\xi)(\Delta v)^2 - K \varphi_0 v_{tt}^2 + \frac{3}{2} v_{tt} \sum_{i=1}^n k_{x_i} v_{x_i} + K \right\} dQ + M \\ & = \int_Q \left\{ \left[f_t \varphi_0 + \left(\xi - \frac{5}{2} \right) f \right] \Delta v + (f \varphi_0)_t v_t \right\} dQ + \frac{\varepsilon T}{2} \int_{\Omega_0} v_{tt}^2 dQ + T \int_{\Omega_0} f v_t dx, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} K &= \sum_{i=1}^n v_{tx_i} \left(\varphi_0 k_{x_i} v_{tt} + \varphi_0 a_{x_i} v_t - \frac{3}{2} k_t v_{tx_i} \right) \\ &\quad + \Delta v \left[k \xi v_{tt} + \left(c \varphi_0 + \left(\xi - \frac{3}{2} \right) a \right) v_t + c \left(\xi - \frac{5}{2} \right) v \right] + \left[\frac{1}{2} (a \varphi_0)_t + c \varphi_0 \right] v_t^2, \\ M &= \frac{T}{2} \int_{\Omega_0} |k_0| (\nabla v_t)^2 dx + T \int_{\Omega_0} v_t \sum_{i=1}^n k_{0x_i}^+ v_{tx_i} dx \\ &\quad + \frac{5}{8} \varepsilon \int_{\Omega_0} (\nabla v_t)^2 dx + \frac{\varepsilon}{4} \int_{\Omega_T} (\nabla v_t)^2 dx + \frac{T}{2} \int_{\Omega_0} a v_t^2 dx. \end{aligned}$$

Заметим, что при выводе соотношения (16) использовали равенство

$$\int_Q c v v_t dQ = 0.$$

В силу (4) и неравенства Коши имеем

$$\int_{\Omega_0^+} \left| v_t \sum_{i=1}^n k_{0x_i}^+ v_{tx_i} \right| dx \leq \gamma \int_{\Omega_0^+} |k_0| (\nabla v_t)^2 dx + C_\gamma \int_{\Omega_0^+} v_t^2 dx, \quad \gamma > 0, \quad C_\gamma > 0.$$

Ввиду неравенств

$$\left(a - \frac{1}{2} k_t \right) (T-t) - k \geq \min\{\delta_1, \delta_2\}, \quad 2 - \xi(t) \geq \frac{1}{4}, \quad a(x, 0) \geq \delta$$

из соотношения (16), используя лемму 2 и оценку (11), неравенство Коши, теорему о следах, при достаточно большом δ и малых ε, γ получаем оценку

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_{\Omega_0} (\nabla v_t)^2 dx + \varepsilon \int_{\Omega_T} (\nabla v_t)^2 dx + \int_{\Omega_0} [v_t^2 + |k_0| (\nabla v_t)^2] dx \\ & \quad + \varepsilon \int_Q [\varphi_0 (\nabla v_{tt})^2 + v_{tt}^2] dQ + \int_Q [(\nabla v_t)^2 + (\Delta v)^2] dQ \\ & \leq C_8 \left[\|f\|_{0,1}^2 + \int_Q R v_{tt}^2 dQ + \varepsilon \int_{\Omega_0} v_{tt}^2 dx \right], \quad C_8 > 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\|f\|_{0,1}^2 = \|f\|^2 + \|f_t\|^2$.

При выводе оценки (17) были использованы (11) и известное неравенство Коши. Из (8) можно получить оценку v_{ttt} в норме $L_2(Q)$, что позволяет переходить к пределу в функции $v = u^{N,\varepsilon}$ по N , аналогично работе [16]. Обозначим через $\omega(x,t) = v^\varepsilon(x,t)$ регулярное решение краевой задачи (5)–(7). Умножая уравнение (5) на $-2(R\omega_{tt})_t$ и проводя интегрирование по частям, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} k_0^+ R\omega_{tt}^2 dx + \int_{\Omega_T} |k_T| R\omega_{tt}^2 dx - 2 \int_{\Omega} a R\omega_t \omega_{tt} dx \Big|_{t=0}^{t=T} \\ & + \int_{\Omega} R(\nabla \omega_t)^2 dx \Big|_{t=0}^{t=T} + 2\varepsilon \int_Q R\omega_{ttt}^2 dQ + 2\varepsilon \int_Q \omega_{ttt} \omega_{tt} dQ \\ & + \int_Q \left\{ [(2a + k_t)R - k]\omega_{tt}^2 + 2cR\omega_{tt}\omega_t + 2a_t R\omega_t \omega_{tt} - \right. \\ & \left. - R(\nabla \omega_t)^2 + 2\omega_{tt} \sum_{i=1}^n R_{x_i} \omega_{tx_i} \right\} dQ = 2 \int_Q R\omega_{tt} f_t dQ - 2 \int_{\Omega} R\omega_{tt} f dx \Big|_{t=0}^{t=T}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу условий теоремы 2, оценок (11), (17) и неравенства $|k_T|R(x,T) \geq \delta_1 T$ получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} (R^2 + \delta\varepsilon)\omega_{tt}^2 dx + \int_{\Omega_T} \omega_{tt}^2 dx + \delta \int_Q R\omega_{tt}^2 dQ \\ & \leq C_9 \left[\|f\|_{0,1}^2 + \int_Q R\omega_{tt}^2 dQ + \varepsilon \int_{\Omega_0} \omega_{tt}^2 dx + \int_{\Omega_T} a^2 \omega_t^2 dx \right], \quad C_9 > 0. \quad (18) \end{aligned}$$

Выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$\delta - C_9 \geq \delta_3 > 0.$$

Снова в силу теоремы о следах [17] имеем неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} \omega_t^2 dx & \leq \nu \int_{\Omega \times (T_0, T)} \left[R\omega_{tt}^2 + \sum_{i=1}^n \omega_{x_i}^2 \right] dQ \\ & + C_{10}(\nu, \delta_1, T_0) \int_{\Omega \times (T_0, T)} \omega^2 dQ, \quad \nu > 0, \quad C_{10} > 0. \quad (19) \end{aligned}$$

С учетом (19) из (18) получаем оценку

$$\begin{aligned} & (\delta - C_9)\varepsilon \int_{\Omega_0} \omega_{tt}^2 dx + (\delta - C_9 - \nu C_9 \max_{\bar{\Omega}} [a^2(x, T)]) \int_Q R\omega_{tt}^2 dQ \\ & \leq C_{11}(\nu) \|f\|_{0,1}^2, \quad C_{11} > 0, \quad \nu > 0. \end{aligned}$$

Поэтому если ν мало, то из последнего неравенства получаем

$$\int_Q R\omega_{tt}^2 dQ + \varepsilon \int_{\Omega_0} \omega_{tt}^2 dx \leq C_{12} \|f\|_{0,1}^2, \quad C_{12} > 0.$$

Из (17) следует оценка

$$\int_Q [R\omega_{tt}^2 + (\Delta\omega)^2 + (\nabla\omega_t)^2] dQ \leq C_{13} \|f\|_{0,1}^2, \quad C_{13} > 0.$$

Из краевых условий (7) имеем

$$\int_{\Omega_0} (k_0^+)^2 \omega_t^2(x, 0) dx \leq C_{14} \varepsilon \|f\|_{0,1}^2, \quad C_{14} > 0.$$

Из полученных априорных оценок следует разрешимость краевой задачи (1), (2) из весового пространства W_L и

$$\sqrt{|k_0|} u_t|_{\Omega_0^+} = 0. \quad (20)$$

Пусть $u(x, t) \in W_L$ является решением краевой задачи (1), (2) при $f = 0$. Тогда в силу (20)

$$\begin{aligned} 0 = \left(Lu, \varphi_0 u_t + \frac{3}{2} u \right) &= \int_Q \left\{ \left[\left(a - \frac{1}{2} k_t \right) \varphi_0 - k \right] u_t^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + 2cu^2 - \frac{3}{2}(a_t - k_{tt})u^2 \right\} dQ - \frac{T}{2} \int_{\Omega_0^-} k_0^- u_t^2 dx. \end{aligned}$$

Отсюда $u(x, t) = 0$. Следовательно, краевая задача (1), (2) имеет единственное решение в пространстве W_L . Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. М.: Гостехиздат, 1947.
2. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
3. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970.
4. Салахитдинов М. С. Уравнения смешанно-составного типа и их приложения. Ташкент: ФАН, 1974.
5. Моисеев Е. И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
6. Кузьмин А. Г. Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1990.
7. Егоров И. Е., Федоров В. Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1995.
8. Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В. Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.
9. Врагов В. Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 6. С. 1098–1105.
10. Терехов А. Н. Краевая задача для уравнения смешанного типа // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики. Новосибирск: ИМ СО СССР, 1979. С. 128–136.

11. Федоров В. Е. Теорема единственности обобщенного решения одной краевой задачи для уравнения смешанного типа // Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: ИМ СО РАН СССР, 1989. С. 193–196.
12. Егоров И. Е., Тихонова И. М. Применение модифицированного метода Галеркина к уравнению смешанного типа // Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 4. С. 14–19.
13. Тихонова И. М., Егоров И. Е. О модифицированном методе Галеркина для уравнения смешанного типа второго порядка // Мат. семинара молодых ученых «Актуальные вопросы вещественного и функционального анализа». Улан-Удэ, 2015. С. 96–99.
14. Егоров И. Е., Тихонова И. М. Модифицированный метод Галеркина для задачи Врагова // Сиб. электрон. мат. изв. 2015. Т. 12. С. 732–742. DOI 10.17377/semi.2015.12.059.
15. Егоров И. Е. Применение модифицированного метода Галеркина к первой краевой задаче для уравнения смешанного типа // Мат. заметки СВФУ. 2015. Т. 22, № 3. С. 3–10.
16. Артюшин А. Н. Краевая задача для уравнения смешанного типа в цилиндрической области // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 2. С. 274–289.
17. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.

Поступила в редакцию 16 сентября 2023 г.

После доработки 15 февраля 2024 г.

Принята к публикации 29 февраля 2024 г.

Егоров Иван Егорович
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,

НИИ математики,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
IvanEgorov51@mail.ru

Сафонов Степан Васильевич
Республиканский лицей-интернат,
ул. Ойунского, 37, Якутск 677000
rl_ssv@mail.ru

SOLVABILITY OF THE FIRST BOUNDARY
VALUE PROBLEM FOR A MIXED TYPE
EQUATION IN A WEIGHT SPACE
I. E. Egorov and S. V. Safonov

Abstract: The works of F. Tricomi, A. V. Bitsadze, M. M. Smirnov and many other authors are devoted to the study of various boundary value problems for equations of mixed type of second order. In these works, the theory of singular integral equations was used. Since the 1970s, functional methods and methods associated with functional analysis began to be applied to the study of boundary value problems for mixed type equations. The construction of a general theory of boundary value problems for equations of mixed type with an arbitrary variety of changing type began. In particular, under certain assumptions and the sign of the coefficient of the second derivative with respect to time near the bases of the cylindrical region, the existence and uniqueness of a regular solution to the enemy boundary value problem and the first boundary value problem for a second order mixed type equation is proved using the regularization method.

In 2019 A. N. Artyushin proved the existence and uniqueness of a generalized and regular solution to Vragov's boundary value problem in the weighted Sobolev space, when the coefficient of the second derivative with respect to time can change sign on the bases of a cylindrical domain.

In this work, we will establish the existence of a generalized solution and the unique regular solvability of the first boundary value problem for a second order mixed type equation in the weighted Sobolev space, when the coefficient of the highest derivative of the equation with respect to time can change sign on the lower base and negative on the upper base of the cylindrical domain.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-1-35-47

Keywords: mixed type equation, first boundary value problem, solvability, estimate.

REFERENCES

1. Tricomi F. G., On Linear Equations of Mixed Type [in Russian], Gostekhizdat, Moscow; Leningrad (1947).
2. Bitsadze A. V., Equations of Mixed Type [in Russian], Akad. Nauk SSSR, Moscow (1959).
3. Smirnov M. M., Equations of Mixed Type [in Russian], Nauka, Moscow (1970).
4. Salakhitdinov M. S., Equations of Mixed-Composite Type [in Russian], Fan, Tashkent (1974).
5. Moiseev E. I., Mixed Type Equations with a Spectral Parameter [in Russian], Izdat. Moskov. Univ., Moscow (1988).
6. Kuz'min A. G., Nonclassical Equations of Composite Type and Their Applications to Gas Dynamics [in Russian], Leningrad. Univ., Leningrad (1990).
7. Egorov I. E. and Fedorov V. E., Higher-Order Nonclassical Equations of Mathematical Physics [in Russian], Vychisl. Tsentr Sib. Otdel. Ros. Akad. Nauk, Novosibirsk (1995).
8. Egorov I. E., Pyatkov S. G., and Popov S. V., Nonclassical Operator-Differential Equations [in Russian], Nauka, Novosibirsk (2000).

9. Vragov V. N., “On the theory of boundary value problems for equations of mixed type in the space [in Russian],” *Differents. Uravn.*, **13**, No. 6, 1098–1105 (1977).
10. Terekhov A. N., “A boundary value problem for a mixed type equation [in Russian],” in: Application of Functional Analysis Methods to Problems of Mathematical Physics and Computational Mathematics, pp. 128–136, Inst. Mat., Novosibirsk (1979).
11. Fedorov V. E., “The uniqueness theorem of generalized solution on boundary problem for a mixed type equation,” in: Boundary Problems for Nonclassical Equations of Mathematical Physics [in Russian], pp. 193–196, Sib. Otdel. Akad. Nauk SSSR, Novosibirsk (1989).
12. Egorov I. E. and Tikhonova I. M., “Application of a modified Galerkin method to mixed type equations [in Russian],” *Mat. Zamet. SVFU*, **21**, No. 4, 11–16 (2014).
13. Tikhonova I. M., Egorov I. E., “A modified Galerkin method for the second order equation of mixed type [in Russian],” in: Mat. Semin. Young Scientists Topical Issues of Real and Functional Analysis, pp. 96–99, Ulan-Ude (2015).
14. Egorov I. E. and Tikhonova I. M., “A modified Galerkin method for the Vragov problem,” *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, **12**, 732–42 (2015). DOI 10.17377/semi.2015.12.059
15. Egorov I. E., “Application of the modified Galerkin method to the first boundary value problem for a mixed type equation,” *Mat. Zamet. SVFU*, **22**, No. 3, 3–10 (2015).
16. Artyushin A. N., “A boundary value problem for a mixed type equation in a cylindrical domain,” *Sib. Math. J.*, **60**, No. 2, 209–222 (2019).
17. Besov O. V., Il'in V. P., and Nikolskii S. M., Integral Representations of Functions and Imbedding Theorems [in Russian], Nauka, Moscow (1977).

Submitted September 16, 2023

Revised February 15, 2024

Accepted February 29, 2024

Ivan E. Egorov
M. K. Ammosov North-Eastern Federal University,
Scientific Research Institute of Mathematics,
48 Kulakovskiy Street, Yakutsk 677000, Russia
IvanEgorov51@mail.ru

Stepan V. Safonov
Republican Boarding Lyceum,
37 Oyunsky Street, Yakutsk 670000, Russia
r1_ssv@mail.ru

К ВОПРОСУ О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНЫХ
ЗАДАЧ С УСЛОВИЯМИ ИОНКИНА
ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ. II

А. И. Кожанов

Аннотация. Для дифференциальных уравнений произвольного порядка с переменными коэффициентами исследована разрешимость в пространствах Соболева нелокальных краевых задач с классическим условием Ионкина. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений, т. е. решений, имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-1-48-55

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, переменные коэффициенты, нелокальные задачи, условия Ионкина, регулярные решения, существование, единственность.

Введение

В 1977 г. была опубликована работа Н. И. Ионкина [1], в которой исследовалась новая (для того времени) нелокальная краевая задача для одномерного уравнения теплопроводности. Особенностью изучаемой задачи было то, что собственные функции соответствующей спектральной задачи не давали фундаментальную систему в пространстве L_2 , и тем самым классический метод Фурье к задаче работы [1] не мог применяться. В [1] был предложен метод, основанный на представлении решений в виде функционального ряда по некоторой специальной биортогональной системе функций. Этот метод в дальнейшем неоднократно применялся для исследования близких по постановке к задаче [1] задач для параболических и гиперболических уравнений [2–8], дифференциальных уравнений с вырождением [9, 10], уравнений смешанного типа [11, 12].

А. М. Нахушев в работе [13] предложил новый подход к исследованию разрешимости нелокальных задач с условиями Ионкина для параболических уравнений второго порядка. Этот подход фактически был реализован в [14]; близкие к идеям Нахушева идеи использовались также в [15], где изучалась разрешимость нелокальных краевых задач также для параболических уравнений второго порядка, и в работе [16], в которой изучалась разрешимость краевых задач с

Работа выполнена при поддержке РНФ, проект 23-21-00269.

условиями Ионкина для дифференциальных уравнений произвольного порядка по переменной t и произвольного четного порядка по переменной x .

Особенностью класса уравнений, рассмотренных в работе [16], было то, что в него входили уравнения, содержащие производные по пространственной переменной x только четного порядка и все коэффициенты уравнений зависели только от переменной t .

Настоящую работу можно трактовать как продолжение работы [16] — в ней результаты [16] будут распространены на некоторые уравнения, содержащие все промежуточные производные по переменной x , и при этом коэффициенты уравнений могут зависеть также от пространственной переменной x .

1. Постановка задач и основные результаты

Пусть Q — прямоугольник $\{0 < x < 1, 0 < t < T < +\infty\}$ пространства \mathbb{R}^2 переменных x, t , $a_{kl}(x, t)$, $k = 0, \dots, p$, $l = 0, \dots, 2m$, — заданные функции, определенные при $(x, t) \in \overline{Q}$. Через D_t^k и D_x^l будем обозначать частные производные $\frac{\partial^k}{\partial t^k}$ и $\frac{\partial^l}{\partial x^l}$ соответственно. Пусть L — дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x, t)$ определяется равенством

$$Lv = \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^{2m} a_{kl}(x, t) D_t^k D_x^l v.$$

Дополним оператор L условиями

$$U_j(x, D_t, 0) = 0, \quad j = 1, \dots, p_1, \quad x \in \Omega = (0, 1), \quad (1)$$

$$U_j(x, D_t, T) = 0, \quad j = p_1 + 1, \dots, p, \quad x \in \Omega = (0, 1) \quad (2)$$

(одна или обе группы условий могут отсутствовать).

Нелокальная задача I. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$Lu = f(x, t) \quad (3)$$

($f(x, t)$ — заданная функция) и такую, что для нее выполняются условия (1), (2), а также условия

$$D_x^{2l} u(x, t) \Big|_{x=0} = 0, \quad l = 0, \dots, m - 1, \quad t \in (0, T), \quad (4)$$

$$D_x^{2l+1} u(x, t) \Big|_{x=0} = D_x^{2l+1} u(x, t) \Big|_{x=1}, \quad l = 0, \dots, m - 1, \quad t \in (0, T). \quad (5)$$

Нелокальная задача II. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (3) и такую, что для нее выполняются условия (1), (2), а также условия

$$D_x^{2l+1} u(x, t) \Big|_{x=0} = 0, \quad l = 0, \dots, m - 1, \quad t \in (0, T), \quad (6)$$

$$D_x^{2l} u(x, t) \Big|_{x=0} = D_x^{2l} u(x, t) \Big|_{x=1}, \quad l = 0, \dots, m - 1, \quad t \in (0, T). \quad (7)$$

Нелокальная задача I в случае, когда L — оператор теплопроводности, является задачей Ионкина [1, 2].

Определим линейное пространство V :

$$V = \{v(x, t) : v(x, t) \in L_2(Q), D_t^k D_x^l v(x, t) \in L_2(Q), k = 0, \dots, p, l = 0, \dots, 2m\}.$$

Следуя [16], определим две вспомогательные задачи.

Задача А. Найти функцию $v(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$Lv = f(x, t) + f(1 - x, t)$$

и такую, что для нее выполняются условия (1), (2), а также условия

$$D_x^{2l+1}v(x, t)|_{x=0} = D_x^{2l+1}v(x, t)|_{x=1} = 0, \quad l = 0, \dots, m-1, \quad t \in (0, T).$$

Задача В. Найти функцию $w(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (3) и такую, что для нее выполняются условия (1), (2), а также условия

$$D_x^{2l}w(x, t)|_{x=0} = 0, \quad l = 0, \dots, m-1, \quad t \in (0, T),$$

$$D_x^{2l}w(x, t)|_{x=1} = D_x^{2l}v(x, t)|_{x=0}, \quad l = 0, \dots, m-1, \quad t \in (0, T)$$

($v(x, t)$ — решение задачи А).

Основное условие разрешимости нелокальной задачи I совпадает с условием работы [16]:

функции $a_{kl}(x, t)$, $k = 0, \dots, p$, $l = 0, \dots, 2m$, $f(x, t)$, а также
условия (1), (2) таковы, что краевые задачи А и В
имеют решения $v(x, t)$ и $w(x, t)$, принадлежащие пространству V . (8)

Основной результат. Пусть выполняется основное условие, и пусть выполняются также условия

$$a_{kl}(x, t) = a_{kl}(1 - x, t), \quad k = 0, \dots, p, \quad l = 2l_1, \quad l_1 = 0, \dots, m, \quad (x, t) \in \overline{Q}; \quad (9)$$

$$a_{kl}(x, t) = -a_{kl}(1 - x, t), \quad k = 0, \dots, p, \quad l = 2l_1 + 1, \quad l_1 = 0, \dots, m-1, \quad (x, t) \in \overline{Q}. \quad (10)$$

Тогда нелокальная задача I имеет решение, принадлежащее пространству V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы проводится полностью аналогично доказательству соответствующей теоремы работы [16].

Нелокальная задача II в работе [16] (см. также [17]) после дифференцирования по переменной x сводится к нелокальной задаче I — соответствующие условия легко записываются и потому приводить их здесь не будем.

2. Примеры

Приведем несколько примеров, показывающих новизну представленного выше основного результата.

В прямоугольнике Q рассмотрим дифференциальное уравнение

$$L_1 u = (-1)^{p+1} D_t^{2p} u + D_x^2(a(x, t) D_x^2 u) + b(x, t) D_t u = f(x, t). \quad (11)$$

В этом уравнении $a(x, t)$ и $b(x, t)$ суть положительные в \overline{Q} гладкие функции, p — натуральное число. В случае $p = 1$ данное уравнение является нестационарным,

возникает оно при моделировании колебаний балки [18–20]. Условия по переменной t для этого уравнения будут обычными начальными условиями. В случае $p > 1$ оператор L_1 уже не будет нестационарным (обычная начально-краевая задача для него некорректна), условия по переменной t должны задаваться и при $t = 0$, и при $t = T$ (точные условия (1), (2) для уравнения (11) можно найти в работе [21]). Далее, условия нелокальной задачи I для уравнения (11) имеют вид

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u_{xx}(0, t) = 0, \quad t \in (0, T), \\ u_x(0, t) &= u_x(1, t), \quad u_{xxx}(0, t) = u_{xxx}(1, t), \quad t \in (0, T), \end{aligned} \quad (12)$$

условия (9) и (10) суть условия

$$a(x, t) = a(1 - x, t), \quad b(x, t) = b(1 - x, t), \quad (x, t) \in \overline{Q}.$$

Помимо условия положительности функций $a(x, t)$, $b(x, t)$ и условия (11) для выполнения условия (8) необходимо потребовать, чтобы функции $a(x, t)$, $b(x, t)$ и $f(x, t)$ обладали достаточной гладкостью. Имея необходимую гладкость, получим, что нелокальная задача I для уравнения (11) разрешима в пространстве V .

Второй пример связан с квазиэллиптическим уравнением

$$L_2 u = (-1)^p D_t^{2p} u + D_x^2 (a(x, t) D_x^2 u) + b(x, t) u = f(x, t). \quad (13)$$

Условия (1) и (2) для этого уравнения суть условия обычной краевой задачи для квазиэллиптических уравнений (например, (1) и (2) могут быть условиями Дирихле). Очевидно, что при выполнении равенств (12), условие

$$a(x, t) \geq a_0 > 0, \quad b(x, t) \geq b_0 > 0 \quad \text{при } (x, t) \in \overline{Q},$$

в котором b_0 — достаточно большое число, а также условий гладкости нелокальная задача I для уравнения (13) будет иметь решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству V .

Аналогичные рассуждения позволяют получить разрешимость в пространстве V и для квазипараболических уравнений

$$L_3 u = (-1)^p D_t^{2p+1} u + D_x^2 (a(x, t) D_x^2 u) + b(x, t) u = f(x, t).$$

со строго положительной функцией $a(x, t)$. Необходимые для выполнения (8) условия на функции $a(x, t)$, $b(x, t)$ и $f(x, t)$ легко устанавливаются с помощью стандартных априорных оценок.

3. Замечания и дополнения

1. Доказательство разрешимости в пространстве V нелокальной задачи II, а также модифицированных задач I и II — именно задач с условиями

$$D_x^{2l+1} u(x, t)|_{x=0} = -D_x^{2l+1} u(x, t)|_{x=1}, \quad l = 0, \dots, m-1, \quad t \in (0, T),$$

и

$$D_x^{2l} u(x, t)|_{x=0} = -D_x^{2l} u(x, t)|_{x=1}, \quad l = 0, \dots, m-1, \quad t \in (0, T),$$

вместо условий (5) и (7) соответственно, также нетрудно провести, используя технику работы [16].

2. Доказательство выполнения условия (7) для представленных выше примеров в других ситуациях также нетрудно провести, используя технику работы [16].

3. Условия (1) и (2), вообще говоря, могут быть нелокальными.

4. Простейшим примером уравнений, для которых условия (1) и (2) вообще не требуются, является уравнение

$$h(t)D_t u + D_x^2(a(x,t)D_x^2 u) + c(x,t)u = f(x,t)$$

со строго положительной функцией $a(x,t)$ и функцией $h(t)$ такой, что $h(0) = h(T) = 0$.

5. В работах [17, 22–24] для исследования разрешимости нелокальных задач с обобщенным условием Ионкина использовался метод, основанный на априорных оценках. Этот метод не требовал выполнения условий (9) и (10), но применялся он лишь в случае $m = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.
2. Ионкин Н. И. Об устойчивости одной задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 7. С. 1279–1283.
3. Ионкин Н. И., Моисеев Е. И. О задаче для уравнения теплопроводности с двухточечными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 7. С. 1284–1295.
4. Beilin S. A. Existence of solutions for one-dimentional wave equations with nonlocal conditions // Electron J. Differ. Equ. 2001. V. 76. P. 1–8.
5. Berdyshev A. S., Cabada A., Kadirkulov B. J. The Samarskii-Ionkin type problem for the fourth order parabolic equation with fractional differential operator // Comput. Math. Appl. 2011. V. 62, N 10. P. 3884–3893.
6. Калиев И. А., Сабитова М. М. Задача определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12, № 1. С. 89–97.
7. Ismailov M. I., Kanka F. An inverse coefficient problems for a parabolic equation in the case of nonlocal boundary and overdetermination conditions // Math. Methods Appl. Sci. 2011. V. 34, N 6. P. 692–702.
8. Kerimov N. B., Ismailov M. I. An inverse coefficient problems for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 396. P. 546–554.
9. Моисеев Е. И. О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 8. С. 1054–1100.
10. Моисеев Е. И. О разрешимости одной нелокальной краевой задачи // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 11. С. 1565–1567.
11. Сабитов К. Б., Мартемьянова Н. В. Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа // Изв. вузов. Математика. 2011. № 2. С. 71–85.
12. Сабитов К. Б., Мартемьянова Н. В. Обратная задача для уравнения эллиптико-парabolического типа с нелокальным граничным условием // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 3. С. 633–647.
13. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.

14. Нахушева З. А. Задача Самарского для уравнений фрактальной диффузии // Мат. заметки. 2014. Т. 95, вып. 6. С. 878–883.
15. Sadybekov M. A. Initial-boundary value problem for a heat equation with not strongly regular boundary conditions // FAIA 2017: Functional Analysisin Interdisciplinary Applications. Cham: Springer, 2017. Р. 330–348. (Springer Proc. Math. Stat.; V. 216).
16. Kozhanov A. I. To the question of the solvability of the Ionkin problem for partial differential equations // Math. 2024. V. 12. 487.
17. Кожанов А. И. Нелокальные задачи с обобщенным условием Самарского — Ионкина для некоторых классов нестационарных дифференциальных уравнений // Докл. АН. Математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 509. С. 50–53.
18. Gupta C. P. Existence and uniqueness theorems for the bending of an elastic beam equation // Appl. Anal. 1988. V. 26. P. 289–304.
19. Ma T. F. Existence results for a model of nonlinear beam on elastic bearings // Appl. Math. Lett. 2000. V. 13. P. 11–15.
20. Sorrentino S., Marchesiello S., Piombo B.A.D. A new analytical technique for vibration analysis of non-proportionally damped beams // J. Sound Vib. 2003. V. 265. P. 765–782.
21. Кожанов А. И., Пинигина Н. Р. Краевые задачи для некоторых неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка // Мат. заметки. 2017. Т. 101, вып. 3. С. 403–412.
22. Кожанов А. И., Абдрахманов А. М. Пространственно-нелокальные краевые задачи с обобщенным условием Самарского — Ионкина для квазипарabolических уравнений // Сиб. электрон. мат. изв. 2023. Т. 20, № 1. С. 110–123.
23. Kozhanov A. I. Initial-boundary value problems with generalized Samarskii-Ionkin condition for parabolic equations with arbitrary evolution direction // J. Math. Sci. 2023. V. 274, N 2. P. 228–240.
24. Кожанов А. И., Дюжева А. В. Корректность обобщенной задачи Самарского — Ионкина для эллиптических уравнений в цилиндрической области // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 2. С. 223–235.

Поступила в редакцию 10 января 2024 г.

После доработки 15 февраля 2024 г.

Принята к публикации 29 февраля 2024 г.

Кожанов Александр Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коptyuga, 4, Новосибирск 630090;
Бурятский государственный университет,
ул. Смолина, 24а, Улан-Удэ 670000
kozhanov@math.nsc.ru

ON SOLVABILITY OF NONLOCAL PROBLEMS
WITH IONKIN CONDITIONS FOR
PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS. II

A. I. Kozhanov

Abstract: Considering the differential equations of any order with variable coefficients, we study the solvability of nonlocal boundary value problems with the Ionkin classical condition in Sobolev spaces. We prove the unique existence of regular solutions, i.e., those that enter the equations with all weak derivatives.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-1-48-55

Keywords: differential equations, variable coefficients, nonlocal problems, Ionkin conditions, regular solutions, existence, uniqueness.

REFERENCES

1. Ionkin N. I., “Solution of a boundary-value problem in heat conduction with a nonclassical boundary condition [in Russian],” Differents. Uravn., **13**, 204–211 (1977).
2. Ionkin N. I., “The stability of a problem in the theory of heat equations with nonclassical boundary conditions [in Russian],” Differents. Uravn., **15**, No. 7, 1279–1283 (1979).
3. Ionkin N. I. and Moiseev E. I., “On the problem for the heat equation with two-point boundary conditions [in Russian],” Differents. Uravn., **15**, No. 7, 1284–1295 (1979).
4. Beilin S. A., “Existence of solutions for one-dimentional wave equations with nonlocal conditions,” Electron J. Differ. Equ., **76**, 1–8 (2001).
5. Berdyshev A. S., Cabada A., and Kadirkulov B. J., “The Samarskii–Ionkin type problem for the fourth order parabolic equation with fractional differential operator,” Comput. Math. Appl., **62**, No. 10, 3884–3893 (2011).
6. Kaliev I. A. and Sabitova M. M., “The task of determining the temperature and density of heat sources from the initial and final temperatures (in Russian),” Sib. J. Ind. Math., **12**, No. 1, 89–97 (2009).
7. Ismailov M. I. and Kanka F., “An inverse coefficient problems for a parabolic equation in the case of nonlocal boundary and overdetermination conditions,” Math. Methods Appl. Sci., **34**, No. 6, 692–702 (2011).
8. Kerimov N. B. and Ismailov M. I., “An inverse coefficient problems for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions,” J. Math. Anal. Appl., **396**, 546–554 (2012).
9. Moiseev E. I., “On the solution of a nonlocal boundary value problem by the spectral method,” Differents. Uravn., **35**, No. 8, 1105–1112 (1999).
10. Moiseev E. I., “Solvability of a nonlocal boundary value problem,” Differents. Uravn., **37**, No. 11, 1643–1646 (2001).
11. Sabitov K. B. and Martemyanova N. V., “Nonlocal inverse problem for a mixed type equation [in Russian],” Izv. Vuzov, Mat., **2**, 71–85 (2011).
12. Sabitov K. B. and Martemyanova N. V., “Inverse problem for an elliptic-parabolic type equation with a nonlocal boundary condition [in Russian],” Sib. Math. J., **53**, No. 3, 633–647 (2012).

13. Nakhushev A. M., Problems with Shift for Partial Differential Equation [in Russian], Nauka, Moscow (2006).
14. Nakhusheva Z. A., “Samarsky problem for fractal diffusion equations [in Russian],” Mat. Zamet., **95**, No. 6, 878–883 (2014).
15. Sadybekov M. A., “Initial-boundary value problem for a heat equation with not strongly regular boundary conditions,” in: Functional Analysis in Interdisciplinary Applications, pp. 330–348, Springer, Cham (2017) (Springer Proc. Math. Stat.; vol. 216).
16. Kozhanov A. I., “To the question of the solvability of the Ionkin problem for partial differential equations,” Math., **12**, 487 (2024).
17. Kozhanov A. I., “Nonlocal problems with the generalized Samarsky–Ionkin condition for some classes of nonstationary differential equations [in Russian],” Dokl. Akad. Nauk, Mat., Inform., Protsessy Upravl. **509**, 50–53 (2023).
18. Gupta C. P., “Existence and uniqueness theorems for the bending of an elastic beam equation,” Appl. Anal., **26**, 289–304 (1988).
19. Ma T. F., “Existence results for a model of nonlinear beam on elastic bearings,” Appl. Math. Lett., **13**, 11–15 (2000).
20. Sorrentino S., Marchesello S., and Piombo B. A. D., “A new analytical technique for vibration analysis of non-proportionally damped beams,” J. Sound Vib., **265**, 765–782 (2003).
21. Kozhanov A. I. and Pinigina N. R., “Boundary-value problems for some higher-order nonclassical differential equations [in Russian],” Mat. Zamet., **101**, No. 3–4, 467–474 (2017).
22. Kozhanov A. I. and Abdurakhmanov A. M., “Spatially-nonlocal boundary value problems with the generalized Samarskii–Ionkin condition for quasi-parabolic equations [in Russian],” Sib. Electron. Math. Rep., **20**, No. 1, 110–123 (2023).
23. Kozhanov A. I., “Initial-boundary value problems with generalized Samarskii–Ionkin condition for parabolic equations with arbitrary evolution direction,” J. Math. Sci., **274**, No. 2, 228–240 (2023).
24. Kozhanov A. I. and Dyuzheva A. V., “Well-posedness of the generalized Samarskii–Ionkin problem for elliptic equations in a cylindrical domain [in Russian],” Differents. Uravn., **59**, 230–242 (2023).

Submitted January 10, 2024

Revised February 15, 2024

Accepted February 29, 2024

Aleksandr I. Kozhanov
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia;
Banzarov Buryat State University,
24a Smolin Street, 670000 Ulan-Ude, Russia

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ
С ВЫРОЖДЕНИЕМ И НЕИЗВЕСТНЫМ
КОЭФФИЦИЕНТОМ

А. И. Кожанов, Г. Р. Ашуррова

Аннотация. Работа посвящена исследованию разрешимости в пространствах С. Л. Соболева нелинейных обратных задач определения вместе с решением $u(x, t)$ параболического уравнения также неизвестного зависящего от времени коэффициента самого уравнения. Изучаемые задачи являются новыми, поскольку исходное параболическое уравнение вырождающееся. В качестве условий переопределения в работе используются условия интегрального переопределения по области или интегрального граничного переопределения. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений, т. е. решений, имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-1-56-69

Ключевые слова: параболические уравнения, вырождение, нелинейные обратные коэффициентные задачи, интегральное переопределение, регулярные решения, существование, единственность.

Введение

Изучаемые в работе задачи относятся к классу нелинейных обратных коэффициентных задач временного типа для параболических уравнений (термин «временного типа» в данном случае означает, что неизвестный коэффициент зависит лишь от одной выделенной — временной — переменной). Степень новизны полученных ниже результатов определяется прежде всего тем, что основное уравнение в данной работе вырождающееся. Обратные коэффициентные задачи для параболических уравнений представляются достаточно хорошо изученными (см. монографии [1–4], статьи [5–8]); как наиболее близкую по постановке и применяемым методом выделим статью [8]. Вместе с тем заметим, что обратные коэффициентные задачи для вырождающихся параболических уравнений изучены мало.

В ряде работ (см. [2, 9–12]) изучалась разрешимость обратных коэффициентных задач для вырождающихся параболических уравнений, но характер вырождения в них был иной, нежели в настоящей работе. Близкие по характеру

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, проект FWNF-2022-0008.

вырождения уравнения и соответственно обратные задачи для них изучались в [13, 14], но вид вырождения в них также был иной.

Таким образом, полученные ниже результаты новые.

Заметим следующее. Изучаемые в работе задачи имеют модельный вид. Возможные усиления и обобщения полученных в работе результатов описаны в конце статьи.

1. Постановка задач

Пусть $\Omega \subset R^n$ — ограниченная область с гладкой (для простоты бесконечно дифференцируемой) границей Γ , Q — цилиндр $\Omega \times (0, T)$ конечной высоты T , $S = \Gamma \times (0, T)$ — боковая граница Q , $\varphi(t), N(x), h(t)$ и $f(x, t)$ — заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0, T]$.

Обратная задача I. Найти функции $u(x, t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением

$$u_t - \varphi(t)\Delta u + q(t)u = f(x, t) \quad (1)$$

при выполнении для функции $u(x, t)$ условий

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu} \right|_S = 0 \quad (3)$$

(ν — вектор внутренней нормали и Γ в текущей точке x),

$$\int_{\Omega} N(x)u(x, t) dx = h(t), \quad t \in (0, T). \quad (4)$$

Обратная задача II. Найти функции $u(x, t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением (1), при выполнении для функции $u(x, t)$ условий и (2), (3), а также условия

$$\int_{\Gamma} N(x)u(x, t) dS_x = h(t), \quad t \in (0, T). \quad (5)$$

В обратных задачах I и II будет предполагаться, что функция $\varphi(t)$ неотрицательна при $t \in [0, T]$. Именно это предположение и означает, что уравнение (1) может вырождаться. Далее условия (2) и (3) представляются условиями обычной второй начально-краевой задачи для параболических уравнений второго порядка (условие (3) есть хорошо известное условие непротекания), условия (4) и (5) являются условиями интегрального переопределения, соответственно внутреннего интегрального переопределения и граничного интегрального переопределения.

2. Разрешимость обратной задачи I

Положим

$$g_1(t) = \int_{\Omega} N(x)f(x,t)dx - h'(t), \quad m_1 = \operatorname{vraimin}_{[0,T]} g_1(t), \quad \varphi_0 = \max_{[0,T]} \varphi(t),$$

$$M_1 = \sum_{i=1}^n \int_Q \varphi^{-1}(t) f_{x_i}^2(x,t) dx dt + \|\Delta u_0\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

$$M_2 = T \|\Delta f\|_{L_2(Q)} + (T^2 \|\Delta f\|_{L_2(Q)}^2 + T \|\Delta u_0\|_{L_2(\Omega)}^2)^{1/2},$$

$$M_3 = \|\Delta u_0\|_{L_2(\Omega)}^2 + 2M_2 \|\Delta f\|_{L_2(Q)}.$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия

$$\varphi(t) \in C([0,T]), \quad \varphi(t) \geq 0 \text{ при } t \in [0,T];$$

$$N(x) \in L_2(\Omega);$$

$$h(t) \in C^1([0,T]), \quad h(t) \geq h_0 > 0 \text{ при } t \in [0,T];$$

$$u_0(x) \in W_2^4(\Omega), \quad \frac{\partial u_0(x)}{\partial \nu} = \frac{\partial \Delta u_0(x)}{\partial \nu} = 0 \text{ при } x \in \Gamma, \quad \int_{\Omega} N(x)u_0(x)dx = h(0),$$

а также одно из следующих условий

$$(a) \quad f(x,t) \in L_{\infty}(0,T; L_2(\Omega)), \quad \varphi^{-\frac{1}{2}}(t) f_{x_i}(x,t) \in L_2(Q), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\varphi_0 M_1^{\frac{1}{2}} \|N\|_{L_2(\Omega)} \leq m_1$$

или

$$(b) \quad f(x,t) \in L_2(0,T; W_2^2(\Omega)), \quad \frac{\partial f(x,t)}{\partial \nu}|_S = 0, \quad \varphi_0 M_3^{\frac{1}{2}} \|N\|_{L_2(\Omega)} \leq m_1.$$

Тогда обратная задача I имеет решение $\{u(x,t), q(t)\}$ такое, что

$$u(x,t) \in L_{\infty}(0,T; W_2^2(\Omega)), \quad \varphi^{\frac{1}{2}}(t) \Delta u(x,t) \in L_2(0,T; W_2^1(\Omega)),$$

$$u_t(x,t) \in L_2(Q), \quad q(t) \in L_{\infty}([0,T]), \quad q(t) \geq 0 \text{ при } t \in [0,T].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся методом регуляризации и методом срезок. Пусть

$$G(\xi) = \begin{cases} \xi, & \text{если } |\xi| \leq m_1, \\ m_1, & \text{если } \xi > m_1, \\ -m_1, & \text{если } \xi < -m_1. \end{cases}$$

Для положительного числа ε рассмотрим задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$L_{\varepsilon} u \equiv u_t + \varepsilon \Delta^2 u - \varphi(t) \Delta u + \frac{1}{h(t)} \left[g_1(t) + \varphi(t) G \left(\int_{\Omega} N(x) \Delta u(x,t) dx \right) \right] u = f(x,t) \quad (6)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) и (3), а также условие

$$\frac{\partial \Delta u(x,t)}{\partial \nu} \Big|_S = 0. \quad (7)$$

Данная задача представляет собой вторую начально-краевую задачу для нелинейного «нагруженного» [15, 16] параболического уравнения четвертого порядка. Поскольку в этом уравнении для функции $G(\xi)$ выполняется условие Липшица, краевая задача (6), (2), (3), (7) при фиксированном ε и принадлежности функции $f(x, t)$ пространству $L_2(Q)$ имеет решение $u(x, t)$ такое, что $u(x, t) \in L_2(0, T; W_2^4(\Omega))$, $u_t(x, t) \in L_2(Q)$. Покажем, что при выполнении условий теоремы для решений имеют место равномерные по ε оценки, позволяющие в семействе задач (6), (2), (3), (7) организовать процедуру предельного перехода.

Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_{\Omega} L_\varepsilon u(x, \tau) \Delta^2 u(x, \tau) dx d\tau = \int_0^t \int_{\Omega} f(x, \tau) \Delta^2 u(x, \tau) dx d\tau.$$

Интегрируя по частям, это равенство нетрудно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\Delta u(x, t)]^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\Delta u_0(x)]^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} \varphi(\tau) [\Delta u_{x_i}(x, \tau)]^2 dx d\tau \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} \frac{1}{h(\tau)} \left[g_1(\tau) + \varphi(\tau) G \left(\int_{\Omega} N(x) \Delta u(x, \tau) dx \right) \right] [\Delta u(x, \tau)]^2 dx d\tau \\ & + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} [\Delta^2 u(x, \tau)]^2 dx d\tau = \int_0^t \int_{\Omega} f(x, \tau) \Delta^2 u(x, \tau) dx d\tau. \quad (8) \end{aligned}$$

Заметим, что предпоследнее слагаемое в левой части (8) неотрицательно. Если выполняется условие (а), то вследствие равенства

$$\int_0^t \int_{\Omega} f(x, \tau) \Delta^2 u(x, \tau) dx d\tau = - \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} \varphi^{-1/2}(\tau) f_{x_i}(x, \tau) \varphi^{1/2}(\tau) \Delta u_{x_i}(x, \tau) dx d\tau$$

из (8) вытекает оценка

$$\int_{\Omega} [\Delta u(x, t)]^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} \varphi(\tau) [\Delta u_{x_i}(x, \tau)]^2 dx d\tau + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} [\Delta^2 u(x, \tau)]^2 dx d\tau \leq M_1. \quad (9)$$

Далее, если выполняется условие (б), то имеет место равенство

$$\int_0^t \int_{\Omega} f(x, \tau) \Delta^2 u(x, \tau) dx d\tau = \int_0^t \int_{\Omega} \Delta f(x, \tau) \Delta u(x, \tau) dx d\tau;$$

с помощью этого равенства из (8) нетрудно вывести оценки

$$\left(\int_Q [\Delta u(x, t)]^2 dx dt \right)^{1/2} \leq M_2, \quad (10)$$

$$\int_{\Omega} [\Delta u(x, t)]^2 dx \leq M_3, \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} \varphi(\tau) [\Delta u_{x_i}(x, \tau)]^2 dx d\tau + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} [\Delta^2 u(x, \tau)]^2 dx d\tau \leq \frac{1}{2} M_3. \quad (12)$$

Из оценки (9) при выполнении условия (а) или из оценок (10)–(12) при выполнении условия (б) вытекает последняя требуемая оценка

$$\int_0^t \int_{\Omega} u_{\tau}^2(x, \tau) dx d\tau \leq M_4, \quad (13)$$

постоянная M_4 в которой определяется постоянной M_1 или постоянными M_2 и M_3 .

Из оценок (9) или (11), а также из последнего неравенства условий (а) или (б) следует, что выполняется равенство

$$G \left(\int_{\Omega} N(x) \Delta u(x, t) dx \right) = \int_{\Omega} N(x) \Delta u(x, t) dx. \quad (14)$$

Далее, полученные априорные оценки (9)–(13), равенство (14) и свойства рефлексивности гильбертова пространства позволяют найти последовательность $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ положительных чисел такую, что $\varepsilon_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, последовательность $\{u_m(x, t)\}_{m=1}^{\infty}$ решений краевой задачи (6), (2), (3), (7) с $\varepsilon = \varepsilon_m$, а также функцию $u(x, t)$ такие, что при $m \rightarrow \infty$ имеет место слабая в пространстве $L_2(Q)$ сходимость

$$L_{\varepsilon_m} u_m \rightarrow u_t - \varphi(t) \Delta u + \frac{1}{h(t)} \left[g_1(t) + \varphi(t) \int_{\Omega} N(x) \Delta u(x, t) dx \right] u.$$

Очевидно, что функция $u(x, t)$ будет принадлежать требуемому в теореме классу и что функции $u(x, t)$ и $q(t)$, определенная равенством

$$q(t) = \frac{1}{h(t)} \left[g_1(t) + \varphi(t) \int_{\Omega} N(x) \Delta u(x, t) dx \right],$$

будут связаны в цилиндре Q уравнением (1).

Принадлежность найденной функции $q(t)$ классу $L_{\infty}([0, T])$ и ее неотрицательность очевидны.

Наконец, выполнение для функции $u(x, t)$ условия переопределения (4) показывается стандартным образом (см., например, [8]).

Все сказанное выше и означает, что пара $\{u(x, t), q(t)\}$ представляет собой искомое решение обратной задачи I.

Теорема доказана.

Обсудим вопрос о единственности решений обратной задачи I.

Обозначим через W_1 множество функций $\{u(x, t), q(t)\}$ таких, что $u(x, t) \in L_{\infty}(0, T; W_2^1(\Omega)) \cap L_2(0, T; W_2^2(\Omega))$, $q(t) \in L_{\infty}([0, T])$, $q(t) \geq 0$ при $t \in [0, T]$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия

$$\varphi(t) \in C([0, T]), \quad \varphi(t) \geq 0 \text{ при } t \in [0, T]; \quad N(x) \in W_2^1(\Omega).$$

Тогда любые два решения $\{u_1(x, t), q_1(t)\}$ и $\{u_2(x, t), q_2(t)\}$ обратной задачи I, принадлежащие множеству W_1 , совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\omega(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$. Для функции $q_i(t)$, $i = 1, 2$, имеют место равенства

$$q_i(t) = \frac{1}{h(t)} \left[g_i(t) - \varphi(t) \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} N_{y_j}(y) u_{iy_j}(y) dy \right].$$

Следовательно, для функции $\omega(x, t)$ выполняется уравнение

$$\omega_t - \varphi(t) \Delta \omega + q_1(t) \omega = \frac{\varphi(t)}{h(t)} \left(\sum_{j=1}^n \int_{\Omega} N_{y_j}(y) \omega_{y_j}(y, t) dy \right) u_2(x, t).$$

Умножим это уравнение на функцию $-\Delta \omega$ и проинтегрируем по пространственным переменным по области Ω и по временной переменной от 0 до текущей точки. Получим равенство

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} \omega_{x_k}^2(x, t) dx + \int_0^t \int_{\Omega} \varphi(\tau) [\Delta \omega(x, \tau)]^2 dx d\tau + \sum_{k=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} q_1(\tau) \omega_{x_k}^2(x, \tau) dx d\tau \\ &= \sum_{k=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} \left[\frac{\varphi(\tau)}{h(\tau)} u_{2x_k}(x, \tau) \omega_{x_k}(x, \tau) \left(\sum_{j=1}^n \int_{\Omega} N_{y_j}(y) \omega_{y_j}(y, \tau) dy \right) \right] dx d\tau. \end{aligned}$$

Оценивая правую часть этого равенства с помощью неравенства Гёльдера, придем к оценке

$$\sum_{k=1}^n \int_{\Omega} \omega_{x_k}^2(x, t) dx \leq M_0 \sum_{k=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} \omega_{x_k}^2(x, \tau) dx d\tau,$$

в которой число M_0 определяется функциями $\varphi(t)$, $N(x)$, $h(t)$ и $u_2(x, t)$. Из этой оценки и леммы Гронуолла вытекает, что функция $u_1(x, t)$ совпадает с функцией $u_2(x, t)$. Но тогда и функция $q_1(t)$ совпадает с функцией $q_2(t)$, а это и означает, что для обратной задачи I имеет место свойство единственности решений.

Теорема доказана.

3. Разрешимость обратной задачи II

Исследование разрешимости обратной задачи II в целом проводится вполне аналогично тому, как проводилось исследование разрешимости обратной задачи I, т. е. с помощью метода регуляризации, метода срезок и априорных оценок.

Пусть $\psi(x)$ — функция из пространства $W_2^1(\Omega)$. Для этой функции выполняется неравенство

$$\int_{\Gamma} \psi^2(x) dS \leq d_0 \|\psi\|_{W_2^1(\Omega)}^2, \quad (15)$$

постоянная d_0 в котором определяется лишь областью Ω (см. [17, 18]).

Положим

$$g_2(t) = \int_{\Gamma} N(x)f(x,t)dS - h'_0(t), \quad m_2 = \operatorname{vraimin}_{[0,T]} g_2(t),$$

$$M_5 = \sum_{i=1}^n \|\varphi^{-\frac{1}{2}} \Delta^2 f\|_{L_2(Q)}^2 + \sum_{i=1}^n \|\Delta u_{0x_i}\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad M_6 = \max_{i=1,\dots,n} (\|\Delta f_{x_i}\|_{L_2(Q)}),$$

$$M_7 = \sqrt{n}TM_6 + \left(nT^2M_6^2 + T \sum_{i=1}^n \|\Delta u_{0x_i}\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$M_8 = \sum_{i=1}^n \|\Delta u_{0x_i}\|_{L_2(\Omega)}^2 + 2M_6M_7,$$

$$M_{ij} = M_i + M_j, \quad i = 1 \text{ или } i = 3, \quad j = 5 \text{ или } j = 5.$$

Определим условия, которые понадобятся ниже:

$$(\alpha) \quad f(x,t) \in L_{\infty}(0,T; L_2(\Omega)), \quad \varphi^{-\frac{1}{2}}(t)f_{x_k}(x,t) \in L_2(Q), \quad k = 1, \dots, n;$$

$$(\beta) \quad f(x,t) \in L_2(0,T; W_2^2(\Omega)), \quad \left. \frac{\partial f(x,t)}{\partial \nu} \right|_S = 0;$$

$$(\gamma) \quad f(x,t) \in L_{\infty}(0,T; L_2(S)), \quad \varphi^{-\frac{1}{2}}(t)\Delta f(x,t) \in L_2(Q);$$

$$(\delta) \quad f(x,t) \in L_2(0,T; W_2^3(\Omega)), \quad \left. \frac{\partial f(x,t)}{\partial \nu} \right|_S = 0.$$

Теорема 3. Пусть выполняются условия

$$\varphi(t) \in C([0,T]), \quad \varphi(t) \geq 0 \text{ при } t \in [0,T]; \quad N(x) \in L_2(\Gamma);$$

$$h(t) \in C^1([0,T]), \quad h(t) \geq h_0 > 0 \text{ при } t \in [0,T]; \quad u_0(x) \in W_2^6(\Omega),$$

$$\frac{\partial u_0(x)}{\partial \nu} = \frac{\partial \Delta u_0(x)}{\partial \nu} = \frac{\partial \Delta^2 u_0(x)}{\partial \nu} = 0 \text{ при } x \in \Gamma, \quad \int_{\Gamma} N(x)u_0(x) dS = h(0),$$

а также либо условия (α) и (γ) и условие $d_0 \varphi_0 M_{15}^{1/2} \leq m_2$, либо условия (α) и (δ) и условие $d_0 \varphi_0 M_{18}^{1/2} \leq m_2$, либо условия (β) и (γ) и условие $d_0 \varphi_0 M_{35}^{1/2} \leq m_2$, либо условия (β) и (δ) и условие $d_0 \varphi_0 M_{38}^{1/2} \leq m_2$.

Тогда обратная задача II имеет решение $\{u(x, t), q(t)\}$ такое, что

$$\begin{aligned} u(x, t) &\in L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega)), \quad \varphi^{\frac{1}{2}}(t) \Delta^2 u(x, t) \in L_2(0, T; L_2(\Omega)), \\ u_t(x, t) &\in L_2(Q), \quad q(t) \in L_\infty([0, T]), \quad q(t) \geq 0 \text{ при } t \in [0, T]. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вновь определим срезающую функцию $G(\xi)$, но в этот раз с помощью числа m_2 . Для положительного числа ε рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$u_t - \varepsilon \Delta^3 u - \varphi(t) \Delta u + \frac{1}{h(t)} \left[g_2(t) + \varphi(t) G \left(\int_{\Gamma} N(x) \Delta u(x, t) dS \right) \right] u = f(x, t) \quad (16)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) и (3), а также условие

$$\frac{\partial \Delta u(x, t)}{\partial \nu} \Big|_S = \frac{\partial \Delta^2 u(x, t)}{\partial \nu} \Big|_S = 0. \quad (17)$$

Используя метод неподвижной точки, теоремы вложения [17, 18] и теорему Шаудера, нетрудно установить, что краевая задача (16), (2), (3), (17) при фиксированном ε и при принадлежности функции $f(x, t)$ пространству $L_2(Q)$ имеет решение $u(x, t)$ такое, что $u(x, t) \in L_2(0, T; W_2^6(\Omega)) \cap L_\infty(0, T; W_2^3(\Omega))$, $u_t(x, t) \in L_2(Q)$. Покажем, что для функций $u(x, t)$ имеют место «хорошие» априорные оценки.

Используя технику доказательства теоремы 1, нетрудно получить, что при выполнении одного из условий (α) или (β) для функций $u(x, t)$ выполняется соответствующая оценка

$$\int_{\Omega} [\Delta u(x, t)]^2 dx \leq M_1 \quad (18)$$

или

$$\int_{\Omega} [\Delta u(x, t)]^2 dx \leq M_3. \quad (19)$$

Умножим уравнение (16) на функцию $-\Delta^3 u$ и проинтегрируем по пространственным переменным по области Ω и по временной переменной от 0 до текущей точки. Повторяя выкладки, которые привели к неравенствам (9)–(13), получим, что для функции $u(x, t)$ выполняется одна из оценок

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} [\Delta u_{x_i}(x, t)]^2 dx \leq M_5, \quad (20)$$

или

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} [\Delta u_{x_i}(x, t)]^2 dx \leq M_8 \quad (21)$$

в зависимости от того, какое из условий (γ) или (δ) выполняется, а также оценка

$$\int_0^t \int_{\Omega} u_{\tau}^2(x, \tau) dx d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} \varphi(\tau) [\Delta^2 u(x, \tau)]^2 dx d\tau + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} [\Delta^3 u(x, \tau)]^2 dx d\tau \leq M_9, \quad (22)$$

постоянная M_9 в которой определяется функциями $f(x, t)$, $N(x)$ и $h(t)$.

Из оценок (18) и (20) или (19) и (21), а также из неравенства (15) и условий теоремы следует, что выполняется равенство

$$G\left(\int_{\Gamma} N(x)\Delta u(x, t) dS\right) = \int_{\Gamma} N(x)\Delta u(x, t) dS.$$

Используя это равенство, выполняя далее стандартные действия в организации предельного перехода (см. [8]), нетрудно получить, что существует функция $u(x, t)$, принадлежащая требуемому в теореме классу и являющаяся решением уравнения

$$u_t - \varphi(t)\Delta u + \frac{1}{h(t)} \left[g_2(t) + \varphi(t) \int_{\Gamma} N(x)\Delta u(x, t) dS \right] u = f(x, t).$$

Это уравнение означает, что функция $u(x, t)$ и функция $q(t)$, определенная равенством

$$q(t) = \frac{1}{h(t)} \left[g_2(t) + \varphi(t) \int_{\Gamma} N(x)\Delta u(x, t) dS \right],$$

связаны в цилиндре Q уравнением (1). Выполнение для функции $u(x, t)$ условий (2), (3) и (5) очевидны, принадлежность функции $q(t)$ пространству $L_{\infty}([0, T])$ также очевидна.

Все изложенное выше означает, что функции $u(x, t)$ и $q(t)$ дают искомое решение обратной задачи II.

Теорема доказана.

Определим множество W_2 как множество функций $\{u(x, t), q(t)\}$ таких, что $u(x, t) \in W_1$, $\Delta u(x, t) \in W_1$, $q(t) \in L_{\infty}([0, T])$, $q(t) \geq 0$ при $t \in [0, T]$.

Теорема 4. Пусть выполняются условия

$$\varphi(t) \in C([0, T]), \quad \varphi(t) \geq 0 \text{ при } t \in [0, T]; \quad N(x) \in L_2(\Gamma).$$

Тогда любые два решения $\{u_1(x, t), q_1(t)\}$ и $\{u_2(x, t), q_2(t)\}$ обратной задачи II, принадлежащие множеству W_2 , совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для разности $\omega(x, t)$ функций $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ выполняется уравнение

$$\omega_t - \varphi(t)\Delta\omega + q_1(t)\omega = \frac{\varphi(t)}{h(t)} \left(\int_{\Gamma} N(y)\Delta\omega(y, t) dS \right) \Delta u_2(x, t).$$

Поскольку решения $\{u_1(x, t), q_1(t)\}$ и $\{u_2(x, t), q_2(t)\}$ принадлежат множеству W_2 , от этого уравнения можно перейти к уравнению для функции $v(x, t) = \Delta\omega(x, t)$:

$$v_t - \varphi(t)\Delta v + q_1(t)v = \frac{\varphi(t)}{h(t)} \left(\int_{\Gamma} N(y)v(y, t) dS \right) \Delta u_2(x, t). \quad (23)$$

Умножим уравнение (23) на функцию $v(x, t)$ и проинтегрируем по $\Omega(x, t)$ и по временной переменной от 0 до текущей точки. Получим равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} v^2(x, t) dx + \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} \varphi(\tau) v_{x_i}^2(x, \tau) dxd\tau + \int_0^t \int_{\Omega} q_1(\tau) v^2(x, \tau) dxd\tau \\ = - \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{h(\tau)} \left(\int_{\Gamma} N(y) v(y, \tau) dS \right) \left(\int_{\Omega} u_{2x_i}(x, \tau) v_{x_i}(x, \tau) dx \right) d\tau. \end{aligned} \quad (24)$$

От равенства (24) нетрудно перейти к следующей цепочке неравенств (с помощью неравенств Гёльдера и Юнга и с учетом принадлежности функции $u_2(x, t)$ множеству W_2). Оценивая правую часть этого равенства с помощью неравенства Гёльдера, придем к оценке

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} v^2(x, t) dx + \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} \varphi(\tau) v_{x_i}^2(x, \tau) dxd\tau \\ & \leq \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{h(\tau)} \left(\int_{\Gamma} N(y) v(y, \tau) dS \right) \left(\int_{\Omega} u_{2x_i}^2(x, \tau) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} v_{x_i}^2(x, \tau) dx \right)^{\frac{1}{2}} d\tau \\ & \leq \delta_1 \sum_{i=1}^n \int_0^t \varphi(\tau) \left(\int_{\Omega} v_{x_i}^2(x, \tau) dx \right) d\tau + M(\delta_1) \int_0^t \varphi(\tau) \left(\int_{\Gamma} N(y) v(y, \tau) dS \right)^2 d\tau; \end{aligned} \quad (25)$$

число δ_1 в последнем неравенстве есть произвольное положительное число, число $M(\delta_1)$ определяется помимо числа δ_1 также числом n и функциями $h(t)$, $u_2(x, t)$.

Помимо неравенства (15) для функций $\psi(t)$ из пространства $W_2^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\int_{\Gamma} \psi^2(x) dS \leq \delta_0 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \psi_{x_i}^2(x) dx + C(\delta_0) \int_{\Omega} \psi^2(x) dx, \quad (26)$$

в котором δ_0 вновь есть произвольное положительное число, число $C(\delta_0)$ определяется числом δ_0 , а также областью Ω .

Используя (26), продолжим неравенство (25):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} v^2(x, t) dx + \int_0^t \int_{\Omega} \varphi(\tau) \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2(x, \tau) dxd\tau \\ & \leq \delta_1 \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} \varphi(\tau) v_{x_i}^2(x, \tau) dxd\tau + \delta_0 M(\delta_1) \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} \varphi(\tau) v_{x_i}^2(x, \tau) dxd\tau \\ & \quad + C(\delta_0) M(\delta_1) \|N\|_{L_2(\Omega)}^2 \int_0^t \int_{\Omega} v^2(x, \tau) dxd\tau. \end{aligned} \quad (27)$$

Подбирай число δ_1 малым и фиксируя, затем подбирай число δ_0 так, чтобы $\delta_0 M(\delta_1)$ оказалось малым, и далее используя лемму Гронуолла, получим, что $v(x, t)$ есть тождественно нулевая в Q функция. Но тогда и функция $\omega(x, t)$ будет тождественно нулевой в Q функцией. Как отмечено при доказательстве теоремы 2, это и означает, что для обратной задачи II при выполнении условий теоремы 4 имеет место свойство единственности.

Теорема доказана.

4. Комментарии и дополнения

4.1. Определенные в теоремах единственности множества W_1 и W_2 , очевидно, являются множествами устойчивости для обратных задач I и II соответственно.

4.2. Теорему существования решений обратной задачи II нетрудно доказать и при выполнении условия $N(x) \in W_2^1(\Omega)$. В этом случае вспомогательной задачей будет задача нахождения решения $u(x, t)$ уравнения

$$u_t - [\varphi(t) + \varepsilon]\Delta u + \left[g_1(t) - \frac{\varphi(t)}{h(t)} G \left(\sum_{j=1}^n \int_{\Omega} N_{x_j}(x) u_{x_j}(x, t) dy \right) \right] = f(x, t) \quad (\varepsilon > 0), \quad (28)$$

для которого выполняются условия (2) и (3). Основная априорная оценка в этой задаче выводится после умножения уравнения (28) на функцию $-\Delta u$.

Заметим, что при выполнении условия $N(x) \in W_2^1(\Omega)$ классы существования и устойчивости будут совпадать.

4.3. В обратных задачах I и II оператор Лапласа вполне можно заменить общим эллиптическим оператором второго порядка. Идеи доказательства теорем существования и единственности останутся прежними, но выкладки и условия станут более громоздкими. Уточним лишь, что в условии (3) нормальную производную нужно будет заменить конормальной.

4.4. В обратных задачах I и II условие (3) вполне можно заменить условием третьей начально-краевой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker, 1999.
2. Ivanchov M. Inverse problems for equations of parabolic type. Lviv: WNTI Publ., 2003.
3. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. книж. изд-во, 2009.
4. Сабитов К. Б. Обратные задачи для уравнений математической физики. М.: Наука, 2023.
5. Hussein M. S., Lessnic D., Ivanchov N. I. Simultaneous determination of time dependent coefficients in the heat equation // Comput. Math. Appl. 2014. V. 67. P. 1065–1091.
6. Safiullova R. R. Solvability of nonlinear inverse problem for hyperbolic equation // J. Math. Sci. 2018. V. 228, N 4. P. 431-448.
7. Belonogov V. A., Pyatkov S. G. On some classes of inverse problems of determining the heat transfer coefficient in layered media // Sib. Math. J. 2022. V. 63, N 2. P. 252–271.

8. Kozhanov A. I., Shipina T. N. Nonlinear inverse problems for parabolic equations with time-dependent coefficients. Reduction to nonlocal problems with Samarski–Ionkin type conditions // J. Math. Sci. 2023. V. 274, N 4. P. 523–533.
9. Кожанов А. И. Параболические уравнения с неизвестными коэффициентами, зависящими от времени // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2017. Т. 57, № 6. С. 961–972.
10. Камынин В. Л. Об обратной задаче определения зависящего от пространственной переменной младшего коэффициента в параболическом уравнении со слабым вырождением // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. математика и ее прил. Тем. обзоры. 2022. Т. 206. С. 68–81.
11. Камынин В. Л. Об обратных задачах для сильно вырождающихся параболических уравнений при условии интегрального наблюдения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2018. Т. 58, № 12. С. 2075–2094.
12. Камынин В. Л. О корректной разрешимости обратной задачи определения правой части в вырождающемся параболическом уравнении с условием интегрального наблюдения // Мат. заметки. 2015. Т. 98, № 5. С. 710–724.
13. Кожанов А. И., Абылқаиров У. У., Ашуррова Г. Р. Обратные задачи определения коэффициентов временного типа в вырождающемся параболическом уравнении // Вестн. КарГУ. Сер. Математика. 2022. Т. 106, №2. С. 128–142.
14. Ашуррова Г. Р. Обратные коэффициентные задачи для вырождающихся параболических уравнений // Междунар. науч. конф. «Обратные и некорректные задачи в естествознании». Алматы, 2023. С. 30.
15. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применения. М.: Наука, 2012.
16. Дженалиев М. Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: Ин-т теор. и прикл. математики, 1995.

Поступила в редакцию 10 февраля 2024 г.

После доработки 10 февраля 2024 г.

Принята к публикации 29 февраля 2024 г.

Кожанов Александр Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коштуога, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
kozhanov@math.nsc.ru

Ашуррова Гузел Рашитхужакызы
Казахский национальный университет им. Аль-Фараби,
пр. Аль-Фараби, 71, Алматы 050040, Казахстан
ashurova.guzel@gmail.com

PARABOLIC EQUATIONS WITH
DEGENERACY AND UNKNOWN COEFFICIENT
A. I. Kozhanov and G. R. Ashurova

Abstract: The work is devoted to investigating the solvability in Sobolev spaces of nonlinear inverse problems of determination, along with the solution $u(x, t)$ of a parabolic equation, the unknown coefficient dependent on time. The studied problems are unique since the original parabolic equation is degenerate. As the integral overdetermination conditions, we use domain-wide integral overdetermination conditions or integral boundary overdetermination conditions. The existence and uniqueness theorems are proved for regular solutions, i.e. the solutions having all generalized derivatives included in the corresponding equation.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-1-56-69

Keywords: parabolic equations, degeneration, nonlinear inverse coefficient problems, integral overdetermination, regular solutions, existence, uniqueness.

REFERENCES

1. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., and Vasin I. A., Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics, Marcel Dekker, New York (1999).
2. Ivanchov M., Inverse Problems for Equations of Parabolic Type, WNTI Publ., Lviv (2003).
3. Kabanikhin S. I., Inverse and Ill-Posed Problems [in Russian], Sib. Knizh. Izdat., Novosibirsk (2009).
4. Sabitov K. B., Inverse Problems for Equations of Mathematical Physics [in Russian], Nauka, Moscow (2023).
5. Hussein M. S., Lessnic D., and Ivanchov N. I., “Simultaneous determination of time dependent coefficients in the heat equation,” Comput. Math. Appl., **67**, 1065–1091 (2014).
6. Safiullova R. R., “Solvability of nonlinear inverse problem for hyperbolic equation,” J. Math. Sci., **228**, No. 4, 431–448 (2018).
7. Belonogov V. A. and Pyatkov S. G., “On some classes of inverse problems of determining the heat transfer coefficient in layered media,” Sib. Math. J., **63**, No. 2, 252–271 (2022).
8. Kozhanov A. I. and Shipina T. N., “Nonlinear inverse problems for parabolic equations with time-dependent coefficients. Reduction to nonlocal problems with Samarski–Ionkin type conditions,” J. Math. Sci., **274**, No. 4, 523–533 (2023).
9. Kozhanov A. I., “Parabolic equations with unknown time-dependent coefficients,” Comput. Math. Math. Phys., **57**, No. 6, 961–972 (2017).
10. Kamynin V. L., “On the inverse problem of determining the lowest coefficient depending on a spatial variable in a parabolic equation with weak degeneracy [in Russian],” Itogi Nauki i Tekn., Sovremen. Mat. Pril., Temat. Obzory, **206**, 68–81 (2022).
11. Kamynin V. L., “On inverse problems for strongly degenerate parabolic equations under the condition of integral observation,” Comput. Math. Math. Phys., **58**, No. 12, 2002–2017 (2018).
12. Kamynin V. L., “On the correct solvability of the inverse problem of determining the right side in a degenerate parabolic equation with the condition of integral observation,” Math. Notes, **98**, No. 5, 710–724 (2015).

13. Kozhanov A. I., Abylkairov U. U., and Ashurova G. R., "Inverse problems of determining time-type coefficients in degenerate parabolic equations [in Russian]," *Vestn. KarGU, Ser. Mat.*, **106**, No. 2, 128–142 (2022).
14. Ashurova G. R., "Inverse coefficient problems for degenerate parabolic equations [in Russian]," in: *Mezhdunar. Nauch. Konf. "Inverse and Ill-Posed Problems in Natural Science,"* p. 30, Almaty (2023).
15. Nakhushev A. M., *Loaded Equations and Their Applications* [in Russian], Nauka, Moscow (2012).
16. Dzhenaliev M. T., *On the Theory of Linear Boundary Value Problems for Loaded Differential Equations* [in Russian], Inst. Theor. Appl. Math., Almaty (1995).

Submitted February 10, 2024

Revised February 10, 2024

Accepted February 29, 2024

Aleksandr I. Kozhanov
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia;
Novosibirsk State University,
1 Pirogov Street, 630090 Novosibirsk, Russia
kozhanov@math.nsc.ru

Guzel R. Ashurova
Al-Farabi Kazakh National University,
71 Al-Farabi Avenue, 050040 Almaty, Kazakhstan
ashurova.guzel@gmail.com

STRUCTURED PSEUDOSPECTRUM AND
STRUCTURED ESSENTIAL PSEUDOSPECTRUM
OF CLOSED LINEAR OPERATOR PENCILS
ON ULTRAMETRIC BANACH SPACES

J. Ettayb

Abstract: We introduce and study the structured pseudospectrum and the essential pseudospectrum of closed linear operator pencils on ultrametric Banach spaces. We establish a characterization of the structured pseudospectrum of closed linear operator pencils and relationship between the structured pseudospectrum and the structured pseudospectrum of closed linear operator pencils on ultrametric Banach spaces. Many characterizations of structured essential pseudospectra of operators, such as the structured essential pseudospectrum of closed linear operator pencils, is invariant under perturbation of completely continuous linear operators on ultrametric Banach spaces over \mathbb{Q}_p . Finally, we give some illustrative examples.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-1-70-80

Keywords: ultrametric Banach spaces, pseudospectra, closed Fredholm operators, closed linear operators.

1. Introduction and Preliminaries

In the classical functional analysis, Trefethen [1] studied and developed the pseudospectrum of matrices and bounded linear operators. Davies [2] introduced and studied the structured pseudospectrum of a closed linear operator S on complex Banach space \mathcal{E} over \mathbb{C} and he gave a characterization of the structured pseudospectrum of S . For more details, see [2].

In ultrametric operator theory, the pseudospectra of linear operators were extended and studied by the authors in [3] and they characterized the pseudospectrum of linear operators and the essential pseudospectrum of closed linear operators. In [4], Ammar et al. introduced and studied the condition pseudospectrum of bounded linear operators on ultrametric Banach spaces. They established a relationship between the condition pseudospectrum and the pseudospectrum and they proved some properties of the essential condition pseudospectrum. Recently, El Amrani et al. [5] studied the pseudospectrum of ultrametric matrices, the condition pseudospectrum of ultrametric matrices and the pseudospectrum of ultrametric matrix pencils. They showed some results about them and they gave some illustrative examples. Furthermore, the trace pseudospectrum of ultrametric matrix pencils, the determinant pseudospectrum of ultrametric matrix pencils and the condition pseudospectrum of

ultrametric operator pencils were studied by several authors. For more details, we refer to [5–8].

The eigenvalue problem is one of interesting problems in ultrametric operator theory. It played an important role in many parts of ultrametric applied mathematics and physics including matrix theory, ultrametric pseudo-differential equations, control theory and ultrametric quantum mechanics. For more details, see [3, 4, 9, 10]. This work is motivated by many studies of ultrametric spectral theory and perturbation theory of linear operators. For more details, we refer to [5–8, 11, 12].

Throughout this paper, \mathbb{K} is a complete ultrametric field with a non-trivial valuation $|\cdot|$, \mathcal{E} is an ultrametric Banach space over \mathbb{K} , $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ denotes the collection of all bounded linear operators on \mathcal{E} , $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ is the set of all closed, densely defined linear operators on \mathcal{E} , $\mathcal{E}^* = \mathcal{B}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$ is the dual space of \mathcal{E} and \mathbb{Q}_p is the field of p -adic numbers. For more details, we refer to [13, 14]. For $S \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, $D(S)$, $N(S)$, $R(S)$, $\rho(S)$, $\sigma(S)$ and $\sigma_e(S)$ are the domain, the kernel, the range, the resolvent set, the spectrum and the essential spectrum of S respectively. Recall that an unbounded linear operator $S : D(S) \subset \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ is said to be closed, densely defined if S is closed and $D(S)$ is dense in \mathcal{E} . For more details on closed, densely defined linear operators, see [11, 15]. We begin with the following preliminaries.

DEFINITION 1 [13]. A field \mathbb{K} is said to be *ultrametric* if it is endowed with an absolute value $|\cdot| : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}^+$ such that

- (i) $|\alpha| = 0$ if, and only if, $\alpha = 0$;
- (ii) For all $\alpha, \mu \in \mathbb{K}$, $|\alpha\mu| = |\alpha||\mu|$;
- (iii) For each $\alpha, \mu \in \mathbb{K}$, $|\alpha + \mu| \leq \max\{|\alpha|, |\mu|\}$.

From now, we assume that $\mathbb{K} = (\mathbb{K}, |\cdot|)$ is a complete ultrametric valued field.

DEFINITION 2 [13]. An ultrametric field \mathbb{K} is said to be *spherically complete* if each decreasing sequence of closed balls $(B_n)_n$ has nonempty intersection.

DEFINITION 3 [13]. Let \mathcal{E} be a vector space over \mathbb{K} . A function $\|\cdot\| : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$ is called an *ultrametric norm* if:

- (i) For all $u \in \mathcal{E}$, $\|u\| = 0$ if and only if $u = 0$;
- (ii) For all $u \in \mathcal{E}$ and $\lambda \in \mathbb{K}$, $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$;
- (iii) For any $u, v \in \mathcal{E}$, $\|u + v\| \leq \max(\|u\|, \|v\|)$.

DEFINITION 4 [13]. An ultrametric Banach space is a *complete ultrametric normed space*.

Ingleton [14] proved the following theorem.

Theorem 1 [14]. Assume that \mathbb{K} is spherically complete. Let \mathcal{E} be an ultrametric Banach space over \mathbb{K} . For all $u \in \mathcal{E} \setminus \{0\}$, there is $u^* \in \mathcal{E}^*$ such that $u^*(u) = 1$ and $\|u^*\| = \|u\|^{-1}$.

DEFINITION 5 [13]. Let $\omega = (\omega_i)_i$ be a sequence of $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. We define \mathcal{E}_ω by

$$\mathcal{E}_\omega = \{u = (u_i)_i : \forall i \in \mathbb{N}, u_i \in \mathbb{K} \text{ and } \lim_{i \rightarrow \infty} |\omega_i|^{\frac{1}{2}} |u_i| = 0\}.$$

On \mathcal{E}_ω , we define

$$\forall u \in \mathcal{E}_\omega : u = (u_i)_i, \|u\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} (|\omega_i|^{\frac{1}{2}} |u_i|).$$

Then $(\mathcal{E}_\omega, \|\cdot\|)$ is an ultrametric Banach space.

REMARK 1 [13]. The orthogonal basis $\{e_i, i \in \mathbb{N}\}$ is called the *canonical basis* of \mathcal{E}_ω where $e_i = (\delta_{i,j})_{j \in \mathbb{N}}$ and $\delta_{i,j}$ is the Kronecker symbol. For each $i \in \mathbb{N}$, $\|e_i\| = |\omega_i|^{\frac{1}{2}}$.

DEFINITION 6 [13]. Let $S \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, S is called an upper semi-Fredholm operator if $\alpha(S) = \dim N(S)$ is finite and $R(S)$ is closed.

The collection of each upper semi-Fredholm operators on \mathcal{E} is denoted by $\Phi_+(\mathcal{E})$.

DEFINITION 7 [13]. Let $S \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, S is said to be a *lower semi-Fredholm operator* if $\beta(S) = \dim(\mathcal{E}/R(S))$ is finite.

The collection of each lower semi-Fredholm operators on \mathcal{E} is denoted by $\Phi_-(\mathcal{E})$.

The collection of each closed Fredholm operators on \mathcal{E} is

$$\Phi(\mathcal{E}) = \Phi_+(\mathcal{E}) \cap \Phi_-(\mathcal{E}).$$

For more details on closed Fredholm operators, see [13].

DEFINITION 8 [14]. Let $S \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, S is said to be an operator of finite rank if $\dim R(S)$ is finite.

The set of all finite rank operators on \mathcal{E} will be denoted by $\mathcal{F}_0(\mathcal{E})$.

DEFINITION 9 [13]. Let \mathcal{E} be an ultrametric Banach space and let $S \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, S is called *completely continuous* if, there is a sequence of finite rank linear operators $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ such that $\|S_n - S\| \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$.

$\mathcal{C}_c(\mathcal{E})$ is the set of all completely continuous linear operators on \mathcal{E} .

REMARK 2 [13]. (i) We have $\mathcal{B}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{C}(\mathcal{E})$.

(ii) Let $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ and $S : D(S) \subset \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ be an unbounded linear operator. Then $S + A$ is closed if and only if S is closed.

As the classical setting, we have the following lemma.

Lemma 1 [15]. Suppose that $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_p$. Let $S \in \Phi(\mathcal{E})$ and $C \in \mathcal{C}_c(\mathcal{E})$, then $S + C \in \Phi(\mathcal{E})$ and $\text{ind}(S + C) = \text{ind}(S)$.

Similarly to the proof of Theorem 3.1 of [4], we conclude the following theorem.

Theorem 2. Suppose that $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_p$. Let $S \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$. Then

$$\sigma_e(S) = \bigcap_{K \in \mathcal{C}_c(\mathcal{E})} \sigma(S + K).$$

As the classical setting, we have

Proposition 1 [2]. Let \mathcal{E} be an ultrametric Banach space over \mathbb{K} . If $S, B \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, then $-1 \notin \sigma(SB)$ if, and only if, $-1 \notin \sigma(BS)$.

From Definition 2.1 of [16], we get.

DEFINITION 10. Let $S \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ and $B \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, the resolvent set $\rho(S, B)$ of the operator pencil (S, B) of the form $S - \lambda B$ is defined by

$$\rho(S, B) = \{\lambda \in \mathbb{K} : R_\lambda(S, B) = (S - \lambda B)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{E})\}.$$

$R_\lambda(S, B)$ is called the *resolvent of the operator pencil* (S, B) . The spectrum $\sigma(S, B)$ of the operator pencil (S, B) of the form $S - \lambda B$ is defined by $\sigma(S, B) = \mathbb{K} \setminus \rho(S, B)$.

From Definition 2.3 of [16], we have the following:

DEFINITION 11. Let $S \in \mathcal{C}(\mathcal{E}), B \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ and $\varepsilon > 0$. The pseudospectrum $\sigma_\varepsilon(S, B)$ of the operator pencil (S, B) is defined by

$$\sigma_\varepsilon(S, B) = \sigma(S, B) \cup \{\lambda \in \mathbb{K} : \|(S - \lambda B)^{-1}\| > \varepsilon^{-1}\}.$$

The pseudoresolvent $\rho_\varepsilon(S, B)$ of (S, B) is defined by

$$\rho_\varepsilon(S, B) = \rho(S, B) \cap \{\lambda \in \mathbb{K} : \|(S - \lambda B)^{-1}\| \leq \varepsilon^{-1}\},$$

by convention $\|(S - \lambda B)^{-1}\| = \infty$ if, and only if, $\lambda \in \sigma(S, B)$.

As the proof of Theorem 2.14 of [8], the essential spectrum of closed linear operator pencils on ultrametric Banach spaces over a spherically complete field \mathbb{K} is characterized by the following:

Theorem 3. Let \mathcal{E} be an ultrametric Banach space over \mathbb{Q}_p , let $S \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ and $B \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$. Then

$$\sigma_e(S, B) = \bigcap_{K \in \mathcal{C}_c(\mathcal{E})} \sigma(S + K, B).$$

2. Main results

We introduce the following definition.

DEFINITION 12. Let \mathcal{E} be an ultrametric Banach space over \mathbb{K} . Let $S \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, $B, C, M \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ and $\varepsilon > 0$. The *structured pseudospectrum* $\sigma_\varepsilon(S, M, B, C)$ of the closed linear operator pencil (S, M) is defined by

$$\sigma_\varepsilon(S, M, B, C) = \sigma(S, M) \cup \{\lambda \in \mathbb{K} : \|B(S - \lambda M)^{-1}C\| > 1/\varepsilon\}.$$

The structured pseudoresolvent $\rho_\varepsilon(S, M, B, C)$ of (S, M) is given by

$$\rho(S, M) \cap \{\lambda \in \mathbb{K} : \|B(S - \lambda M)^{-1}C\| \leq 1/\varepsilon\}.$$

By convention $\|B(S - \lambda M)^{-1}C\| = \infty$ if and only if $\lambda \in \sigma(S, M)$.

By Definition 12, we deduce the following remark.

REMARK 3. If $C = B = I$, hence $\sigma_\varepsilon(S, M, I, I) = \sigma_\varepsilon(S, M)$ is the pseudospectrum of the pencil (S, M) .

Theorem 4. Let \mathcal{E} be an ultrametric Banach space over \mathbb{K} , let $S \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, $B, C, M \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ and $\varepsilon > 0$. Then

- (i) For all $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ such that $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$, $\sigma_{\varepsilon_1}(S, M, B, C) \subset \sigma_{\varepsilon_2}(S, M, B, C)$.
- (ii) $\sigma(S, M) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma_{\varepsilon}(S, M, B, C)$.

PROOF. (i) If $\lambda \in \sigma_{\varepsilon_1}(S, M, B, C)$, hence $\|B(S - \lambda M)^{-1}C\| > \varepsilon_1^{-1} \geq \varepsilon_2^{-1}$. Then $\lambda \in \sigma_{\varepsilon_2}(S, M, B, C)$.

(ii) Since for each $\varepsilon > 0$, $\sigma(S, M) \subseteq \sigma_{\varepsilon}(S, M, B, C)$, then

$$\sigma(S, M) \subseteq \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma_{\varepsilon}(S, M, B, C).$$

Conversely, if $\lambda \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma_{\varepsilon}(S, M, B, C)$, hence for each $\varepsilon > 0$, $\lambda \in \sigma_{\varepsilon}(S, M, B, C)$. If $\lambda \notin \sigma(S, M)$, hence $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{K} : \|B(S - \lambda M)^{-1}C\| > \varepsilon^{-1}\}$. For $\varepsilon \rightarrow 0^+$, we obtain that $\|B(S - \lambda M)^{-1}C\| = \infty$. Consequently, $\lambda \in \sigma(S, M)$. \square

Theorem 5. Let \mathcal{E} be an ultrametric Banach space over a spherically complete field \mathbb{K} such that $\|\mathcal{E}\| \subseteq |\mathbb{K}|$, let $S \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ and $B, C, M \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ with $0 \in \rho(B) \cap \rho(C)$ and $\varepsilon > 0$. Hence

$$\sigma_{\varepsilon}(S, M, B, C) = \bigcup_{D \in \mathcal{B}(\mathcal{E}) : \|D\| < \varepsilon} \sigma(S + CDB, M).$$

PROOF. Firstly, we prove that

$$\bigcup_{D \in \mathcal{B}(\mathcal{E}) : \|D\| < \varepsilon} \sigma(S + CDB, M) \subseteq \sigma_{\varepsilon}(S, M, B, C).$$

Let

$$\lambda \in \bigcup_{D \in \mathcal{B}(\mathcal{E}) : \|D\| < \varepsilon} \sigma(S + CDB, M).$$

If $D = 0$, hence

$$\sigma(S, M) \subseteq \sigma_{\varepsilon}(S, M, B, C).$$

If $D \neq 0$. We argue by contradiction, if $\lambda \in \rho(S, M)$ and $\|B(S - \lambda M)^{-1}C\| \leq \varepsilon^{-1}$. Then for each $D \in \mathcal{B}(\mathcal{E}) : \|D\| < \varepsilon$, hence $\|DB(S - \lambda M)^{-1}C\| < 1$. Thus, $DB(S - \lambda M)^{-1}C + I$ is invertible. From Proposition 1, for each $D \in \mathcal{B}(\mathcal{E}) : \|D\| < \varepsilon$, $-1 \notin \sigma(DB(S - \lambda M)^{-1}C)$ if and only if $-1 \notin \sigma(CDB(S - \lambda M)^{-1})$. Thus

$$S + CDB - \lambda M = (I + CDB(S - \lambda M)^{-1})(S - \lambda M).$$

Hence $(S + CDB - \lambda M)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ which is a contradiction. Then

$$\bigcup_{D \in \mathcal{B}(\mathcal{E}) : \|D\| < \varepsilon} \sigma(S + CDB, M) \subseteq \sigma_{\varepsilon}(S, M, B, C).$$

For the converse inclusion, if $\lambda \notin \sigma(S, M)$, then $\|B(S - \lambda M)^{-1}C\| > \varepsilon^{-1}$. Hence

$$\sup_{x \in \mathcal{E} \setminus \{0\}} \frac{\|B(S - \lambda M)^{-1}Cx\|}{\|x\|} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Consequently, there is $x \in \mathcal{E} \setminus \{0\}$ with

$$\|B(S - \lambda M)^{-1}Cx\| > \frac{\|x\|}{\varepsilon}. \quad (1)$$

Set $y = B(S - \lambda M)^{-1}Cx$, then $C^{-1}(S - \lambda M)B^{-1}y = x$. From (1), we have

$$\|C^{-1}(\lambda M - S)B^{-1}y\| < \varepsilon\|y\|. \quad (2)$$

Since $\|\mathcal{E}\| \subseteq |\mathbb{K}|$, there is $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ such that $\|y\| = |c|$, set $z = c^{-1}y$, thus $\|z\| = 1$. By (2),

$$\|(C^{-1}(\lambda M - S)B^{-1})z\| < \varepsilon. \quad (3)$$

From Theorem 1, there is $\varphi \in \mathcal{E}^*$ such that $\varphi(z) = 1$ and $\|\varphi\| = \|z\|^{-1} = 1$. Set for each $x \in \mathcal{E}$, $Dx = \varphi(x)(C^{-1}(\lambda M - S)B^{-1})z$. Then for all $x \in \mathcal{E}$,

$$\|Dx\| = |\varphi(x)|\|(C^{-1}(S - \lambda M)B^{-1})z\| \leq \|\varphi\| \|x\| \|(C^{-1}(S - \lambda M)B^{-1})z\| < \varepsilon\|x\|.$$

Hence $D \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ and $\|D\| < \varepsilon$. Moreover for $z \neq 0$, $Dz + (C^{-1}(S - \lambda M)B^{-1})z = 0$. Set $v = B^{-1}z \neq 0$. One can see that for $v \neq 0$, $(CDB + S - \lambda M)v = 0$. Thus

$$\lambda \in \bigcup_{D \in \mathcal{B}(\mathcal{E}): \|D\| < \varepsilon} \sigma(S + CDB, M).$$

Consequently,

$$\sigma_\varepsilon(S, M, B, C) = \bigcup_{D \in \mathcal{B}(\mathcal{E}): \|D\| < \varepsilon} \sigma(S + CDB, M). \quad \square$$

Theorem 6. Suppose that \mathbb{K} is spherically complete and $\|\mathcal{E}\| \subseteq |\mathbb{K}|$. Let $S \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ and $B, C, M \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ such that $0 \in \rho(B) \cap \rho(C)$ and $\varepsilon > 0$. Then

$$\sigma_\varepsilon(S, M, B, C) = \sigma(S, M) \cup \{\lambda \in \mathbb{K} : \exists x \in \mathcal{E}, \|x\| = 1, \|C^{-1}(S - \lambda M)B^{-1}x\| < \varepsilon\}.$$

PROOF. If $\lambda \in \sigma_\varepsilon(S, M, B, C) \setminus \sigma(S, M)$, then $\|B(S - \lambda M)^{-1}C\| > \varepsilon^{-1}$. Hence

$$\sup_{x \in \mathcal{E} \setminus \{0\}} \frac{\|B(S - \lambda M)^{-1}Cx\|}{\|x\|} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Thus there exists $x \in \mathcal{E} \setminus \{0\}$ with

$$\|B(S - \lambda M)^{-1}Cx\| > \frac{\|x\|}{\varepsilon}. \quad (4)$$

Set $y = B(S - \lambda M)^{-1}Cx \neq 0$, then $C^{-1}(S - \lambda M)B^{-1}y = x$. By (4),

$$\|C^{-1}(S - \lambda M)B^{-1}y\| < \varepsilon\|y\|. \quad (5)$$

Since $\|\mathcal{E}\| \subseteq |\mathbb{K}|$, there is $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ with $\|y\| = |c|$, put $z = c^{-1}y$, hence $\|z\| = 1$. By (5), we have

$$\|C^{-1}(S - \lambda M)B^{-1}z\| < \varepsilon. \quad (6)$$

Let $\lambda \in \mathbb{K}$ such that there exists $z \in \mathcal{E} : \|z\| = 1$ and

$$\|C^{-1}(S - \lambda M)B^{-1}z\| < \varepsilon. \quad (7)$$

From Theorem 1, there exists $\varphi \in \mathcal{E}^*$ with $\varphi(z) = 1$ and $\|\varphi\| = \|z\|^{-1} = 1$. Set for any $y \in \mathcal{E}$, $Dy = \varphi(y)(C^{-1}(\lambda M - S)B^{-1})z$. Hence for any $y \in \mathcal{E}$,

$$\|Dy\| = |\varphi(y)|\|(C^{-1}(S - \lambda M)B^{-1})z\| \leq \|\varphi\|\|y\|\|(C^{-1}(S - \lambda M)B^{-1})z\| < \varepsilon\|y\|.$$

Thus $D \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ and $\|D\| < \varepsilon$. Moreover for $z \neq 0$, $Dz + (C^{-1}(S - \lambda M)B^{-1})z = 0$. Set $v = B^{-1}z \neq 0$. One can see that for $v \neq 0$, $(CDB + S - \lambda M)v = 0$. Thus

$$\lambda \in \bigcup_{D \in \mathcal{B}(\mathcal{E}): \|D\| < \varepsilon} \sigma(S + CDB, M).$$

By Theorem 5, $\lambda \in \sigma_\varepsilon(S, M, B, C)$. \square

The structured essential pseudospectrum of closed linear operator pencils is introduced as follows.

DEFINITION 13. Let \mathcal{E} be an ultrametric Banach space over \mathbb{K} , let $S \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, $B, C, M \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ and $\varepsilon > 0$. The structured essential pseudospectrum of the closed linear operator pencil (S, M) of the form $S - \lambda B$ is defined as follows:

$\sigma_{e,\varepsilon}(S, M, B, C) = \mathbb{K} \setminus \{\lambda \in \mathbb{K} : S + CDB - \lambda M \in \Phi_0(\mathcal{E}) \text{ for all } D \in \mathcal{B}(\mathcal{E}), \|D\| < \varepsilon\}$, where $\Phi_0(\mathcal{E})$ is the collection of all unbounded Fredholm operators on \mathcal{E} of index 0.

We obtain the following results.

Theorem 7. Let \mathcal{E} be an ultrametric Banach space over \mathbb{K} . Let $S \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ and $B, C, M \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ and $\varepsilon > 0$, hence

$$\sigma_{e,\varepsilon}(S, M, B, C) = \bigcup_{D \in \mathcal{B}(\mathcal{E}): \|D\| < \varepsilon} \sigma_e(S + CDB, M).$$

PROOF. If $\lambda \notin \sigma_{e,\varepsilon}(S, M, B, C)$, thus for each $D \in \mathcal{B}(\mathcal{E}) : \|D\| < \varepsilon$,

$$S + CDB - \lambda M \in \Phi(\mathcal{E}) \text{ and } \text{ind}(S + CDB - \lambda M) = 0.$$

Hence $\lambda \notin \sigma_e(S + CDB, M)$ for each $D \in \mathcal{B}(\mathcal{E}) : \|D\| < \varepsilon$, then

$$\lambda \notin \bigcup_{D \in \mathcal{B}(\mathcal{E}): \|D\| < \varepsilon} \sigma_e(S + CDB, M).$$

Consequently,

$$\bigcup_{D \in \mathcal{B}(\mathcal{E}): \|D\| < \varepsilon} \sigma_e(S + CDB, M) \subseteq \sigma_{e,\varepsilon}(S, M, B, C).$$

Conversely, if

$$\lambda \notin \bigcup_{D \in \mathcal{B}(\mathcal{E}): \|D\| < \varepsilon} \sigma_e(S + CDB, M),$$

hence for each $D \in \mathcal{B}(\mathcal{E}) : \|D\| < \varepsilon$, $\lambda \notin \sigma_e(S + CDB, M)$. Thus $S + CDB - \lambda M \in \Phi(\mathcal{E})$ and $\text{ind}(S + CDB - \lambda M) = 0$ for all $D \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ with $\|D\| < \varepsilon$, then $\lambda \notin \sigma_{e,\varepsilon}(S, M, B, C)$. \square

Theorem 8. Suppose that $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_p$. Let $S \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ and $B, C, M \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ and $\varepsilon > 0$. Then,

$$\sigma_{e,\varepsilon}(S, M, B, C) = \sigma_{e,\varepsilon}(S + K, M, B, C) \text{ for each } K \in \mathcal{C}_c(\mathcal{E}). \quad (8)$$

PROOF. If $\lambda \notin \sigma_{e,\varepsilon}(S, M, B, C)$, hence for each $D \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ with $\|D\| < \varepsilon$,

$$S + CDB - \lambda M \in \Phi(\mathcal{E}) \text{ and } \text{ind}(S + CDB - \lambda M) = 0.$$

From Lemma 1, for all $K \in \mathcal{C}_c(\mathcal{E})$ and $D \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ such that $\|D\| < \varepsilon$, we obtain

$$S + CDB + K - \lambda M \in \Phi(\mathcal{E}) \text{ and } \text{ind}(S + CDB + K - \lambda M) = 0. \quad (9)$$

By (9), we get

$$\lambda \notin \sigma_{e,\varepsilon}(S + K, M, B, C).$$

Then

$$\sigma_{e,\varepsilon}(S + K, M, B, C) \subseteq \sigma_{e,\varepsilon}(S, M, B, C).$$

The opposite inclusion follows from symmetry. \square

REMARK 4. From Theorem 8, it follows that the structured essential pseudospectrum of closed linear operator pencils is invariant under perturbation of completely continuous linear operators on ultrametric Banach spaces over \mathbb{Q}_p .

Theorem 9. Suppose that $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_p$ and $\|\mathcal{E}\| \subseteq |\mathbb{Q}_p|$. Let $S \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ and $B, C, M \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ with $0 \in \rho(B) \cap \rho(C)$ and $\varepsilon > 0$. Then

$$\sigma_{e,\varepsilon}(S, M, B, C) = \bigcap_{K \in \mathcal{C}_c(\mathcal{E})} \sigma_\varepsilon(S + K, M, B, C).$$

PROOF. If

$$\lambda \notin \bigcap_{K \in \mathcal{C}_c(\mathcal{E})} \sigma_\varepsilon(S + K, M, B, C),$$

then there exists $K \in \mathcal{C}_c(\mathcal{E})$ with $\lambda \notin \sigma_\varepsilon(S + K, M, B, C)$. By Theorem 5, $(S + K + CDB - \lambda M)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ for any $D \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ such that $\|D\| < \varepsilon$. Hence

$$S + K + CDB - \lambda M \in \Phi(\mathcal{E}) \text{ and } \text{ind}(S + K + CDB - \lambda M) = 0. \quad (10)$$

By Lemma 1, for each $D \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ with $\|D\| < \varepsilon$, we get

$$S + CDB - \lambda M \in \Phi(\mathcal{E}) \text{ and } \text{ind}(S + CDB - \lambda M) = 0. \quad (11)$$

Then

$$\lambda \notin \sigma_{e,\varepsilon}(S, M, B, C).$$

Thus

$$\sigma_{e,\varepsilon}(S, M, B, C) \subseteq \bigcap_{K \in \mathcal{C}_c(\mathcal{E})} \sigma_\varepsilon(S + K, M, B, C). \quad (12)$$

Conversely, if $\lambda \notin \sigma_{e,\varepsilon}(S, M, B, C)$. From Theorem 7, for each $D \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ such that $\|D\| < \varepsilon$, $\lambda \notin \sigma_e(S + CDB, M)$. By Theorem 3, there is $K \in \mathcal{C}_c(\mathcal{E})$ with

$\lambda \notin \sigma(S + CDB + K, M)$, hence for each $D \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ such that $\|D\| < \varepsilon$, $\lambda \in \rho(S + K + CDB, M)$. Then

$$\lambda \in \bigcap_{D \in \mathcal{B}(\mathcal{E}): \|D\| < \varepsilon} \rho(S + K + CDB, M). \quad (13)$$

By Theorem 5, $\lambda \notin \sigma_\varepsilon(S + K, M, B, C)$. Consequently,

$$\lambda \notin \bigcap_{K \in \mathcal{C}_c(\mathcal{E})} \sigma_\varepsilon(S + K, M, B, C).$$

Thus

$$\sigma_{e,\varepsilon}(S, M, B, C) = \bigcap_{K \in \mathcal{C}_c(\mathcal{E})} \sigma_\varepsilon(S + K, M, B, C). \quad \square$$

REMARK 5. Assume that $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_p$ and $\|\mathcal{E}\| \subseteq |\mathbb{Q}_p|$. Let $S \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ and $B, C, M \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ with $0 \in \rho(B) \cap \rho(C)$ and $\varepsilon > 0$. From Example 3.31 of [13] and Theorem 9, we obtain

$$\sigma_{e,\varepsilon}(S, M, B, C) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_0(\mathcal{E})} \sigma_\varepsilon(S + F, M, B, C).$$

Proposition 2. Let \mathcal{E} be an ultrametric Banach space over a spherically complete field \mathbb{K} such that $\|\mathcal{E}\| \subseteq |\mathbb{K}|$. Let $S \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ and $B, C, M \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ such that $0 \in \rho(B) \cap \rho(C)$ and $\varepsilon > 0$. Then

- (i) $\sigma_{e,\varepsilon}(S, M, B, C) \subset \sigma_\varepsilon(S, M, B, C)$.
- (ii) For each ε_1 and ε_2 such that $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, we get $\sigma_e(S, M) \subset \sigma_{e,\varepsilon_1}(S, M, B, C) \subset \sigma_{e,\varepsilon_2}(S, M, B, C)$.

PROOF. (i) If $\lambda \in \sigma_{e,\varepsilon}(S, M, B, C)$. From Theorem 5,

$$\lambda \in \bigcup_{D \in \mathcal{B}(\mathcal{E}): \|D\| < \varepsilon} \sigma_e(S + CDB, M).$$

By $\sigma_e(S + CDB, M) \subset \sigma(S + CDB, M)$, hence

$$\lambda \in \bigcup_{D \in \mathcal{B}(\mathcal{E}): \|D\| < \varepsilon} \sigma(S + CDB, M).$$

From Theorem 5, $\lambda \in \sigma_\varepsilon(S, M, B, C)$.

(ii) Firstly, we prove that for each $\varepsilon > 0$,

$$\sigma_e(S, M) \subset \sigma_{e,\varepsilon}(S, M, B, C).$$

If $\lambda \notin \sigma_{e,\varepsilon}(S, M, B, C)$, thus for each $D \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ such that $\|D\| < \varepsilon$, we get $\lambda M - (S + CDB) \in \Phi(\mathcal{E})$ and $\text{ind}(\lambda M - (S + CDB)) = 0$. As $\varepsilon \rightarrow 0$, $\lambda M - S \in \Phi(\mathcal{E})$ and $\text{ind}(\lambda M - S) = 0$, then $\lambda \notin \sigma_e(S, M)$. Thus

$$\sigma_e(S, M) \subset \sigma_{e,\varepsilon}(S, M, B, C).$$

Let $\lambda \notin \sigma_{e,\varepsilon_2}(S, M, B, C)$, hence for each $D \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ such that $\|D\| < \varepsilon_2$, $\lambda M - (S + CDB) \in \Phi(\mathcal{E})$ and $\text{ind}(\lambda M - (S + CDB)) = 0$. Since $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, for all $D \in \mathcal{B}(\mathcal{E}) : \|D\| < \varepsilon_1$, $\lambda M - (S + CDB) \in \Phi(\mathcal{E})$ and $\text{ind}(\lambda M - (S + CDB)) = 0$, thus $\lambda \notin \sigma_{e,\varepsilon_1}(S, M, B, C)$. Consequently, $\sigma_{e,\varepsilon_1}(S, M, B, C) \subset \sigma_{e,\varepsilon_2}(S, M, B, C)$. \square

Proposition 3. Assume that $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_p$ and $\|\mathcal{E}\| \subseteq |\mathbb{Q}_p|$. Let $S \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ and $B, C, M \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ with $0 \in \rho(B) \cap \rho(C)$ and $\varepsilon > 0$, hence

$$\sigma_e(S, M) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma_{e,\varepsilon}(S, M, B, C).$$

PROOF. Suppose that $\lambda \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma_{e,\varepsilon}(S, M, B, C)$ and $\|\mathcal{E}\| \subseteq |\mathbb{Q}_p|$. By Theorem 9,

$$\begin{aligned} \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma_{e,\varepsilon}(S, M, B, C) &= \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{K \in \mathcal{C}_c(\mathcal{E})} \sigma_\varepsilon(S + K, M, B, C) \\ &= \bigcap_{K \in \mathcal{C}_c(\mathcal{E})} \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma_\varepsilon(S + K, M, B, C). \end{aligned} \quad (14)$$

From (ii) of Theorem 4,

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma_\varepsilon(S + K, M, B, C) = \sigma(S + K, M).$$

By (14), we get

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma_{e,\varepsilon}(S, M, B, C) = \bigcap_{K \in \mathcal{C}_c(\mathcal{E})} \sigma(S + K, M).$$

By Theorem 3, $\lambda \in \sigma_e(S, M)$. Conversely, $\lambda \in \sigma_e(S, M)$. From Theorem 4,

$$\lambda \in \bigcap_{K \in \mathcal{C}_c(\mathcal{E})} \sigma(S + K, M).$$

By (ii) of Theorem 4, we have

$$\lambda \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{K \in \mathcal{C}_c(\mathcal{E})} \sigma_\varepsilon(S + K, M, B, C).$$

Since $\|\mathcal{E}\| \subseteq |\mathbb{Q}_p|$, by Theorem 5,

$$\lambda \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{D \in \mathcal{B}(\mathcal{E}): \|D\| < \varepsilon} \bigcap_{K \in \mathcal{C}_c(\mathcal{E})} \sigma(S + CDB + K, M).$$

By Theorem 3, $\lambda \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{D \in \mathcal{B}(\mathcal{E}): \|D\| < \varepsilon} \sigma_e(S + CDB, M)$. From Theorem 7, $\lambda \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma_{e,\varepsilon}(S, M, B, C)$. Consequently,

$$\sigma_e(S, M) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma_{e,\varepsilon}(S, M, B, C). \quad \square$$

EXAMPLE 1. Let $B, C, M \in \mathcal{B}(\mathcal{E}_\omega)$ be diagonal operators such that $0 \in \rho(M)$ and for any $i \in \mathbb{N}$, $Be_i = b_i e_i$, $Ce_i = c_i e_i$ and $Me_i = m_i e_i$ where $\sup_{i \in \mathbb{N}} |b_i|$, $\sup_{i \in \mathbb{N}} |c_i|$ and $\sup_{i \in \mathbb{N}} |m_i|$ are finite. Let S be an unbounded diagonal operator defined on \mathcal{E}_ω by for all $i \in \mathbb{N}$, $Se_i = a_i e_i$ where $\lim_{i \rightarrow \infty} |a_i| = \infty$ and

$$D(S) = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}_\omega : \lim_{i \rightarrow \infty} |x_i| |a_i| \|e_i\| = 0\}.$$

One can see that

$$\sigma(S, M) = \{a_i m_i^{-1} : i \in \mathbb{N}\},$$

and for each

$$\lambda \in \rho(S, M), \quad \|B(S - \lambda M)^{-1}C\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} \left| \frac{b_i c_i}{a_i - \lambda m_i} \right|.$$

Consequently,

$$\sigma_\varepsilon(S, M, B, C) = \{a_i m_i^{-1} : i \in \mathbb{N}\} \cup \left\{ \lambda \in \mathbb{K} : \sup_{i \in \mathbb{N}} \left| \frac{b_i c_i}{a_i - \lambda m_i} \right| > \frac{1}{\varepsilon} \right\}.$$

REFERENCES

1. Trefethen L. N. and Embree M., Spectra and Pseudospectra, The Behavior of Nonnormal Matrices and Operators, Princeton Univ. Press, Princeton (2005).
2. Davies E. B., Linear Operators and Their Spectra, Cambridge Univ. Press, New York (2007).
3. Ammar A., Bouchekoua A., and Jeribi A., “Pseudospectra in a non-Archimedean Banach space and essential pseudospectra in E_ω ,” Filomat, **33**, No. 12, 3961–3976 (2019).
4. Ammar A., Bouchekoua A., and Lazrag N., “The condition ε -pseudospectra on non-Archimedean Banach space,” Bol. Soc. Mat. Mex., **28**, No. 2, 1–24 (2022).
5. El Amrani A., Ettayb J. and Blali A., “Pseudospectrum and condition pseudospectrum of non-archimedean matrices,” J. Prime Res. Math., **18**, No. 1, 75–82 (2022).
6. Blali A., El Amrani A., and Ettayb J., “Some spectral sets of linear operator pencils on non-Archimedean Banach spaces,” Bull. Transilv. Univ. Braşov, Ser. III, Math. Comput. Sci., **2**, No. 64, 41–56 (2022).
7. Blali A., El Amrani A., and Ettayb J., “A note on pencil of bounded linear operators on non-Archimedean Banach spaces,” Methods Funct. Anal. Topology, **28**, No. 2, 105–109 (2022).
8. Ettayb J., “Condition pseudospectrum of operator pencils on non-Archimedean Banach spaces,” arXiv:2305.18401v1 (2023).
9. Albeverio S., Cianci R., and Khrennikov A., On the spectrum of the p -adic position operator, J. Phys. A: Math. Gen., **30**(3) (1997), 881–889.
10. Albeverio S. and Khrennikov A. Yu., “ p -adic Hilbert space representation of quantum systems with an infinite number of degrees of freedom,” Int. J. Modern Phys., **10**, No. 13/14, 1665–1673 (1996).
11. Henriquez H. R., Navarro S. H., and Aguayo J. G., “Closed linear operators between non-Archimedean Banach spaces,” Indag. Math., N. S., **16**, No. 2, 201–214 (2005).
12. Nadathur K. S., Linear operators between nonarchimedean Banach spaces, Thesis (Ph.D.) Western Michigan University, 1973.
13. Diagana T. and Ramaroson F., Non-archimedean Operators Theory, Springer (2016).
14. Van Rooij A. C. M., Non-Archimedean Functional Analysis, Marcel Dekker, New York (1978) (Monogr. Textb. Pure Appl. Math.; vol. 51).
15. Schechter M., Principles of Functional Analysis, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2001).
16. El Amrani A., Ettayb J., and Blali A., “On pencil of bounded linear operators on non-Archimedean Banach spaces,” Bol. Soc. Paran. Mat. <http://www.spm.uem.br/bspm/pdf/next/17.pdf>.

Submitted January 19, 2024

Revised January 27, 2024

Accepted February 29, 2024

Jawad Ettayb

Department of Mathematics and Computer Science,
Sidi Mohamed Ben Abdellah University,
Faculty of Sciences Dhar El Mahraz, Fez, Morocco
jawad.ettayb@usmba.ac.ma

THE SHARP BOUND OF THE GENERALIZED
ZALCMAN CONJECTURE FOR INITIAL
COEFFICIENT AND THE CERTAIN
SECOND HANKEL DETERMINANTS
OF k^{th} -ROOT TRANSFORMATION FOR
A SUBCLASS OF ANALYTIC FUNCTIONS
**K. S. Kumar, B. Rath, D. V. Krishna,
and G. K. S. Viswanadh**

Abstract: We obtain sharp bounds in the generalized Zalcman conjecture for the initial coefficients and the second Hankel determinants $H_{2,1,k}(f)$, $H_{2,2,k}(f)$ for the k^{th} -root transformation to the subclass of analytic functions.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-1-81-87

Keywords: analytic function, univalent function, Hankel determinant, k^{th} -root transformation, Carathéodory function.

1. Introduction

Denote by \mathcal{H} the family of all analytic functions in the unit disk $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Let \mathcal{A} be the subfamily of functions f normalized by $f(0) = f'(0) - 1 = 0$, i.e, of the type

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad a_1 := 1, \tag{1.1}$$

and \mathcal{S} be the subfamily of \mathcal{A} possessing univalent (schlicht) mappings.

Let k be a positive integer. A domain $U \in \mathbb{C}$ is said to be k -fold symmetric if a rotation of U about the origin through an angle $\frac{2\pi}{k}$ carries U to itself. A function h is said to be k -fold symmetric in \mathbb{D} if $h(e^{\frac{2\pi i}{k}}z) = e^{\frac{2\pi i}{k}}h(z)$ for every $z \in \mathbb{D}$. If h is regular and k -fold symmetric in \mathbb{D} , then

$$h(z) = b_1 z + b_{k+1} z^{k+1} + b_{2k+1} z^{2k+1} + \dots. \tag{1.2}$$

Conversely, if h is given by (1.2), then h is k -fold symmetric inside the circle of convergence of the series (see [1]). The k^{th} -root transform for the mapping f in (1.1) is

$$G(z) := [f(z^k)]^{\frac{1}{k}} = z + \sum_{n=1}^{\infty} b_{kn+1} z^{kn+1}. \tag{1.3}$$

Vamshee et al. [2] introduced and interpreted the concept of Hankel determinant for $G(z)$ for f in (1.1), with $q, t, k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, as

$$H_{q,t,k}(f) = \begin{vmatrix} b_{k(t-1)+1} & b_{kt+1} & \cdots & b_{k(t+q-2)+1} \\ b_{kt+1} & b_{k(t+1)+1} & \cdots & b_{k(t+q-1)+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{k(t+q-2)+1} & b_{k(t+q-1)+1} & \cdots & b_{k[t+2(q-1)-1]+1} \end{vmatrix} \quad (b_1 = 1). \quad (1.4)$$

In particular, if $k = 1$ in (1.4), then it reduces to $H_{q,t,1}(f) = H_{q,t}(f)$, the Hankel determinant defined by Pommerenke [3] for the function f given in (1.1).

The hypergeometric function ${}_2F_1(a, b; c; z)$ is defined for $|z| \leq 1$ by the power series

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{ab}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots.$$

It is undefined (or infinite) if c equals a non-positive integer. Here $(q)_n$ is the (rising) *Pochhammer symbol*, which is defined as follows:

$$(q)_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ q(q+1)\cdots(q+n-1), & n > 0. \end{cases}$$

Ali et al. [4] derived exact estimates for $|b_{2k+1} - \mu b_{k+1}^2|$, the generalized Fekete–Szegö functional related to the function $G(z)$, while Vamshee et al. [5] studied certain second Hankel determinants when f is a member of specific subfamilies of S .

S. Owa [6, 7] studied the class \mathcal{I}_β with analytic conditions

$$\operatorname{Re} \left\{ (1-\beta) \frac{f(z)}{z} + \beta f'(z) \right\} > 0, \quad \beta \geq 0,$$

which was also studied by H. Saitoh [8].

For our study in this paper we consider second Hankel determinants $H_{2,1,k}(f)$ and $H_{2,2,k}(f)$ and generalized Zalcman for initial coefficient of k^{th} -root transformation for \mathcal{I}_β .

Denote by \mathcal{P} the collection of all functions g called Carathéodory functions [9], of the form

$$g(z) = 1 + \sum_{t=1}^{\infty} c_t z^t, \quad (1.5)$$

holomorphic in \mathbb{D} and such that $\operatorname{Re} g(z) > 0$ for $z \in \mathbb{D}$. The classes \mathcal{I}_β and \mathcal{P} are invariant under the rotations by Carathéodory Theorem (see [10, Vol. I, p. 80, Theorem 3]).

For the proof of our main result we need the following lemmas, which contain the well-known formulas for c_2 (e.g., [11, p. 166]) and for c_3 due to Libera and Zlotkiewicz [12–14].

Lemma 1.1 [11]. *If $g \in \mathcal{P}$, then $|c_t| \leq 2$ for $t \in \mathbb{N}$; the equality is attained for the function $g(z) = \frac{1+z}{1-z}$, $z \in \mathbb{D}$.*

Lemma 1.2 [15, 16]. *If $g \in \mathcal{P}$, then $|c_i - \mu c_j c_{i-j}| \leq 2$ for $i, j \in \mathbb{N}$, $i > j$, and $\mu \in [0, 1]$, which is same as $|c_{n+k} - \mu c_n c_k| \leq 2$ for $n, k \in \mathbb{N}$ with $\mu \in [0, 1]$.*

Lemma 1.3 [17]. If $g \in \mathcal{P}$, then

$$|Jc_1^3 - Kc_1c_2 + Lc_3| \leq 2(|J| + |K - 2J| + |J - K + L|).$$

Lemma 1.4 [18]. If $g \in \mathcal{P}$, then

$$2c_2 = c_1^2 + t\zeta, \quad 4c_3 = c_1^3 + 2c_1t\zeta - c_1t\zeta^2 + 2t(1 - |\zeta|^2)\eta,$$

while

$$\begin{aligned} 8c_4 &= c_1^4 + 3c_1^2t\zeta + (4 - 3c_1^2)t\zeta^2 + c_1^2t\zeta^3 + 4t(1 - |\zeta|^2)(1 - |\eta|^2)\xi \\ &\quad + 4t(1 - |\zeta|^2)(c_1\eta - c_1\zeta\eta - \bar{\zeta}\eta^2), \end{aligned}$$

where $t := 4 - c_1^2$, for some ζ, η and ξ such that $|\zeta| \leq 1$, $|\eta| \leq 1$, and $|\xi| \leq 1$.

Result 1.1. Suppose that $\Psi : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 0$, and $\Psi(c)$ is defined as

$$\begin{aligned} \Psi(c) &= \frac{1}{12}c^2 \left(\frac{k^2 - 1}{(\beta + 1)^4 k^4} - \frac{6\beta^2}{(3\beta^2 + 4\beta + 1)(2\beta k + k)^2} \right) \\ &\quad - \frac{(4\beta + 1)}{(3\beta^2 + 4\beta + 1)(2\beta k + k)^2}. \end{aligned}$$

Then

$$\Psi(c) \leq 0.$$

PROOF. We can easily see that

$$\begin{aligned} 12(\beta + 1)^4(2\beta + 1)^2(3\beta + 1)k^4\Psi(c) &= -6\beta^2(\beta + 1)^3c^2k^2 - 12(4\beta + 1)(\beta + 1)^3k^2 \\ &\quad + (2\beta + 1)^2(3\beta + 1)(k^2 - 1)c^2 = -[c^2(12\beta^3 + 16\beta^2 + 7\beta + 6\beta^5k^2 + 18\beta^4k^2 + 6\beta^3k^2 + 1) \\ &\quad + (2\beta + 1)(5\beta + 1)(12 - c^2)k^2 + 12\beta^2(4\beta^2 + 13\beta + 5)k^2] \leq 0; \end{aligned}$$

therefore, $\Psi(c) \leq 0$. \square

2. Main Results

Theorem 2.1. If $f \in \mathcal{I}_\beta$, $\beta \geq 0$, then

$$|H_{2,1,k}(f)| \leq \frac{2}{(2\beta + 1)k},$$

and the result is sharp for $f_0(z) := 2z_2F_1\left(1, \frac{1}{2\beta}; \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{\beta}); z^2\right) - z$.

PROOF. For $f \in \mathcal{I}_\beta$, there exists a holomorphic function $g \in \mathcal{P}$ such that

$$(1 - \beta)\frac{f(z)}{z} + \beta f'(z) = g(z), \quad z \in \mathbb{D}. \quad (2.1)$$

Substitute the values for f, f' and g in (2.1), then

$$a_{n+1} = \frac{c_n}{1 + \beta n}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.2)$$

For the mapping f in (1.1), a simple calculation gives

$$[f(z^k)]^{\frac{1}{k}} = \left[z^k + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{nk} \right]^{\frac{1}{k}}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[z + \frac{1}{k} a_2 z^{k+1} + \left\{ \frac{1}{k} a_3 + \frac{(1-k)}{2k^2} a_2^2 \right\} z^{2k+1} \right. \\
&\quad + \left\{ \frac{1}{k} a_4 + \frac{(1-k)}{k^2} a_2 a_3 + \frac{(1-k)(1-2k)}{6k^3} a_2^3 \right\} z^{3k+1} \\
&\quad + \left\{ \frac{1}{k} a_5 + \frac{(1-k)}{2k^2} (a_3^2 + 2a_2 a_4) + \frac{(1-k)(1-2k)}{2k^3} a_2^2 a_3 \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(1-k)(1-2k)(1-3k)}{24k^4} a_2^4 \right\} z^{4k+1} + \dots \right]. \quad (2.3)
\end{aligned}$$

Comparing the coefficients of z^{k+1} , z^{2k+1} , z^{3k+1} , and z^{4k+1} in (1.2) and (2.3), we get

$$\begin{aligned}
b_{k+1} &= \frac{1}{k} a_2, \\
b_{2k+1} &= \frac{1}{k} a_3 + \frac{(1-k)}{2k^2} a_2^2, \\
b_{3k+1} &= \left[\frac{1}{k} a_4 + \frac{(1-k)}{k^2} a_2 a_3 + \frac{(1-k)(1-2k)}{6k^3} a_2^3 \right], \quad (2.4) \\
b_{4k+1} &= \left[\frac{1}{k} a_5 + \frac{(1-k)}{2k^2} (a_3^2 + 2a_2 a_4) + \frac{(1-k)(1-2k)}{2k^3} a_2^2 a_3 \right. \\
&\quad \left. + \frac{(1-k)(1-2k)(1-3k)}{24k^4} a_2^4 \right].
\end{aligned}$$

From (2.2) and (2.4), we obtain

$$\begin{aligned}
b_{k+1} &= \frac{c_1}{(\beta+1)k}, \quad b_{2k+1} = \frac{c_1^2(1-k)}{2(\beta+1)^2 k^2} + \frac{c_2}{(2\beta+1)k}, \\
b_{3k+1} &= \frac{c_1^3(1-k)(1-2k)}{6(\beta+1)^3 k^3} + \frac{c_2 c_1(1-k)}{(\beta+1)(2\beta+1)k^2} + \frac{c_3}{(3\beta+1)k}, \quad (2.5) \\
b_{4k+1} &= \frac{(1-k)(1-2k)(1-3k)c_1^4}{24(\beta+1)^4 k^4} + \frac{(1-k)(1-2k)c_1^2 c_2}{2(1+\beta)^2(1+2\beta)k^3} + \frac{(1-k)c_2^2}{2(2\beta+1)^2 k^2} \\
&\quad + \frac{(1-k)c_1 c_3}{2(\beta+1)(3\beta+1)k^2} + \frac{c_4}{(4\beta+1)k}.
\end{aligned}$$

Now, for $q = 2$ and $t = 1$ in (1.4), we have

$$H_{2,1,k}(f) = \begin{vmatrix} 1 & b_{k+1} \\ b_{k+1} & b_{2k+1} \end{vmatrix}. \quad (2.6)$$

Using the values of b_j ($j = k+1, 2k+1$) from (2.5) in (2.6), we get

$$H_{2,1,k}(f) = \frac{c_2}{(2\beta+1)k} - \frac{(k+1)c_1^2}{2(\beta+1)^2 k^2}. \quad (2.7)$$

Taking modulus on both side and applying Lemma 1.2, we have

$$|H_{2,1,k}(f)| = \frac{1}{(2\beta+1)k} \left| c_2 - \frac{(k+1)(2\beta+1)c_1^2}{2k(\beta+1)^2} \right| \leq \frac{2}{(2\beta+1)k}. \quad (2.8)$$

For $f_0(z)$ we obtain $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, and $a_3 = 2/(1+2\beta)$; further, $b_{k+1} = 0$ and $b_{k+1} = 2/(1+2\beta)k$, whence the result follows. \square

Theorem 2.2. If $f \in \mathcal{I}_\beta$ and $\beta \geq 0$, then

$$|H_{2,2,k}(f)| \leq \frac{4}{(2\beta k + k)^2},$$

and the result is sharp for $f_0(z)$ given in Theorem 2.1.

PROOF. Now, for $q = 2$ and $t = 2$ in (1.4), we get

$$H_{2,2,k}(f) = \begin{vmatrix} b_{k+1} & b_{2k+1} \\ b_{2k+1} & b_{3k+1} \end{vmatrix}. \quad (2.9)$$

Putting the calculated values of b_{jk+1} , for $j \in \{1, 2, 3\}$ from (2.5) into (2.9), we get

$$H_{2,2,k}(f) = \frac{c_3 c_1}{(3\beta^2 + 4\beta + 1)k^2} + \frac{c_1^4(k^2 - 1)}{12(\beta + 1)^4 k^4} - \frac{c_2^2}{(2\beta k + k)^2}. \quad (2.10)$$

Substituting the values of c_2 and c_3 from Lemma 1.4 on the right-hand side of (2.10), it simplifies to

$$\begin{aligned} H_{2,2,k}(f) &= \frac{c_1^4(k^2 - 1)}{12(\beta + 1)^4 k^4} + \frac{\beta^2 c_1^4}{4(3\beta^2 + 4\beta + 1)(2\beta k + k)^2} \\ &\quad + (4 - c_1^2) \left(-\frac{c_1^2 \zeta^2}{4(3\beta^2 + 4\beta + 1)k^2} + \frac{c_1(1 - |\zeta|^2)\eta}{2(3\beta^2 + 4\beta + 1)k^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(4 - c_1^2)\zeta^2}{4(2\beta k + k)^2} + \frac{\beta^2 c_1^2 \zeta}{2(3\beta^2 + 4\beta + 1)(2\beta k + k)^2} \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Taking modulus on both sides and then applying the triangle inequality in the above expression, while using $c_1 := c \in [0, 2]$, $|\zeta| := x \in [0, 1]$, and $|\eta| \leq 1$, we have

$$\begin{aligned} |H_{2,2,k}(f)| &\leq \frac{c^4(k^2 - 1)}{12(\beta + 1)^4 k^4} + \frac{\beta^2 c^4}{4(3\beta^2 + 4\beta + 1)(2\beta k + k)^2} \\ &\quad + (4 - c^2) \left(\frac{c^2 x^2}{4(3\beta^2 + 4\beta + 1)k^2} + \frac{c(1 - x^2)}{2(3\beta^2 + 4\beta + 1)k^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(4 - c^2)x^2}{4(2\beta k + k)^2} + \frac{\beta^2 c^2 x}{2(3\beta^2 + 4\beta + 1)(2\beta k + k)^2} \right), \end{aligned}$$

which is equivalent to

$$\begin{aligned} |H_{2,2,k}(f)| &\leq \frac{c^4(k^2 - 1)}{12(\beta + 1)^4 k^4} + \frac{\beta^2 c^4}{4(3\beta^2 + 4\beta + 1)(2\beta k + k)^2} \\ &\quad + (4 - c^2) \left(\frac{c}{2(3\beta^2 + 4\beta + 1)k^2} + \frac{\beta^2 c^2 x}{2(3\beta^2 + 4\beta + 1)(2\beta k + k)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(2 - c)x^2(6\beta^2 + 8\beta + \beta^2(-c) + 2)}{4(3\beta^2 + 4\beta + 1)(2\beta k + k)^2} \right). \end{aligned}$$

For $c \in [0, 2]$ and $\beta \geq 0$ all terms in RHS are positive, thus,

$$|H_{2,2,k}(f)| \leq \frac{c^4(k^2 - 1)}{12(\beta + 1)^4 k^4} + \frac{\beta^2 c^4}{4(3\beta^2 + 4\beta + 1)(2\beta k + k)^2}$$

$$\begin{aligned}
& + (4 - c^2) \left(\frac{c}{2(3\beta^2 + 4\beta + 1)k^2} + \frac{\beta^2 c^2}{2(3\beta^2 + 4\beta + 1)(2\beta k + k)^2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{(2 - c)(6\beta^2 + 8\beta + \beta^2(-c) + 2)}{4(3\beta^2 + 4\beta + 1)(2\beta k + k)^2} \right) \\
& = \frac{1}{12} c^4 \left(\frac{k^2 - 1}{(\beta + 1)^4 k^4} - \frac{6\beta^2}{(3\beta^2 + 4\beta + 1)(2\beta k + k)^2} \right) \\
& \quad \frac{(-4\beta - 1)c^2}{(3\beta^2 + 4\beta + 1)(2\beta k + k)^2} + \frac{4}{(2\beta k + k)^2} = \Psi(c)c^2 + \frac{4}{(2\beta k + k)^2} \leq \frac{4}{(2\beta k + k)^2},
\end{aligned}$$

since $\Psi(c) \leq 0$ by Result 1.1.

For $f_0(z)$ we obtain $a_1 = 1$, $a_2 = a_4 = 0$, and $a_3 = 2/(1 + 2\beta)$, then, $b_{k+1} = b_{3k+1} = 0$ and $b_{k+1} = 2/(1 + 2\beta)k$, whence follows the result. \square

Theorem 2.3. If $f \in \mathcal{I}_\beta$ and $\beta \geq 0$, then

$$|b_{3k+1} - b_{k+1}b_{2k+1}| \leq \frac{2}{(3\beta + 1)k},$$

and the result is sharp for $f_1(z) := 2z_2F_1\left(1, \frac{1}{3\beta}; \frac{1}{3}(3 + \frac{1}{\beta}); z^3\right) - z$.

PROOF. Using the values of b_{jk+1} for $j \in \{1, 2, 3\}$ from (2.5) in the expression $b_{3k+1} - b_{k+1}b_{2k+1}$, we get

$$b_{3k+1} - b_{k+1}b_{2k+1} = \frac{c_1^3(k^2 - 1)}{3(\beta + 1)^3 k^3} - \frac{c_2 c_1}{(\beta + 1)(2\beta + 1)k} + \frac{c_3}{(3\beta + 1)k}. \quad (2.12)$$

Taking modulus on both sides and then applying Lemma 1.3, we have

$$\begin{aligned}
|b_{3k+1} - b_{k+1}b_{2k+1}| & \leq 2 \left[\left| \frac{k^2 - 1}{3(\beta + 1)^3 k^3} \right| + \left| \frac{1}{(\beta + 1)(2\beta + 1)k} - \frac{2(k^2 - 1)}{3(\beta + 1)^3 k^3} \right| \right. \\
& \quad \left. + \left| \frac{k^2 - 1}{3(\beta + 1)^3 k^3} - \frac{1}{(\beta + 1)(2\beta + 1)k} + \frac{1}{(3\beta + 1)k} \right| \right] \\
& = 2 \left[\frac{k^2 - 1}{3(\beta + 1)^3 k^3} + \frac{4\beta + 3\beta^2 k^2 + 2\beta k^2 + k^2 + 2}{3(\beta + 1)^3 (2\beta + 1)k^3} \right. \\
& \quad \left. + \frac{-6\beta^2 - 5\beta + 6\beta^4 k^2 + 12\beta^3 k^2 + 12\beta^2 k^2 + 5\beta k^2 + k^2 - 1}{3(\beta + 1)^3 (2\beta + 1)(3\beta + 1)k^3} \right] = \frac{2}{(3\beta + 1)k}.
\end{aligned}$$

For $f_1(z)$ we obtain $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = 0$, and $a_4 = 2/(1 + 3\beta)$, while $b_{k+1} = b_{2k+1} = 0$ and $b_{3k+1} = 2/(1 + 3\beta)k$, whence follows the required. \square

Acknowledgement: The authors would like to thank the esteemed referee(s) for their careful readings, valuable suggestions, and comments, which helped improve the presentation of the paper.

REFERENCES

1. *Duren P. L.*, Univalent Functions, Springer, New York (1983) (Grundlehr. Math. Wissen.; vol. 259).
2. *Vamshee Krishna D., Shalini D., and RamReddy T.*, “Coefficient inequality for transforms of bounded turning functions,” *Acta Univ. Matthiae Belii, Ser. Math.*, **25**, 73–78 (2017).

3. Pommerenke Ch., “On the coefficients and Hankel determinants of univalent functions,” J. Lond. Math. Soc., **41**, 111–122 (1966).
4. Ali R. M., Lee S. K., Ravichandran V., and Supramaniam S., “The Fekete–Szegö coefficient functional for transforms of analytic functions,” Bull. Iran. Math. Soc., **35**, No. 2, 119–142 (2009).
5. Vamshee Krishna D., Vijaya Kumar Ch., and Rath B., “The sharp estimates for certain coefficient inequalities for transforms of a starlike function associated with Bernoulli’s lemniscate,” Asian-Eur. J. Math., **16**, No. 3, paper ID 2350042 (2023). <https://doi.org/10.1142/S1793557123500420>.
6. Owa S., “Generalization properties for certain analytic functions,” Int. J. Math. Math. Sci., **21**, 707–712 (1998).
7. Owa S., “Some properties of certain analytic functions,” Soochow J. Math., **13**, 197–201 (1987).
8. Saitoh H., “On inequalities for certain analytic functions,” Math. Jap., **35**, 1073–1076 (1990).
9. Carathéodory C., “Über den variabilitätsbereich der fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen,” Rend. Circ. Math. Palermo, **32**, 193–217 (1911). <https://doi.org/10.1007/BF03014795>
10. Goodman A. W., Univalent Functions, Mariner, Tampa, FL (1983).
11. Pommerenke Ch., Univalent Functions, Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen (1975).
12. Libera R. J. and Zlotkiewicz E. J., “Early coefficients of the inverse of a regular convex function,” Proc. Amer. Math. Soc., **85**, No. 2, 225–230 (1982).
13. Libera R. J. and Zlotkiewicz E. J., “Coefficient bounds for the inverse of a function with derivative in \mathcal{P} ,” Proc. Amer. Math. Soc., **87**, No. 2, 251–257 (1983).
14. Rath B., Kumar K. S., Krishna D. V., and Lecko A., “The sharp bound of the third Hankel determinant for starlike functions of order $1/2$,” Complex Anal. Oper. Theory, **16**, No. 5, paper No. 65 (2022) <https://doi.org/10.1007/s11785-022-01241-8>.
15. Hayami T. and Owa S., “Generalized Hankel determinant for certain classes,” Int. J. Math. Anal., **4**, No. 52, 2573–2585 (2010).
16. Rath B., Kumar K. S., Krishna D. V., Kumar Ch. V., and Vani N., “Hankel determinants of certain order for bounded turning functions of order α ,” Indian J. Math., **64**, No. 3, 401–416 (2022).
17. Arif M., Raza M., Tang H., Hussain Sh., and Khan H., “Hankel determinant of order three for familiar subsets of analytic functions related with sine function,” Open Math., **17**, No. 1, 1615–1630 (2019).
18. Rath B., Kumar K. S., Krishna D. V., and Viswanadh G. K. S., “The sharp bound of the third Hankel determinants for inverse of starlike functions with respect to symmetric points,” Mat. Stud., **58**, 45–50 (2022).

Submitted September 9, 2023

Revised December 18, 2023

Accepted February 29, 2024

K. Sanjay Kumar, Biswajit Rath (corresponding author),
and G. K. Surya Viswanadh
Department of Mathematics,
GITAM School of Science, GITAM
Visakhapatnam-530 045, A. P., India
skarri9@gitam.in, brath@gitam.edu, svsu06@gmail.com

D. Vamshee Krishna
Department of Mathematics,
North-Eastern Hill University (NEHU),
Umshing Mawkyroh, Shillong, Meghalaya 793022, India
vamsheekrishna1972@gmail.com

Математические заметки СВФУ
Январь—март, 2024. Том 31, № 1

УДК 536.2(075)46

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО И ЛИНЕЙНОГО
ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРОВ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В. В. Жуков, Ю. А. Крюков,
К. В. Трубицын, В. А. Кудинов, Е. В. Котова

Аннотация. Выполнено исследование численного решения нелинейной задачи теплопроводности для пластины с нелинейным источником теплоты (коэффициент теплопроводности и внутренний источник теплоты — экспоненциальные функции температуры). В частности, в нелинейной задаче найдены явления автомодельности, инерции и локализации теплоты, проявляющихся также и в решениях линейных гиперболических уравнений теплопроводности. При автомодельном изменении температуры в некоторых диапазонах пространственной и временной переменных наблюдается подобие (самоподобие) температурных кривых. При локализации теплоты в определенном диапазоне пространственной переменной температура с течением времени не изменяется. Инерция теплоты обнаруживается в конечной скорости ее распространения, несмотря на решение параболического уравнения теплопроводности. Перечисленные явления наблюдаются также и в решениях линейных гиперболических уравнений теплопроводности, при выводе которых учитывается временная зависимость теплового потока в формуле закона Фурье, приводящая к конечной скорости распространения теплоты. В нелинейных задачах подобный эффект проявляется вследствие зависимости физических свойств и источника теплоты от температуры, приводящей к аналогичной задержке теплового потока.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-1-88-101

Ключевые слова: нелинейная краевая задача, зависимость физических свойств и источника теплоты от температуры, численное решение, инерция и локализация теплоты, автомодельное изменение температуры, тепловой взрыв, гиперболические уравнения теплопроводности.

Высокоинтенсивные процессы, протекающие в большом диапазоне температур, приводят к значительному изменению физических свойств конденсированных сред. Неучет их зависимости от температуры может приводить к существенному отклонению теоретических моделей от конкретных технических процессов. В случае, когда в нелинейных задачах необходимо еще учитывать

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FSSE-2024-0014) в рамках государственного задания Самарского государственного технического университета.

© 2024 Жуков В. В., Крюков Ю. А., Трубицын К. В., Кудинов В. А.,
Котова Е. В.

температурную зависимость источников теплоты, математические постановки краевых задач существенно усложняются. Актуальность их исследования связана с тем, что они описывают многие технические процессы, исследованию которых посвящены работы ряда авторов [1–21]. В этих работах отмечается такие свойства решений указанных задач, как автомодельность (самоподобие), инерция, локализация и конечная скорость распространения теплоты, характерных для гиперболических операторов теплопроводности, учитывающих пространственно-временную нелокальность реальных физических процессов. Вывод гиперболических уравнений основан на использовании модифицированной формулы закона Фурье, учитывающей запаздывание теплового потока и градиента температуры на величину соответствующих коэффициентов релаксации [9, 11, 14–16, 18, 20, 21]. Найденные таким путем дифференциальные уравнения включают операторы высокого порядка, в том числе и со смешанными производными. Получение их точных аналитических и численных решений представляет существенные математические трудности ввиду необходимости выполнения исследований в области малых и сверхмалых значений пространственно-временных переменных, сопоставимых с длиной и временем свободного пробега микрочастиц (носителей энергии), характеризуемых соответствующими коэффициентами релаксации. Многочисленные исследования краевых задач с учетом пространственно-временной нелокальности приводят к заключению о невозможности мгновенного установления граничного условия первого рода, которое устанавливается в некотором диапазоне начального временного участка, т. е. с запаздыванием [6, 9, 16, 20, 21]. Отмечается конечная скорость распространения теплоты со скачком температуры на фронте ее перемещения. Для сред сверхмалой толщины, сопоставимой с длиной свободного пробега микрочастиц, наблюдается баллистический перенос теплоты, при котором температура в пределах толщины тела неизменна и изменяется лишь во времени. В данном случае имеет место автомодельность процесса, так как все изотермы параллельны между собой, т. е. по всей толщине происходит переход во времени от одной изотермы к другой, вплоть до установления стационарного состояния. Граничное условие первого рода в этом случае не принимается в течении всего времени нестационарного процесса. Таким образом, некоторые процессы, имеющие место в локально-неравновесных системах, при определенных условиях наблюдаются и в задачах с нелинейными физическими свойствами среды (конечная скорость, запаздывание, локализация и автомодельность). Такие совпадения можно объяснить тем, что в обоих случаях исследуются тепловые процессы, максимально приближенные к реальным физическим процессам теплопереноса.

Следует однако отметить, что большинство работ, связанных с исследованием нелинейных задач теплопроводности, выполнены либо для полупространства, либо для задачи Коши, что исключает анализ влияния граничных условий конечного тела на процесс теплообмена. Кроме того, недостаточно исследованы задачи, связанные с одновременным учетом зависимости физических свойств и

внутренних источников теплоты от температуры, и особенно в случаях, когда эта зависимость нелинейная (например, экспоненциальная). В связи с чем в настоящей работе рассматривается нелинейная задача теплопроводности с нелинейным источником теплоты в следующей математической постановке

$$c\rho \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(t) \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} \right] + \omega(t) \quad (\tau > 0; 0 < x < \delta); \quad (1)$$

$$t(x, 0) = t_0; \quad (2)$$

$$t(0, \tau) = t_1; \quad (3)$$

$$\frac{\partial t(\delta, \tau)}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

где t — температура, К; x — координата, м; τ — время, с; $\lambda(t)$ — коэффициент теплопроводности, Вт/(м · К); c — теплоемкость, Дж/(кг · К); ρ — плотность, кг/м³; t_0 — начальная температура, К; t_1 — температура при $x = 0$ ($t_1 > t_0$), К; $\omega(t)$ — мощность источника теплоты, Вт/(м³); δ — половина толщины пластины, м.

С целью упрощения процесса получения решения начальное условие в задаче (1)–(4) примем за условный нуль температуры, т. е. обозначим $T = t - t_0$. Относительно функции $T(x, \tau)$ задача (1)–(4) примет вид

$$c\rho \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(T) \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \right] + \omega(T) \quad (t > 0; 0 < x < \delta); \quad (5)$$

$$T(x, 0) = 0; \quad (6)$$

$$T(0, \tau) = \Delta t; \quad (7)$$

$$\frac{\partial T(\delta, t)}{\partial x} = 0, \quad (8)$$

где $\Delta t = t_1 - t_0$.

Найдем решение задачи (5)–(8) при следующих зависимостях теплопроводности и теплового источника от температуры:

$$\lambda(T) = \lambda_0 e^{\beta T}; \quad (9)$$

$$\omega(T) = \omega_0 e^{\gamma T}, \quad (10)$$

где λ_0 ; ω_0 — коэффициент теплопроводности и мощность внутреннего источника при температуре $t = t_0$, т. е. при $T = 0$; β , γ — коэффициенты, характеризующие интенсивность изменения коэффициента теплопроводности $\lambda(T)$ и мощности источника теплоты $\omega(T)$ от температуры, 1/К.

Уравнение (5) с учетом (9), (10) будет иметь вид

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a_0 \frac{\partial}{\partial x} \left[e^{\beta T(x, \tau)} \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \right] + \frac{\omega_0}{c\rho} e^{\gamma T(x, \tau)}, \quad (11)$$

где $a_0 = \lambda_0 / (c\rho)$; $c\rho = \text{const}$; a_0 — коэффициент температуропроводности при $T = 0$, м²/с.

Введем следующие обозначения:

$$\Theta = T/\Delta t; \quad \text{Fo} = a_0\tau/\delta^2; \quad \xi = x/\delta, \quad (12)$$

где Θ ; ξ ; Fo — безразмерные температура, координата, время.

С учетом обозначений (12) математическая постановка принимает вид

$$\frac{\partial \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[e^{\beta \Delta t \Theta} \frac{\partial \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \xi} \right] + \text{Po} e^{\gamma \Delta t \Theta} \quad (\text{Fo} > 0, 0 < \xi < 1); \quad (13)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0; \quad (14)$$

$$\Theta(0, \text{Fo}) = 1; \quad (15)$$

$$\frac{\partial \Theta(1, \text{Fo})}{\partial \xi} = 0; \quad (16)$$

где $\text{Po} = \frac{\omega_0 \delta^2}{\lambda_0 \Delta t}$ — число Померанцева (безразмерный комплекс).

Для решения задачи (13)–(16) численным методом введем конечно-разностную сетку (рис. 1).

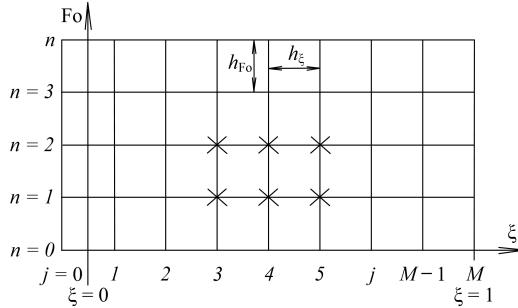


Рис. 1. Конечно-разностная сетка и шаблон (крестики) в расчетной области.

Для конечно-разностной аппроксимации задачи (13)–(16) используем шеститочечный шаблон и схему с весами σ [22]. Уравнение (13) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_j^{n+1} - \Theta_j^n}{h_{\text{Fo}}} &= e^{\beta \Delta t (\sigma \Theta_j^n + (1-\sigma) \Theta_j^{n+1})} \left[\beta \Delta t \left(\sigma \frac{\Theta_{j+1}^n - \Theta_{j-1}^n}{2h_\xi} + (1-\sigma) \frac{\Theta_{j+1}^{n+1} - \Theta_{j-1}^{n+1}}{2h_\xi} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sigma \frac{\Theta_{j+1}^n - 2\Theta_j^n + \Theta_{j-1}^n}{h_\xi^2} + (1-\sigma) \frac{\Theta_{j+1}^{n+1} - 2\Theta_j^{n+1} + \Theta_{j-1}^{n+1}}{h_\xi^2} \right] - \text{Po} e^{\gamma \Delta t (\sigma \Theta_j^n + (1-\sigma) \Theta_j^{n+1})} \end{aligned} \quad (17)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots; j = 1, \dots, M-1).$$

Соотношение (17) аппроксимирует (13) с порядком $O(h_\xi^2 + h_{\text{Fo}}^2)$, если принимается схема Кранка — Никольсон ($\sigma = 1/2$), и с порядком $O(h_\xi^2 + h_{\text{Fo}})$, если $\sigma \neq 1/2$. Аппроксимации начального условия (14) и условия (15) записываются точно. За счет специального выбора узлов сетки (граница области расположена в середине между последним и предпоследними узлами) аппроксимация с порядком $O(h_\xi^2)$ краевого условия (16) значительно упрощается.

Отсюда условия (14)–(16) принимают вид

$$\Theta_0^j = 0 \quad (j = 0, \dots, M); \quad (18)$$

$$\Theta_0^{n+1} = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots); \quad (19)$$

$$\Theta_M^{n+1} = \Theta_{M-1}^{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (20)$$

Так как уравнение (17) нелинейное, для его решения будем использовать метод итераций. Применяя метод простой итерации, уравнение (17) сведем к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\Theta_{j-1}^{n+1}[k+1], \Theta_j^{n+1}[k+1], \Theta_{j+1}^{n+1}[k+1]$:

$$a_j \Theta_{j-1}^{n+1}[k+1] - c_j \Theta_j^{n+1}[k+1] + b_j \Theta_{j+1}^{n+1}[k+1] = -f_j \quad (21)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots; j = 1, \dots, M-1),$$

где

$$a_j = e^{\beta \Delta t (\sigma \Theta_j^n + (1-\sigma) \Theta_j^{n+1}[k])} \times \left(-\beta \Delta t \left[\frac{\sigma(1-\sigma)}{2h_\xi^2} (\Theta_{j+1}^n - \Theta_{j-1}^n) + \left(\frac{1-\sigma}{2h_\xi} \right)^2 (\Theta_{j+1}^{n+1}[k] - \Theta_{j-1}^{n+1}[k]) \right] + \left(\frac{1-\sigma}{h_\xi^2} \right) \right);$$

$$b_j = e^{\beta \Delta t (\sigma \Theta_j^n + (1-\sigma) \Theta_j^{n+1}[k])} \times \left(\beta \Delta t \left[\frac{\sigma(1-\sigma)}{2h_\xi^2} (\Theta_{j+1}^n - \Theta_{j-1}^n) + \left(\frac{1-\sigma}{2h_\xi} \right)^2 (\Theta_{j+1}^{n+1}[k] - \Theta_{j-1}^{n+1}[k]) \right] + \left(\frac{1-\sigma}{h_\xi^2} \right) \right);$$

$$c_j = \frac{1}{h_t} + \frac{2(1-\sigma)}{h_\xi^2} e^{\beta \Delta t (\sigma \Theta_j^n + (1-\sigma) \Theta_j^{n+1}[k])};$$

$$f_j = \frac{\Theta_j^n}{h_t} + e^{\beta \Delta t (\sigma \Theta_j^n + (1-\sigma) \Theta_j^{n+1}[k])} \times \left(\beta \Delta t \left(\frac{\sigma}{2h_\xi} \right)^2 (\Theta_{j+1}^n - \Theta_{j-1}^n)^2 + \left(\frac{\sigma}{h_\xi^2} \right) (\Theta_{j+1}^n - 2\Theta_j^n + \Theta_{j-1}^n) \right) + \text{Po} e^{\gamma \Delta t (\sigma \Theta_j^n + (1-\sigma) \Theta_j^{n+1}[k])}.$$

Система уравнений (21) решается методом прогонки. Контроль решения задачи (17)–(20) по методу простых итераций осуществляется решением соответствующей неявной задачи по методу Ньютона, отличающегося повышенными математическими трудностями, но имеющим преимущество в скорости сходимости и надежности [22].

Исходные данные для расчета принятые следующими: $t_{\text{ст}} = 373 \text{ K}$; $t_0 = 293 \text{ K}$; $\lambda_0 = 40 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{K})$; $\delta = 0,02 \text{ м}$; $\omega_0 = 100 \text{ Вт}/\text{м}^3$. Исследования выполнялись для двух значений β ($\beta = 0,01/\text{К}$ и $\beta = 0,1/\text{К}$). Для каждого из принятых

значений β находились величины коэффициента γ , приводящие к стационарному режиму теплообмена или к неограниченному возрастанию температуры (тепловому взрыву).

Численные расчеты даны на рис. 2–8, из которых видно, что при $\beta = 0,01/\text{К}$ коэффициент γ , не приводящий к тепловому взрыву, должен быть $< 0,1216/\text{К}$ (рис. 2). При $\gamma = 0,1216/\text{К}$ стационарный теплообмен наступает при $Fo \approx 5$. Максимальная температура наблюдается в точке $\xi = 1$ и составляет $\Theta \approx 1,12$. Расчеты для малых и сверхмалых времен $10^{-7} \leq Fo \leq 0,75$ даны на рис. 2, из которого следует, что при $10^{-7} \leq Fo \leq 0,02$ действие граничного условия в точке $\xi = 0$ с течением времени распространяется лишь на некоторое расстояние, за пределами которого температура изменяется только от внутреннего источника. Следовательно, теплота распространяется не мгновенно, а в виде движущегося по пространственной переменной во времени фронта теплового возмущения. Для $\gamma \geq 0,13/\text{К}$ ($\beta = 0,01/\text{К}$) наблюдается неограниченное возрастание температуры, т. е. тепловой взрыв. При $\gamma = 0,13/\text{К}$ тепловой взрыв имеет место при $Fo > 1,00262$ (рис. 3). На рис. 5, 8 в некотором диапазоне времени происходит автомодельное изменение температуры, при котором она, не изменяясь, переходит сама в себя. Отметим тот факт, что все температурные кривые приходят в точку $\xi = 0$ по касательной, перпендикулярной оси Θ (см. также рис. 5, 8). Следовательно, в этой точке удовлетворяется условие адиабатной стенки (отсутствия теплообмена) несмотря на то, что здесь задано условие первого рода. Этот факт объясняется тем, что при $T_1 > T_0$ коэффициент теплопроводности вблизи точки $\xi = 0$ будет максимальным, что и приводит к выпрямлению температурных кривых при их приближении к точке $\xi = 0$ (рис. 4). Температурные кривые выпрямляются также и при приближении к точке $\xi = 1$, где задано условие адиабатной стенки (16) (рис. 2, 3, 5, 8). При $\beta = 0,1/\text{К}$ и $\gamma = 0,159/\text{К}$ наблюдается движение фронта возмущения температуры. За его пределами температура изменяется лишь от внутреннего источника (рис. 5, 8), причем до фронта возмущения она изменяется по одинаковой закономерности (автомодельно).

Вариант теплового взрыва при $\beta = 0,1/\text{К}$ и $\gamma = 0,25/\text{К}$ дан на рис. 6–8. Тепловой взрыв наблюдается при $Fo > 3,6 \cdot 10^{-4}$ ($\xi \approx 0,22$). Здесь также имеет место движение фронта теплового возмущения ($0 \leq Fo < 3,6 \cdot 10^{-4}$), автомодельное изменение температуры и локализация теплоты (рис. 8). Отличие лишь в том, что тепловой взрыв происходит не при $\xi = 1$, а в точке $\xi \approx 0,22$, приближенной к точке $\xi = 0$ (рис. 6–8).

Анализ исследований показал, что для любого β существует предельное значение коэффициента γ , отделяющее стационарные режимы теплообмена от режимов теплового взрыва. В обоих режимах имеет место автомодельность, инерция и локализация теплоты, а также движущийся во времени фронт температурного возмущения. Перечисленные режимы наблюдаются также в краевых задачах с учетом пространственно-временной нелокальности, включающих гиперболические уравнения теплопроводности [6, 9, 11, 14–16, 18, 20, 21], в

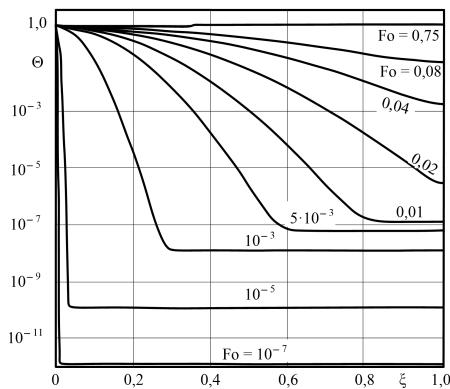


Рис. 2. Распределение температуры ($\beta = 0,01$; $\gamma = 0,1216$). Тепловой взрыв не наблюдается.

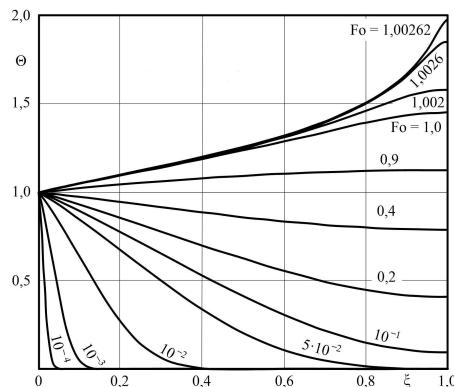


Рис. 3. Распределение температуры ($\beta = 0,01$; $\gamma = 0,13$). Тепловой взрыв при $Fo > 1,00262$ ($\xi = 1,0$).

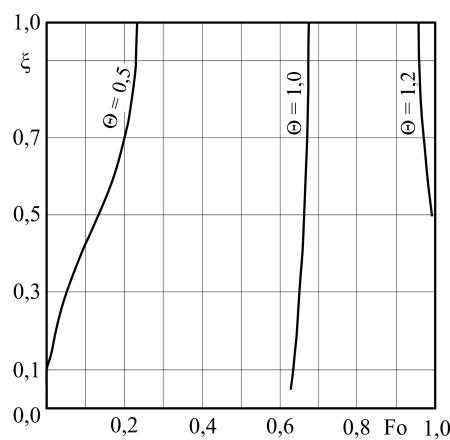


Рис. 4. Изменение изотерм при $\beta = 0,01$; $\gamma = 0,13$.

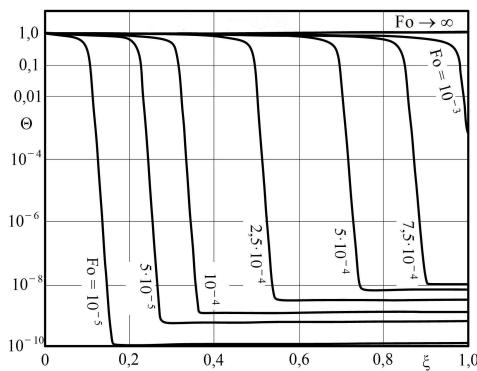


Рис. 5. Распределение температуры ($\beta = 0,1$; $\gamma = 0,159$). Тепловой взрыв не наблюдается.

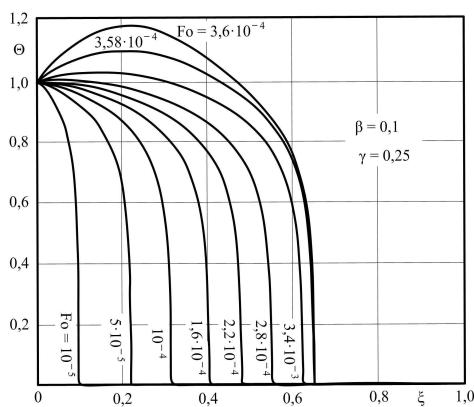


Рис. 6. Распределение температуры ($\beta = 0,1$; $\gamma = 0,25$). Термический взрыв при $Fо > 3,6 \cdot 10^{-4}$ ($\xi \approx 0,22$).

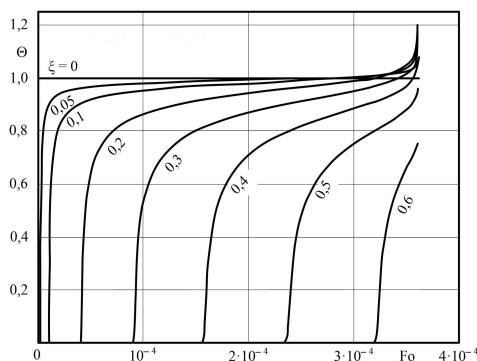


Рис. 7. Изменение температуры ($\beta = 0,1$; $\gamma = 0,25$). Термический взрыв при $Fо > 3,6 \cdot 10^{-4}$ ($\xi \approx 0,22$).

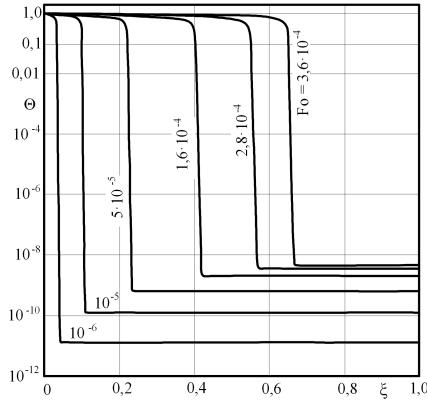


Рис. 8. Распределение температуры ($\beta = 0,1$; $\gamma = 0,25$). Тепловой взрыв при $Fo > 3,6 \cdot 10^{-4}$ ($\xi \approx 0,22$).

которых за счет учета релаксационных явлений учитывается конечная скорость распространения теплоты. Уравнение, выведенное с учетом пространственно-временной нелокальности, имеет вид [9]

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a\tau_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2 \partial t} - \tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \tau_2^2 \frac{\partial^3 T}{\partial t^3}, \quad (22)$$

где τ_1, τ_2 — времена релаксации теплового потока и градиента температуры в модифицированной формуле закона Фурье для теплового потока

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \lambda\tau_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} - \tau_1 \frac{\partial q}{\partial t} - \tau_1^2 \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}. \quad (23)$$

Величина $a\tau_2$ в (22) с учетом того, что $a = \vartheta^2\tau_2$, может быть представлена в виде $a\tau_2 = \vartheta^2\tau_2^2 = l^2$, где ϑ — скорость тепловой волны; l — характерный масштаб пространственной нелокальности (длина свободного пробега микрочастиц — носителей энергии). Анализ полученного в [9] точного аналитического решения уравнения (22) показывает, что оно описывает задержку принятия граничного условия первого рода (инерцию теплоты), конечную скорость распространения теплоты, баллистический перенос теплоты (для тонких пленок), представляющий, по сути, автомодельное изменение температуры, при котором она, оставаясь постоянной по пространственной переменной, изменяется лишь во времени. Анализируя уравнение (22), можно отметить, что последние три слагаемые правой части представляют в классическом уравнении теплопроводности источник теплоты, зависящий от координаты, времени и от характерных масштабов времени (τ_1, τ_2) и пространственной (l) нелокальностей, характеризующих время и длину свободного пробега микрочастиц. Отмеченная качественная аналогия нелинейного параболического и линейного гиперболического операторов теплопроводности объясняется тем, что в обоих случаях математические модели оказываются максимально приближенными к реальным физическим процессам. В первом случае — за счет учета переменности свойств и источника теплоты от температуры, а во втором — за счет учета длины и времени свободного пробега микрочастиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А. Компьютеры и нелинейные явления: Информатика и современное естествознание. М.: Наука, 1988.
2. Сон Э. С., Бондарь В. С., Темис Ю. М., Азметов Х. Х. Разрушение высоковольтных трансформаторов при взрыве и взаимодействии ударных волн со стенками // Теплофизика высоких температур. 2020. Т. 58. № 5. С. 770.
3. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Физматлит, 2008.
4. Малинецкий Г. Г. Математические основы синергетики: Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009.
5. Жаворонок С. И., Курбатов А. С., Рабинский Л. Н., Соляев Ю. О. Современные проблемы моделирования теплопереноса в технологических процессах селективного лазерного спекания и сплавления // Теплофизика высоких температур. 2019. Т. 57, № 6. С. 919.
6. Кудинов В. А., Еремин А. В., Кудинов И. В., Жуков В. В. Критические условия теплового взрыва с учетом пространственно-временной нелокальности // Изв вузов. Авиационная техника. 2018. № 2. С. 100–104.
7. Формалев В. Ф. Численные исследования двумерных нелинейных задач теплопроводности в анизотропных телах // Теплофизика высоких температур. 1988. Т. 26, № 6. С. 1122.
8. Формалев В. Ф. Теплоперенос в анизотропных твердых телах. Численные методы, тепловые волны, обратные задачи. М.: Физматлит, 2015.
9. Кудинов И. В., Кудинов В. А. Аналитические решения параболических и гиперболических уравнений тепломассопереноса. М.: ИНФРА-М, 2013.
10. Карташов Э. М., Кудинов В. А., Калашников В. В. Теория тепломассопереноса: Решение задач для многослойных конструкций. М.: Юрайт, 2018.
11. Цой П. В. Системные методы расчета задач тепломассопереноса. М.: Изд-во МЭИ, 2005.
12. Чернавский Д. С. Синергетика и информация (динамическая теория информации). М.: Едиториал УРСС, 2004.
13. Иногамова Н. А., Петрова Ю. В., Хохлова В. А., Жаховский В. В. Лазерная абляция: физические представления и приложения (обзор) // Теплофизика высоких температур. 2020. Т. 58. № 5. С. 689.
14. Соболев С. Л. Процессы переноса и бегущие волны в локально-неравновесных системах // Успехи физ. наук. 1991. Т. 161, № 3. С. 5–29.
15. Соболев С. Л. Локально-неравновесные модели процессов переноса // Успехи физ. наук. 1997. Т. 167, № 10. С. 1096–1106.
16. Кудинов В. А., Кудинов И. В. Исследование теплопроводности с учетом конечной скорости распространения теплоты // Теплофизика высоких температур. 2013. Т. 51, № 2. С. 301–310.
17. Федоров Ф. М. Границочный метод решения прикладных задач математической физики. Новосибирск: Наука. 2000.
18. Шашков А. Г., Бубнов В. А., Яновский С. Ю. Волновые явления теплопроводности: системно-структурный подход. Изд. 2-е, доп. М.: Едиториал УРСС, 2004.
19. Шибков В. М., Шибкова Л. В., Копыл П. В., Логунов А. А. Стабилизация с помощью низкотемпературной плазмы сверхзвукового горения пропана в расширяющемся аэродинамическом канале // Теплофизика высоких температур. 2019. Т. 57, № 2. С. 183.
20. Кудинов В. А., Еремин А. В., Кудинов И. В., Жуков В. В. Исследование сильнонеравновесной модели теплового воспламенения с учетом пространственно-временной нелокальности // Физика горения и взрыва. 2018. Т. 54, № 6. С. 25–29.
21. Жуков В. В. Исследование внутренних механизмов переноса тепла, массы, импульса с учетом релаксационных явлений. Канд. дис. М.: МАИ. 2021.
22. Калиткин Н. Н., Корякин П. В. Численные методы. В двух книгах. Книга 2. Методы

математической физики. М.: Академия, 2013.

Поступила в редакцию 15 декабря 2023 г.

После доработки 9 февраля 2024 г.

Принята к публикации 18 февраля 2024 г.

Жуков Виталий Владимирович
РКЦ «Прогресс»

Крюков Юрий Александрович
РКЦ «Прогресс»;
Самарский государственный технический университет, кафедра «Физика»,
ул. Молодогвардейская, 244, Самара 443100

Трубицын Константин Викторович
Самарский государственный технический университет,
теплоэнергетический факультет,
кафедра «Теоретические основы теплотехники гидромеханика»,
ул. Молодогвардейская, 244, Самара 443100

Кудинов Василий Александрович
Самарский государственный технический университет,
кафедра «Теоретические основы теплотехники и гидромеханика»,
ул. Молодогвардейская, 244, Самара 443100

Котова Евгения Валериевна
Самарский государственный технический университет,
кафедра «Теоретические основы теплотехники гидромеханика»,
ул. Молодогвардейская, 244, Самара 443100
larginaevgenya@mail.ru

STUDY OF LINEAR PARABOLIC
AND LINEAR HYPERBOLIC THERMAL
CONDUCTION OPERATORS

V. V. Zhukov, Yu. A. Kryukov,
K. V. Trubitsyn, V. A. Kudinov,
and E. V. Kotova

Abstract: We study the numerical solution to the nonlinear heat conduction problem for a plate with a nonlinear heat source (thermal conductivity coefficient and internal heat source are exponential functions of temperature). In particular, for the nonlinear problem, the phenomena of self-similarity, inertia, and heat localization were found, which also manifest themselves in solutions of linear hyperbolic heat equations. With a self-similar change in temperature in some ranges of spatial and temporal variables, similarity (self-similarity) of temperature curves is observed. When heat is localized in a certain range of spatial variable, the temperature does not change over time. The inertia of heat is revealed in the finite speed of its propagation, despite the solution of the parabolic heat equation. The listed phenomena are also observed in solutions of linear hyperbolic heat equations, the derivation of which takes into account the time dependence of the heat flow in the formula of Fourier's law, leading to a finite rate of heat propagation. In nonlinear problems, a similar effect manifests itself due to the dependence of the physical properties and heat source on temperature, leading to a similar delay in heat flow.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-1-88-101

Keywords: nonlinear boundary value problem, dependence of physical properties and heat source on temperature, numerical solution, inertia and heat localization, self-similar temperature change, thermal explosion, hyperbolic heat equations.

REFERENCES

1. Samarskii A. A., Computers and Nonlinear Phenomena: Computer Science and Modern Natural Science [in Russian], Nauka, Moscow (1988).
2. Son E. S., Bondar V. S., Temis Yu. M., and Azmetov Kh. Kh., “Destruction of high-voltage transformers during explosion and interaction of shock waves with walls,” High Temperature, **58**, No. 5, 699–709 (2020).
3. Zeldovich Ya. B. and Raiser Yu. P., Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2008).
4. Malinetsky G. G., Mathematical Foundations of Synergetics: Chaos, Structures, Computational Experiment [in Russian], Librokom, Moscow (2009).
5. Zhavoronok S. I., Kurbatov A. S., Rabinsky L. N., and Solyaev Yu. O., “Modern problems of heat transfer modeling in technological processes of selective laser sintering and alloying,” High Temperature, **57**, No. 6, 916–943 (2019).

6. Kudinov V. A., Eremin A. V., Kudinov I. V., and Zhukov V. V., "Critical conditions of a thermal explosion taking into account spatiotemporal nonlocality [in Russian]," *Izv. Vuzov, Aviats. Tekhnol.*, No. 2, 100–104 (2018).
7. Formalev V. F., "Numerical study of two-dimensional nonlinear heat conduction problems in anisotropic bodies [in Russian]," *High Temperature*, **26**, No. 6, 1122–1128 (1988).
8. Formalev V. F., *Heat Transfer in Anisotropic Solids, Numerical Methods, Thermal Waves, Inverse Problems* [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2015).
9. Kudinov I. V. and Kudinov V. A., *Analytical Solutions of Parabolic and Hyperbolic Heat and Mass Transfer Equations* [in Russian], INFRA-M, Moscow (2013).
10. Kartashov E. M., Kudinov V. A., and Kalashnikov V. V., *Theory of Heat and Mass Transfer: Solving Problems for Multilayer Structures* [in Russian], Yurayt, Moscow (2018).
11. Tsoi P. V., *System Methods for Calculating Heat and Mass Transfer Problems* [in Russian], Izdat. MPEI, Moscow (2005).
12. Chernavsky D. S., *Synergetics and Information (Dynamic Theory of Information)* [in Russian], Editorial URSS, Moscow (2004).
13. Inogamova N. A., Petrova Yu. V., Khokhlova V. A., and Zhakhovsky V. V., "Laser ablation: physical concepts and applications (review)," *High Temperature*, **58**, No. 4, 632–646 (2020).
14. Sobolev S. L., "Transport processes and traveling waves in locally nonequilibrium systems [in Russian]," *Uspekhi Fiz. Nauk*, **161**, No. 3, 5–29 (1991).
15. Sobolev S. L., "Locally nonequilibrium models of transport processes [in Russian]," *Uspekhi Fiz. Nauk*, **167**, No. 10, 1096–1106 (1997).
16. Kudinov V. A. and Kudinov I. V., "Study of thermal conductivity taking into account the finite speed of heat propagation," *High Temperature*, **51**, No. 2, 268–276 (2013).
17. Fedorov F. M., *Boundary Method for Solving Applied Problems of Mathematical Physics* [in Russian], Nauka, Novosibirsk (2000).
18. Shashkov A. G., Bubnov V. A., and Yanovsky S. Yu., *Wave Phenomena of Thermal Conductivity: a System-Structural Approach* [in Russian], Editorial URSS, Moscow (2004).
19. Shibkov V. M., Shibkova L. V., Kopyl P. V., and Logunov A. A., "Stabilization using low-temperature plasma of supersonic combustion of propane in an expanding aerodynamic channel," *High Temperature*, **57**, No. 2, 164–176 (2019).
20. Kudinov V. A., Eremin A. V., Kudinov I. V., and Zhukov V. V., "Study of a highly nonequilibrium model of thermal ignition taking into account spatiotemporal nonlocality," *Phys. Combust. Explos.*, **54**, No. 6, 25–29 (2018).
21. Zhukov V. V., *Study of Internal Mechanisms of Heat, Mass, Momentum Transfer Taking into Account Relaxation Phenomena* [in Russian], Diss. . . . Kand. Fiz.-Mat. Nauk, Mosk. Aviats. Inst., Moscow (2021).
22. Kalitkin N. N. and Koryakin P. V., *Numerical Methods, Book 2. Methods of Mathematical*

Physics [in Russian], Akademia, Moscow (2013).

Submitted December 15, 2023

Revised February 9, 2024

Accepted February 29, 2024

Vitaliy V. Zhukov
RKTs Progress

Yuri A. Kryukov
RKTs Progress;
Physics Department, Samara State Technical University,
244 Molodogvardeyskaya Street, Samara 443100

Konstantin V. Trubitsyn
Department of Theoretical Foundations of Heat Engineering and Hydromechanics,
Faculty of Thermal Power Engineering,
Samara State Technical University,
244 Molodogvardeyskaya Street, Samara 443100

Vasily A. Kudinov
Department of Theoretical Foundations of Heat Engineering and Hydromechanics,
Samara State Technical University,
244 Molodogvardeyskaya Street, Samara 443100

Evgenia V. Kotova
Department of Theoretical Foundations of Heat Engineering and Hydromechanics,
Samara State Technical University,
244 Molodogvardeyskaya Street, Samara 443100
larginaevgenya@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ
ДЛЯ РАСЧЕТА ДИНАМИКИ УГЛЕРОДА
В БОЛОТНЫХ ЭКОСИСТЕМАХ ХОЛОДНЫХ
РЕГИОНОВ ЗАПАДНОЙ СИБИРИ

С. П Семёнов, Е. А. Дюкарев, А. О. Ташкин

Аннотация. Изучение динамики запасов углерода болотных экосистем позволит более точно оценивать вклад водно-болотистых угодий в глобальное изменение климата. В данной работе предлагается нульмерная математическая модель, описывающая динамику углерода локальной (в масштабе водораздела) болотной экосистемы с учетом температуры окружающей среды. В предлагаемой модели выделены два резервуара углерода: фитомасса растений и органический углерод в мортомассе. Основные процессы модели включают фотосинтез, дыхание, отмирание фитомассы и вымывание углерода грунтовыми водами. Проведены численные эксперименты, показывающие, как изменение температуры окружающей среды влияет на динамику запасов углерода в болотных экосистемах.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-1-102-115

Ключевые слова: математические модели, динамика углерода, болотные экосистемы, окружающая среда, численные эксперименты.

Общепринято считать, что глобальные изменения климата связаны с увеличением концентрации парниковых газов в атмосфере Земли. При этом одним из главных компонентов парниковых газов является углерод. Биогеохимические модели играют важную роль в исследованиях изменения климата и экосистем, описывая процессы углеродного, азотного, и фосфорного циклов, трансформацию органических веществ в почвах и накопление микро- и макроэлементов.

Водно-болотистые угодья (болотные экосистемы) занимают значительную часть поверхности Земли, являются крупными хранилищами законсервированных органических веществ и служат активным источником выбросов метана и углекислого газа в атмосферу. В болотных экосистемах регионов с низкой температурой, в частности, Ханты-Мансийского автономного округа (ХМАО) накоплено значительное количество углерода.

В работах [1, 2] утверждается, что в условиях низких температур поглощение углекислого газа поверхностью растительностью болотных экосистем через фотосинтез происходит с более высокой скоростью, чем разложение и дыхание. Это связано с особенностями температурной зависимости ферментов,

Работа выполнена при поддержке РНФ, грант № 22-11-20031.

участвующих в фотосинтезе болотных растений: при понижении температуры их активность может возрастать. Кроме того, болотные растения адаптированы к низким температурам и способны поглощать углекислый газ ночью. Еще один фактор — повышенная при холода растворимость CO_2 , что облегчает его усвоение растениями. В холодных условиях болот снижается интенсивность дыхания, что позволяет растениям направлять больше ресурсов на фотосинтез.

Изменение климата, в том числе возрастающие условия потепления и высыхания, оказывают большое влияние на баланс между дыханием почвы и первичной продукцией и может превратить водно-болотные угодья из накопителя в источник выбросов CO_2 в атмосферу. Актуальной задачей является проведение исследования динамики запасов углерода в холодных регионах в связи с растущим значением этого фактора в контексте глобального потепления.

В настоящее время имеется значительное количество моделей, посвященных вопросам круговорота углерода в глобальном и региональном масштабах. Из наиболее известных можно выделить модель, описывающую глобальный круговорот углерода [3]. В работе [4] рассматривается глобальная минимальная модель многолетней динамики углерода в биосфере при условии, что антропогенные выбросы углерода в атмосферу отсутствуют. Рассматриваемая в работе минимальная модель, разработанная С. Т. Барцевым и др. [5], записывается в виде системы из трех уравнений. Первое уравнение описывает динамику углерода в биомассе живых растений, второе — динамику углерода органических остатков и третье — закон сохранения массы углерода. В работе [6] рассмотрена современная локальная модель углеродного цикла, описаны взаимодействия между многими критическими факторами почвы, гидрологии и растительности. Описана авторская модель Wetland-DNDC динамики углерода и выбросов метана (CH_4) в болотных экосистемах. В работе [7] описано 16 различных по структуре моделей углеродного цикла DALEC (Data Assimilation Linked Ecosystem Carbon). Модели откалиброваны на шести глобально распределенных участках земной поверхности с длинными временными рядами наблюдений и по 42 сценариям данных. Классическая модель Ферхюльста также часто используется в литературе по математическому моделированию экологических процессов. Существуют различные модели такие, как DNDC (Zang et al., 2002), Papyrus Simulator (Hes et al., 2014), Phragmites и Turpha (Asaeda et al., 2011), PCLake-marsh (Sollie et al., 2008), Peatland-VU (van Huissteden et al., 2006), PEATBOG (Wu and Blodau, 2013), Phragmites C (Soetaert et al., 2004), и SWAT (Olchev 2009). Несмотря на то, что болотные экосистемы достаточно хорошо представлены в биогеохимических моделях, изучение концентрации углерода в водно-болотистых угодьях и связанных с этим глобальных изменений климата продолжает оставаться важной задачей для научного сообщества (Farmer et al., 2011).

В настоящей работе представлено дальнейшее развитие созданной авторами локальной модели динамики углерода в болотных экосистемах Ханты-Мансийского автономного округа (ХМАО) [8]. Представляемая авторами мо-

дель основывается на результатах предыдущих исследований авторов и является экспериментом по моделированию процессов болотных экосистем в регионе ХМАО для исследования динамики углерода. Моделирование ключевых процессов дает возможность оценить баланс углерода в заболоченных территориях региона в зависимости от различных условий. Рассматриваемые в предложенной модели процессы такие, как фотосинтез, дыхание, изменение температуры и уровня грунтовых вод, являются общими для всех регионов с холодным климатом, поэтому подход, реализованный в модели, может быть применен для изучения динамики углерода аналогичных болотных экосистем.

Авторами работы разработана оригинальная нульмерная математическая модель, отражающая взаимосвязь между выбранными факторами окружающей среды и запасами углерода в водоно-болотистых угодьях. Модель учитывает взаимосвязь ключевых факторов окружающей среды и позволяет оценить значимость болотных экосистем в качестве углеродных резервуаров. Основными преимуществами разработанной модели являются:

- учет специфики болотных экосистем северного региона Западной Сибири по сравнению с другими локальными экосистемами;
- детализация основных компонентов углеродного цикла применительно к условиям болотных экосистем с холодным климатом;
- исследование чувствительности пулов и потоков углерода к динамике температуры, гидрологии и других факторов.

На основе разработанной модели выполнено моделирование динамики пулов углерода в зависимости от температуры и других важных параметров. Результаты моделирования демонстрируют чувствительность баланса углерода к изменениям рассматриваемых факторов и позволяют определить наиболее значимые из них, которые способны оказать существенное влияние на аккумуляцию углерода в подобных экосистемах.

Предложенная модель может быть использована для прогнозирования отклика болотных экосистем на изменения климата и окружающей среды, а полученные результаты позволяют определить факторы, которые могут привести к существенным изменениям концентрации углерода в болотных экосистемах и оказать негативное воздействие на глобальный климат.

1. Математическая модель динамики углерода с учетом температуры

Предполагается, что наблюдаемая болотная экосистема состоит из двух взаимосвязанных резервуаров углерода: *Live* и *Mort*. Пул *Live* состоит из углерода, содержащегося в живой растительности, такой как листья, стволы и корни и т. п. соответственно, пул *Mort* представляет собой углерод, находящийся в отмерших частях растений (ветошь, опад, почвенная подстилка, гумус, торф и др. — мортомасса).

Основными процессами в круговороте углерода являются: ассимиляция углекислого газа зелеными частями растений при фотосинтезе (валовая пер-

вичная продукция, GPP), дыхание растений (автотрофное дыхание, Ra), отмирание растительной биомассы (растительная смертность, PM), разложение органического материала микроорганизмами и возвращение его в виде углекислого газа или метана обратно в атмосферу (гетеротрофное дыхание, Rh), а также вынос углерода из почвы грунтовыми водами (Wtl) в реки и далее в океан. Предполагается, что содержание углерода в атмосфере и океане велико и практически не изменяется в результате круговорота углерода в рассматриваемой локальной болотной экосистеме.

Объемы пулов *Live* и *Mort* зависят от многих факторов (солнечная радиация, площадь листвы, температура, уровень грунтовых вод и т. п.). Одним из самых значимых факторов является температура. В данной работе исследуется динамика пулов в зависимости от температуры окружающей среды.

Введем следующие обозначения: $x(t)$ и $y(t)$ — количество углерода в фитомассе и соответственно мортомассе в момент времени t .

Скорость изменения количества углерода в пule живой биомассы (фотосинтетическом углероде) может быть выражена следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = (GPP - Ra) \cdot x - PM \cdot y, \quad (1)$$

где величины GPP , Ra , PM введены выше.

В свою очередь, скорость изменения количества углерода в мортомассе может быть описана так:

$$\frac{dy}{dt} = (Grow - Rh) \cdot y - Wtl, \quad (2)$$

где величина $Grow$ — темп прироста углерода в мортомассе в результате отмирания живой биомассы; величины Rh , Wtl описаны выше.

Ключевым фактором баланса углекислого газа между экосистемой и атмосферой является валовая первичная продукция (GPP), которая представляет собой темп поглощения углерода посредством фотосинтеза в единицу времени и на единицу площади. Фотосинтетический углерод нужен для синтеза органических соединений, которые служат растениям источником энергии и строительным материалом для клеток и тканей, при этом часть его возвращается в атмосферу в результате автотрофного дыхания.

Принято считать, что валовая первичная продукция является функцией фотосинтетически активной радиации, с учетом модифицирующих факторов [9–12]:

$$GPP = f(PAR) \cdot f(LAI) \cdot f(T) \cdot f(VPD), \quad (3)$$

где PAR — фотосинтетически активная радиация; остальные факторы отражают соответственно: $f(LAI)$ — влияние площади листовой поверхности на фотосинтез, $f(T)$ — колебание температуры и $f(VPD)$ — воздействие влажности воздуха.

Следует отметить, что в модели круговорота углерода, рассматриваемой в работе [13], предполагалось, что величина GPP является положительной кон-

стантой. В данной работе считается, что валовая первичная продукция является функцией температуры окружающей среды, т. е.

$$GPP = a \cdot f(T). \quad (4)$$

Относительно остальных факторов (радиация, листовая поверхность, влажность) предполагается, что они постоянны и входят в неотрицательную константу a .

Во многих исследованиях [7, 14, 15] установлено, что фотосинтез увеличивается с температурой, пока не достигнет оптимума в точке T_{opt} (например, 20–25°C), выше которой, в точке T_{max} , фотосинтез ингибируется, при этом существует также и минимальная температура T_{min} , ниже которой процессы фотосинтеза отсутствуют. Конкретный выбор функции $f(T)$ будет проведен ниже, в описании численных экспериментов.

Для описания автотрофного дыхания Ra в научных публикациях чаще всего используется модель, основанная на кинетике ферментов, которая заимствована из модели двойной кинетики Аррениуса и Михаэлиса — Ментен (Arrhenius and Michaelis–Menten) [16]. Эта модель предполагает, что Ra является функцией количества углерода в фитомассе $x(t)$, температуры T и влажности. В данной работе Ra моделируется соотношением

$$Ra = b \cdot g(T) \cdot x. \quad (5)$$

Согласно кинетике ферментов дыхание экспоненциально увеличивается с температурой, однако конкретный вид функции $h(T)$ будет уточнен ниже.

Процесс отмирания живых частей (PM — plant mortality) таких, как листья, стебли или корни, является естественной частью жизненного цикла многих организмов и сопровождается химическими и биохимическими изменениями в тканях. Для моделирования отмирания растительности возможны различные подходы. Среди множества математических формулировок для процесса отмирания [17–19] в данной работе используется выражение

$$PM = \frac{c \cdot x}{x + Mp}, \quad (6)$$

где Mp — так называемая *константа половинного насыщения*, определяемая экспериментально, при которой изменение углерода в процессе отмирания достигает половины максимально возможного. Для получения выражения для темпа прироста углерода в пуле $Mort$ вследствие живой биомассы ($Grow$) введем величину j , которая представляет собой количество растительной биомассы, необходимое для формирования одной единицы мортомассы. Таким образом, в момент времени t количество углерода $x(t)$ может образовать не более чем x/j единиц углерода в пуле $Mort$:

$$Grow = s \cdot \frac{x}{j}. \quad (7)$$

Гетеротрофное дыхание Rh преимущественно контролируется температурой и влажностью почвы. Как правило, используют экспоненциальную зависимость, однако в литературе встречаются и другие функции. Достаточно полный обзор моделей приведен в [20].

В данной работе для гетеротрофного дыхания используется выражение, аналогичное (5):

$$Rh = d \cdot h(T) \cdot y. \quad (8)$$

Углерод, содержащийся в мортомассе, подвержен выносу грунтовыми водами и перемещается из мортомассы в водные системы такие, как реки, озера или подземные воды. Одной из наиболее известных моделей [21] является модель диффузии с утечкой. Эта модель учитывает концентрацию органического углерода в мортомассе, степень кислотности почвы, проницаемость почвенного слоя и потоки воды. В данной же работе вымывание органического углерода (Wtl) в локальной болотистой экосистеме «растения — почва» описывается в упрощенном виде:

$$Wtl = wtl \cdot y, \quad (9)$$

где wtl — константа.

Таким образом, с учетом упрощений и предположений, выраженных соотношениями (5)–(9), из (1), (2) вытекает следующая нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно искомых функций $x(t)$ и $y(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = a \cdot f(T) \cdot x - b \cdot h(T) \cdot x^2 - \frac{c \cdot x}{x + Mp} \cdot y, \quad \frac{dy}{dt} = s \cdot \frac{x}{j} \cdot y - d \cdot g(T) \cdot y^2 - wtl \cdot y.$$

Проведем еще одно преобразование уравнений в целях обезразмеривания искомых функций.

Обозначим через x_{max} и y_{max} максимальные возможные запасы углерода в фитомассе и соответственно мортомассе рассматриваемой локальной экосистемы. Поделим первое уравнение системы на x_{max} и положим $\frac{x}{x_{max}} = \tilde{x}$, $\frac{y}{y_{max}} = \tilde{y}$. Дополнительно второе слагаемое в правой части первого уравнения поделим и умножим на x_{max} , а третье слагаемое поделим и умножим на $x_{max} \cdot y_{max}$. Аналогичные преобразования проведем со вторым уравнением. Результат запишем в следующем виде:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = a \cdot f(T) \cdot \tilde{x} - b' \cdot h(T) \cdot \tilde{x}^2 - \frac{c' \cdot \tilde{x}}{\tilde{x} + Mp'} \cdot \tilde{y}, \quad \frac{dy}{dt} = s \cdot \frac{\tilde{x}}{j'} \cdot \tilde{y} - d \cdot g(T) \cdot \tilde{y}^2 - wtl \cdot \tilde{y}.$$

Здесь обозначено:

$$Mp' = \frac{Mp}{x_{max}}; \quad b' = b \cdot x_{max}; \quad c' = c \cdot \frac{y_{max}}{x_{max}}; \quad j' = \frac{j}{x_{max}}.$$

Для удобства записи опустим штрихи и знак тильды у переменных. Таким образом, искомыми величинами являются обезразмеренные относительные запасы углерода $x(t)$, $y(t)$. Считается, что согласование остальных размерностей обеспечивается неотрицательными параметрами модели a, b, c, d, s, j, Mp .

Для дальнейшего исследования предлагается система (10), (11) с начальными условиями (12), которую далее будем называть базовой математической моделью динамики углерода с учетом температуры для локальных болотных экосистем:

$$\frac{dx}{dt} = a \cdot f(T) \cdot x - b \cdot h(T) \cdot x^2 - \frac{c \cdot x}{x + M_p}, \quad (10)$$

$$\frac{dy}{dt} = s \cdot \frac{x}{j} \cdot y - d \cdot g(T) \cdot y^2 - wtl \cdot y, \quad (11)$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \quad (12)$$

2. Температурные зависимости и входные данные модели

При моделировании температурных функций $f(T)$, $g(T)$ и $h(T)$, определяющих процессы фотосинтеза, автотрофного и гетеротрофного дыханий предполагалось, что каждая из них имеет три основные температурные точки: минимальную T_{min} , ниже которой процесса нет, оптимальную T_{opt} , при которой производится максимум первичной продукции, и максимальную T_{max} , выше которой также процесса нет. Например, нижняя температурная граница фотосинтеза у растений северных широт находится в пределах -15°C (сосна, ель) $-0,5^\circ\text{C}$, у некоторых лишайников был зарегистрирован фотосинтез при температуре до -25°C . У растений умеренного пояса в интервале $20\text{--}25^\circ\text{C}$ достигается максимальная интенсивность фотосинтеза. При температуре выше оптимальной интенсивность фотосинтеза резко падает, а дальнейшее повышение температуры до 40°C приводит к быстрому ингибиции процесса (при 45°C растения погибают). Кроме того, повышение температуры увеличивает интенсивность дыхания, и в этой связи разность между фотосинтезом и дыханием уменьшается [22].

Разумным компромиссом между отражением реальности и возможностью математического анализа является модель О'Нейла и др. [23]

В модели О'Нейла и др. введены три параметра, каждый из которых имеет вполне прозрачный физиологический смысл, благодаря этому она обладает определенным преимуществом перед другими моделями, в которых нет такой интерпретации параметров. Два параметра уже упоминались выше, это температурные точки: T_{opt} и T_{max} . Третьим параметром является величина Q_{10} , которая выражает относительное изменение в скорости протекания процессов при повышении температуры на 10°C . Если обозначить через $p(T)$ количество произвольной первичной продукции, то модель О'Нейла представима в виде

$$\frac{p}{p(T_{opt})} = \left(\frac{T_{max} - T}{T_{max} - T_{opt}} \right)^{XT} \cdot \exp \left[XT \cdot \left(\frac{T - T_{opt}}{T_{max} - T_{opt}} \right) \right], \quad (13)$$

где

$$XT = WT^2 \cdot \frac{(1 + \sqrt{1 + \frac{40}{WT}})^2}{400}, \quad WT = (T_{max} - T_{opt}) \cdot \ln(Q_{10}).$$

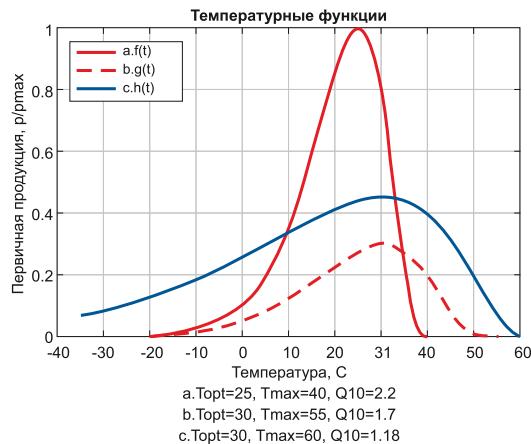


Рис. 1. Модели температурных зависимостей процессов фотосинтеза и дыхания.

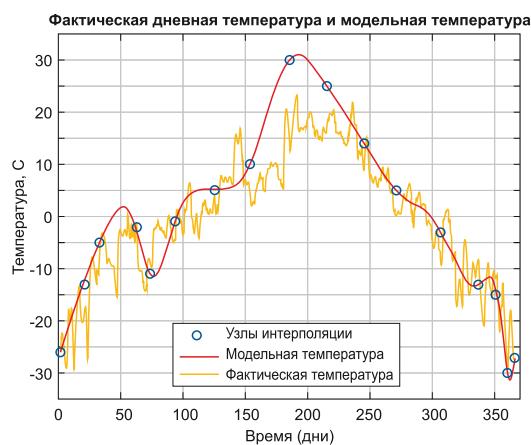


Рис. 2. Модельная температура.

На рис. 1 приведены графики функций $f(T)$, $g(T)$ и $h(T)$, используемые в системе (10)–(12), причем значения функций $g(t)$ и $h(t)$ масштабированы с коэффициентами 0.3 и 0.45 соответственно.

Компьютерная реализация математической модели (10)–(12) и дальнейшие исследования проводились в вычислительной среде MatLab. В качестве единицы модельного времени выбран день, а базовым наблюдаемым период — год. На основе измерений температуры на метеостанции научного полигона Мухрино был сформирован годовой ход модельной температуры. На рис. 2 приведены фактические дневные температуры полигона, узлы интерполяции и график модельной температуры. Первый день на горизонтальной шкале соответствует 1 января 2021 г. и т. д. Максимальная модельная температура искусственно увеличена для того, чтобы резче выделить поведение фотосинтетической активности вблизи точек. Таким образом, для модельной температуры основные

показатели составили: $T_{max} = 30,8^{\circ}\text{C}$, $T_{min} = -31,3^{\circ}\text{C}$, среднегодовая температура 3°C .

Компьютерная модель и результаты численных экспериментов. Для численных расчетов использовалась библиотека функций системы Matlab. Приближенное решение системы (10)–(12) находилось с помощью универсального решателя ODE45, реализующего метод Рунге – Кутта 4-го и 5-го порядков точности. Особенность функции ODE45 заключается в том, что она использует переменный шаг для приближенного решения дифференциальных уравнений. В силу этого возникает необходимость интерполирования коэффициентов уравнения, зависящих от температуры, в узлах расчетной сетки. Указанная интерполяция выполнялась с помощью библиотеки вычислительных функций системы Matlab методом сплайнов.

На рис. 3 представлена динамика относительных запасов углерода в течение календарного года. В окрестности дней, для которых температура превышала оптимальное значение для фотосинтеза (25°C), количество углерода в пуль *Live* резко сокращалось.

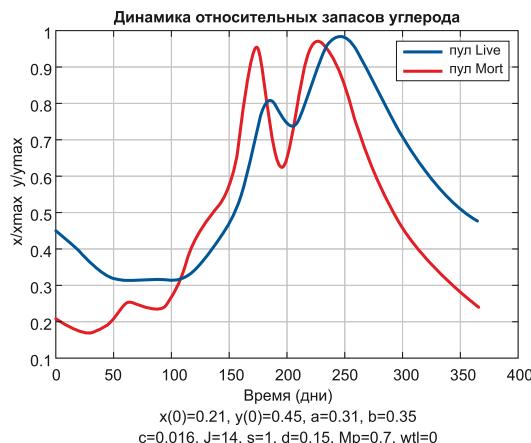


Рис. 3. Динамика относительных запасов углерода в течение календарного года.

3. Заключение и выводы

Основным результатом работы является разработка математической модели динамики углерода в локальной болотной экосистеме, которая отражает зависимости основных процессов круговорота углерода от температуры. Численные эксперименты показывают, что предлагаемая в работе математическая модель хорошо отражает годовые колебания температуры и соответственно определяет относительные изменения запасов углерода в обоих пульах болотной экосистемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Melaku N. D., Wang J., Meshesha T. W. Modeling the dynamics of carbon dioxide emission

- and ecosystem exchange using a modified SWAT hydrologic model in cold wetlands // Water. 2022. V. 14, N 9. 1458. <https://doi.org/10.3390/w14091458>.
- 2. Bubier J. B., Gaytri M. T., Roulet N., Lafleur P. Spatial and temporal variability in growing-season net ecosystem carbon dioxide exchange at a large peatland in Ontario, Canada // Ecosystems. 2003. N 6, P. 353–367.
 - 3. Кондратьев К. Я., Крапивин В. Ф. Моделирование глобального круговорота углерода // М.: Физматлит, 2004.
 - 4. Федотов А. М., Медведев С. Б., Пестунов А. И. Пестунов И. А. О нестандартном поведении минимальной модели углеродного цикла // Вестн. НГУ, Сер. Информационные технологии. 2011. Т. 9, № 1. С. 82–88.
 - 5. Барцев С. И., Дегерменджи А. Г., Ерохин Д. В. Глобальная минимальная модель многолетней динамики углерода в биосфере // Докл. АН. Геофизика. 2005. Т. 401, № 2. С. 233–237.
 - 6. Zhang Y., Li C., Trettin C., Sun G. An integrated model of soil, hydrology, and vegetation for carbon dynamics in wetland ecosystems // Global Biogeochemical Cycles. 2002. V. 16, N 4. P. 9–17.
 - 7. Famiglietti C. A., Smallman T. L., Levine P. A., Flack-Prain S., Quetin G. R., Meyer V., Parazoo N. C., Stettz S. G., Yang Y., Bonal D., Bloom A. A., Williams M., Konings A. G. Optimal model complexity for terrestrial carbon cycle prediction // Biogeosciences. 2021. V. 18. P. 2727–2754.
 - 8. Semenov S. P., Dyukarev E. A., Tashkin A. O. Biogeochemical carbon cycles numerical modeling in wetland ecosystems // Lobachevskii J. Math. 2023. V. 44, № 3. P. 1223–1228.
 - 9. Monteith J. L. Solar radiation and productivity in tropical ecosystems // J. Appl. Ecology. 1972. V. 9. P. 747–766.
 - 10. Monteith J. L. Climate and efficiency of crop production in Britain // Philos. Trans. Royal Soc. London B. 1977. V. 281. P. 277–294.
 - 11. Goetz S., Prince S. Modelling terrestrial carbon exchange and storage: evidence and implications of functional convergence in light-use efficiency // Adv. Ecolog. Res. 1999. V. 28. P. 57–92.
 - 12. Tian Y., Zhang Y., Knyazikhin Y., Myneni R. B., Glassy J., Dedieu G., Running S. W. Prototyping of MODISLAI and FPAR algorithm with LASUR and LANDSAT data // IEEE Trans. Geosci. Remote Sens. 2000. V. 38. P. 2387–2401.
 - 13. Семёнов С. П., Тацкин А. О. Анализ моделей углеродного цикла применительно к исследованию болотных экосистем Западной Сибири // Вестн. ЮрГУ. 2022. Т. 18, № 4. С. 145–152.
 - 14. Dong T., Wu B., Meng J., Du X., Shang J. Sensitivity analysis of retrieving fraction of absorbed photosynthetically active radiation (FPAR) using remote sensing data // Acta Ecolog. Sinica. 2016. V. 36, N 1. P. 1–7.
 - 15. Deverel S., Oikawa P., Dore S., Mack S., Silva L. Restoration of California deltaic and coastal wetlands for climate change mitigation. // North Little Rock, Arkansas: American Carbon Registry, 2017.
 - 16. Davidson E. A., Samanta S., Caramori S. S., Savage K. The dual Arrhenius and Michaelis-Menten kinetics model for decomposition of soil organic matter at hourly to seasonal time scales // Global Change Biology. 2012. V. 18, N 1. P. 371–384.
 - 17. Tang J. Y., Riley W. J. A total quasi-steady-state formulation of substrate uptake kinetics in complex networks and an example application to microbial litter decomposition // Biogeosciences. 2013. V. 10. P. 8329–8351.
 - 18. Michaelis L., Menten M. L. The Kinetics of invertase action // Biochemistry Z. 1913. V. 49. P. 333–369.
 - 19. Bugmann H., Seidl R., Hartig F., Bohn F., Bruna J., Cailleret M. et al. Tree mortality submodels drive simulated long-term forest dynamics: assessing 15 models from the stand to global scale // Ecosphere. 2019. V. 10, N 2. 02616. <https://doi.org/10.1002/ecs2.2616>.
 - 20. Dyukarev E. A., Kurakov S. A. Response of bare soil respiration to air and soil temperature variations according to different models: A case study of an urban grassland // Land. 2023. V. 12. 939. <https://doi.org/10.3390/land12050939>.

21. Maloszewski P., Zuber A. Principles and practice of calibration and validation of mathematical models for the interpretation of environmental tracer data in aquifers // *Adv. Water Resources.* 1993. V. 16, N 3. P. 173–190.
22. Овчинников Н. Н., Шиханова Н. М. Фотосинтез. М.: Просвещение, 1972.
23. O'Neill R. V., Goldstein R. A., Shugart H. H., Mankin J. B. Terrestrial ecosystem energy model. Eastern deciduous forest biome memo report Oak Ridge // Oak Ridge: The Environmental Sciences Division of the Oak Ridge National Laboratory, 1972.

Поступила в редакцию 20 декабря 2023 г.

После доработки 24 января 2024 г.

Принята к публикации 29 февраля 2024 г.

Семёнов Сергей Петрович
Югорский государственный университет,
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012
ssp@ugrasu.ru

Дюкарев Егор Анатольевич
Югорский государственный университет,
НОЦ-кафедра ЮНЕСКО «Динамика окружающей среды и глобальные изменения
климата»
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012;
Институт мониторинга климатических и экологических систем СО РАН
Лаборатория физики климатических систем
пр. Академический 10/3, Томск 634021
dekor@mail.ru

Ташкин Артём Олегович
Югорский государственный университет,
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012
anozer_sky@mail.ru

MATHEMATICAL MODEL FOR CALCULATING
CARBON DYNAMICS IN WETLAND ECOSYSTEMS
OF COLD REGIONS OF WESTERN SIBERIA

S. P. Semenov, E. A. Dyukarev,
and A. O. Tashkin

Abstract: Studying the dynamics of carbon stocks in wetland ecosystems will allow us to more accurately assess the contribution of wetlands to global climate change. This work proposes a zero-dimensional mathematical model that describes the carbon dynamics of a local (at the watershed scale) wetland ecosystem, taking the ambient temperature into account. The proposed model identifies two carbon reservoirs: plant phytomass and organic carbon in mortmass. The main processes of the model include photosynthesis, respiration, phytomass die-off, and carbon leaching by groundwater. Numerical experiments were carried out to show how changes in ambient temperature affect the dynamics of carbon stocks in wetland ecosystems.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-1-102-115

Keywords: mathematical models, carbon dynamics, swamp ecosystems, wetlands, carbon, numerical experiments, environment.

REFERENCES

1. Melaku N. D., Wang J., and Meshesha T. W., “Modeling the dynamics of carbon dioxide emission and ecosystem exchange using a modified SWAT hydrologic model in cold wetlands,” *Water*, **14**, No. 9, 1458 (2022).
2. Bubier J. B., Gaytri M. T., Roulet N., and Lafleur P., “Spatial and temporal variability in growing-season net ecosystem carbon dioxide exchange at a large peatland in Ontario, Canada,” *Ecosystems*, No. 6, 353–367 (2003).
3. Kondratyev K. Ya. and Krapivin V. F., *Modeling the Global Carbon Cycle* [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2004).
4. Fedotov A. M., Medvedev S. B., Pestunov A. I., and Pestunov I. A., “On the non-standard behavior of the minimum model of the carbon cycle [in Russian],” *Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Inform. Tekhnol.*, **9**, No. 1, 82–88 (2011).
5. Bartsev S. I., Degermendzhi A. G., and Erokhin D. V., “Global minimum model of long-term carbon dynamics in the biosphere [in Russian],” *Dokl. Akad. Nauk, Geofiz.*, **401**, No. 2, 233–237 (2005).
6. Zhang Y., Li C., Trettin C., and Sun G., “An integrated model of soil, hydrology, and vegetation for carbon dynamics in wetland ecosystems,” *Glob. Biogeochem. Cycles*, **16**, No. 4, 9–17 (2002).
7. Famiglietti C. A., Smallman T. L., Levine P. A., Flack-Prain S., Quetin G. R., Meyer V., Parazoo N. C., Stettz S. G., Yang Y., Bonal D., Bloom A. A., Williams M., and Konings A. G., “Optimal model complexity for terrestrial carbon cycle prediction,” *Biogeosci.*, **18**, 2727–2754 (2021).
8. Semenov S. P., Dyukarev E. A., and Tashkin A. O., “Biogeochemical carbon cycles numerical modeling in wetland ecosystems,” *Lobachevskii J. Math.*, **44**, No. 3, 1223–1228 (2023).

9. Monteith J. L., "Solar radiation and productivity in tropical ecosystems," *J. Appl. Ecol.*, **9**, 747–766 (1972).
10. Monteith, J. L., "Climate and efficiency of crop production in Britain," *Philos. Trans. R. Soc. Lond.*, B, **281**, 277–294 (1977).
11. Goetz S. and Prince S., "Modelling terrestrial carbon exchange and storage: evidence and implications of functional convergence in light-use efficiency," *Adv. Ecol. Res.*, **28**, 57–92 (1999).
12. Tian Y., Zhang Y., Knyazikhin Y., Myneni R. B., Glassy J., Dedieu G., and Running S. W., "Prototyping of MODISLAI and FPAR algorithm with LASUR and LANDSAT data," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, **38**, 2387–2401 (2000).
13. Semenov S. P. and Tashkin A. O., "Analysis of carbon cycle models for research of wetland ecosystems in Western Siberia [in Russian]," *Vestn. Yur. Gos. Univ.*, **18**, No. 4, 145–152 (2022).
14. Dong T., Wu B., Meng J., Du X., and Shang J., "Sensitivity analysis of retrieving fraction of absorbed photosynthetically active radiation (FPAR) using remote sensing data," *Acta Ecolog. Sin.*, **36**, No. 1, 1–7 (2016).
15. Deverel S., Oikawa P., Dore S., Mack S., and Silva L., Restoration of California Deltaic and Coastal Wetlands for Climate Change Mitigation, Amer. Carbon Reg., North Little Rock, AR (2017).
16. Davidson E. A., Samanta S., Caramori S. S., and Savage K., "The Dual Arrhenius and Michaelis–Menten kinetics model for decomposition of soil organic matter at hourly to seasonal time scales," *Glob. Change Biol.*, **18**, 371–384 (2012).
17. Tang J. Y. and Riley W. J., "A total quasi-steady-state formulation of substrate uptake kinetics in complex networks and an example application to microbial litter decomposition," *Biogeosci.*, **10**, 8329–8351 (2013).
18. Michaelis L. and Menten M. L., "Die Kinetik der Invertinwirkung," *Biochem. Z.*, **49**, 333–369.
19. Bugmann H., Seidl R., Hartig F., Bohn F., Bruna J., Cailleret M., et al., "Tree mortality submodels drive simulated long-term forest dynamics: assessing 15 models from the stand to global scale," *Ecosphere*, **10**, paper ID 02616 (2019).
20. Dyukarev E. A. and Kurakov S. A., "Response of bare soil respiration to air and soil temperature variations according to different models: A case study of an urban grassland," *Land*, **12**, 939 (2023).
21. Maloszewski P. and Zuber A., "Principles and practice of calibration and validation of mathematical models for the interpretation of environmental tracer data in aquifers," *Adv. Water Res.*, **16**, No. 3, 173–190 (1993).
22. Ovchinnikov N. N. and Shikhanova N. M., Photosynthesis [in Russian], Prosveschenie, Moscow (1972).
23. O'Neill R. V., Goldstein R. A., Shugart H. H., and Mankin J. B., Terrestrial ecosystem energy model. Eastern deciduous forest biome memo report Oak Ridge, Environ. Div. Ridge Natl.

Lab., Oak Ridge (1972).

Submitted December 20, 2023

Revised January 24, 2024

Accepted February 29, 2024

Sergey P. Semenov
Yugra State University,
16 Chekhov Street, Khanty-Mansiysk 628012, Russia
ssp@ugrasu.ru

Egor A. Dyukarev
Yugra State University,
UNESCO Chair “Dynamics of the Environment and Global Climate Change,”
16 Chekhov Street, Khanty-Mansiysk 628012, Russia;
Institute of Monitoring of Climatic and Ecological Systems SB RAS,
Laboratory of Physics of Climatic Systems,
10/3 Akademichesky Avenue, Tomsk 634021, Russia
dekor@mail.ru

Artem O. Tashkin
Yugra State University,
16 Chekhov Street, Khanty-Mansiysk 628012, Russia
anozer_sky@mail.ru

Математическая жизнь
Межгородской научно-исследовательский семинар
«Неклассические задачи математической физики»

3 февраля 2024 г.

«Эволюционные уравнения с производной Джрабашяна — Нерсесяна».

Докладчик: Е. М. Ижбердеева (Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия).

Доклад посвящен вопросам разрешимости начальных задач для уравнений с производными Джрабашяна — Нерсесяна в банаевых пространствах и приложениям к уравнениям и системам уравнений в частных производных. Сначала рассмотрена начальная задача Джрабашяна — Нерсесяна для разрешенных относительно дробной производной линейных уравнений с ограниченным оператором при искомой функции. Решение представлено через функции Миттаг-Леффлера. Существование единственного решения начальной задачи для разрешенного относительно старшей производной квазилинейного уравнения доказано методом сжимающих отображений в специальном функциональном пространстве. Далее рассматриваются линейные и квазилинейные уравнения с вырожденным оператором при старшей производной Джрабашяна — Нерсесяна при условии относительной ограниченности пары операторов в линейной части уравнения. Задача типа Шоултера — Сидорова для уравнения исследуется путем редукции к системе, состоящей из задачи Джрабашяна — Нерсесяна для разрешенного относительно производной уравнения и уравнения с нильпотентным оператором при производной без начальных условий. Кроме того, исследованы вопросы однозначной разрешимости начальных задач для уравнений в банаевых пространствах с неограниченными линейными операторами и производной Джрабашяна — Нерсесяна. Сформулированы условия секториальности замкнутого оператора, показано, что они необходимы и достаточны для существования аналитического в секторе разрешающего семейства операторов исследуемого линейного однородного уравнения. Решение линейного неоднородного уравнения представлено в терминах разрешающих операторов. Для вырожденных линейных уравнений с парой операторов из определенного здесь класса секториальных пар доказана однозначная разрешимость задачи типа Шоултера — Сидорова. Полученные абстрактные результаты использованы при исследовании начально-краевых задач для уравнений с многочленами от эллиптического оператора высокого порядка, дифференциального по пространственным переменным, для системы уравнений Скотт — Блэра с производной Джрабашяна — Нерсесяна по времени и др.

17 февраля 2024 г.

«Аналог теоремы Келлога для конформных отображений кусочно-гладких областей».

Докладчик: А. П. Солдатов (Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия).

Классическая теорема Келлога утверждает, что конформное отображение односвязной области D , ограниченной ляпуновским контуром класса $C^{1,\mu}$, на единичный круг принадлежит $C^{1,\mu}(\overline{D})$. В докладе обсуждаются аналоги этой теоремы для областей, ограниченных кусочно-гладким контуром. Соответствующие результаты формулируются в терминах весовых пространств $C_{(0)}^\mu$ и $C_{(+0)}^\mu$, инвариантных при конформных отображениях.

2 марта 2024 г.

«Обратная задача определения коэффициента в псевдоараболическом уравнении с переопределением во внутренней точке».

Докладчик: Б. С. Аблабеков (Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, Бишкек, Киргизия).

В докладе рассматривается обратная задача определения коэффициента, зависящего от времени в псевдоараболическом уравнении. Суть обратной задачи состоит в том, что требуется вместе с решением определить неизвестный коэффициент по некоторой дополнительной информации о решении прямой задачи. В качестве дополнительной информации рассматривается условие переопределения во внутренней точке. Попутно исследуется разрешимость прямой задачи и доказывается разрешимость этой задачи. Сначала обратная задача сводится к эквивалентной нелинейной системе интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода, далее с использованием принципа сжатых отображений доказывается существование и единственность классического решения обратной задачи.

16 марта 2024 г.

«О понижении порядка суммирования методом Абеля — Лидского спектральных разложений».

Докладчик: М. В. Кукушкин (НИУ ВШЭ, Москва, Россия).

Изучается случай когда индекс класса Шатена — фон-Неймана секториального оператора меньше порядка суммирования соответствующего спектрального разложения, получены достаточные условия для суммируемости спектральных разложений методом Абеля — Лидского. На основе концепции суммирования методом Абеля — Лидского вводится определение оператор-функции неограниченного секториального оператора. В качестве приложений рассматриваются абстрактные эволюционные операторные уравнения дробного порядка. Задействованы такие операторы, как оператор дробного интегродифференцирования Римана — Лиувилля, оператор Киприянова, потенциал Рисса, разностный оператор. С учетом полугрупповой природы перечисленных выше операторов результаты могут быть сформулированы в терминах генератора соответствующей сильно непрерывной полугруппы сокращений.



Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций
Свидетельство о регистрации № ПИ № ФС 77-59001 от 11.08.2014 г.

Учредитель: ФГАОУ ВО «Северо-Восточный
федеральный университет имени М. К. Аммосова»
ул. Белинского, 58, Якутск 677000

Подписано в печать 12.04.2024. Дата выхода 16.04.2024. Формат 70 × 108/16. Печать офсетная.
Печ. л. 7,5. Уч.-изд. л. 7,75. Тираж 50 экз. Заказ № 74.

Издательский дом Северо-Восточного федерального университета,
677891, г. Якутск, ул. Петровского, 5.
Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии ИД СВФУ