

Редакционный совет

Главный редактор: Егоров И. Е., д.ф.-м.н., профессор, СВФУ

Зам. главного редактора: Кожанов А. И., д.ф.-м.н., профессор, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Зам. главного редактора: Попов С. В., д.ф.-м.н., профессор, СВФУ

Ответственный секретарь: Евсеев З. И., СВФУ

Члены редакционного совета:

Бородин О. В., д.ф.-м.н., профессор, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Вабищевич П. Н., д.ф.-м.н., профессор, Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН

Васильев В. И., д.ф.-м.н., профессор, СВФУ

Зикиров О. С., д.ф.-м.н., профессор, Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Узбекистан

Морозов А. С., д.ф.-м.н., профессор, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Пятков С. Г., д.ф.-м.н., профессор, Югорский государственный университет

Хлуднев А. М., д.ф.-м.н., профессор, Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

Itou H., Ph.D., Professor, Tokyo University of Science, Japan

Ruzhansky M., Professor, Ghent University, Belgium

Tani A., Professor, Keio University, Japan

Xin-Lin Gao, Professor, Southern Methodist University, USA

СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М. К. АММОСОВА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ СВФУ

ОСНОВАН В 1994 ГОДУ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ВЫХОДИТ 4 РАЗА В ГОД

Том 31, № 2 (122)

Апрель—июнь, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Голубятников В. П., Ситняковская Е. А. О спрятанном аттракторе одной несимметричной модели генной сети	3
V. P. Golubyatnikov, E. A. Sitnyakovskaya On a hidden attractor of one asymmetric gene network model	12
Лазарев Н. П., Семенова Г. М., Никулин А. С. Задача о равновесии пластины Кирхгофа — Лява, контактирующей с препятствием, имеющим угловую форму	14
N. P. Lazarev, G. M. Semenova, A. S. Nikulin Equilibrium problem for a Kirchhoff–Love plate contacting with an inclined and lateral obstacles	28
Пятков С. Г., Потапков А. А. О некоторых классах коэффициентных обратных задач определения теплофизических параметров в слоистых средах	31
A. A. Potapkov, S. G. Pyatkov On some classes of coefficient inverse problems of recovering thermophysical parameters in stratified media	44
Рахмелеевич И. В. Об инвариантах Лапласа двумерных нелинейных уравнений в частных производных полиномиального типа	46
I. V. Rakhmelevich On Laplace invariants of two-dimensional non-linear partial differential equations of polynomial type	57
B. S. Choudhury, C. Bandyopadhyay, P. Chakraborty Analysis of a relational fixed point problem	59
F. N. Dekhkonov Time-optimal control problem associated with a fourth-order parabolic equation	70
V. Doobko, E. Karachanskaya Application of an indicator random process for modeling open stochastic systems	81

Математическое моделирование

Анисимов В. В., Сазанова Е. В.	Многостадийная	
	производственно-распределительная задача	99
V. V. Anisimov, E. V. Sazanova	<i>Multistage production-distribution</i>	
	problem	114
Математическая жизнь		116

АДРЕС ИЗДАТЕЛЯ:
СВФУ, ул. Белинского, 58, Якутск, 677000

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
СВФУ, ул. Кулаковского, 48, каб. 543, Якутск, 677000
Телефон: 8(4112)32-14-99, Факс: 8(4112)36-43-47;
<http://mzsvfu.ru>
e-mail: prokopevav85@gmail.com; yktmatzam@gmail.com;
ivanegorov51@mail.ru

(c) Северо-Восточный федеральный университет
имени М. К. Аммосова, 2024

О СПРЯТАННОМ АТТРАКТОРЕ ОДНОЙ НЕСИММЕТРИЧНОЙ МОДЕЛИ ГЕННОЙ СЕТИ

В. П. Голубятников, Е. А. Ситняковская

Аннотация. Рассмотрена модель простейшей кольцевой генной сети, регулируемой одной отрицательной и двумя положительными связями между тремя компонентами этой сети. Модель представлена трехмерной динамической системой с кусочно-линейными пороговыми правыми частями. В ее фазовом портрете описан спрятанный аттрактор, установлены условия существования цикла, лежащего вне области притяжения этого аттрактора.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-2-3-13

Ключевые слова: фазовые портреты динамических систем, стратификация фазовых портретов, стационарная точка, инвариантная область, многоступенчатая функция, циклы, спрятанные аттракторы, нелокальные осцилляции.

Введение

В работах [1, 2] изучалась трехмерная динамическая система кинетического типа, моделирующая функционирование простейшей генной сети, регулируемой двумя положительными и одной отрицательной связью между ее компонентами:

$$\frac{dx}{dt} = L(z) - x; \quad \frac{dy}{dt} = \Gamma(x) - y; \quad \frac{dz}{dt} = \Gamma(y) - z. \quad (1)$$

В первом из этих уравнений и в многомерных аналогах системы (1), рассмотренных в [3–5], функция L монотонно убывает. Это означает, что регуляторная связь между компонентами с концентрациями $z(t)$ и $x(t)$ отрицательна. Функция Γ монотонно возрастает, такими функциями в уравнениях биохимической кинетики описывают положительные связи [6–8].

Следуя [9, 10], где при построении и анализе обобщенных пороговых моделей генных сетей изучались подобные динамические системы биохимической кинетики с многоступенчатыми правыми частями, рассмотрим динамическую систему (1), у которой

$$\begin{aligned} L(w) &= 2c \quad \text{для } 0 \leq w < c - \varepsilon; \quad L(w) = c \quad \text{для } c - \varepsilon \leq w < c + \varepsilon; \\ L(w) &= 0 \quad \text{для } c + \varepsilon \leq w < \infty; \quad \Gamma(w) = 0 \quad \text{при } 0 \leq w < c - \varepsilon; \\ \Gamma(w) &= c \quad \text{при } c - \varepsilon \leq w < c + \varepsilon; \quad \Gamma(w) = 2c \quad \text{при } c + \varepsilon \leq w < \infty. \end{aligned} \quad (2)$$

Работа поддержана РНФ, проект 23-21-00019, <https://rscf.ru/project/23-21-00019/>.

Здесь положительный параметр ε достаточно мал, см. ниже.

Для динамических систем вида (1), у которых функции L и Γ являются одноступенчатыми: $L(w) = b_1 > 0$ при $w \leq 1$ и $L_j(w) = 0$ при $w > 1$; $\Gamma(w) = 0$ при $w \leq 1$ и $\Gamma(w) = b_2 > 0$ при $w > 1$; и для подобных систем, имеющих большие размерности, в работах [2, 11] получены условия существования, единственности и устойчивости циклов и описаны гомеоморфные торам инвариантные окрестности таких циклов.

Отметим, что при моделировании генных сетей средствами качественной теории дифференциальных уравнений и в других разделах чистой и прикладной математики подобные разрывные ступенчатые функции в правых частях уравнений используются систематически (см. [12–14]).

Лемма 1. *Параллелепипед $Q = [0, 2c] \times [0, 2c] \times [0, 2c]$ является положительно инвариантной областью: траектории всех его точек с ростом t из него не выходят.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в вычислении знаков правых частей уравнений системы в граничных точках области Q (см. [11, 15]). Для краткости будем называть такие области *инвариантными*.

Следуя [16, 17], с целью локализации траекторий динамической системы (1), (2) в ее фазовом портрете разобьем инвариантную область Q плоскостями $x = c - \varepsilon$, $x = c + \varepsilon$, $y = c - \varepsilon$, $y = c + \varepsilon$, $z = c - \varepsilon$, $z = c + \varepsilon$ на 27 блоков и перенумеруем эти блоки мультииндексами $\{r_1 r_2 r_3\}$ трехбуквенного алфавита 0, 1, 2:

$$\begin{aligned} r_1 = 0, & \text{ если в блоке } 0 \leq x < c - \varepsilon; \quad r_1 = 1, \text{ если в блоке } c - \varepsilon \leq x < c + \varepsilon; \\ r_1 = 2, & \text{ если в блоке } c + \varepsilon \leq x; \quad r_2 = 0, \text{ если в блоке } 0 \leq y < c - \varepsilon; \quad (3) \\ r_2 = 1, & \text{ если в блоке } c - \varepsilon \leq y < c + \varepsilon; \quad r_2 = 2, \text{ если в блоке } c + \varepsilon \leq y. \end{aligned}$$

Аналогичным образом по координате z определяется и индекс r_3 .

Так же, как и в предыдущих публикациях [5, 18] и др., в дальнейшем будем рассматривать только такие траектории системы (1), (2), которые с ростом t не пересекаются с ребрами блоков разбиения (3). Построенный ниже цикл этой динамической системы переходит из блока в блок только через внутренние точки их общих граней.

Следующие утверждения доказываются в точности так же, как лемма 1 и ее многомерные аналоги (см. [11, 16]), и основаны на вычислении знаков производных $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ на внутренних гранях блоков разбиения (3).

Лемма 2. Центральный куб

$$Q_1 = [c - \varepsilon; c + \varepsilon] \times [c - \varepsilon; c + \varepsilon] \times [c - \varepsilon; c + \varepsilon] = \{111\}$$

разбиения (3) является инвариантной областью в фазовом портрете системы (1), (2).

В блоке $\{111\}$ система (1), (2) принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = c - x; \quad \frac{dy}{dt} = c - y; \quad \frac{dz}{dt} = c - z.$$

Нетрудно проверить, что точка $S_0 = (c, c, c)$ стационарна и устойчива.

Лемма 3. *Динамическая система (1), (2) имеет единственную стационарную точку S_0 , содержащуюся в блоке $\{111\}$. Траектории всех точек этого блока с ростом $t \rightarrow \infty$ экспоненциально стремятся к точке S_0 .*

Лемма 4. *Для любых двух соседних блоков B_1 и B_2 разбиения (3) траектории всех внутренних точек их общей двумерной грани $B_1 \cap B_2$ переходят либо из блока B_1 в B_2 , либо из блока B_2 в B_1 .*

Как и для систем вида (1) с одноступенчатыми правыми частями (см. [11, 18]), будем обозначать такие переходы через $B_1 \rightarrow B_2$ и соответственно $B_2 \rightarrow B_1$. Для гладких и для одноступенчатых функций L, Γ у аналогов динамической системы (1) указанные переходы изучались в [1, 4, 19] при построении стратификаций и инвариантных областей в фазовых портретах этих систем и поиске их циклов. Такие построения мы используем и при изучении динамических систем с многоступенчатыми правыми частями.

Лемма 5. *Во внутренности каждого блока разбиения (3) инвариантного куба Q система (1), (2) линейна, ее траектории прямолинейны и их продолжения пересекаются в одной точке.*

В частности, продолжения траекторий всех точек блока $\{000\}$ пересекаются в точке с координатами $(2c; 0; 0)$.

Доказательство. В блоке $\{000\}$ динамическая система (1), (2) принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = 2c - x; \quad \frac{dy}{dt} = -y; \quad \frac{dz}{dt} = -z.$$

Ее решения описываются уравнениями

$$x(t) = 2c + (x(0) - 2c)e^{-t}, \quad y(t) = y(0)e^{-t}, \quad z(t) = z(0)e^{-t}; \quad (4)$$

продолжения этих решений за пределы блока $\{000\}$ при $t \rightarrow \infty$ стремятся к точке $(2c; 0; 0)$. \square

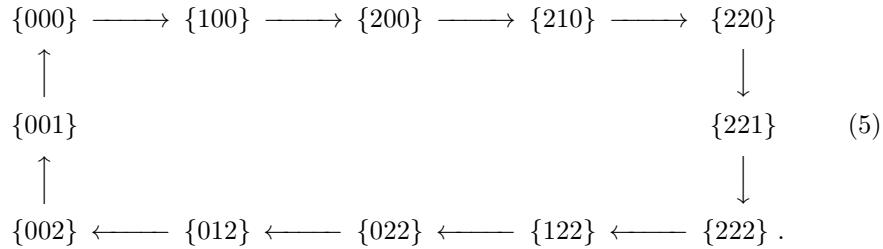
Дословно теми же рассуждениями с аналогами формул вида (4) устанавливается

Следствие 1. *Продолжения траекторий всех точек блока $\{100\}$ стремятся к точке $(2c; c; 0)$;*

продолжения траекторий всех точек блока $\{200\}$ стремятся к точке $(2c; 2c; 0)$;
продолжения траекторий всех точек блока $\{210\}$ — к точке $(2c; 2c; c)$

продолжения траекторий всех точек блока $\{220\}$ — к точке $(2c; 2c; 2c)$ и т. д.

Рассмотрим определяемую соотношениями $x = c - \varepsilon$, $0 \leq y < c - \varepsilon$, $0 \leq z < c - \varepsilon$ грань $F_0 = \{000\} \cap \{100\}$, разделяющую первые два блока верхней строки следующей кольцевой диаграммы:



Обозначим остальные грани, разделяющие соседние блоки этой диаграммы, подобным же образом:

$$F_1 = \{100\} \cap \{200\}, \text{ где } x = c + \varepsilon; F_2 = \{200\} \cap \{210\}, \text{ где } y = c - \varepsilon;$$

$$F_3 = \{210\} \cap \{220\}, \text{ где } y = c + \varepsilon; F_4 = \{220\} \cap \{221\}, \text{ где } z = c - \varepsilon; \text{ и т. д.}$$

Стрелки диаграммы (5) обозначают указанные в лемме 4 сдвиги вдоль траекторий динамической системы (1), (2) точек, лежащих в перечисленных здесь блоках.

В отличие от рассмотренных в [20, 21] динамических систем с многоступенчатыми правыми частями, система (1), (2) не имеет симметрий относительно циклической перестановки координат $\sigma : x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$, однако решения этой системы в блоках $\{000\}$, $\{220\}$, $\{002\}$, отстоящих друг от друга в диаграмме (5) на четыре шага, имеют одинаковое геометрическое описание — продолжения таких решений за пределы перечисленных трех блоков пересекаются в вершинах Q куба $(2c, 0, 0)$, $(2c, 2c, 2c)$, $(0, 0, 2c)$ соответственно (см. следствие 1).

Аналогичным образом продолжения решений системы (1), (2) в блоках $\{100\}$, $\{221\}$, $\{012\}$ за их пределы пересекаются в точках $(2c, c, 0)$, $(c, 2c, 2c)$, $(0, 0, c)$ соответственно. Эти три блока, как и предыдущие три, отстоят друг от друга в диаграмме (5) на четыре шага. Такие симметрии в описании решений этой системы имеются и в трех блоках $\{200\}$, $\{222\}$, $\{002\}$, и в трех блоках $\{210\}$, $\{122\}$, $\{001\}$.

Обозначим через Π объединение всех двенадцати блоков, перечисленных в (5).

2. Существование цикла системы (1), (2)

Основным результатом этой работы является

Теорема. *Если $4\varepsilon \leq c$, то область Π содержит по крайней мере один цикл динамической системы (1), (2). Этот цикл переходит из блока в блок согласно стрелкам диаграммы (5).*

Подобные кольцевые диаграммы используются при поисках периодических траекторий широкого круга динамических систем вида (1) и их многомерных аналогов (см. [2, 18, 22]).

ЗАМЕЧАНИЕ. Область Π не является инвариантной относительно положительных сдвигов вдоль траекторий системы (1), (2): траектории точек, лежащих в блоках $\{220\}$ и $\{200\}$, выходят из них только в блоки $\{221\}$ и $\{210\}$ соответственно, однако траектории точек блока $\{210\}$ могут выходить из него не только в блок $\{220\}$, в который указывает стрелка диаграммы (5), но и в блок $\{211\}$, если эти точки лежат достаточно близко к верхней грани $z = c - \varepsilon$ по сравнению с их расстояниями до грани $y = c - \varepsilon$.

1. Для доказательства теоремы опишем переходы $F_j \rightarrow F_{j+1}$ траекторий точек, принадлежащих описанным выше граням, разделяющим блоки диаграммы (5):

$$x_1 = c + \varepsilon; \quad y_1 = \frac{y_0(c - \varepsilon) + 2c\varepsilon}{c + \varepsilon}; \quad z_1 = \frac{z_0(c - \varepsilon)}{c + \varepsilon}.$$

Аналогичными дробно-линейными функциями, как и в [23], с помощью формул вида (4) определяются координаты точки $X_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \text{int } F_2$, в которой заканчивается прямолинейный участок траектории точки $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$, лежащей во внутренности грани F_1 . Рассматривая композиции таких переходов траекторий с грани на грань, мы видим, что траектория точки $X_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \text{int } F_0$ после переходов через блоки $\{100\}$ и $\{200\}$ попадает в точку $X_2 = (x_2, y_2, z_2) \in F_2$ с координатами

$$x_2 = 2c - \frac{(c^2 - \varepsilon^2)(c + \varepsilon)}{2c^2 - y_0(c - \varepsilon)}, \quad y_2 = c - \varepsilon, \quad z_2 = \frac{z_0(c^2 - \varepsilon^2)}{2c^2 - y_0(c - \varepsilon)}.$$

В свою очередь, траектория точки X_2 после перехода через блоки $\{210\}$ и $\{220\}$ попадает в точку $X_4 = (x_4, y_4, z_4) \in F_4$ с координатами

$$x_4 = 2c - \frac{(c^2 - \varepsilon^2)(2c - x_2)}{2c^2 - z_2(c - \varepsilon)}, \quad y_4 = 2c - \frac{(c^2 - \varepsilon^2)(c + \varepsilon)}{2c^2 - z_2(c - \varepsilon)}, \quad z_4 = c - \varepsilon.$$

Для того чтобы траектория точки X_0 замкнулась после композиции двенадцати переходов с грани на грань, потребуется выполнение следующих соотношений:

$$2c - y_4 = z_0 = \frac{(c + \varepsilon)(c^2 - \varepsilon^2)[2c^2 - y_0(c - \varepsilon)]}{4c^2 - 2c^2(c - \varepsilon)y_0 - (c - \varepsilon)(c^2 - \varepsilon^2)z_0},$$

$$2c - x_4 = y_0 = \frac{(c + \varepsilon)(c^2 - \varepsilon^2)^2}{4c^2 - 2c^2(c - \varepsilon)y_0 - (c - \varepsilon)(c^2 - \varepsilon^2)z_0}.$$

Опуская нулевые индексы, получаем уравнения двух гипербол

$$2c^2(c - \varepsilon)yz + (c - \varepsilon)(c^2 - \varepsilon^2)z^2 - 4c^4z - (c^2 - \varepsilon^2)^2y + 2c^2(c + \varepsilon)(c^2 - \varepsilon^2) = 0, \quad (6)$$

$$2c^2(c - \varepsilon)y^2 + (c - \varepsilon)(c^2 - \varepsilon^2)yz - 4c^4y + (c + \varepsilon)(c^2 - \varepsilon^2)^2 = 0. \quad (7)$$

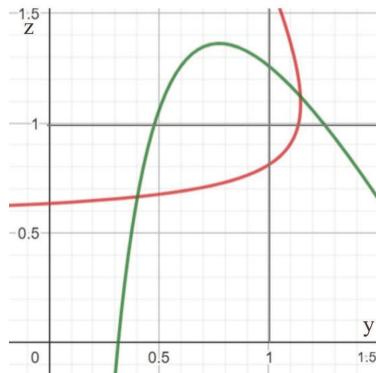


Рис. 1. Пересечение гипербол (6) и (7).

Будем искать такую точку (y_*, z_*) пересечения этих гипербол, что точка $x_0 = c - \varepsilon$, $y_0 = y_*$, $z_0 = z_*$ содержится во внутренности грани F_0 , т. е.

$$0 < y_* < c - \varepsilon; \quad 0 < z_* < c - \varepsilon.$$

На рис. 1 изображено пересечение гипербол (6) и (7) при $c = 1$ и $\varepsilon = 0.1$.

У гиперболы (6) одна из асимптот горизонтальна: $z = \frac{(c+\varepsilon)^2(c-\varepsilon)}{2c^2}$, уравнение ее наклонной асимптоты имеет вид

$$2c^2y + (c^2 - \varepsilon^2)z = \frac{(c^2 + \varepsilon^2)(7c^4 - 4c^2\varepsilon^2 + \varepsilon^4)}{2c^2(c - \varepsilon)}.$$

Гипербола (7) имеет вертикальную асимптоту $y = 0$ и наклонную:

$$2c^2y + (c^2 - \varepsilon^2)z = \frac{4c^4}{c - \varepsilon}.$$

Обозначим через K квадрат, задаваемый соотношениями $0 < y < c - \varepsilon$ и $0 < z < c - \varepsilon$. Простые вычисления показывают, что при $\varepsilon \leq \frac{c}{4}$ в квадрате K верхняя ветвь гиперболы (6) выпукла вниз и пересекает вертикальные стороны этого квадрата — ось OZ и прямую $y = c - \varepsilon$, а правая ветвь гиперболы (7) выпукла вверх и пересекает его горизонтальные стороны — ось OY и прямую $z = c - \varepsilon$. Следовательно, эти две ветви имеют в квадрате K в точности одну точку пересечения. Остальные точки пересечения гипербол (6) и (7) лежат вне K . Более точная оценка параметра ε связана с решением уравнения восьмой степени; в частности, при $\varepsilon = c/3$ в этом квадрате гиперболы (6) и (7) точек пересечения не имеют.

2. Итак, при $\varepsilon \leq \frac{c}{4}$ на грани F_0 существует в точности одна точка M_0 с координатами $x_0 = c - \varepsilon$, $y_0 = y_*$, $z_0 = z_*$ такая, что после четырех шагов по диаграмме (5), т. е. при соответствующем сдвиге вдоль ее траектории, она перейдет в точку $M_4 \in F_4$ с координатами $x_4 = 2c - y_*$, $y_4 = 2c - z_*$, $z_4 = c - \varepsilon$. После следующих четырех шагов по диаграмме (5) она перейдет в точку $M_8 \in F_8$ с координатами $x_8 = 2c - y_4$, $y_8 = c - \varepsilon$, $z_8 = 2c - x_4$, а еще через четыре шага вернется на грани F_0 в исходное свое положение M_0 . Следовательно, траектория такой точки M_0 оказывается циклом системы (1), (2). \square

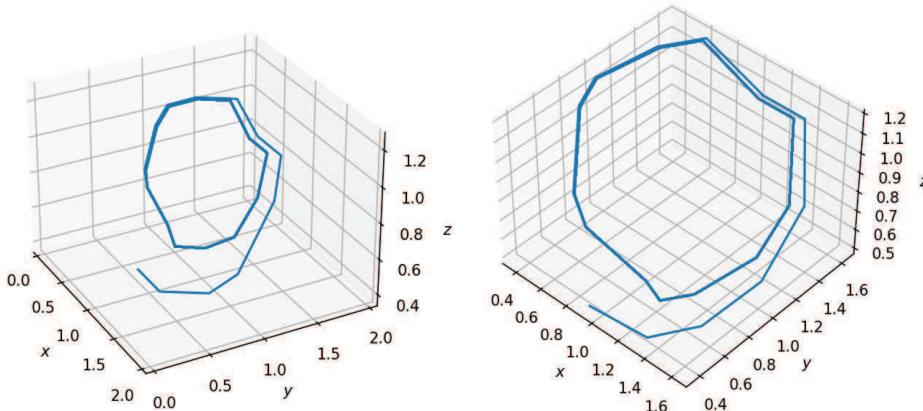


Рис. 2. Цикл \mathfrak{C} динамической системы (1), (2); $c = 1$, $\varepsilon = 0.1$ (слева); $c = 1$, $\varepsilon = 0.15$ (справа).

3. Вычислительные эксперименты

На рис. 2 показаны некоторые результаты из серии численных экспериментов с траекториями системы (1), (2). В обоих представленных случаях начальная точка выбрана в центре грани F_0 и построенный двенадцатиугольный цикл \mathfrak{C} проходит через блоки, перечисленные в диаграмме (5).

Заключение

Построенный кусочно-линейный цикл $\mathfrak{C} \subset \Pi$ представляет собой пример нелокального колебания; подобные нелокальные осцилляции других динамических систем изучались в [20, 21, 24]. Внутренность окрестности Π цикла \mathfrak{C} не пересекается с внутренностью инвариантной окрестности $\{111\}$ устойчивой стационарной точки S_0 .

Проведенные построения переносятся и на модели генных сетей больших размерностей, и на динамические системы с правыми частями более общего вида, которые моделируют описанные в [5, 16, 17] генные сети с более сложными комбинациями положительных и отрицательных связей между их компонентами (см. также [25–27]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Glass L. Combinatorial and topological methods in nonlinear chemical kinetics // J. Chem. Phys. 1975. V. 63, N 4. P. 1325–1335.
2. Glass L., Pasternack J. S. Stable oscillations in mathematical models of biological control systems // J. Math. Biology. 1978. V. 6. P. 207–223.
3. Kolchanov N. F., Ananko E. A., Likhoshvai V. A., Podkolodnaya O. A., Ignatieva E. V., Ratushnyi A. V., Matushkin Yu. G. Gene networks description and modeling in the GeneNet

- system, Chapter 7. 2002 // Gene Regulation and Metabolism / J. Collado-Vides, R. Hofestadt eds. Cambridge, MA; The MIT Press, 2002. P. 149–180.
4. Golubyatnikov V. P., Gaidov Yu. A., Kleshchev A. G., Volokitin E. P. Modeling of asymmetric gene networks functioning with different types of regulation // Biophysics. 2006. V. 51, suppl. 1. P. 61–65.
 5. Аюрова Н. Б., Голубятников В. П. Об одном цикле в пятимерной модели кольцевой генной сети // Сиб. журн. индустр. математики. 2021. Т. 24, № 3. С. 19–29.
 6. Mallet-Paret J., Smith H. L. The Poincaré-Bendixson theorem for monotone cyclic feedback systems // J. Dynamics Differ. Equ. 1990. V. 2, N 4. P. 367–421.
 7. Колесов А. Ю., Розов Н. Х., Садовничий В. А. Периодические решения типа бегущих волн в кольцевых генных сетях // Изв. РАН. Сер. мат. 2016. Т. 80, N 3. С. 67–94.
 8. Shen S., Ma Y., Ren Y., Wei D. Construction of an oscillator gene circuit by negative and positive feedbacks // J. Microbiology and Biotechnology. 2016. V. 26, N 1. P. 139–144.
 9. Tchuraev R. N., Ratner V. A. A continuous approach with threshold characteristics for simulation of gene expression // Molecular Genetic Information Systems. Modelling and Simulation / Ed. K. Bellman. 1983. Berlin: Springer-Verl. P. 64–80.
 10. Tchuraev R. N., Galimzyanov A. V. Modeling of actual eukaryotic control gene subnetworks based on the method of generalized threshold models // Molecular Biology. 2001. V. 35, N 6. P. 933–939.
 11. Голубятников В. П., Минушкина Л. С. Монотонность отображения Пуанкаре в некоторых моделях кольцевых генных сетей // Сиб. журн. индустр. математики. 2019. Т. 22, № 3. С. 39–47.
 12. Yomdin Y. Semialgebraic complexity of functions // J. Complexity. 2005. V. 21. P. 111–148.
 13. Farcot E., Gouzé J.-L. Periodic solutions of piecewise affine gene network models with non uniform decay rates: the case of a negative feedback loop // Acta Biotheor. 2009. V. 57, N 4. P. 429–455.
 14. Llibre J., Novaes D. D., Texeira M. A. Maximum number of limit cycles for certain piecewise linear dynamical systems // Nonlinear Dynamics. 2015. V. 82, N 3. P. 1159–1175.
 15. Минушкина Л. С. Фазовые портреты блочно-линейной динамической системы в одной модели кольцевой генной сети // Мат. заметки СВФУ. 2021. Т. 28, № 2. С. 34–46.
 16. Golubyatnikov V. P., Akinshin A. A., Ayupova N. B., Minushkina L. S. Stratifications and foliations in phase portraits of gene network models // Vavilov J. Genetics and Breeding. 2022. V. 26, N 8. P. 758–764.
 17. Минушкина Л. С. Периодические траектории нелинейных моделей кольцевых генных сетей // Владикавк. мат. журн. 2023. Т. 25, № 4. С. 80–90.
 18. Golubyatnikov V. P., Minushkina L. S. On geometric structure of phase portraits of some piecewise linear dynamical systems // Tbilisi Math. J. 2021. V. 7. Special issue. P. 49–56.
 19. Казанцев М. В. О некоторых свойствах графов доменов динамических систем. Сиб. журн. индустр. математики. 2015. Т. 18, № 4. С. 42–49.
 20. Golubyatnikov V. P., Ayupova N. B., Bondarenko N. E., Glubokikh A. V. Hidden attractors and nonlocal oscillations in gene networks models // Russian J. Numerical Anal. Math. Modelling. 2024. V. 39, N 2. P. 1–7.
 21. Голубятников В. П. О неединственности циклов в трехмерных моделях кольцевых генных сетей // Челяб. физ.-мат. журн. 2024. Т. 9, № 1. С. 23–34.
 22. Кириллова Н. Е., Минушкина Л. С. О дискретизации фазовых портретов динамических систем // Изв. АлтГУ. 2019. Т. 108, № 4. С. 82–85.
 23. Golubyatnikov V. P., Kalenykh A. E. Structure of phase portraits of nonlinear dynamical systems // J. Math. Sci. 2016. V. 215, N 4. P. 475–473.
 24. Dudkowski D., Jafari S., Kapitaniak T., Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Prasad A. Hidden attractors in dynamical systems // Physics Rep. 2016. V. 637. P. 1–50.
 25. Likhoshvai V. A., Kogai V. V., Fadeev S. I., Khlebodarova T. M. On the chaos in gene networks // J. Bioinform. Comput. Biol. 2013. V. 11. Article N 1340009.
 26. Чумаков Г. А., Чумакова Н. А. Гомоклинические циклы в одной модели генной сети // Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 4. С. 97–106.

-
27. Кириллова Н. Е. Об инвариантных поверхностях в моделях генных сетей // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23, № 4. С. 69–76.

Поступила в редакцию 20 марта 2024 г.

После доработки 21 апреля 2024 г.

Принята к публикации 30 мая 2024 г.

Голубятников Владимир Петрович, Ситняковская Елизавета Александровна
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
v.golubiatnikov1@g.nsu.ru, e.sitnyakovskaya@g.nsu.ru

ON A HIDDEN ATTRACTOR OF ONE ASYMMETRIC GENE NETWORK MODEL

V. P. Golubyatnikov and E. A. Sitnyakovskaya

Abstract: We consider a model of simplest circular gene network regulated by one negative and two positive feedbacks. The model is represented in the form of 3-dimensional dynamical system with piecewise linear threshold righthand sides. In the phase portrait of this system, we describe a hidden attractor. Conditions of existence and uniqueness of a cycle of this system are established.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-2-3-13

Keywords: phase portrait of dynamical system, equilibrium point, stratification of the phase portrait, invariant domain, multi-step function, cycle, non-local oscillation, hidden attractor.

REFERENCES

1. Glass L., “Combinatorial and topological methods in nonlinear chemical kinetics,” J. Chem. Phys., **63**, No. 4, 1325–1335 (1975).
2. Glass L. and Pasternack J. S., “Stable oscillations in mathematical models of biological control systems,” J. Math. Biol., **6**, 207–223 (1978).
3. Kolchanov N. F., Ananko E. A., Likhoshvai V. A., Podkolodnaya O. A., Ignatieva E. V., Ratushnyi A. V., and Matushkin Yu. G., “Gene networks description and modeling in the GeneNet system,” Ch. 7, pp. 149–180, In: Gene Regulation and Metabolism (J. Collado-Vides, R. Hofestadt, eds.), The MIT Press, Cambridge, MA (2002).
4. Golubyatnikov V. P., Gaidov Yu. A., Kleshchev A. G., and Volokitin E. P., “Modeling of asymmetric gene networks functioning with different types of regulation,” Biophys., **51**, suppl. 1, 61–65 (2006).
5. Ayupova N. B. and Golubyatnikov V. P., “On a cycle in a 5-dimensional circular gene network model,” J. Appl. Ind. Math., **15**, No. 3, 376–383 (2021).
6. Mallet-Paret J. and Smith H. L., “The Poincaré–Bendixson theorem for monotone cyclic feedback systems,” J. Dyn. Differ. Equ., **2**, No. 4, 367–421 (1990).
7. Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., and Sadovnichiy V. A., “Periodic solutions of traveling-wave type in circular gene networks,” Izv. RAN, Ser. Mat., **80**, No. 3, 67–94 (2016).
8. Shen S., Ma Y., Ren Y., and Wei D., “Construction of an oscillator gene circuit by negative and positive feedbacks,” J. Microbiol. Biotechnol., **26**, No. 1, 139–144 (2016).
9. Tchuraev R. N. and Ratner V. A., “A continuous approach with threshold characteristics for simulation of gene expression,” in: Molecular Genetic Information Systems. Modelling and Simulation (K. Bellman, ed.), pp. 64–80, Berlin (1983).
10. Tchuraev R. N. and Galimzyanov A. V., “Modeling of actual eukaryotic control gene subnetworks based on the method of generalized threshold models,” Molecular Biol., **35**, No. 6, 933–939 (2001).
11. Golubyatnikov V. P. and Minushkina L. S., “Monotonicity of the Poincaré mapping in some models of circular gene networks,” J. Appl. Ind. Math., **13**, No. 3, 472–479 (2019).
12. Yomdin Y., “Semialgebraic complexity of functions,” J. Complexity, **21**, 111–148 (2005).

13. Farcot E. and Gouzé J.-L., “Periodic solutions of piecewise affine gene network models with non uniform decay rates: the case of a negative feedback loop,” *Acta Biotheor.*, **57**, No. 4, 429–455 (2009).
14. Llibre J., Novaes D. D., and Texeira M. A., “Maximum number of limit cycles for certain piecewise linear dynamical systems,” *Nonlinear Dyn.*, **82**, No. 3, 1159–1175 (2015).
15. Minushkina L. S., “Phase portraits of a block-linear dynamical system in a model for a circular gene network [in Russian],” *Mat. Zamet. SVFU*, **28**, No. 2, 34–46 (2021).
16. Golubyatnikov V. P., Akinshin A. A., Ayupova N. B., and Minushkina L. S., “Stratifications and foliations in phase portraits of gene network models,” *Vavilov J. Genetics Breeding*, **26**, No. 8, 758–764 (2022).
17. Minushkina L. S., “Periodic trajectories of nonlinear circular gene network models [in Russian],” *Vladikavk. Mat. Zhurn.*, **25**, No. 4, 80–90 (2023).
18. Golubyatnikov V. P. and Minushkina L. S., “On geometric structure of phase portraits of some piecewise linear dynamical systems,” *Tbilisi Math. J.*, **7**, special issue, 49–56 (2021).
19. Kazantsev M. V., “On some properties of the domain graphs of dynamical systems [in Russian],” *Sib. Zhurn. Ind. Mat.*, **18**, No. 4, 42–49 (2015).
20. Golubyatnikov V. P., Ayupova N. B., Bondarenko N. E., and Glubokikh A. V., “Hidden attractors and nonlocal oscillations in gene networks models,” *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.*, **39**, No. 2, 1–7 (2024).
21. Golubyatnikov V. P., “On non-uniqueness of cycles in 3D models of circular gene networks [in Russian],” *Chelyab. Fiz.-Mat. Zhurn.*, **9**, No. 1, 23–34 (2024).
22. Kirillova N. E. and Minushkina L. S., “On discretization of phase portraits of dynamical systems [in Russian],” *Izv. Altai Gos. Univ.*, **108**, No. 4, 82–85 (2019).
23. Golubyatnikov V. P. and Kalenykh A. E., “Structure of phase portraits of nonlinear dynamical systems,” *J. Math. Sci.*, **215**, No. 4, 475–473 (2016).
24. Dudkowski D., Jafari S., Kapitaniak T., Kuznetsov N. V., Leonov G. A., and Prasad A., “Hidden attractors in dynamical systems,” *Phys. Rep.*, **637**, 1–50 (2016).
25. Likhoshvai V. A., Kogai V. V., Fadeev S. I., and Khlebodarova T. M., “On the chaos in gene networks,” *J. Bioinform. Comput. Biol.*, **11**, article No. 1340009 (2013).
26. Chumakov G. A. and Chumakova N. A., “Homoclinic cycles in a gene network model [in Russian],” *Mat. Zamet. SVFU*, **21**, No. 4, 97–106 (2014).
27. Kirillova N. E., “On invariant surfaces in gene network model,” *J. Appl. Ind. Math.*, **14**, No. 4, 666–671 (2020).

Submitted March 20, 2024

Revised April 21, 2024

Accepted May 30, 2024

Vladimir P. Golubyatnikov, Elizaveta A. Sitnyakovskaya
Novosibirsk State University,
1 Pirogov Street, 630090 Novosibirsk, Russia
v.golubiatnikov1@gsu.ru, e.sitnyakovskaya@g.nsu.ru

ЗАДАЧА О РАВНОВЕСИИ
ПЛАСТИНЫ КИРХГОФА — ЛЯВА,
КОНТАКТИРУЮЩЕЙ С ПРЕПЯТСТВИЕМ,
ИМЕЮЩИМ УГЛОВУЮ ФОРМУ
**Н. П. Лазарев, Г. М. Семенова,
А. С. Никулин**

Аннотация. Исследована нелинейная математическая модель равновесия пластины, контактирующей с препятствием специальной формы. Пластина может контактировать с препятствием, состоящим из двух частей, одна из них задается наклонными образующими, а другая ограничивает пластину со стороны боковой грани. При этом пластина может контактировать как по боковой грани, так и в точках кривой, соответствующей пересечению лицевой (внешней) поверхности пластины и боковой цилиндрической поверхности пластины. Данное обстоятельство приводит к тому, что ставятся граничные условия в виде трех неравенств, выполненных на одной и той же кривой. Наряду с моделью упругой пластины рассмотрен также случай неоднородной пластины, в которой жесткое включение находится вблизи контактной границы. Доказана однозначная разрешимость задач для обеих моделей. При условии дополнительной гладкости решений указанных задач найдены условия оптимальности в виде граничных условий, а также соответствующие эквивалентные дифференциальные постановки.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-2-14-30

Ключевые слова: вариационная задача, наклонное препятствие, пластина, условие непроникания, контактная задача.

Введение

Контактные задачи механики упругих тел с условиями типа неравенств в рамках известного подхода Синьорини предполагают, что в исходном состоянии тело соприкасается с препятствием либо с другим деформируемым телом на заданной части внешней границы [1–5]. В случае пластин моделей Тимошенко или Кирхгофа — Лява математическая модель строится по отношению к срединной плоскости [5, 6]. При этом для описания контактного взаимодействия на боковой цилиндрической поверхности, ограничивающей пластину, ставятся условия не на поверхности, а на кривой, лежащей в срединной плоскости [7–9]. Представляют интерес также нелинейные задачи, в которых рассматривается

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда проект № 24-21-00081.

контакт по лицевой поверхности пластины, в частности, для моделей механического взаимодействия с тонкими упругими балками [10–13], для моделей контакта двух упругих пластин [14–16]. В недавних работах были предложены математические модели для пластин, где описывается контакт с наклонными препятствиями [17], контакт по боковой грани и лицевой поверхности пластины [8].

В настоящей работе предлагается новая математическая модель, в которой есть контактное взаимодействие с препятствием, имеющим угловую форму. При этом для описания контакта с препятствием по боковой поверхности пластины за основу берутся более общие предположения по сравнению с [18], а именно, считаем, что ширина контактной зоны не обязана совпадать с толщиной пластины. Установлены следующие вопросы математической корректности для исследуемой модели: существование и единственность решения задачи. Также при условии дополнительной гладкости решения найдены условия оптимальности в виде граничных условий, а также эквивалентная дифференциальная постановка.

1. Вариационная постановка

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ , которая состоит из двух кривых: $\Gamma = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\gamma}$, $\Gamma_0 \cap \gamma = \emptyset$, $\text{meas}(\Gamma_0) > 0$, $\text{meas}(\gamma) > 0$. Обозначим через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ внешнюю нормаль к границе Γ области Ω . Для простоты предположим, что пластина имеет равномерную толщину $2h$. Зададим трехмерное декартово пространство $\{x_1, x_2, z\}$ так, чтобы пластина соответствовала множеству $\{\Omega\} \times [-h, h] \subset \mathbb{R}^3$. При этом лицевые поверхности пластины в исходном состоянии задаются множествами $\{\Omega\} \times \{-h\}$, $\{\Omega\} \times \{h\}$, для определенности будем изучать задачу о возможном контакте с нижней лицевой поверхностью, т. е. заданной множеством $\{\Omega\} \times \{-h\}$.

Обозначим через $\chi = \chi(x) = (W(x), w(x))$ вектор перемещений точек срединной поверхности ($x \in \Omega$), через $W = (w_1, w_2)$ — перемещения в плоскости $\{x_1, x_2\}$, а через w — перемещения вдоль оси z (прогибы). Тензоры деформаций и напряжений обозначаются через $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(W)$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(W)$ соответственно [5],

$$\varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_j}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right), \quad \sigma_{ij}(W) = a_{ijrl} \varepsilon_{rl}(W), \quad i, j = 1, 2,$$

где $\{a_{ijrl}\}$ — заданный тензор упругости, который предполагается симметричным и положительно определенным:

$$a_{ijrl} = a_{rlij} = a_{jirl}, \quad i, j, r, l = 1, 2, \quad a_{ijrl} \in L^\infty(\Omega), \\ a_{ijrl} \xi_{ij} \xi_{rl} \geq c_0 |\xi|^2 \quad \forall \xi, \quad \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \quad c_0 = \text{const} > 0.$$

Здесь и далее используется соглашение о суммировании по повторяющимся индексам. Введем изгибающие моменты следующими формулами [5]:

$$m_{ij}(w) = -d_{ijrl} w_{,rl}, \quad i, j = 1, 2, \quad \left(w_{,rl} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_r \partial x_l} \right)$$

где тензор $\{d_{ijrl}\}$ имеет те же характеристики симметрии, ограниченности и положительной определенности, что и тензор $\{a_{ijrl}\}$. Пусть $B(\cdot, \cdot)$ — билинейная форма, определенная равенством

$$B(\chi, \bar{\chi}) = \int_{\Omega} \{ \sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(\bar{W}) - m_{ij}(w) \bar{w}_{,ij} \} dx,$$

где $\chi = (W, w)$, $\bar{\chi} = (\bar{W}, \bar{w})$.

Введем следующие пространства Соболева:

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ на } \Gamma_0\},$$

$$H_{\Gamma_0}^2(\Omega) = \left\{ v \in H^2(\Omega) \mid v = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Gamma_0 \right\},$$

$$H(\Omega) = H_{\Gamma_0}^1(\Omega)^2 \times H_{\Gamma_0}^2(\Omega), \quad \|\chi\| = \|\chi\|_{H(\Omega)} = (\|W\|_{H^1(\Omega)^2}^2 + \|w\|_{H^2(\Omega)}^2)^{1/2}.$$

Функционал потенциальной энергии пластины Кирхгофа — Лява имеет следующий вид:

$$\Pi(\chi) = \frac{1}{2} B(\chi, \chi) - \int_{\Omega} F \chi dx, \quad \chi = (W, w),$$

где вектор $F = (f_1, f_2, f_3) \in L_2(\Omega)^3$ описывает внешние силы [5]. Заметим, что следующее неравенство, обеспечивающее коэрцитивность функционала $\Pi(\chi)$:

$$B(\chi, \chi) \geq c \|\chi\|^2 \quad \forall \chi \in H(\Omega), \tag{1}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от χ , имеет место для билинейной формы $B(\cdot, \cdot)$ [5].

Перейдем к описанию недеформируемого препятствия и ограничений на перемещения для точек пластины, которые соприкасаются с контактной поверхностью препятствия в исходном состоянии. Предположим, что для каждого сечения плоскостью, параллельной оси Oz , проходящей через точку $(x_1, x_2, 0) \in \gamma \times \{0\}$ вдоль нормали $(\nu_1(x), \nu_2(x), 0)$ к боковой цилиндрической поверхности, имеем конфигурацию взаимного расположения края пластины и препятствия в исходном состоянии, изображенную на рис. 1.

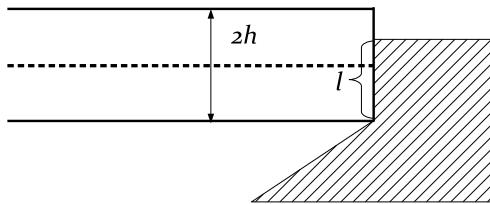


Рис. 1. Сечение пластины плоскостью, перпендикулярной срединной плоскости пластины.

Опишем сначала ограничения на перемещения в точках боковой цилиндрической поверхности. Считаем, что пластина в исходном состоянии соприкасается боковой цилиндрической поверхностью с препятствием по полосе шириной $l = l(x)$, где $0 < l(x) \leq 2h$, $x \in \gamma$. Зададим границу этой части углового препятствия следующим множеством:

$$\{(x_1, x_2, z) \mid (x_1, x_2) \in \gamma, z \in [-h, -h + l]\}.$$

Очевидно, что при $l \equiv 2h$ препятствие соприкасается по всей ширине боковой поверхности пластины. Рассуждая по аналогии с [5, 27], имеем следующее граничное условие на γ , описывающее непроникание точек пластины в препятствие. Потребуем, чтобы было выполнено следующее соотношение:

$$W\nu - z \frac{\partial w}{\partial \nu} \leq 0 \text{ на } \gamma, \quad z \in [-h, -h + l], \quad (2)$$

где $W\nu = w_i\nu_i$, $\frac{\partial w}{\partial \nu} = \frac{\partial w}{\partial x_i}\nu_i$. Неравенство (2) в силу линейности может быть эквивалентно представлено в виде системы двух неравенств

$$W\nu + h \frac{\partial w}{\partial \nu} \leq 0, \quad W\nu + (h - l) \frac{\partial w}{\partial \nu} \leq 0 \text{ на } \gamma. \quad (3)$$

Предположим, что граница второй части препятствия задана по отношению к каждой точке $x \in \gamma$ прямолинейными образующими. Здесь мы применяем подход, предложенный в [17], где рассматривалась вариационная задача о контакте пластины с наклонным препятствием. Чтобы описать образующие препятствия, рассмотрим фиксированную точку $(x_1, x_2, 0) \in \gamma \times \{0\}$ и проходящее через эту точку сечение плоскостью, параллельной оси Oz и вектору $(\nu_1(x), \nu_2(x), 0)$, где $x = (x_1, x_2)$. Будем считать, что пересечение второй части препятствия с указанным сечением проходит по прямолинейному отрезку (или прямой), лежащему на прямой с коэффициентом наклона $k > 0$ (в плоскости, построенной осью Oz' и осью, построенной вектором $(\nu_1(x), \nu_2(x), 0)$, рис. 2.).

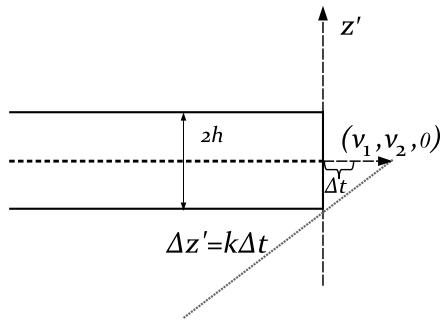


Рис. 2. Сечение в точке $x \in \gamma$.

Считая, что для каждого $x \in \gamma$ имеется своя образующая (прямая или прямолинейный отрезок), имеем функцию $k(x)$, $x \in \gamma$. В частности, когда

γ представляет собой прямолинейный отрезок, а $k(x) \equiv k_0$ — постоянная, в качестве препятствия выступает часть наклонной плоскости. В общем случае с точки зрения разрешимости соответствующей задачи достаточно потребовать, чтобы $k(x) \in L^\infty(\gamma)$. При этом соответствующее условие непроникания можно выразить в следующем виде:

$$k \left(W\nu + h \frac{\partial w}{\partial \nu} \right) \leq w \quad \text{на } \gamma. \quad (4)$$

Таким образом, с учетом ограничений на перемещения множество допустимых перемещений запишем в виде

$$K = \{\chi = (W, w) \in H(\Omega) \mid \chi \text{ удовлетворяет (3), (4)}\}.$$

Сформулируем вариационную постановку задачи равновесия. Требуется найти функцию $\xi = (U, u) \in K$ такую, что

$$\Pi(\xi) = \inf_{\chi \in K} \Pi(\chi). \quad (5)$$

Теорема 1. Задача (5) имеет единственное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим известную теорему Вейерштрасса [4], чтобы показать существование решения задачи минимизации [5]. Функционал энергии является коэрцитивным и слабо полунепрерывным снизу на $H(\Omega)$ [5]. Легко видеть, что множество K выпукло. Можно доказать замкнутость множества K так же, как в [27]. Указанные свойства множества допустимых перемещений обеспечивают слабую замкнутость множества K . Следовательно, для задачи минимизации (5) все условия теоремы Вейерштрасса выполняются как для функционала $\Pi(\chi)$, так и для множества допустимых функций K . Это означает, что задача (5) имеет хотя бы одно решение. Функционал выпуклый и дифференцируемый, а множество K является выпуклым, как следствие, задача (5) эквивалентна следующему вариационному неравенству:

$$\xi \in K, \quad B(\xi, \chi - \xi) \geq \int_{\Omega} F(\chi - \xi) dx \quad \forall \chi \in K. \quad (6)$$

Предполагая, что существуют два разных решения ξ_1 и ξ_2 , выпишем из вариационного неравенства (6) два следующих неравенства:

$$B(\xi_1, \xi_2 - \xi_1) \geq \int_{\Omega} F(\xi_2 - \xi_1) dx, \quad B(\xi_2, \xi_1 - \xi_2) \geq \int_{\Omega} F(\xi_1 - \xi_2) dx.$$

Складывая их, получим, что

$$B(\xi_2 - \xi_1, \xi_2 - \xi_1) \leq 0.$$

Это означает с учетом (1), что $\xi_1 = \xi_2$, а также влечет за собой единственность решения задачи (5).

2. Дифференциальная постановка

Пусть $l(x)$ — непрерывная функция, заданная на γ , удовлетворяющая свойству $0 < l(x) \leq 2h$ для всех $x \in \gamma$. Предположим, что решение $\xi = (U, u) \in K$ является достаточно гладкой функцией. Цель данного раздела — найти из вариационного неравенства уравнения равновесия в области Ω и условия оптимальности, выполненные на γ . Будем применять следующие формулы Грина для функций $\chi = (W, w) \in K$ [5]:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(U) \varepsilon_{ij}(W) dx = - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}(U) w_i dx + \int_{\Gamma} (\sigma_{\nu}(U) W \nu + \sigma_{\tau}(U) W_{\tau}) d\Gamma, \quad (7)$$

$$\int_{\Omega} m_{ij}(u) w_{,ij} dx = \int_{\Omega} m_{ij,ij}(u) w dx + \int_{\Gamma} \left(t^{\nu}(u) w - m_{\nu}(u) \frac{\partial w}{\partial \nu} \right) d\Gamma, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{\nu}(U) &= \sigma_{ij}(U) \nu_i \nu_j, & m_{\nu}(u) &= -m_{ij} \nu_i \nu_j, \\ \sigma_{\tau}(U) &= (\sigma_{\tau}^1(U), \sigma_{\tau}^2(U)) = (\sigma_{1j}(U) \nu_j, \sigma_{2j}(U) \nu_j) - \sigma_{\nu}(U) \nu, \\ t^{\nu}(u) &= -m_{ij,k} \tau_k \tau_j \nu_i - m_{ij,j} \nu_i, & \tau &= (-\nu_2, \nu_1), \\ W \nu &= w_i \nu_i, & W_{\tau} &= (W_{\tau}^1, W_{\tau}^2), & w_i &= (W \nu) \nu_i + W_{\tau}^i, & i &= 1, 2. \end{aligned}$$

Наряду с вариационной формулировкой задачи (5) можно иметь дело с соответствующей дифференциальной постановкой. А именно, справедлива

Теорема 2. Предположим, что решение $\xi = (U, u)$ задачи (5) достаточно гладкое. Тогда вариационная задача (5) эквивалентна следующей краевой задаче:

$$-m_{ij,ij}(u) = f_3 \quad \text{в } \Omega, \quad (9)$$

$$-\sigma_{ij,j}(U) = f_i \quad \text{в } \Omega, \quad i = 1, 2, \quad (10)$$

$$\sigma_{\nu}(U) - t^{\nu}(u) k \leq 0, \quad -(h-l)(\sigma_{\nu}(U) - t^{\nu}(u) k) + (m_{\nu}(u) - t^{\nu}(u) k h) \leq 0 \text{ на } \gamma, \quad (11)$$

$$t^{\nu}(u) \leq 0, \quad \sigma_{\tau}(U) = (0, 0), \quad U \nu + h \frac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0, \quad U \nu + (h-l) \frac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0 \text{ на } \gamma, \quad (12)$$

$$\sigma_{\nu}(U) - \frac{1}{h} m_{\nu}(u) \leq 0, \quad \sigma_{\nu}(U) U \nu - t^{\nu}(u) u + m_{\nu}(u) \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \gamma, \quad (13)$$

$$U = (0, 0), \quad u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Gamma_0. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя $\bar{\chi} = \xi \pm \tilde{\chi}$, где $\tilde{\chi} \in C_0^{\infty}(\Omega)^3$, в качестве тестовой функции в (6), получаем следующее соотношение:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij}(U) \varepsilon_{ij}(\widetilde{W}) - m_{ij}(u) \widetilde{w}_{,ij}) dx = \int_{\Omega} F \widetilde{\chi} dx,$$

которое означает, что следующие уравнения равновесия:

$$-m_{ij,ij}(u) = f_3 \quad \text{в } \Omega, \quad (15)$$

$$-\sigma_{ij,j}(U) = f_i \quad \text{в } \Omega, \quad i = 1, 2, \quad (16)$$

выполнены в смысле распределений. Используя формулы Грина (7), (8) применительно к (6) с учетом (15), (16), можно показать, что

$$\int_{\Gamma} \left(\sigma_{\nu}(U)(W - U)\nu + \sigma_{\tau}(U)(W_{\tau} - U_{\tau}) - t^{\nu}(u)(w - u) + m_{\nu}(u) \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} - \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \right) d\Gamma \geq 0 \quad (17)$$

$\forall \chi = (W, w) \in K.$

Поскольку K является выпуклым конусом в $H(\Omega)$, можно подставить $\chi = \lambda \xi$ с неотрицательным $\lambda \geq 0$ в (17) и получить

$$\int_{\Gamma} \left(\sigma_{\nu}(U)U\nu + \sigma_{\tau}(U)U_{\tau} - t^{\nu}(u)u + m_{\nu}(u) \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\Gamma = 0, \quad (18)$$

$$\left(\sigma_{\nu}(U)W\nu + \sigma_{\tau}(U)W_{\tau} - t^{\nu}(u)w + m_{\nu}(u) \frac{\partial w}{\partial \nu} \right) d\Gamma \geq 0 \quad (19)$$

для всех $\chi = (W, w) \in K$. Предположим, что $\chi = (W, w) \in K$ и $\chi = (0, 0, 0)$ на Γ_0 . В этом случае можно переписать (19) следующим образом:

$$\int_{\gamma} \left(\sigma_{\nu}(U)W\nu + \sigma_{\tau}(U)W_{\tau} - t^{\nu}(u)w + m_{\nu}(u) \frac{\partial w}{\partial \nu} \right) d\Gamma \geq 0 \quad \forall \chi = (W, w) \in K. \quad (20)$$

Поскольку значение W_{τ} не входит в неравенства (3), (4) вследствие произвольности W_{τ} на γ , из (20) заключаем, что

$$\sigma_{\tau}(U) = (0, 0) \quad \text{на } \gamma.$$

Следовательно, (20) можно выразить в следующем виде:

$$\int_{\gamma} \left(\sigma_{\nu}(U)W\nu - t^{\nu}(u)w + m_{\nu}(u) \frac{\partial w}{\partial \nu} \right) d\Gamma \geq 0 \quad \forall \chi = (W, w) \in K. \quad (21)$$

Выбрав в (21) пробные функции $\chi = (W, w)$ такие, что $W = (0, 0)$, $w \geq 0$, $\frac{\partial w}{\partial \nu} = 0$ на γ , получим

$$t^{\nu}(u) \leq 0 \quad \text{на } \gamma.$$

Теперь рассмотрим (21) с тестовыми функциями, удовлетворяющими свойствам $w = 0$, $W\nu + h \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0$ и $\frac{\partial w}{\partial \nu} \geq 0$ на γ . В результате находим

$$\int_{\gamma} \left(\sigma_{\nu}(U)W\nu - \frac{1}{h}m_{\nu}(u)W\nu \right) d\Gamma \geq 0.$$

Отсюда, поскольку значение $W\nu \leq 0$ может быть произвольным (неотрицательным), получаем

$$\sigma_{\nu}(U) - \frac{1}{h}m_{\nu}(u) \leq 0 \quad \text{на } \gamma.$$

Далее, подставляя в (21) тестовые функции, удовлетворяющие

$$W\nu + (h - l)\frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, \quad w = k(W\nu + h\frac{\partial w}{\partial \nu}), \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} \leq 0 \text{ на } \gamma,$$

установим, что

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma} \left(W\nu(\sigma_{\nu}(U) - t^{\nu}(u)k) + (m_{\nu}(u) - t^{\nu}(u)kh)\frac{\partial w}{\partial \nu} \right) d\Gamma \\ &= \int_{\gamma} \left(-(h - l)\frac{\partial w}{\partial \nu}(\sigma_{\nu}(U) - t^{\nu}(u)k) + (m_{\nu}(u) - t^{\nu}(u)kh)\frac{\partial w}{\partial \nu} \right) d\Gamma \geq 0. \end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$-(h - l)(\sigma_{\nu}(U) - t^{\nu}(u)k) + (m_{\nu}(u) - t^{\nu}(u)kh) \leq 0 \quad \text{на } \gamma.$$

Подставляя далее в (21) $\chi = (W, w)$ такие, что $w = kW\nu \leq 0$, $\frac{\partial w}{\partial \nu} = 0$, нетрудно установить, что справедливо неравенство

$$\int_{\gamma} (\sigma_{\nu}(U)W\nu - t^{\nu}(u)kW\nu) d\Gamma \geq 0,$$

которое означает, что

$$\sigma_{\nu}(U) - t^{\nu}(u)k \leq 0 \quad \text{на } \gamma.$$

Заметим, что в силу $\xi = (U, u) \in K$ и следующих вышеустановленных неравенств:

$$t^{\nu}(u) \leq 0, \quad \sigma_{\nu}(U) - t^{\nu}(u)k \leq 0, \quad \sigma_{\nu}(U) - \frac{1}{h}m_{\nu}(u) \leq 0 \text{ на } \gamma,$$

$$-(h - l)(\sigma_{\nu}(U) - t^{\nu}(u)k) + (m_{\nu}(u) - t^{\nu}(u)kh) \leq 0 \text{ на } \gamma,$$

выражение $\sigma_{\nu}(U)W\nu - t^{\nu}(u)w + m_{\nu}(u)\frac{\partial w}{\partial \nu}$ неотрицательно на γ . Действительно, для случая $\frac{\partial w}{\partial \nu} \geq 0$ на некотором подмножестве $\gamma^+ \subset \gamma$ с положительной мерой $\text{meas}(\gamma^+) > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{\nu}(U)W\nu - t^{\nu}(u)w + m_{\nu}(u)\frac{\partial w}{\partial \nu} &= (\sigma_{\nu}(U) - t^{\nu}(u)k) \left(W\nu + h\frac{\partial w}{\partial \nu} \right) \\ &\quad - t^{\nu}(u) \left(w - k \left(W\nu + h\frac{\partial w}{\partial \nu} \right) \right) + (m_{\nu}(u) - h\sigma_{\nu}(U))\frac{\partial w}{\partial \nu} \geq 0 \quad \text{на } \gamma^+; \end{aligned}$$

также и для другого случая, когда $\frac{\partial w}{\partial \nu} \leq 0$ на некотором подмножестве $\gamma^- \subset \gamma$ с положительной мерой $\text{meas}(\gamma^-) > 0$, следующее выражение неотрицательно:

$$\begin{aligned} & \sigma_{\nu}(U)W\nu - t^{\nu}(u)w + m_{\nu}(u)\frac{\partial w}{\partial \nu} \\ &= (\sigma_{\nu}(U) - t^{\nu}(u)k) \left(W\nu + (h - l)\frac{\partial w}{\partial \nu} \right) - t^{\nu}(u) \left(w - k \left(W\nu + h\frac{\partial w}{\partial \nu} \right) \right) \\ &\quad + (-(h - l)(\sigma_{\nu}(U) - t^{\nu}(u)k) + (m_{\nu}(u) - t^{\nu}(u)kh))\frac{\partial w}{\partial \nu} \geq 0 \quad \text{на } \gamma^-. \end{aligned}$$

Остается заметить, что $\gamma^+ \cup \gamma^- = \gamma$. Обратимся теперь к тождеству (18). Поскольку подынтегральное выражение в интеграле (18) является неотрицательным п.в. на γ , можно легко сделать вывод о том, что имеет место равенство

$$\sigma_\nu(U)U\nu - t^\nu(u)u + m_\nu(u)\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \gamma.$$

Обратно, чтобы получить из соотношений (9)–(14) вариационное неравенство (6), умножим (9) на $(u - w)$ и каждое из равенств (10) на соответствующую разность $(u_i - w_i)$, $i = 1, 2$, где $W = (w_1, w_2)$, w такие, что $\chi = (W, w) \in K$. После интегрирования по области Ω и суммирования находим, что

$$-\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j}(U)(U - W) + m_{ij,ij}(u)(w - u)) dx = \int_{\Omega} F(\chi - \xi) dx.$$

Затем с помощью формул Грина выявляем, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\sigma_{ij}(U) \varepsilon_{ij}(W - U) dx - m_{ij}(u)(w - u)_{,ij}) dx \\ & - \int_{\Gamma} (\sigma_\nu(U)(W\nu - U\nu) + \sigma_\tau(U)(W_\tau - U_\tau)) d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma} \left(t^\nu(u)(w - u) - m_\nu(u) \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} - \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \right) d\Gamma = \int_{\Omega} F(\chi - \xi) dx. \end{aligned} \quad (22)$$

Принимая во внимание равенства $\sigma_\tau(U) = (0, 0)$ на γ , $\xi = \chi = (0, 0, 0)$ на Γ_0 , можем представить интеграл по Γ в левой части (22) следующим образом:

$$I = \int_{\gamma} \left(t^\nu(u)(w - u) - m_\nu(u) \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} - \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) - \sigma_\nu(U)(W\nu - U\nu) \right) d\Gamma. \quad (23)$$

Ввиду равенства в (13) и $\sigma_\tau(U) = (0, 0)$, выполненных на γ , перепишем (23) в виде следующего интеграла:

$$I = \int_{\gamma} \left(t^\nu(u)w - m_\nu(u) \frac{\partial w}{\partial \nu} - \sigma_\nu(U)W\nu \right) d\Gamma. \quad (24)$$

Можно показать, что подынтегральное выражение в (24) неотрицательно в силу включения $\chi \in K$ и соотношений (11)–(14). Остается заметить, что ввиду $I \leq 0$, неравенство (22) влечет за собой выполнение вариационного неравенства (6).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Полученные соотношения на границе можно трактовать как условия оптимальности, поскольку решение задачи минимизации должно удовлетворять найденным граничным условиям. Полученные краевые условия отражают соотношения между физическими величинами в рамках настоящей модели, в этом смысле они представляют интерес с точки зрения приложений, также данные соотношения могут быть использованы в случае поиска достаточно гладкого решения или применения его свойств.

3. Задача о жестком включении, примыкающем к границе

Предположим теперь, что пластина имеет жесткое объемное включение, выходящее на внешнюю границу. Задачи для пластин с жесткими включениями исследованы во многих работах, например, случай пластины Кирхгофа — Лява с отслоившимся включением исследован в [19], модель контакта двух пластин с жесткими включениями изучена в [20]. Анализ зависимости функционала энергии от возмущения геометрии отслоившегося жесткого включения проведен в [21, 22]. Возможность предельного перехода по параметру ширины жесткого включения с отслоением обоснована в статье [23]. Модель гиперупругого тела с жестким включением исследована в [24]. Численная реализация задач в рамках моделей упругих тел с жесткими включениями дана, например, в [25, 26].

В рамках настоящего раздела предположим, что для границы γ возможного контакта выполняется, что $\gamma \neq \Gamma \setminus \Gamma_0$, кроме того, будем считать, что граница состоит из шести кривых: $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5$, $\text{meas}(\Gamma_i) > 0$, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Пусть односвязная подобласть $\omega \subset \Omega$ такова, что границы $\partial\omega$, $\partial(\Omega \setminus \overline{\omega})$ соответствующих областей ω , $\Omega \setminus \overline{\omega}$ являются достаточно гладкими. Пусть введенные выше кривые соответствуют следующим множествам: $\Gamma_2 = (\partial\omega \cap \Gamma) \setminus \gamma$, $\Gamma_3 = \partial\omega \cap \gamma$, $\Gamma_4 = \gamma \setminus \partial\omega$ (рис. 3). В этом случае дополнительно к условиям (3), (4), описывающим контактное взаимодействие на γ , учитываются соотношения, характеризующие перемещения в точках подобласти ω . Используем следующее пространство, с помощью которого будем задавать свойства объемного жесткого включения:

$$\begin{aligned} R(\omega) = \{&\zeta(x) = (\rho(x), l(x)) \mid \rho(x) = \\ &= b(x_2, -x_1) + (c_1, c_2); \quad l(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2, \quad x = (x_1, x_2) \in \omega\}, \end{aligned}$$

где $b, c_1, c_2, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ [19, 27].

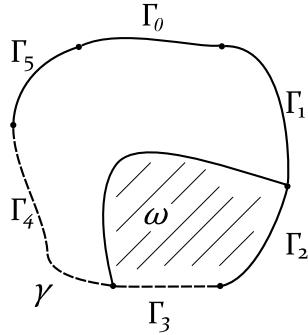


Рис. 3. Срединная плоскость пластины (кривая γ обозначена пунктирной линией).

Задача минимизации в данном случае примет следующий вид:

$$\Pi(\xi) = \inf_{\chi \in K_\omega} \Pi(\chi), \quad (25)$$

где множество допустимых функций имеет вид

$$K_\omega = \{\chi = (W, w) \in H(\Omega) \mid \chi \text{ удовлетворяет (2), (3), } \chi|_\omega = \zeta, \zeta \in R(\omega)\}.$$

Выпуклость множества K_ω очевидна, замкнутость устанавливается так же, как и в работе [23]. Аналогично доказательству теоремы 1 можно показать, что задача имеет единственное решение ξ , которое удовлетворяет вариационному неравенству

$$\xi \in K_\omega, \quad B(\xi, \chi - \xi) \geq \int_{\Omega} F(\chi - \xi) dx \quad \forall \chi \in K_\omega. \quad (26)$$

Предположим, что решение достаточно гладкое. Подставляя в (26) $\chi = \xi + \phi$, $\phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \bar{\omega})^3$, находим

$$-m_{ij,ij}(u) = f_3 \quad \text{в } \Omega \setminus \bar{\omega}, \quad (27)$$

$$-\sigma_{ij,j}(U) = f_i \quad \text{в } \Omega \setminus \bar{\omega}, \quad i = 1, 2, \quad (28)$$

Подставляя в (26) тестовые функции $\chi = 2\xi$, $\chi = 0$, находим, что

$$\int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} (\sigma_{ij}(U) \varepsilon_{ij}(U) - m_{ij}(u) u_{,ij}) dx = \int_{\Omega} F \xi dx, \quad (29)$$

$$\int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} (\sigma_{ij}(U) \varepsilon_{ij}(W) - m_{ij}(u) w_{,ij}) dx \geq \int_{\Omega} F \chi dx \quad \forall \chi \in K_\omega. \quad (30)$$

Анализируя (30) с тестовыми функциями, обращающимися в нуль в области ω , можно получить, что на части границы Γ_4 выполняются соотношения вида (11)–(13):

$$\begin{aligned} \sigma_\nu(U) - t^\nu(u)k &\leq 0, \quad -(h-l)(\sigma_\nu(U) - t^\nu(u)k) + (m_\nu(u) - t^\nu(u)kh) \leq 0 \text{ на } \Gamma_4, \\ t^\nu(u) &\leq 0, \quad \sigma_\tau(U) = (0, 0), \quad U\nu + h \frac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0, \quad U\nu + (h-l) \frac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0 \text{ на } \Gamma_4, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\sigma_\nu(U) - \frac{1}{h}m_\nu(u) \leq 0, \quad \sigma_\nu(U)U\nu - t^\nu(u)u + m_\nu(u) \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Gamma_4. \quad (32)$$

На частях границы Γ_1 и Γ_5 , которые свободны от нагрузок и не соприкасаются с препятствием, следуя [28], можно получить соотношения

$$\sigma_\tau(U) = (0, 0), \quad \sigma_\nu(U) = t^\nu(u) = m_\nu(u) = 0 \text{ на } \Gamma_1 \cup \Gamma_5. \quad (33)$$

Далее рассмотрим (20) с тестовой функцией вида $\chi = \xi + \tilde{\chi}$, $\tilde{\chi} = (\tilde{W}, \tilde{w}) \in K_\omega$, такой, что $\tilde{w}(x) = \tilde{l}(x)$, $\tilde{W}(x) = \tilde{\rho}(x)$, $x \in \omega$. Получим

$$\int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} (\sigma_{ij}(U) \varepsilon_{ij}(\tilde{W}) - m_{ij}(u) \tilde{w}_{,ij}) dx \geq \int_{\Omega} F \tilde{\chi} dx \quad \forall \tilde{\chi} \in K_\omega. \quad (34)$$

Применим (34) и формулы Грина (7), (8) в предположении гладкости области $\Omega \setminus \bar{\omega}$, для которых обозначения нормали и касательной оставим такими же, как

для кривой Γ . Заметим также, что значения следов на границе $\partial(\Omega \setminus \bar{\omega})$ будут браться по отношению к области $\Omega \setminus \bar{\omega}$. При этом, используя равенства $\tilde{\chi} = (0, 0, 0)$ на Γ_0 , (33), с учетом (27), (28) устанавливаем, что имеет место формула

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_4} \left(\sigma_\nu(U) \widetilde{W} \nu - t^\nu(u) \widetilde{w} + m_\nu(u) \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial \nu} \right) d\Gamma \\ & + \int_{\partial\omega \setminus (\Gamma_2 \cup \Gamma_3)} \left(\sigma_\nu(U) \widetilde{\rho} \nu + \sigma_\tau(U) \widetilde{\rho}_\tau - t^\nu(u) \widetilde{l} + m_\nu(u) \frac{\partial \widetilde{l}}{\partial \nu} \right) d\Gamma \geq \int_{\omega} F \widetilde{\zeta} dx \quad (35) \end{aligned}$$

для всех $\tilde{\chi} = (\widetilde{W}, \widetilde{w}) \in K_\omega$, $\tilde{\chi}(x) = \tilde{\zeta}(x)$, $x \in \omega$, где $\tilde{\zeta} = (\tilde{\rho}, \tilde{l}) \in R(\omega)$. Подставляя в (35) $\chi = (0, 0, 0)$, $\chi = 2\xi$, ввиду соотношений (31), (32) находим

$$\int_{\partial\omega \setminus (\Gamma_2 \cup \Gamma_3)} \left(\sigma_\nu(U) \rho_0 \nu + \sigma_\tau(U) \rho_0 \tau - t^\nu(u) l_0 + m_\nu(u) \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\Gamma = \int_{\omega} F \zeta_0 dx, \quad (36)$$

где $\xi(x) = \zeta_0(x) = (\rho_0(x), l_0(x))$, $x \in \omega$. По аналогии с предыдущими рассуждениями, можно доказать, что имеет место

Теорема 3. В рамках предположения о том, что решение $\xi = (U, u)$ достаточно гладкое, вариационная задача (25) эквивалентна следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} -m_{ij,ij}(u) &= f_3 \quad \text{в } \Omega \setminus \bar{\omega}, \\ -\sigma_{ij,j}(U) &= f_i \quad \text{в } \Omega \setminus \bar{\omega}, \quad i = 1, 2, \\ \sigma_\nu(U) - t^\nu(u) k &\leq 0, \quad -(h - l)(\sigma_\nu(U) - t^\nu(u) k) + (m_\nu(u) - t^\nu(u) k h) \leq 0 \text{ на } \Gamma_4, \\ t^\nu(u) &\leq 0, \quad \sigma_\tau(U) = (0, 0), \quad U \nu + h \frac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0, \quad U \nu + (h - l) \frac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0 \text{ на } \Gamma_4, \\ \sigma_\nu(U) - \frac{1}{h} m_\nu(u) &\leq 0, \quad \sigma_\nu(U) U \nu - t^\nu(u) u + m_\nu(u) \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Gamma_4, \\ U &= (0, 0), \quad u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Gamma_0, \\ \sigma_\tau(U) &= (0, 0), \quad \sigma_\nu(U) = t^\nu(u) = m_\nu(u) = 0 \text{ на } \Gamma_1 \cup \Gamma_5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_4} \left(\sigma_\nu(U) \widetilde{W} \nu - t^\nu(u) \widetilde{w} + m_\nu(u) \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial \nu} \right) d\Gamma \\ & + \int_{\partial\omega \setminus (\Gamma_2 \cup \Gamma_3)} \left(\sigma_\nu(U) \widetilde{\rho} \nu + \sigma_\tau(U) \widetilde{\rho}_\tau - t^\nu(u) \widetilde{l} + m_\nu(u) \frac{\partial \widetilde{l}}{\partial \nu} \right) d\Gamma \geq \int_{\omega} F \widetilde{\zeta} dx, \end{aligned}$$

для всех $\tilde{\chi} = (\widetilde{W}, \widetilde{w}) \in K_\omega$, $\tilde{\chi}(x)|_\omega = \tilde{\zeta}(x)$, $x \in \omega$, где $\tilde{\zeta} = (\tilde{\rho}, \tilde{l}) \in R(\omega)$,

$$\int_{\partial\omega \setminus (\Gamma_2 \cup \Gamma_3)} \left(\sigma_\nu(U) \rho_0 \nu + \sigma_\tau(U) \rho_0 \tau - t^\nu(u) l_0 + m_\nu(u) \frac{\partial l_0}{\partial \nu} \right) d\Gamma = \int_{\omega} F \zeta_0 dx,$$

где $\xi(x)|_\omega = \zeta_0(x)$, $x \in \omega$.

Заключение

В работе предложена математическая модель равновесия пластины, контактирующей с препятствием специальной формы. Препятствие обуславливает ограничения на перемещения в виде неравенств (3), (4) на кривой γ . Доказано, что вариационные задачи для упругой пластины (5) и для пластины с жестким включением (25) имеют единственные решения. При дополнительной регулярности решений в рамках теоремы 2 и теоремы 3 найдены эквивалентные дифференциальные постановки для исходных вариационных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fichera G. Boundary value problems of elasticity with unilateral constraints // Handbook der Physik. Band 6a/2. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1972.
2. Dal Maso G., Paderni G. Variational inequalities for the biharmonic operator with variable obstacles // Ann. Mat. Pura Appl. 1988. V. 153. P. 203–227.
3. Kovtunenko V. A., Itou H., Khludnev A. M., Rudoy E. M. Non-smooth variational problems and applications // Philos. Trans. Royal Soc. A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2022. V. 380. 20210364.
4. Байокки К., Капело А. Вариационные и квазивариационные неравенства. М.: Наука, 1988.
5. Khludnev A. M., Kovtunenko V. A. Analysis of cracks in solids. Southampton: WIT-Press, 2000.
6. Пелех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев: Наук. думка, 1973.
7. Lazarev N. P., Itou H., Neustroeva N. V. Fictitious domain method for an equilibrium problem of the Timoshenko-type plate with a crack crossing the external boundary at zero angle // Jpn. J. Ind. Appl. Math. 2016. V. 33, N 1. P. 63–80.
8. Lazarev N. P., Nikiforov D. Y., Romanova N. A. Equilibrium problem for a Timoshenko plate contacting by the side and face surfaces // Chelyabinsk Phys. Math. J. 2023. V. 8, N 4. P. 528–541.
9. Lazarev N. P. Fictitious domain method in the equilibrium problem for a Timoshenko-type plate contacting with a rigid obstacle // J. Math. Sci. 2014. V. 203, N 4. P. 527–539.
10. Rudoi E. M., Khludnev A. M. Unilateral contact of a plate with a thin elastic obstacle // J. Appl. Ind. Math. 2010. V. 4. P. 389–398.
11. Furtsev A. I. The unilateral contact problem for a Timoshenko plate and a thin elastic obstacle // Sib. Electron. Math. Rep. 2020. V. 17. P. 364–379.
12. Furtsev A. I. On contact between a thin obstacle and a plate containing a thin inclusion // J. Math. Sci. 2019. V. 237, N 4. P. 530–545.
13. Popova T. S. A contact problem for a viscoelastic plate and an elastic beam // J. Appl. Industr. Math. 2016. V. 10, N 3. P. 404–416.
14. Pyatkina E. V. A contact of two elastic plates connected along a thin rigid inclusion // Sib. Electron. Math. Rep. 2020. V. 17. P. 1797–1815.
15. Khludnev A. M. The contact between two plates, one of which contains a crack // J. Appl. Mathematics and Mechanics. 1997. V. 61, N 5. P. 851–862.
16. Khludnev A. M. On unilateral contact of two plates aligned at an angle to each other // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2008. V. 49. P. 553–567.
17. Lazarev N. P., Semenova G. M., Fedotov E. D. An equilibrium problem for a Kirchhoff–Love plate, contacting an obstacle by top and bottom edges // Lobachevskii J. Math. 2023. V. 44, N 2. P. 614–619.
18. Nikolaeva N. A. Method of fictitious domains for Signorini's problem in Kirchhoff–Love theory of plates // J. Math. Sci. 2017. V. 221, N 6. P. 872–882.
19. Khludnev A. M. Problem of a crack on the boundary of a rigid inclusion in an elastic plate // Mech. Solids. 2010. V. 45, N 5. P. 733–742.

20. Rotanova T. A. Contact problem for plates with rigid inclusions intersecting the boundary // Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh. 2011. N 3. P. 99–107.
21. Rudoy E., Shcherbakov V. First-order shape derivative of the energy for elastic plates with rigid inclusions and interfacial cracks // Appl. Mathematics and Optimization. 2021. V. 84, N 3. P. 2775–2802.
22. Rudoy E. M. Shape derivative of the energy functional in a problem for a thin rigid inclusion in an elastic body // Z. Angew. Math. Phys. 2015. V. 66. P. 1923–1937.
23. Lazarev N. P., Semenova G. M., Romanova N. A. On a limiting passage as the thickness of a rigid inclusions in an equilibrium problem for a Kirchhoff–Love plate with a crack // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2021. V. 14, N 1. P. 28–41.
24. Furtsev A. I. Problem of equilibrium for hyperelastic body with rigid inclusion and non-penetrating crack // Sib. Electron. Math. Rep. 2024. V. 21, N 1. P. 17–40.
25. Rudoy E. M., Shcherbakov V. V. Domain decomposition method for a membrane with a delaminated thin rigid inclusion // Sib. Electron. Math. Rep. 2016. V. 13, P. 395–410.
26. Namm R. V., Tsoy G. I. Solution of a contact elasticity problem with a rigid inclusion // Comput. Mathematics Math. Phys. 2019. V. 59. P. 659–666.
27. Хлуднев А. М. Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
28. Khladnev A. M. Contact problems for elastic bodies with rigid inclusions // Quart. Appl. Math. 2012. V. 70. P. 269–284.

Поступила в редакцию 22 марта 2024 г.

После доработки 25 мая 2024 г.

Принята к публикации 30 мая 2024 г.

Лазарев Нюргун Петрович
Северо-Восточный федеральный университет,
Научно-исследовательский институт математики,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
nyurgun.lazarev@yandex.ru

Семенова Галина Михайловна
Северо-Восточный федеральный университет,
Институт математики и информатики,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
sgm.08@yandex.ru

Никулин Авксентий Сергеевич
Северо-Восточный федеральный университет,
Институт математики и информатики,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
nikulin.avxentii@gmail.com

EQUILIBRIUM PROBLEM FOR
A KIRCHHOFF—LOVE PLATE CONTACTING
WITH AN INCLINED AND LATERAL OBSTACLES

N. P. Lazarev, G. M. Semenova,
and A. S. Nikulin

Abstract: A nonlinear mathematical model of the equilibrium of a plate contacting with two obstacles is investigated. The first non-deformable obstacle is defined by inclined generatrices, and the second one restricts the plate displacements on the side face. In this case, the plate can contact both along the side edge and at the points of the curve corresponding to the intersection of the front surface of the plate and the side cylindrical surface of the plate. These circumstances lead to the fact that boundary conditions are imposed in the form of three inequalities fulfilled on the same curve. Along with the model of a homogeneous plate, the case of a nonhomogeneous plate in which a rigid inclusion is located near the contact boundary is also considered. The unique solvability of the problems for both models is proven. Under the condition of additional smoothness of the solutions to these problems, optimality conditions are found in the form of boundary conditions, as well as the corresponding equivalent differential formulations.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-2-14-30

Keywords: variational problem, inclined obstacle, plate, non-penetration condition, contact problem.

REFERENCES

1. Fichera G., Boundary Value Problems of Elasticity with Unilateral Constraints, Handbook der Physik, Band 6a/2, Springer, Berlin; Heidelberg; New York (1972).
2. Dal Maso G. and Paderni G., “Variational inequalities for the biharmonic operator with variable obstacles,” Ann. Mat. Pura Appl., **153**, 203–227 (1988).
3. Kovtunenko V. A., Itou H., Khudnev A. M., and Rudoy E. M., “Non-smooth variational problems and applications,” Philos. Trans. R. Soc. Lond., Ser. A, Math. Phys. Eng. Sci., **380**, article ID 20210364 (2022).
4. Baiocchi C. and Capello A., Variational and Quasivariational Inequalities: Application to Free Boundary Problems, Wiley, New York (1984).
5. Khudnev A. M. and Kovtunenko V. A., Analysis of Cracks in Solids, WIT-Press, Southampton (2000).
6. Pelekh B. L., Theory of Shells with Finite Shear Modulus [in Russian], Nauk. Dumka, Kiev (1973).
7. Lazarev N. P., Itou H., and Neustroeva N. V., “Fictitious domain method for an equilibrium problem of the Timoshenko-type plate with a crack crossing the external boundary at zero angle,” Japan J. Ind. Appl. Math., **33**, No. 1, 63–80 (2016).
8. Lazarev N. P., Nikiforov D. Y., and Romanova N. A., “Equilibrium problem for a Timoshenko plate contacting by the side and face surfaces,” Chelyab. Fiz.-Mat. Zhurn., **8**, No. 4, 528–541 (2023).

9. Lazarev N. P., “Fictitious domain method in the equilibrium problem for a Timoshenko-type plate contacting with a rigid obstacle,” *J. Math. Sci.*, **203**, No. 4, 527–539 (2014).
10. Rudoi E. M. and Khladnev A. M., “Unilateral contact of a plate with a thin elastic obstacle,” *J. Appl. Ind. Math.*, **4**, 389–398 (2010).
11. Furtsev A. I., “The unilateral contact problem for a Timoshenko plate and a thin elastic obstacle,” *Sib. Electron. Math. Rep.*, **17**, 364–379 (2020).
12. Furtsev A. I., “On contact between a thin obstacle and a plate containing a thin inclusion,” *J. Math. Sci.*, **237**, No. 4, 530–545 (2019).
13. Popova T. S., “A contact problem for a viscoelastic plate and an elastic beam,” *J. Appl. Ind. Math.*, **10**, No. 3, 404–416 (2016).
14. Pyatkina E. V., “A Contact of two elastic plates connected along a thin rigid inclusion,” *Sib. Electron. Math. Rep.*, **17**, 1797–1815 (2020).
15. Khladnev A. M., “The contact between two plates, one of which contains a crack,” *J. Appl. Math. Mech.*, **61**, No. 5, 851–862 (1997).
16. Khladnev A. M., “On unilateral contact of two plates aligned at an angle to each other,” *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **49**, 553–567 (2008).
17. Lazarev N. P., Semenova G. M., and Fedotov E. D., “An equilibrium problem for a Kirchhoff–Love plate, contacting an obstacle by top and bottom edges,” *Lobachevskii J. Math.*, **44**, No. 2, 614–619 (2023).
18. Nikolaeva N. A., “Method of fictitious domains for Signorini’s problem in Kirchhoff–Love theory of plates,” *J. Math. Sci.*, **221**, No. 6, 872–882 (2017).
19. Khladnev A. M., “Problem of a crack on the boundary of a rigid inclusion in an elastic plate,” *Mech. Solids*, **45**, No. 5, 733–742 (2010).
20. Rotanova T. A., “Contact problem for plates with rigid inclusions intersecting the boundary,” *Vestn. Tomsk. Gos. Univ., Mat., Mekh.*, No. 3, 99–107 (2011).
21. Rudoy E. and Shcherbakov V., “First-order shape derivative of the energy for elastic plates with rigid inclusions and interfacial cracks,” *Appl. Math. Optimization*, **84**, No. 3, 2775–2802 (2021).
22. Rudoy E. M., “Shape derivative of the energy functional in a problem for a thin rigid inclusion in an elastic body,” *Z. Angew. Math. Phys.*, **66**, 1923–1937 (2015).
23. Lazarev N. P., Semenova G. M., and Romanova N. A., “On a limiting passage as the thickness of a rigid inclusions in an equilibrium problem for a Kirchhoff–Love plate with a crack,” *J. Sib. Fed. Univ., Math. Phys.*, **14**, No. 1, 28–41 (2021).
24. Furtsev A. I., “Problem of equilibrium for hyperelastic body with rigid inclusion and non-penetrating crack,” *Sib. Electron. Math. Rep.*, **21**, No. 1, 17–40 (2024).
25. Rudoy E. M. and Shcherbakov V. V., “Domain decomposition method for a membrane with a delaminated thin rigid inclusion,” *Sib. Electron. Math. Rep.*, **13**, No. 1, 395–410 (2016).
26. Namm R. V. and Tsyt G. I., “Solution of a contact elasticity problem with a rigid inclusion,” *Comput. Math. Math. Phys.*, **59**, 659–666 (2019).
27. Khladnev A. M., *Elasticity Problems in Nonsmooth Domains* [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2010).
28. Khladnev A. M., “Contact problems for elastic bodies with rigid inclusions,” *Q. Appl. Math.*,

70, 269–284 (2012).

Submitted March 22, 2024

Revised May 25, 2024

Accepted May 30, 2024

Nyurgun P. Lazarev
Ammosov North-Eastern Federal University,
Scientific Research Institute of Mathematics,
58 Belinsky Street, Yakutsk 677000, Russia
nyurgunlazarev@yandex.ru

Galina M. Semenova
Institute of Mathematics and Informatics,
Ammosov North-Eastern Federal University,
58 Belinsky Street, Yakutsk 677000, Russia
sgm.08@yandex.ru

Avksentii S. Nikulin
Institute of Mathematics and Informatics,
Ammosov North-Eastern Federal University,
58 Belinsky Street, Yakutsk 677000, Russia
nikulin.avxentii@gmail.com

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ
КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ
ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ
ПАРАМЕТРОВ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

С. Г. Пятков, А. А. Потапков

Аннотация. Рассматривается вопрос о регулярной разрешимости в пространствах Соболева параболических обратных коэффициентных задач в слоистых средах с условиями сопряжения типа неидеального контакта. Решение имеет все обобщенные производные, входящие в уравнение, суммируемые с некоторой степенью. В качестве условий определения рассматриваются значения решения в отдельных точках, лежащих внутри области определения. Доказательство основано на получаемых априорных оценках и теореме о неподвижной точке.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-2-31-45

Ключевые слова: параболическое уравнение, обратная задача, начально-краевая задача, существование, единственность.

Введение

Рассматривается вопрос об определении вместе с решением краевой задачи правой части специального вида и коэффициентов в параболической системе. Пусть G — область в \mathbb{R}^n с границей Γ и $Q = (0, T) \times G$. Считаем, что область G разделена на два открытых множества G^+ и G^- , $\overline{G^-} \subset G$, $\overline{G^+} \cup \overline{G^-} = \overline{G}$, $G^+ \cap G^- = \emptyset$, положим $\Gamma_0 = \partial G^+ \cap \partial G^-$, $S_0 = (0, T) \times \Gamma_0$, $S = (0, T) \times \Gamma$. Система уравнений имеет вид

$$Mu = u_t + Au = f(t, x), \quad (t, x) \in Q = G \times (0, T), \quad (1)$$

где u — вектор длины h , $G \in \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей Γ . Функция f и эллиптический оператор второго порядка A в G^\pm представимы в виде

$$\begin{aligned} -A(t, x, D) &= A_0(t, x, D_x) + \sum_{i=1}^r q_i(t) A_i(t, x, D_x), \\ f &= f_0(t, x) + \sum_{i=r+1}^s f_i(t, x) q_i(t), \end{aligned}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда и правительства Ханты-Мансийского автономного округа-ЮГРЫ (грант № 22-11-20031).

$$A_i = \sum_{k,l=1}^n a_{kl}^i(t, x) \partial_{x_k x_l} + \sum_{k=1}^n a_k^i(t, x) \partial_{x_k} + a_0^i.$$

a_{ij}^j, a_i^j, a_0^j — $h \times h$ -матрицы-функции, $h \in \mathbb{N}$. Уравнение (1) дополняется начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0} = u_0, \quad Bu|_S = g(t, x), \quad (2)$$

где $Bu = u$ или $Bu = \sum_{i=1}^n \gamma_i(t, x) u_{x_i} + \sigma u$, и условиями сопряжения

$$\frac{\partial u^+}{\partial N}(t, x) - \alpha_1(t, x) u^+(t, x) - \alpha_2(t, x) u^-(t, x) = g^+(t, x), \quad (t, x) \in S_0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u^-}{\partial N}(t, x) - \beta_1(t, x) u^+(t, x) - \beta_2(t, x) u^-(t, x) = g^-(t, x), \quad (t, x) \in S_0, \quad (4)$$

где

$$\frac{\partial u^\pm}{\partial N}(x_0, t) = \lim_{x \in G^\pm, x \rightarrow x_0 \in \Gamma_0} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} \nu_j,$$

ν — внешняя единичная нормаль к ∂G^- и

$$u^\pm = \lim_{x \in G^\pm, x \rightarrow x_0 \in \Gamma_0} u(t, x).$$

Условия переопределения имеют вид

$$\langle u(t, b_j), e_j \rangle = \psi_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (5)$$

где $b_j \in G$ и e_j — некоторые векторы единичной длины и скобки $\langle ., . \rangle$ обозначают скалярное произведение в \mathbb{R}^n . Неизвестными в задаче (1)–(5) являются решение u и функции $q_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, s$). Мы не считаем, что Γ или Γ_0 состоят из одной компоненты связности. Вообще говоря, их может быть много и на каждой из них есть свои граничные условия или соответственно свои условия сопряжения. В процессе доказательств мы не оговариваем это дополнительно, чтобы не усложнять изложение. Условия сопряжения (3), (4) обобщают известные в теории тепломассопереноса условия неидеального контакта на границе двух сред

$$\left. \frac{\partial u^+}{\partial N} \right|_{S_0} = \left. \frac{\partial u^-}{\partial N} \right|_{S_0}, \quad \left. \frac{\partial u^+}{\partial N} \right|_{S_0} = \alpha(u^+ - u^-). \quad (6)$$

Если $\alpha \rightarrow \infty$, то получим стандартную постановку задачи дифракции (см. [1, § 13, гл. 3]), когда условия имеют вид

$$u^+ = u^-, \quad \left. \frac{\partial u^+}{\partial N} \right|_{S_0} = \left. \frac{\partial u^-}{\partial N} \right|_{S_0}.$$

Проблемы вида (1)–(5) возникают при описании процессов тепломассопереноса, диффузионных процессов, процессов фильтрации, в экологии и во многих других областях. В частности, такие задачи возникают при описании температурных режимов почв северных территорий (см. [2]). Теоретических результатов, посвященных задачам (1)–(5), довольно мало или нет совсем, в отличие

от случая одной среды. Опишем полученные результаты в последнем случае. Отметим монографию [3], посвященную обратным параболическим задачам, и монографии [4–6], где описаны основные постановки, в том числе и в параболическом случае. Стоит отметить работы [7, 8], где в случае $n = 1$ определяется теплопроводность как функция времени и получены теоремы существования и единственности, а в качестве данных берутся значения решения в отдельных точках, возможно являющихся граничными. Теплопроводность, не зависящая от одной из пространственных переменных, и часть коэффициентов по данным Коши на боковой поверхности цилиндра и интегральным данным определяются в [9, 10]. Получены теоремы существования и единственности решений и оценки устойчивости. В монографии [4] (см. также, например, результаты работы [11] и др.) получены теоремы существования и единственности решений, в том числе и старших коэффициентов, не зависящих от некоторых пространственных переменных с данными переопределения на сечениях пространственной области плоскостями. В силу специфики метода все коэффициенты также не зависят от части пространственных переменных. Более полные результаты получены в цикле работ [12–15], где показана корректность обратных задач об определении коэффициентов в случае задания решения на пространственных многообразиях или в отдельных точках, как и в нашем случае. Обратные задачи с точечными данными исследовались в работах А. И. Прилепко и его учеников, и ряд интересных задач описан в [3]. Аналогичные результаты, но при несколько других условиях на данные и в других пространствах, получены в [16, 17]. Определение коэффициента теплопроводности $\lambda(T)$ по значениям решения на некоторой кривой, лежащей на границе, исследуется в работе [18], и получены теорема единственности и оценки устойчивости. Численному решению задачи (1)–(5) посвящено огромное количество работ, и подавляющее большинство численных методов основаны на сведении задачи к задаче оптимального управления и минимизации соответствующего целевого функционала [19–21] (см. результаты также в [22, 23]).

Наша работа близка к работам [24, 25] по постановке и результатам. В первой из них рассматривалась обратная задача об определении старших коэффициентов в параболическом уравнении в случае обычной начально-краевой задачи (не задачи сопряжения), а во второй — задача сопряжения с условиями сопряжения типа дифракции. В качестве граничных данных в обеих работах использовалось условие Дирихле и условие

$$\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma u|_S = g$$

(т. е. граничное условие с производной по конормали). В нашей работе рассмотрена система параболических уравнений с краевыми условиями с косой производной и Дирихле и условиями сопряжения типа неидеального контакта. В качестве условий переопределения, в отличие от других работ, мы задаем значения некоторых линейных комбинаций координат вектор-решения в заданных точках.

Опишем содержание работы. В разд. 1 описаны условия на данные задачи и приведены вспомогательные результаты. В разд. 2 приведена теорема существования и единственности решений задачи (1)–(5).

1. Определения и вспомогательные утверждения

Пусть E — банахово пространство. Через $L_p(G; E)$ (G — область в \mathbb{R}^n) обозначается пространство измеримых функций, определенных на G со значениями в E , с конечной нормой $\|\|u(x)\|_E\|_{L_p(G)}$ [26]. Обозначения для пространств Соболева $W_p^s(G; E)$, $W_p^s(Q; E)$ и т. д. стандартные (см. [27, 28]). Если $E = \mathbb{R}$ или $E = \mathbb{R}^n$, то последнее пространство обозначаем просто через $W_p^s(Q)$. Определения пространств Гёльдера $C^{\alpha, \beta}(\overline{Q})$, $C^{\alpha, \beta}(\overline{S})$ могут быть найдены, например, в [1]. Под нормой вектора понимаем сумму норм координат. Для данного интервала $J = (0, T)$ положим $W_p^{s,r}(Q) = W_p^s(J; L_p(G)) \cap L_p(J; W_p^r(G))$. Соответственно $W_p^{s,r}(S) = W_p^s(J; L_p(\Gamma)) \cap L_p(J; W_p^r(\Gamma))$. Все рассматриваемые пространства и коэффициенты уравнения (1) считаем вещественными. Далее считаем, что параметр $p > n + 2$ зафиксирован и $\Gamma, \Gamma_0 \in C^2$. Определение границы класса C^s , $s \geq 1$, можно найти в [1, гл. 1]. Пусть $B_\delta(b)$ — шар радиуса δ с центром в точке b . Зафиксируем параметр $\delta > 0$ такой, что $\overline{B_\delta(b_i)} \cap (\Gamma_0 \cup \Gamma) = \emptyset$ для всех i , $\overline{B_\delta(b_i)} \cap \overline{B_\delta(b_j)} = \emptyset$ для $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, s$. Если необходимо, его всегда можно уменьшить. Введем обозначения: $Q^\tau = (0, \tau) \times G$, $G_\delta = \cup_i B_\delta(b_i)$, $S_0^\tau = (0, \tau) \times \Gamma_0$, $Q^\pm = (0, T) \times G^\pm$, $Q_\tau^\pm = (0, \tau) \times G_\delta^\pm$, $S^\tau = (0, \tau) \times \Gamma$.

Условия согласования и гладкости данных могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} u_0|_{G^\pm} &\in W_p^{2-2/p}(G^\pm), \quad B(0, x, D)u_0|_\Gamma = g(0, x), \\ g &\in W_p^{k_0, 2k_0}(S), \quad g^\pm \in W_p^{s_0, 2s_0}(S_0), \\ \frac{\partial u_0^+}{\partial N}(0, x) - \alpha_1(0, x)u_0^+(x) - \alpha_2(0, x)u_0^-(x) &= g^+(0, x), \quad x \in \Gamma_0, \\ \frac{\partial u_0^-}{\partial N}(0, x) - \beta_1(0, x)u_0^+(x) - \beta_2(0, x)u_0^-(x) &= g^-(0, x), \quad x \in \Gamma_0, \end{aligned} \tag{7}$$

где $k_0 = s_1 = 1 - 1/2p$ в случае $Bu = u$ и $k_0 = s_0 = 1/2 - 1/2p$ в противном случае,

$$u_0(x) \in W_p^{3-2/p}(G_\delta), \quad f_0 \in L_p(0, T; W_p^1(G_\delta)). \tag{8}$$

Ниже будут встречаться включения вида $f \in L_p(0, T; W_p^1(G_\delta))$ или аналогичные, где соответствующее множество G_δ состоит из нескольких компонент связности (в данном случае $B_\delta(b_j)$). По определению это означает, что $f|_{B_\delta(b_j)} \in L_p(0, T; W_p^1(B_\delta(b_j)))$ для всех j . В качестве нормы в этом пространстве рассматриваем сумму норм по соответствующим компонентам связности. Аналогично для других множеств. Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$Mu = u_t + Lu = f_0(t, x), \quad Lu = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} + a_0 u, \tag{9}$$

и вспомогательные задачи

$$Mu^+ = f_0, \quad (t, x) \in Q^+, \quad Bu^+|_S = \varphi, \quad \left. \frac{\partial u^+}{\partial N} \right|_{S_0} = g^+, \quad u^+|_{t=0} = 0; \tag{10}$$

$$Mu^- = f_0, \quad (t, x) \in Q^-, \quad \left. \frac{\partial u^-}{\partial N} \right|_{S_0} = g^-, \quad u^-|_{t=0} = 0, \quad (11)$$

Считаем, что функции $a_{ij}|_{G^\pm}$ непрерывны в Q^\pm и допускают продолжение до непрерывных функций класса $C(\overline{Q^\pm})$. Обозначим через a_{ij}^\pm предельные значения функций $a_{ij}|_{G^\pm}$ на Γ_0 . Запишем соответствующие условия:

$$a_k \in L_p(Q), \quad a_{ij}|_{Q^\pm} \in C(\overline{Q^\pm}), \quad a_{ij}^\pm \in W_p^{s_0, 2s_0}(S_0), \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (12)$$

где $k = 0, 1, \dots, n$. Далее предположим, что

$$f_0 \in L_p(Q), \quad \alpha_k, \beta_k \in W_p^{s_0, 2s_0}(S_0), \quad \gamma_i, \sigma \in W_p^{s_0, 2s_0}(S), \quad k = 1, 2, \quad (13)$$

$$a_{ij} \in L_\infty(0, T; W_p^1(G_\delta)), \quad a_l \in L_p(0, T; W_p^1(G_\delta)), \quad l = 0, 1, \dots, n, \quad (14)$$

где $i, j = 1, \dots, n$. Мы считаем, что для вспомогательных задач (10), (11) выполнены условия параболичности и Лопатинского. Условие параболичности записывается в виде: найдется постоянная $\delta_1 > 0$ такая, что все корни p полинома

$$\det(A_0(t, x, \xi) + pE) = 0, \quad A_0(t, x, \xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j,$$

E — единичная матрица, удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re} p \leq -\delta_1 |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \forall (t, x) \in Q^\pm. \quad (15)$$

Пусть $R_0 u = u$ в случае условий Дирихле на S и

$$R_0 u = \sum_{j=1}^n \gamma_j \partial_{x_j} u$$

в противном случае. Условие Лопатинского (оно должно быть выполнено на S и S_0 для задачи (10) и на S_0 для задачи (11)) на S может быть записано в виде (см. (LS) условие [27, с. 198]): для любых $(t_0, x_0) \in S$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ таких, что $(\xi, \nu(x_0)) = 0$ ($\nu(x)$ — внешняя единичная нормаль в Γ в точке x), всех $\vec{h} \in \mathbb{C}^h$, λ таких, что $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ и $|\xi| + |\lambda| \neq 0$, система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(\lambda E + A_0(t_0, x_0, \xi + i\nu(x_0)\partial_y))v(y) = 0, \quad R_0(t_0, x_0, \xi + i\nu(x_0)\partial_y)v(0) = h \quad (16)$$

имеет единственное убывающее на бесконечности решение класса $C([0, \infty))$. Аналогично формулируется условие Лопатинского на S_0 . При этом надо учесть, что для задачи (10)

$$A_0(t, x, \xi)|_{S_0} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^+ \xi_i \xi_j$$

и для задачи (11)

$$A_0(t, x, \xi)|_{S_0} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^- \xi_i \xi_j.$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия (7), (12), (13) и для вспомогательных задач (10), (11) выполнены условия параболичности и Лопатинского. Тогда существует единственное решение $u|_{Q^\pm} \in W_p^{1,2}(Q^\pm)$ задачи (9), (2)–(4). Справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_p^{1,2}(Q^+)} + \|u\|_{W_p^{1,2}(Q^-)} &\leq c[\|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^+)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^-)} \\ &+ \|f\|_{L_p(Q)} + \|g\|_{W_p^{k_0,2k_0}(S)} + \|g^+\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)} + \|g^-\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)}]. \end{aligned} \quad (17)$$

Если $g = 0, g^\pm = 0$, то справедлива оценка

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|u\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} \leq c[\|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^+)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^-)} + \|f\|_{L_p(Q^\tau)}], \quad (18)$$

где постоянная c не зависит от $u_0, f, \tau \in (0, T]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Основное утверждение теоремы есть следствие теоремы 3 в [29]. Отметим, что мы изменили условия гладкости на коэффициенты $a_{ij}^\pm, \gamma_k, \sigma_0, \alpha_k, \beta_k$ по сравнению с теми, что присутствуют в формулировке теоремы 3 в [29], заменив условие их принадлежности классам Гёльдера условием их принадлежности классам Соболева. Замена вполне возможна, в доказательстве теоремы 3 в [29] в этом случае необходимо использовать результаты из [27, теорема 2.1], где условия на граничные операторы также задаются в терминах пространств Соболева, вместо соответствующих результатов из [1, теорема 10.4]. Второе утверждение и оценка (18) вытекают из стандартных рассуждений, совпадающих, например, с теми, которые были использованы в работе [17, теорема 2; 16, теорема 1].

Теорема 2. Пусть выполнены условия (7), (8), (12)–(14) и для вспомогательных задач (10), (11) выполнены условия параболичности и Лопатинского. Тогда решение $u|_{Q^\pm} \in W_p^{1,2}(Q^\pm)$ задачи (9), (2)–(4) обладает свойством $u_t \in L_p(0, T; W_p^1(G_{\delta_1}))$, $u \in L_p(0, T; W_p^3(G_{\delta_1}))$ для всех $\delta_1 < \delta$. Если $g, g^\pm = 0$, то справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|u\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} + \|u\|_{L_p(0, T; W_p^3(G_{\delta_1}))} + \|u_t\|_{L_p(0, T; W_p^1(G_{\delta_1}))} \\ \leq c[\|u_0\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(G^+)} + \|u_0\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(G^-)} + \|u_0\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(G^+)} + \|u_0\|_{W_p^{3-\frac{2}{p}}(G_\delta)} \\ + \|f\|_{L_p(Q^\tau)} + \|f\|_{L_p(0, \tau; W_p^1(G_\delta))}], \end{aligned} \quad (19)$$

где постоянная c не зависит от $\tau \in (0, T]$ и $\delta_1 < \delta$ фиксировано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение о дополнительной гладкости решений и оценке получается с использованием теоремы 1 и повторяет доказательство теоремы 1 в [16] (см. также теорему 4, п. 3, § 2, гл. 4 в [30]). Утверждение также вытекает из [24, теорема 1].

Обозначим левую часть неравенства в (19) через $\|u\|_{H_{\delta_1}^\tau}$, а $\|f\|_{L_p(Q^\tau)} + \|f\|_{L_p(0, \tau; W_p^1(G_\delta))}$ — через $\|f\|_{W_\delta^\tau}$. Соответствующие банаховы пространства обозначаются через $H_{\delta_1}^\tau$ и W_δ^τ соответственно. Пространство $H_{\delta_1}^\tau$ состоит из функций $u \in L_p(Q^\tau)$ таких, что $u|_{G^\pm} \in W_p^{1,2}(Q_\tau^\pm)$, $u \in L_p(0, T; W_p^3(G_{\delta_1}))$, $u_t \in L_p(0, T; W_p^1(G_{\delta_1}))$, u удовлетворяет однородным начальным и граничным условиям и условиям сопряжения.

2. Основные результаты

Будем считать, что

$$\begin{aligned} \psi_a &\in C^1([0, T]), \quad \psi_a(0) = \langle u_0(b_a), e_a \rangle, \\ f_m &\in L_p(Q) \cap L_p(0, T; W_p^1(G_\delta)), \quad a_{ij}^k \in L_\infty(0, T; W_p^1(G_\delta)) \\ a_{ij}^k|_{Q^\pm} &\in C(\overline{Q^\pm}), \quad a_l^k \in L_p(Q), \quad (a_{ij}^k)^\pm \in W_p^{s_0, 2s_0}(S_0); \\ a_l^k &\in L_p(0, T; W_p^1(G_\delta)), \quad a_{ij}^k(t, b_a), a_l^k(t, b_a), f_m(t, b_a) \in C([0, T]), \end{aligned} \quad (20)$$

для $i, j = 1, 2, \dots, n$, $l = 0, 1, \dots, n$, $k = 0, 1, \dots, r$, $a = 1, \dots, s$, $m = 0, r + 1, \dots, s$. Ввиду (8) следы $f_m(t, b_p), a_l^k(t, b_j)$ определены и $f_m(t, b_p), a_l^k(t, b_j) \in L_p(0, T)$; более того, $f_m(t, x), a_l^k(t, x) \in C(\overline{G_\delta}; L_p(0, T))$ (после, может быть, изменения на множестве меры 0) (см. [31, § 2, 3, 4, соотношения (3.1)–(3.9), следствие 4.3]).

Рассмотрим матрицу B_0 размера $s \times s$ со строками

$$\begin{aligned} \langle A_1(0, b_j, D)u_0(b_j), e_j \rangle, \dots, \langle A_r(0, b_j, D)u_0(b_j), e_j \rangle, \\ \langle f_{r+1}(0, b_j), e_j \rangle, \dots, \langle f_s(0, b_j), e_j \rangle, \quad j \leq s. \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы

$$\det B_0 \neq 0. \quad (21)$$

Пусть u, \vec{q} — решение задачи (1)–(5), где u принадлежит классу, описанному в теореме 2, а $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_s) \in C([0, T])$. Полагая $t = 0$, $x = b_j$ в (1), придем к системе уравнений

$$B_0 \vec{q}_0 = \vec{g}_0, \quad \vec{q}_0 = (q_{01}, \dots, q_{0s})^T, \quad q_{0i} = q_i(0), \quad (22)$$

$$\vec{g}_0 = ((\psi_{1t} - \langle A_0 u_0 + f_0, e_1 \rangle)(0, b_1), \dots, (\psi_{st} - \langle A_0 u_0 + f_0, e_s \rangle)(0, b_s))^T.$$

В силу (21) система (22) имеет единственное решение \vec{q}_0 . Пусть

$$a_{pl} = \sum_{i=1}^r a_{pl}^i q_{0i}, \quad a_k = \sum_{i=1}^r a_k^i q_{0i} \quad p, l = 1, \dots, n, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Определим оператор

$$A^0 = A_0 + \sum_{p,l=1}^n a_{pl} \partial_{x_p x_l}^2 + \sum_{p=1}^n a_p \partial_{x_p} + a_0.$$

Пусть также $\mu_i = q_i - q_{0i}$, $S(\vec{\mu}) = -A^0 - A^1(\vec{\mu})$. Задача (1)–(4) перепишется в виде

$$u_t + S(\vec{\mu})u = f, \quad u|_{t=0} = u_0, \quad Bu|_\Gamma = g, \quad A^1(\mu) = \sum_{i=1}^r \mu_i A_i, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^+}{\partial N}(t, x) - \alpha_1(t, x)u^+(t, x) - \alpha_2(t, x)u^-(x) &= g^+(t, x), \quad x \in \Gamma_0, \\ \frac{\partial u^-}{\partial N}(t, x) - \beta_1(x)u^+(t, x) - \beta_2(x)u^-(x) &= g^-(t, x), \quad x \in \Gamma_0. \end{aligned} \quad (24)$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия (7), (8), (13), (20), (21) и для вспомогательных задач (10), (11), где $L = -A^0$, выполнены условия параболичности и Лопатинского. Тогда найдется число $\tau_0 \in (0, T]$ такое, что на $(0, \tau_0)$ существует единственное решение $(u, q_1, q_2, \dots, q_s)$ задачи (1)–(5) такое, что

$$u|_{Q^\pm} \in W_p^{1,2}(Q_{\tau_0}^\pm), \quad u \in L_p(0, \tau_0; W_p^3(G_{\delta_1})), \quad u_t \in L_p(0, \tau_0; W_p^1(G_{\delta_1}))$$

для всех $\delta_1 \in (0, \delta)$, $q_j \in C([0, \tau_0])$, $j = 1, 2, \dots, s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\vec{q} = (q_1, \dots, q_s)^T$. Найдем решение Φ задачи (23), (24), где $\vec{\mu} = 0$, вместо функции f возьмем функцию

$$f = f_0 + \sum_{i=r+1}^s f_i(t, x)q_{0i},$$

а в качестве функций g , u_0 , g^\pm — наши данные из (2)–(4). В силу теорем 1, 2 существует решение задачи (23), (24) такое, что

$$\Phi|_{Q^\pm} \in W_p^{1,2}(Q^\pm), \quad \Phi \in L_p(0, T; W_p^3(G_{\delta_1})), \quad \Phi_t \in L_p(0, T; W_p^1(G_{\delta_1}))$$

для всех $\delta_1 \in (0, \delta)$. После замены $u = v + \Phi$ придем к задаче

$$Lv = v_t + S(\vec{\mu})v = A^1(\vec{\mu})\Phi + \sum_{i=r+1}^s f_i(t, x)\mu_i(t) = f^1(\vec{\mu}), \quad (t, x) \in Q, \quad (25)$$

$$\frac{\partial v^+}{\partial N}(t, x) - \alpha_1(t, x)v^+(t, x) - \alpha_2(t, x)v^-(t, x) = 0, \quad (t, x) \in S_0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial v^-}{\partial N}(t, x) - \beta_1(t, x)v^+(t, x) - \beta_2(t, x)v^-(t, x) = 0, \quad (t, x) \in S_0, \quad (27)$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad Bv|_S = 0, \quad (28)$$

$$v(t, b_j) = \psi_j(t) - \langle \Phi(t, b_j), e_j \rangle = \tilde{\psi}_j, \quad i = 1, \dots, s. \quad (29)$$

Имеем $\Phi, \nabla\Phi \in W_p^{1,2}((0, T) \times B_{\delta_1}(b_j))$ для всех j . В силу теорем вложения $\Phi(t, x), \nabla\Phi \in C^{1-(n+2)/2p, 2-(n+2)/p}(\overline{(0, T) \times B_{\delta_1}(b_j)})$ (см. § 6.3 и теорему 1 (разд. «замечания», с. 424) в [32]). В частности, $D^\alpha\Phi(t, b_j) \in C([0, T])$ при $|\alpha| \leq 2$. Тогда и произведения $a_{ij}^k(t, b_j)\Phi_{x_i x_j}(t, b_j)$, $a_i^k(t, b_j)\Phi_{x_i}(t, b_j)$, $a_0^k(t, b_j)\Phi(t, b_j)$ принадлежат $C([0, T])$. Следовательно, $A^0\Phi(t, b_j) \in C([0, T])$ (после, может быть, изменения на множестве меры нуль). Имеем $f_k(t, b_j) \in C([0, T])$. Из уравнения для Φ вытекает, что $\Phi_t(t, b_j) \in C([0, T])$, т. е. $\Phi(t, b_j) \in C^1([0, T])$ для всех j . Таким образом, задача (1)–(5) сведена к эквивалентной и более простой задаче (25)–(29), которую и будем исследовать. В силу теоремы 1 для любой функции $f^1 \in L_p(Q^\tau)$ существует единственное решение $v = (\partial_t - A^0)^{-1}f^1$ уравнения $v_t - A^0v = f^1$, удовлетворяющее условиям (26)–(28) и оценке

$$\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^\pm)} + \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} \leq c\|f^1\|_{L_p(Q^\tau)}, \quad (30)$$

где постоянная c не зависит от τ . Тогда уравнение $v_t - A^0v - A^1(\vec{\mu})v = f^1$ можно переписать в виде

$$v = (\partial_t - A^0)^{-1}A^1(\vec{\mu})v + (\partial_t - A^0)^{-1}f^1. \quad (31)$$

Используя условия на операторы A_i , нетрудно получить оценку

$$\begin{aligned} & \|(\partial_t - A^0)^{-1}A^1(\vec{\mu})v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|(\partial_t - A^0)^{-1}A^1(\vec{\mu})v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} \\ & \leq c\|A^1(\vec{\mu})v\|_{L_p(Q^\tau)} \leq c_1\|\vec{\mu}\|_{C([0,\tau])}(\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)}). \end{aligned} \quad (32)$$

Фиксируем $q \in (0, 1)$ и положим $R_0 = q/c_1$. Тогда в силу теоремы о неподвижной точке при $\|\vec{\mu}\|_{C([0,\tau])} \leq R_0$ уравнение

$$v_t + S(\vec{\mu})v = v_t - A^0v - A^1(\vec{\mu})v = f^1 \quad (33)$$

имеет единственное решение такое, что $v|_{Q^\pm} \in W_p^{1,2}(Q_\tau^\pm)$, выполнены условия (26)–(28) и имеет место оценка

$$\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} \leq c_2\|f^1\|_{L_p(Q^\tau)}. \quad (34)$$

Положим $B_{R_0, \tau} = \{\vec{\mu} \in C([0, \tau]) : \|\vec{\mu}\|_{C([0, \tau])} \leq R_0\}$. Постоянная c_2 в (33) не зависит от $\mu \in B_{R_0, \tau}$ и $\tau \in (0, T]$. Пусть $f^1 \in W_\delta^\tau$. Используя теорему 2, получим, что решение задачи (33), (26)–(28) обладает свойством $v_t \in L_p(0, \tau; W_p^1(G_{\delta_1}))$, $v \in L_p(0, \tau; W_p^3(G_{\delta_1}))$ для всех $\delta_1 < \delta$ и справедлива оценка $\|v\|_{H_{\delta_1}^\tau} \leq c_3\|f^1\|_{W_\delta^\tau}$, где постоянная c_3 не зависит от $\mu \in B_{R_0, \tau}$ и $\tau \in (0, T]$. Очевидно, что, взяв $\delta_2 < \delta_1 < \delta$, эту оценку можем переписать в виде

$$\|v\|_{H_{\delta_2}^\tau} \leq c_4\|f^1\|_{W_{\delta_1}^\tau}, \quad (35)$$

где c_4 не зависит от $\mu \in B_{R_0, \tau}$ и $\tau \in (0, T]$, но зависит от выбора постоянных δ_i . Таким образом, решение v задачи (25)–(28) на интервале $(0, \tau)$ такое, что $v \in L_p(0, T; W_p^3(G_{\delta_1}))$, $v_t \in L_p(0, T; W_p^1(G_{\delta_1}))$ для всех $\delta_1 \in (0, \delta)$, существует при всех $\mu \in B_{R_0, \tau}$. Построили отображение $\vec{\mu} \rightarrow v = v(\vec{\mu})$ ($\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_s)$). Изучим его свойства. Имеем

$$v = (\partial_t + S(\vec{\mu}))^{-1}f, \quad f = \sum_{i=1}^r \mu_i A_i \Phi(t, x) + \sum_{i=r+1}^s f_i(t, x) \mu_i(t). \quad (36)$$

Фиксируем $\delta_2 < \delta_1 < \delta$. Имеем оценку (35), т. е.

$$\|v\|_{H_{\delta_2}^\tau} = \|(\partial_t + S(\vec{\mu}))^{-1}f\|_{H_{\delta_2}^\tau} \leq c_4\|f\|_{W_{\delta_1}^\tau}. \quad (37)$$

Из условий на коэффициенты имеем

$$\|f\|_{W_{\delta_1}^\tau} \leq c_3\|\vec{\mu}\|_{C([0, \tau])}, \quad (38)$$

где постоянная c_2 не зависит от τ и зависит от норм коэффициентов в Q и величин $\|f_i\|_{W_{\delta_1}^\tau}$, $\|\Phi\|_{H_{\delta_1}^\tau}$ (их можно заменить на $\|f_i\|_{W_\delta^\tau}$, $\|\Phi\|_{H_\delta^\tau}$). Считая, что $\vec{\mu}_i \in B_{R_0, \tau}$ ($i = 1, 2$), рассмотрим два решения v_1, v_2 задачи (25)–(28), отвечающие двум различным наборам $\vec{\mu}^i$ ($\vec{\mu}^i = (\mu_{1i}, \mu_{2i}, \dots, \mu_{si})$ ($i = 1, 2$)). Вычитая второе уравнение (25) из первого, получим, что разность $\omega = v_2 - v_1$, $v_i = v(\vec{\mu}^i)$, удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \omega_t + S\left(\frac{\mu^1 + \mu^2}{2}\right)\omega &= \sum_{j=1}^r (\mu_{j2}(t) - \mu_{j1}(t))A_j(t, x, D)(v_1 + v_2)/2 \\ &+ \sum_{j=1}^r (\mu_{j2}(t) - \mu_{j1}(t))A_j(t, x, D)\Phi + \sum_{j=r+1}^s f_j(t, x)(\mu_{j2}(t) - \mu_{j1}(t)). \end{aligned} \quad (39)$$

Фиксируем $\delta_2 < \delta_1 < \delta$. Имеем $(\mu_1 + \mu_2)/2 \in B_{R_0, \tau}$ и тем самым справедлива оценка (см. (37))

$$\|\omega\|_{H_{\delta_2}^\tau} \leq c \|\tilde{f}\|_{W_{\delta_1}^\tau}, \quad (40)$$

$$\tilde{f} = \sum_{j=1}^r (\mu_{j2}(t) - \mu_{j1}(t)) A_j \left(\frac{v_1 + v_2}{2} + \Phi \right) + \sum_{j=r+1}^s f_j(t, x)(\mu_{j2}(t) - \mu_{j1}(t)).$$

Из оценок (40), (38) вытекает неравенство

$$\|\omega\|_{H_{\delta_2}^\tau} \leq c \|\tilde{f}\|_{W_{\delta_1}^\tau} \leq c_4 \|\vec{\mu}_2 - \vec{\mu}_1\|_{C([0, \tau])}, \quad (41)$$

где, как и ранее, постоянная c_4 зависит от норм (как линейная функция) $\|(v_1 + v_2)/2\|_{H_{\delta_1}^\tau}$, $\|f_i\|_{H_{\delta_1}^\tau}$. Пусть $v, \vec{\mu}$ — решение задачи (25)–(29) и, таким образом, $v = v(\vec{\mu})$. Полагая $x = b_j$ в уравнении (25) с учетом того, что $v_t(t, b_j) = \tilde{\psi}'_j$, и умножая его на скалярно на e_j , получим

$$\tilde{\psi}'_j + \langle S(\vec{\mu})v(t, b_j), e_j \rangle = \sum_{i=1}^r \mu_i \langle A_i \Phi, e_j \rangle + \sum_{i=r+1}^s \mu_i \langle f_i(t, b_j), e_j \rangle. \quad (42)$$

Правую часть этого равенства можно записать в виде $B(t)\vec{\mu}$, где строки матрицы $B(t)$ записываются в виде

$$\langle A_1 \Phi, e_j \rangle, \dots, \langle A_r \Phi, e_j \rangle, \langle f_{r+1}(t, b_j), e_j \rangle, \dots, \langle f_s(t, b_j), e_j \rangle.$$

Матрица $B(0)$ совпадают с матрицей B_0 из (21) и, значит, $\det B(0) \neq 0$. Функции $f_i(t, b_j)$, $a_{kl}^i(t, b_j)$, $a_k^i(t, b_j)$ непрерывны по t в силу условий (20). Как отмечено выше, $D_x^\alpha \Phi(t, b_j) \in C([0, T])$ при $|\alpha| \leq 2$. Таким образом, все элементы матрицы B непрерывны по t и тем самым существуют $\tau_0 \leq T$ и постоянная $\delta_3 > 0$ такие, что

$$|\det B(t)| \geq \delta_3 > 0 \quad \forall t \in [0, \tau_0]. \quad (43)$$

Тогда систему (42) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \vec{\mu}(t) &= B^{-1} H(\vec{\mu})(t) = R(\vec{\mu}), \quad H(\vec{\mu}) = (\tilde{\psi}'_1 + \langle S(\vec{\mu})v(t, b_1), e_j \rangle, \\ &\quad \tilde{\psi}'_2 + \langle S(\vec{\mu})v(t, b_2), e_j \rangle, \dots, \tilde{\psi}'_s + \langle S(\vec{\mu})v(t, b_s), e_j \rangle)^T. \end{aligned} \quad (44)$$

По доказанному оператор, сопоставляющий вектор-функции $\vec{\mu}$ вектор $H(\vec{\mu})$, где v — решение задачи (25)–(28), определен для всех векторов $\vec{\mu}$ таких, что $\vec{\mu} \in B_{R_0, \tau}$ ($\tau \leq \tau_0$). Свойства отображения $\vec{\mu} \rightarrow v(\vec{\mu})$ уже исследованы. Покажем, что можно найти такое $\tau_1 \leq \tau_0$, что оператор $R(\vec{\mu}) = B^{-1} H(\vec{\mu})(t)$, $R : C([0, \tau_1]) \rightarrow C([0, \tau_1])$, определен, переводит шар B_{R_0, τ_1} в себя и является в нем сжимающим. Рассмотрим величину $\tilde{\psi}'_j(0)$. По построению (см. (22))

$$\tilde{\psi}'_j(0) = \psi'_j(0) - \langle A(0, b_j, D)u_0(b_j), e_j \rangle + \sum_{i=r+1}^s q_{0i} \langle f_i(0, b_j), e_j \rangle = 0,$$

где $j = 1, \dots, s$. Пусть $\vec{\psi} = (\tilde{\psi}'_1, \tilde{\psi}'_2, \dots, \tilde{\psi}'_s)^T$. Тогда $\vec{\psi} \in C([0, T])$, $\vec{\psi}(0) = 0$ и $B^{-1}(t)\vec{\psi} \in C([0, T])$. В этом случае найдется число $\tau_1 \leq \tau_0$ такое, что

$\|B^{-1}(t)\vec{\psi}\|_{C([0,\tau])} \leq R_0/2$ при $\tau \leq \tau_1$. Отметим, что $R(0) = B^{-1}(t)\vec{\psi}(t)$. Получим оценки, считая, что $\vec{\mu}_i \in B_{R_0,\tau}$ и $\tau \leq \tau_1$. Оценим $\|R(\vec{\mu}_1) - R(\vec{\mu}_2)\|_{C([0,\tau])}$ с $\tau \leq \tau_1$. Имеем

$$\begin{aligned} \|R(\vec{\mu}_1) - R(\vec{\mu}_2)\|_{C([0,\tau])} &\leq c_0 \left(\sum_{i=1}^s \|A_0 v_1(t, b_i) - A_0 v_2(t, b_i)\|_{C([0,\tau])} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^r \|\mu_{1k} A_k v_1(t, b_i) - \mu_{2k} A_k v_2(t, b_i)\|_{C([0,\tau])} \right). \end{aligned} \quad (45)$$

Далее используем условия на коэффициенты и вложение $W_p^\theta(G) \subset C(\overline{G})$ при $\theta > n/p$ [26, теоремы 4.6.1, 4.6.2]. Возьмем $\theta \in (n/p, 1-2/p)$ (у нас $n/p < 1-2/p$). Рассмотрим одно из последних слагаемых. Имеем

$$\begin{aligned} &\|\mu_{1k} A_k v_1(t, b_i) - \mu_{2k} A_k v_2(t, b_i)\|_{C([0,\tau])} \\ &\leq \|(\mu_{1k} - \mu_{2k})(A_k v_1(t, b_i) + A_k v_2(t, b_i))\|_{C([0,\tau])}/2 \\ &\quad + \left\| \frac{(\mu_{1k} + \mu_{2k})}{2} (A_k(v_1(t, b_i) - A_k v_2(t, b_i))) \right\|_{C([0,\tau])} \\ &\leq \|\mu_{1k} - \mu_{2k}\|_{C([0,\tau])} c_5 \sum_{|\alpha| \leq 2} \|D^\alpha(v_1(t, b_j) + v_2(t, b_j))\|_{C([0,\tau])} \\ &\quad + \|\mu_{1k} + \mu_{2k}\|_{C([0,\tau])} c_6 \sum_{|\alpha| \leq 2} \|D^\alpha v_1(t, b_j) - D^\alpha v_2(t, b_j)\|_{C([0,\tau])} \\ &\leq \|\mu_{1k} - \mu_{2k}\|_{C([0,\tau])} c_7 \|v_1(t, x) + v_2(t, x)\|_{C([0,\tau]; W_p^{2+\theta}(G_{\delta_2}))} \\ &\quad + \|\mu_{1k} + \mu_{2k}\|_{C([0,\tau])} c_8 \|v_1(t, x) - v_2(t, x)\|_{C([0,\tau]; W_p^{2+\theta}(G_{\delta_2}))}, \end{aligned} \quad (46)$$

где c_i не зависят от τ . Отметим, что $v_i \in H_{\delta_2}^\tau$. Тогда $v_i \in C([0, \tau]; W_p^{3-2/p}(G_{\delta_2}))$ и справедлива оценка

$$\|v_1 - v_2\|_{C([0, \tau]; W_p^{3-2/p}(G_{\delta_2}))} \leq c_9 \|v_1 - v_2\|_{H_{\delta_2}^\tau}. \quad (47)$$

Это есть следствие теоремы [33, теорема III 4.10.2] и теорем об интерполяции пространств Соболева. Отметим, что постоянная c здесь может быть взята не зависящей от $\tau \in (0, T]$. Последнее вытекает из того простого факта, что функции из $H_{\delta_2}^\tau$ можно продолжить нулем при $t < 0$ с сохранением класса. Используя интерполяционные неравенства [26] и (47), можем записать

$$\begin{aligned} &\|v_1(t, x) - v_2(t, x)\|_{C([0, \tau]; W_p^{2+\theta}(G_{\delta_2}))} \\ &\leq c_{10} \|v_1(t, x) - v_2(t, x)\|_{C([0, \tau]; W_p^{3-2/p}(G_{\delta_2}))}^{\theta_1} \|v_1(t, x) - v_2(t, x)\|_{C([0, \tau]; L_p(G_{\delta_2}))}^{1-\theta_1}, \end{aligned}$$

где $\theta_1 = (2 + \theta)/(3 - 2/p)$. Из формулы Ньютона — Лейбница имеем

$$\|v_1(t, x) - v_2(t, x)\|_{C([0, \tau]; L_p(G_{\delta_2}))}^{1-\theta_1} \leq \tau^{(1-\theta_1)(p-1)/p} \|v_{1t}(t, x) - v_{2t}(t, x)\|_{L_p(Q^\tau)}.$$

Окончательно ($\beta_0 = (1 - \theta_1)(p - 1)/p$)

$$\|v_1(t, x) - v_2(t, x)\|_{C([0, \tau]; W_p^{2+\theta}(G_{\delta_2}))} \leq c_{11} \tau^{\beta_0} \|v_1 - v_2\|_{H_{\delta_2}^\tau}. \quad (48)$$

Аналогично получим, что

$$\|v_1(t, x) + v_2(t, x)\|_{C([0, \tau]; W_p^{2+\theta}(G_{\delta_2}))} \leq c_{11} \tau^{\beta_0} \|v_1 + v_2\|_{H_{\delta_2}^\tau}. \quad (49)$$

Из (46), (41), (48), (49) приходим к оценке

$$\|\mu_{1k} A_k v_1(t, b_i) - \mu_{2k} A_k v_2(t, b_i)\|_{C([0, \tau])} \leq c_{12} \tau^{\beta_0} \|\vec{\mu}^1 - \vec{\mu}^2\|_{C([0, \tau])}, \quad (50)$$

где постоянная c_{12} не зависит от $\tau \leq \tau_1$. Аналогично получим

$$\|A_0 v_1(t, b_i) - A_0 v_2(t, b_i)\|_{C([0, \tau])} \leq c_{13} \tau^{\beta_0} \|\mu_{1k} - \mu_{2k}\|_{C([0, \tau])}. \quad (51)$$

Окончательно имеем оценку (см. (29))

$$\|R(\vec{\mu}_1) - R(\vec{\mu}_2)\|_{C([0, \tau])} \leq c_{15} \tau^{\beta_0} \|\mu_{1k} - \mu_{2k}\|_{C([0, \tau])}. \quad (52)$$

Выбрав $\tau_2 \leq \tau_1$ такое, что $c_{14} \tau^{\beta_0} \leq 1/2$, придем к тому, что оператор R сжимающий и переводит шар $B_{R_0, \tau}$ в себя для всех $\tau \leq \tau_2$. Применяя теорему о неподвижной точке, покажем существование решения системы (44). Положим $v = v(\vec{\mu})$. Покажем, что построенная функция удовлетворяет условиям переопределения (29). Возьмем в (25) $x = b_j$ и умножим полученное равенство скалярно на e_j . Получим систему равенств

$$\langle v_t(t, b_j), e_j \rangle + \langle S(\vec{\mu})v(t, b_j), e_j \rangle = \sum_{j=1}^r \mu_j \langle A_j \Phi(t, b_j), e_j \rangle + \sum_{j=r+1}^s \langle f_j(t, b_j), e_j \rangle \mu_j(t). \quad (53)$$

Вычитая эти равенства из (42), получим $\langle v_t(t, b_j), e_j \rangle - \tilde{\psi}'_j = 0$ для всех j , значит, выполнены условия (29). Единственность решений вытекает из оценок, приведенных при доказательстве существования решений. \square

ЗАМЕЧАНИЕ. Оценка устойчивости для решений также имеет место.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
2. Пермяков П. П. Идентификация параметров математической модели тепловлагопереноса в мерзлых грунтах. Новосибирск: Наука, 1989.
3. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker, 1999.
4. Belov Ya. Ya. Inverse problems for parabolic equations. Utrecht: VSP, 2002.
5. Isakov V. Inverse problems for partial differential equations. Berlin: Springer, 2006.
6. Kabanikhin S. I. Inverse and ill-posed problems. Theory and applications. Boston; Berlin: Walter de Gruyter, 2012.
7. Hussein M. S., Huntul M. J. Simultaneous identification of thermal conductivity and heat source in the heat equation // Iraq J. Sci. 2021. V. 62, N 6. P. 1968–1978.
8. Ivanchov M. Inverse problems for equations of parabolic type. Lviv: WNTL Publ., 2003.
9. Искендеров А. Д. Многомерные обратные задачи для линейных и квазилинейных параболических уравнений // Докл. АН СССР. 1975. Т. 225, № 5. С. 1005–1008.
10. Iskenderov A. D., Akhundov A. Ya. Inverse problem for a linear system of parabolic equations // Dokl. Math. 2009. V. 79, N 1. P. 73–75.
11. Фроленков И. В., Романенко Г. В. О решении одной обратной задачи для многомерного параболического уравнения // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 2. С. 139–146.

12. Pyatkov S. G., Samkov M. L. On some classes of coefficient inverse problems for parabolic systems of equations // Sib. Adv. Math. 2012. V. 22, N 4. P. 287–302.
13. Pyatkov S. G., Tsybikov B. N. On some classes of inverse problems for parabolic and elliptic equations // J. Evol. Equ. 2011. V. 11, N 1. P. 155–186.
14. Pyatkov S. G. On some classes of inverse problems for parabolic equations. // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2011. V. 18, N 8. P. 917–934.
15. Pyatkov S. G. On some classes of inverse problems with overdetermination data on spatial manifolds // Sib. Math. J. 2016. V. 57, N 5. P. 870–880.
16. Pyatkov S. G., Rotko V. V. On some parabolic inverse problems with the pointwise overdetermination // Sib. Adv. Math. 2020. V. 30, N 2. P. 124–142.
17. Pyatkov S. G., Rotko V. V. Inverse problems with pointwise overdetermination for some quasilinear parabolic systems // AIP Conf. Proc. 2017. V. 1907. 020008.
18. Egger H., Pietschmann, J.-F., Schlottbom M. Identification of nonlinear heat conduction laws // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2015. V. 23, N 5. P. 429–437.
19. Samarskii A. A., Vabishchevich P. N. Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics. Berlin; Boston: Walter de Gruyter, 2007.
20. Алифанов О. М., Артиухин Е. А., Ненарокомов А. В Обратные задачи в исследовании сложного теплообмена. М.: Янус-К, 2009.
21. Ozisik M. N., Orlande H. R. B. Inverse heat transfer. New York: Taylor & Francis, 2000.
22. Huntul M. J., Lesnic D. An inverse problem of finding the time-dependent thermal conductivity from boundary data // Int. Commun. Heat Mass Transfer. 2017. V. 85. P. 147–154.
23. Кабанихин С. И., Хасанов А. Х., Пененко А. В. Метод градиентного спуска для решения обратной коэффициентной задачи теплопроводности // Сиб. журн. вычисл. математики. 2008. Т. 11, № 1. С. 41–51.
24. Pyatkov S. G. Identification of thermophysical parameters in mathematical models of heat and mass transfer // J. Comput. Eng. Math. 2022. V. 9, N 2. P. 52–66.
25. Пятков С. Г., Соколов О. И. О некоторых классах коэффициентных обратных задач об определении теплофизических параметров в слоистых средах. // Мат. заметки СВФУ. 2023. Т. 30, № 2. С. 56–74.
26. Triebel H. Interpolation theory. Function spaces. Differential operators. Berlin: VEB Deutsch. Verl. Wissenschaft., 1978.
27. Denk R., Hieber M., Prüss J. Optimal L_p - L_q -estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data // Math. Z. 2007. V. 257, N 1. P. 93–224.
28. Denk R., Hieber M., Prüss J. R-boundedness, Fourier multipliers, and problems of elliptic and parabolic type // Mem. AMS. 2003. V. 166, N 788.
29. Белоногов В. А., Пятков С. Г. О разрешимости задач сопряжения с условиями типа неидеального контакта // Изв. вузов. Математика. 2020. № 7. С. 18–32.
30. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
31. Amann H. Compact embeddings of vector-valued Sobolev and Besov spaces // Glasnik Mat. 2000. V. 35. P. 161–177.
32. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
33. Amann H. Linear and quasilinear parabolic problems. Basel: Birkhäuser, 1995.

Поступила в редакцию 13 марта 2024 г.

После доработки 22 марта 2024 г.

Принята к публикации 30 мая 2024 г.

Пятков Сергей Григорьевич, Потапков Алексей Александрович
Югорский гос. университет,
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012
s_pyatkov@ugrasu.ru, a_potapkov@ugrasu.ru

ON SOME CLASSES OF COEFFICIENT INVERSE
PROBLEMS OF RECOVERING THERMOPHYSICAL
PARAMETERS IN STRATIFIED MEDIA
A. A. Potapkov and S. G. Pyatkov

Abstract: We examine the solvability questions in Sobolev spaces of parabolic inverse coefficient problems in stratified media with transmission conditions of the imperfect contact type. A solution has all generalized derivatives involved in the equation summable to some power. The overdetermination conditions are the values of a solution at some points lying in the domain. The proof relies a priori estimates and the fixed-point theorem.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-2-31-45

Keywords: parabolic equation, inverse problem, initial-boundary value problem, well-posedness, existence, uniqueness.

REFERENCES

1. Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N., Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, Nauka, Moscow (1967).
2. Permyakov P. P. Identification of Parameters in the Mathematical Model of Heat and Moisture Transfer in Frozen Soils, Nauka, Novosibirsk (1989).
3. Prilepkov A. I., Orlovsky D. G., and Vasin I. A., Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics, Marcel Dekker, New York (1999).
4. Belov Ya. Ya., Inverse Problems for Parabolic Equations, VSP, Utrecht (2002).
5. Isakov V., Inverse Problems for Partial Differential Equations, Springer, Berlin (2006).
6. Kabanikhin S. I., Inverse and Ill-Posed Problems, Theory and Applications, Walter de Gruyter, Boston; Berlin (2012).
7. Hussein M. S. and Huntul M. J., “Simultaneous identification of thermal conductivity and heat source in the heat equation,” Iraqi J. Sci., **62**, No. 6, 1968–1978 (2021).
8. Ivanchov M., Inverse Problems for Equations of Parabolic Type, WNTL Publ., Lviv (2003).
9. Iskenderov A. D., “Multidimensional inverse problems for linear and quasilinear parabolic equations [in Russian],” Dokl. Akad. Nauk, **225**, No. 5, 1005–1008 (1975).
10. Iskenderov A. D. and Akhundov A. Ya., “Inverse problem for a linear system of parabolic equations,” Dokl. Math., **79**, No. 1, 73–75 (2009).
11. Frolenkov I. V. and Romanenko G. V., “On the solution of an inverse problem for a multidimensional parabolic equation [in Russian],” Sib. Zhurn. Ind. Mat., **15**, No. 2, 139–146 (2012).
12. Pyatkov S. G. and Samkov M. L., “On some classes of coefficient inverse problems for parabolic systems of equations,” Sib. Adv. Math., **22**, No. 4, 287–302 (2012).
13. Pyatkov S. G. and Tsybikov B. N., “On some classes of inverse problems for parabolic and elliptic equations,” J. Evol. Equ., **11**, No. 1, 155–186 (2011).
14. Pyatkov S. G., “On some classes of inverse problems for parabolic equations,” J. Inverse Ill-Posed Probl., **18**, No. 8, 917–934 (2011).
15. Pyatkov S. G., “On some classes of inverse problems with overdetermination data on spatial manifolds,” Sib. Math. J., **57**, No. 5, 870–880 (2016).

16. Pyatkov S. G. and Rotko V. V., “On some parabolic inverse problems with the pointwise overdetermination,” *Sib. Adv. Math.*, **30**, No. 2, 124–142 (2020).
17. Pyatkov S. G. and Rotko V. V., “Inverse problems with pointwise overdetermination for some quasilinear parabolic systems,” *AIP Conf. Proc.*, **1907**, paper ID 020008 (2017).
18. Egger H., Pietschmann J.-F., and Schlottbom M., “Identification of nonlinear heat conduction laws,” *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **23**, No. 5, 429–437 (2015).
19. Samarskii A. A. and Vabishchevich P. N., *Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics*, Walter de Gruyter, Berlin; Boston (2007).
20. Alifanov O. M., Artyukhin E. A., and Nenarokomov A. V., *Inverse Problems in the Study of Complex Heat Transfer* [in Russian], Yanus-K, Moscow (2009).
21. Ozisik M. N. and Orlande H. R. B., *Inverse Heat Transfer*, Taylor & Francis, New York (2000).
22. Huntul M. J. and Lesnic D., “An inverse problem of finding the time-dependent thermal conductivity from boundary data,” *Int. Commun. Heat Mass Transfer*, **85**, 147–154 (2017).
23. Kabanikhin S. I., Khasanov A. Kh., and Penenko A. V., “Gradient descent method for solving inverse coefficient problem of heat conduction [in Russian],” *Sib. J. Comput. Math.*, **11**, No. 1, 41–51 (2008).
24. Pyatkov S. G., “Identification of thermophysical parameters in mathematical models of heat and mass transfer,” *J. Comput. Eng. Math.*, **9**, No. 2, 52–66 (2022).
25. Pyatkov S. G. and Sokolkov O. I., “On some classes of coefficient inverse problems for determining thermophysical parameters in stratified media [in Russian],” *Mat. Zamet. SVFU*, **30**, No. 2, 56–74 (2023).
26. Triebel H., *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, VEB Deutscher Verl. Wissenschaft., Berlin (1978).
27. Denk R., Hieber M., and Prüss J., “Optimal L^p - L^q -estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data,” *Math. Z.*, **257**, No. 1, 93–224 (2007).
28. Denk R., Hieber M., and Prüss J., “ R -boundedness, Fourier multipliers, and problems of elliptic and parabolic type,” *Mem. AMS*, **166**, No. 788 (2003).
29. Belonogov V. A. and Pyatkov S. G., “On the solvability of conjugation problems with conditions of the non-ideal contact type [in Russian],” *Izv. Vuzov, Mat.*, No. 7, 18–32 (2020).
30. Mikhaylov V. P., *Partial Differential Equations*, Imp. Publ, Chicago (1978).
31. Amann H., “Compact embeddings of vector-valued Sobolev and Besov spaces,” *Glasnik Mat.*, **35**, 161–177 (2000).
32. Nikolsky S. M., *Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems*, Springer, Berlin; Heidelberg; New York (1975).
33. Amann H., *Linear and Quasilinear Parabolic Problems*, Birkhäuser, Basel (1995).

Submitted March 13, 2024

Revised March 22, 2024

Accepted May 30, 2024

Sergey G. Pyatkov, Alexey A. Potapkov
Yugra State University,
16 Chekhov Street, 628012 Khanty-Mansiisk, Russia
s_pyatkov@ugrasu.ru, a_potapkov@ugrasu.ru

ОБ ИНВАРИАНТАХ ЛАПЛАСА ДВУМЕРНЫХ
НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ
ПРОИЗВОДНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ТИПА

И. В. Рахмелевич

Аннотация. Исследуются двумерные нелинейные уравнения в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами, левая часть которых представляет собой однородный полином второй степени по искомой функции и ее производным. Рассматривается множество линейных мультипликативных преобразований неизвестной функции, сохраняющих вид исходного уравнения. Аналогично линейным уравнениям инварианты Лапласа определяются как инварианты этого преобразования. Получены выражения для инвариантов Лапласа через коэффициенты уравнения и их первые производные. Для рассматриваемых уравнений найдены эквивалентные системы уравнений первого порядка, содержащие инварианты Лапласа. Показано, что если один из инвариантов Лапласа равен нулю, то соответствующая система сводится к одному уравнению первого порядка. Также в этом случае при выполнении некоторых дополнительных условий на коэффициенты может быть получено решение исходного уравнения в квадратурах. Исследования проведены для гиперболического уравнения со смешанной производной и для нелинейного уравнения второго порядка общего вида с однородным полиномом второй степени по искомой функции и ее производным. Для этих случаев получены выражения для инвариантов Лапласа и приведены соответствующие эквивалентные системы.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-2-46-58

Ключевые слова: дифференциальное уравнение в частных производных, гиперболическое уравнение, инвариант Лапласа, линейное мультипликативное преобразование.

Введение

При исследовании свойств симметрии и классификации линейных гиперболических уравнений с переменными коэффициентами весьма эффективным является подход, основанный на использовании инвариантов Лапласа [1, 2]. Как известно, инварианты Лапласа — это функции коэффициентов уравнения и их производных, инвариантные относительно линейного мультипликативного преобразования, которое переводит исходное дифференциальное уравнение в уравнение того же вида. Первоначально эти инварианты были найдены для двумерного линейного гиперболического уравнения с переменными коэффициентами

$$u''_{xy} + a(x, y)u'_x + b(x, y)u'_y + c(x, y)u = 0. \quad (0.1)$$

Здесь и ниже приняты обозначения $u'_x \equiv \partial u / \partial x$, $u'_y \equiv \partial u / \partial y$, $u''_{xy} \equiv \partial^2 u / \partial x \partial y$ и т. д. Для данного уравнения инварианты Лапласа имеют вид [1, 2]

$$h = a'_x + ab - c, \quad k = b'_y + ab - c. \quad (0.2)$$

В дальнейшем инварианты Лапласа были найдены для различных типов линейных уравнений как второго, так и более высоких порядков [3–6]. Также в ряде работ инварианты Лапласа и их обобщения применялись к исследованию некоторых классов нелинейных уравнений в частных производных [7–9]. Целью данной работы является нахождение инвариантов Лапласа для двумерных нелинейных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, содержащих однородный полином второй степени от искомой функции и ее производных.

1. Гиперболическое уравнение со смешанной производной

Рассмотрим нелинейное гиперболическое уравнение второго порядка относительно неизвестной функции $u = u(x, y)$:

$$uu''_{xy} + b_{12}(x, y)u'_xu'_y + b_{01}(x, y)uu'_x + b_{02}(x, y)uu'_y + c(x, y)u^2 = 0. \quad (1.1)$$

Левая часть уравнения (1.1) представляет собой однородный полином специального вида по неизвестной функции и ее производным.

Применим к уравнению (1.1) мультипликативное преобразование искомой функции, которое имеет вид

$$u(x, y) = \lambda(x, y)v(x, y). \quad (1.2)$$

Подставив (1.2) в уравнение (1.1), после дифференцирования и элементарных преобразований получаем уравнение относительно новой неизвестной функции $v(x, y)$:

$$vv''_{xy} + \tilde{b}_{12}(x, y)v'_xv'_y + \tilde{b}_{01}(x, y)vv'_x + \tilde{b}_{02}(x, y)vv'_y + \tilde{c}(x, y)v^2 = 0. \quad (1.3)$$

Здесь и всюду далее знаком «тильда» отмечены величины, относящиеся к преобразованному уравнению. Найдем, каким условиям должны удовлетворять коэффициенты уравнений (1.1), (1.3), чтобы одно из этих уравнений можно было привести к другому с помощью преобразования (1.2).

Коэффициенты преобразованного уравнения (1.3) определяются выражениями

$$\tilde{b}_{12} = b_{12}, \quad \tilde{b}_{01} = b_{01} + \frac{\lambda'_y}{\lambda}(1 + b_{12}), \quad \tilde{b}_{02} = b_{02} + \frac{\lambda'_x}{\lambda}(1 + b_{12}), \quad (1.4)$$

$$\tilde{c} = c + \frac{\lambda'_x}{\lambda}b_{01} + \frac{\lambda'_y}{\lambda}b_{02} + \frac{\lambda'_x\lambda'_y}{\lambda^2}b_{12} + \frac{\lambda''_{xy}}{\lambda}. \quad (1.5)$$

Из формул (1.4) получаем

$$\lambda'_x = \frac{\tilde{b}_{02} - b_{02}}{1 + b_{12}}\lambda, \quad \lambda'_y = \frac{\tilde{b}_{01} - b_{01}}{1 + b_{12}}\lambda. \quad (1.6)$$

Дифференцируя первое из соотношений (1.6) по y , а второе по x , находим смешанные производные:

$$\lambda''_{xy} = ((\tilde{A}_2 - A_2)'_y + (\tilde{A}_1 - A_1)(\tilde{A}_2 - A_2))\lambda, \quad (1.7a)$$

$$\lambda''_{yx} = ((\tilde{A}_1 - A_1)'_x + (\tilde{A}_1 - A_1)(\tilde{A}_2 - A_2))\lambda. \quad (1.7b)$$

Здесь введены обозначения:

$$A_1 = \frac{b_{01}}{1 + b_{12}}, \quad A_2 = \frac{b_{02}}{1 + b_{12}}, \quad \tilde{A}_1 = \frac{\tilde{b}_{01}}{1 + \tilde{b}_{12}}, \quad \tilde{A}_2 = \frac{\tilde{b}_{02}}{1 + \tilde{b}_{12}}. \quad (1.8)$$

На основании теоремы о равенстве смешанных производных из (1.7а,б) следует:

$$(\tilde{A}_1 - A_1)'_x = (\tilde{A}_2 - A_2)'_y. \quad (1.9)$$

Далее, подставляя (1.6), (1.76) в (1.5) и учитывая (1.8), получаем

$$\tilde{c} - c = (\tilde{A}_1 - A_1)'_x + (1 + b_{12})(\tilde{A}_1 - A_1)(\tilde{A}_2 - A_2) + b_{01}(\tilde{A}_2 - A_2) + b_{02}(\tilde{A}_1 - A_1). \quad (1.10)$$

После некоторых элементарных преобразований (1.10) приводится к виду

$$\tilde{c} - c = (\tilde{A}_1 - A_1)'_x + (1 + b_{12})(\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 - A_1 A_2). \quad (1.11)$$

Преобразуем (1.11) так, чтобы в левой части были только слагаемые, относящиеся к преобразованному уравнению, а в правой части — относящиеся только к исходному уравнению, тогда с учетом (1.8) и первой формулы (1.4) находим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tilde{b}_{01}}{1 + \tilde{b}_{12}} \right) + \frac{\tilde{b}_{01} \tilde{b}_{02}}{1 + \tilde{b}_{12}} - \tilde{c} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b_{01}}{1 + b_{12}} \right) + \frac{b_{01} b_{02}}{1 + b_{12}} - c. \quad (1.12)$$

Из (1.12) следует, что функция

$$I_1 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b_{01}}{1 + b_{12}} \right) + \frac{b_{01} b_{02}}{1 + b_{12}} - c \quad (1.13)$$

не изменяется при преобразовании (1.2) и поэтому является инвариантом уравнения (1.1) относительно данного преобразования.

Для нахождения второго инварианта, подставляя (1.6), (1.7а) в (1.5) и учитывая (1.8), получаем

$$\tilde{c} - c = (\tilde{A}_2 - A_2)'_y + (1 + b_{12})(\tilde{A}_1 - A_1)(\tilde{A}_2 - A_2) + b_{01}(\tilde{A}_2 - A_2) + b_{02}(\tilde{A}_1 - A_1). \quad (1.14)$$

В результате рассуждений, аналогичных приведенным выше, (1.14) преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tilde{b}_{02}}{1 + \tilde{b}_{12}} \right) + \frac{\tilde{b}_{01} \tilde{b}_{02}}{1 + \tilde{b}_{12}} - \tilde{c} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{b_{02}}{1 + b_{12}} \right) + \frac{b_{01} b_{02}}{1 + b_{12}} - c. \quad (1.15)$$

Из (1.15) следует, что функция

$$I_2 = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{b_{02}}{1 + b_{12}} \right) + \frac{b_{01} b_{02}}{1 + b_{12}} - c \quad (1.16)$$

также является инвариантом уравнения (1.1) относительно преобразования (1.2).

Используя соотношения (1.6), нетрудно выразить функцию $\lambda(x, y)$, определяющую вид преобразования (1.2), через коэффициенты уравнений (1.1), (1.3):

$$\lambda(x, y) = \lambda_0 \exp \left\{ \int \left(\frac{\tilde{b}_{02} - b_{02}}{1 + b_{12}} dx + \frac{\tilde{b}_{01} - b_{01}}{1 + b_{12}} dy \right) \right\}, \quad (1.17)$$

где λ_0 — произвольная постоянная.

Итак, в результате проведенных рассуждений доказана следующая

Теорема 1.1. Уравнение (1.1) может быть приведено с помощью преобразования (1.2) к другому уравнению (1.3) того же вида в том и только в том случае, если инварианты I_1 , I_2 , определяемые формулами (1.13), (1.16), одинаковы для обоих уравнений и если выполнено условие $\tilde{b}_{12} = b_{12}$. При этом коэффициент $\lambda(x, y)$ преобразования (1.2) определяется формулой (1.17).

Следствие 1. Если для уравнения (1.1) $I_1 = I_2 = 0$, то это уравнение с помощью преобразования (1.2) может быть приведено к виду

$$vv''_{xy} + b_{12}(x, y)v'_x v'_y = 0. \quad (1.18)$$

Данное утверждение следует из того факта, что для уравнения (1.18) оба инварианта равны 0, а коэффициент b_{12} такой же, как у исходного уравнения (1.1).

Теорема 1.2. Уравнение (1.1) эквивалентно следующим системам уравнений относительно неизвестных функций $u(x, y), w(x, y)$:

$$\begin{cases} uu'_y + \frac{b_{01}}{1+b_{12}}u^2 = w, \\ w'_x + \left(b_{02} + (b_{12}-1)\frac{u'_x}{u}\right)w = I_1 u. \end{cases} \quad (1.19)$$

$$\begin{cases} uu'_x + \frac{b_{02}}{1+b_{12}}u^2 = w, \\ w'_y + \left(b_{01} + (b_{12}-1)\frac{u'_y}{u}\right)w = I_2 u. \end{cases} \quad (1.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Рассмотрим нелинейный дифференциальный оператор

$$P[u] = \left(\frac{\partial}{\partial x} + p_2 + p_3 \frac{u'_x}{u}\right) \left(u \frac{\partial}{\partial y} + p_1 u\right) u, \quad (1.21)$$

где $p_{1,2,3}(x, y)$ — пока неопределенные коэффициенты, которые будут определены ниже. Раскрывая скобки, преобразуем оператор (1.21):

$$P[u] = uu''_{xy} + (1+p_3)u'_x u'_y + p_1(2+p_3)uu'_x + p_2uu'_y + (p_1p_2 + (p_1)'_x)u^2. \quad (1.22)$$

Определим коэффициенты p_1, p_2, p_3 так, чтобы выполнялись соотношения

$$1 + p_3 = b_{12}, \quad p_1(2 + p_3) = b_{01}, \quad p_2 = b_{02}. \quad (1.23)$$

Из (1.23) находим, что эти коэффициенты определяются выражениями

$$p_1 = \frac{b_{01}}{1+b_{12}}, \quad p_2 = b_{02}, \quad p_3 = b_{12} - 1. \quad (1.24)$$

Используя (1.22), (1.23), (1.24) и учитывая (1.13), $P[u]$ можно представить в виде

$$P[u] = (uu''_{xy} + b_{12}(x, y)u'_x u'_y + b_{01}(x, y)uu'_x + b_{02}(x, y)uu'_y + c(x, y)u^2) + I_1 u^2. \quad (1.25)$$

Выражение в скобках в (1.25) совпадает с левой частью уравнения (1.1). Поэтому если $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1.1), то (1.25) сводится к следующему:

$$P[u] = I_1 u^2. \quad (1.26)$$

Вводя новую неизвестную функцию

$$w(x, y) = uu'_y + p_1 u^2,$$

получаем из (1.21), (1.23) и (1.26), что функции $u(x, y), w(x, y)$ удовлетворяют системе уравнений (1.19).

2. Рассмотрим нелинейный дифференциальный оператор

$$Q[u] = \left(\frac{\partial}{\partial y} + q_2 + q_3 \frac{u'_y}{u} \right) \left(u \frac{\partial}{\partial x} + q_1 u \right) u. \quad (1.27)$$

Проводя рассуждения, аналогичные п. 1 доказательства, находим

$$q_1 = \frac{b_{02}}{1 + b_{12}}, \quad q_2 = b_{01}, \quad q_3 = b_{12} - 1, \quad (1.28)$$

тогда $Q[u]$ можно представить в виде

$$Q[u] = (uu''_{xy} + b_{12}(x, y)u'_x u'_y + b_{01}(x, y)uu'_x + b_{02}(x, y)uu'_y + c(x, y)u^2) + I_2 u^2. \quad (1.29)$$

Аналогично п. 1 если $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1.1), то (1.29) сводится к следующему:

$$Q[u] = I_2 u^2. \quad (1.30)$$

Вводя новую неизвестную функцию

$$w(x, y) = uu'_x + q_1 u^2,$$

получаем из (1.27), (1.28) и (1.30), что функции $u(x, y), w(x, y)$ удовлетворяют системе уравнений (1.20). Теорема доказана.

Используя системы (1.19), (1.20), можно получить общее решение уравнения (1.1) в квадратурах в некоторых частных случаях, которые приведем ниже.

Случай 1. $I_1 = 0, b_{12} = 1$. Решая второе уравнение системы (1.19), находим

$$w(x, y) = w_0(y) \exp \left(- \int b_{02} dx \right), \quad (1.31)$$

где $w_0(y)$ — произвольная функция. Подставляя (1.31) в первое уравнение системы (1.19), находим общее решение уравнения (1.1):

$$u(x, y) = \left\{ \left[u_0(x) + 2 \int w_0(y) \exp \left(\int b_{01} dy - \int b_{02} dx \right) dy \right] \exp \left(- \int b_{01} dy \right) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (1.32)$$

где $u_0(x), w_0(y)$ — произвольные функции.

Случай 2. $I_2 = 0$, $b_{12} = 1$. Аналогично случаю 1, решая второе уравнение системы (1.20), находим

$$w(x, y) = w_0(x) \exp \left(- \int b_{01} dy \right), \quad (1.33)$$

где $w_0(x)$ — произвольная функция. Подставляя (1.33) в первое уравнение системы (1.20), находим общее решение уравнения (1.1):

$$u(x, y) = \left\{ \left[u_0(y) + 2 \int w_0(x) \exp \left(- \int b_{01} dy + \int b_{02} dx \right) dx \right] \exp \left(- \int b_{02} dx \right) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (1.34)$$

где $u_0(y)$, $w_0(x)$ — произвольные функции.

2. Инварианты уравнения общего вида. Анализ гиперболического уравнения

Рассмотрим теперь двумерное уравнение второго порядка общего вида, содержащее однородный полином от искомой функции и ее производных:

$$\begin{aligned} u(a_{11}u''_{xx} + a_{12}u''_{xy} + a_{22}u''_{yy}) + b_{11}(u'_x)^2 \\ + b_{12}u'_xu'_y + b_{22}(u'_y)^2 + b_{01}uu'_x + b_{02}uu'_y + cu^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Предполагается, что коэффициенты уравнения (2.1) являются функциями независимых переменных: $a_{ij} = a_{ij}(x, y)$, $b_{ij} = b_{ij}(x, y)$, $c = c(x, y)$. Применим к уравнению (2.1) линейное мультиплекативное преобразование (1.2), в результате чего (2.1) приводится к виду

$$v(\tilde{a}_{11}v''_{xx} + \tilde{a}_{12}v''_{xy} + \tilde{a}_{22}v''_{yy}) + \tilde{b}_{11}(v'_x)^2 + \tilde{b}_{12}v'_xv'_y + \tilde{b}_{22}(v'_y)^2 + \tilde{b}_{01}vv'_x + \tilde{b}_{02}vv'_y + \tilde{c}v^2 = 0. \quad (2.2)$$

Коэффициенты уравнений (2.1) и (2.2) связаны соотношениями

$$\tilde{a}_{11} = a_{11}, \quad \tilde{a}_{12} = a_{12}, \quad \tilde{a}_{22} = a_{22}, \quad \tilde{b}_{11} = b_{11}, \quad \tilde{b}_{12} = b_{12}, \quad \tilde{b}_{22} = b_{22}, \quad (2.3)$$

$$\tilde{b}_{01} = b_{01} + 2(a_{11} + b_{11})\frac{\lambda'_x}{\lambda} + (a_{12} + b_{12})\frac{\lambda'_y}{\lambda}, \quad (2.4a)$$

$$\tilde{b}_{02} = b_{02} + 2(a_{22} + b_{22})\frac{\lambda'_y}{\lambda} + (a_{12} + b_{12})\frac{\lambda'_x}{\lambda}, \quad (2.4b)$$

$$\tilde{c} = c + a_{11}\frac{\lambda''_{xx}}{\lambda} + b_{11}\left(\frac{\lambda'_x}{\lambda}\right)^2 + a_{12}\frac{\lambda''_{xy}}{\lambda} + b_{12}\frac{\lambda'_x\lambda'_y}{\lambda^2} + a_{22}\frac{\lambda''_{yy}}{\lambda} + b_{22}\left(\frac{\lambda'_y}{\lambda}\right)^2 + b_{01}\frac{\lambda'_x}{\lambda} + b_{02}\frac{\lambda'_y}{\lambda}. \quad (2.5)$$

Решая систему уравнений (2.4a,б) относительно $\frac{\lambda'_x}{\lambda}$, $\frac{\lambda'_y}{\lambda}$ и учитывая соотношения (2.3), находим

$$\lambda'_x = (\tilde{B}_1 - B_1)\lambda, \quad \lambda'_y = (\tilde{B}_2 - B_2)\lambda, \quad (2.6)$$

где

$$B_1 = \frac{2b_{01}(a_{22} + b_{22}) - b_{02}(a_{12} + b_{12})}{\Delta}, \quad B_2 = \frac{2b_{02}(a_{11} + b_{11}) - b_{01}(a_{12} + b_{12})}{\Delta}, \quad (2.7)$$

$$\Delta = 4(a_{11} + b_{11})(a_{22} + b_{22}) - (a_{12} + b_{12})^2, \quad (2.7a)$$

$$\tilde{B}_1 = \frac{2\tilde{b}_{01}(\tilde{a}_{22} + \tilde{b}_{22}) - \tilde{b}_{02}(\tilde{a}_{12} + \tilde{b}_{12})}{\tilde{\Delta}}, \quad \tilde{B}_2 = \frac{2\tilde{b}_{02}(\tilde{a}_{11} + \tilde{b}_{11}) - \tilde{b}_{01}(\tilde{a}_{12} + \tilde{b}_{12})}{\tilde{\Delta}}, \quad (2.8)$$

$$\tilde{\Delta} = 4(\tilde{a}_{11} + \tilde{b}_{11})(\tilde{a}_{22} + \tilde{b}_{22}) - (\tilde{a}_{12} + \tilde{b}_{12})^2. \quad (2.8a)$$

Дифференцируя первое из соотношений (2.6) по y , а второе по x , получаем

$$\lambda''_{xy} = ((\tilde{B}_1 - B_1)'_y + (\tilde{B}_1 - B_1)(\tilde{B}_2 - B_2))\lambda, \quad (2.9a)$$

$$\lambda''_{yx} = ((\tilde{B}_2 - B_2)'_x + (\tilde{B}_1 - B_1)(\tilde{B}_2 - B_2))\lambda. \quad (2.9b)$$

На основании теоремы о равенстве смешанных производных из (2.9a,б) находим

$$(\tilde{B}_1 - B_1)'_y = (\tilde{B}_2 - B_2)'_x, \quad (2.10)$$

или

$$\tilde{B}'_{1y} - \tilde{B}'_{2x} = B'_{1y} - B'_{2x}. \quad (2.10a)$$

В свою очередь, из (2.10a) следует, что при преобразовании (1.2) для уравнения (2.1) величина

$$I_1 = B'_{1y} - B'_{2x} \quad (2.11)$$

является инвариантом.

Подставим в (2.5) выражения (2.6) для $\frac{\lambda'_x}{\lambda}$, $\frac{\lambda'_y}{\lambda}$ с учетом (2.7), (2.7a), (2.8), (2.8a). После дифференцирования и некоторых преобразований получаем выражение для второго инварианта:

$$I_2 = a_{11}B'_{1x} + a_{12}B'_{1y} + a_{22}B'_{2y} + \frac{(a_{22} + b_{22})b_{01}^2 + (a_{11} + b_{11})b_{02}^2 - (a_{12} + b_{12})b_{01}b_{02}}{\Delta}. \quad (2.12)$$

Из проведенных выше рассуждений следует

Теорема 2.1. Уравнение (2.1) может быть приведено с помощью преобразования (1.2) к другому уравнению (2.2) того же вида в том и только в том случае, если инварианты I_1 , I_2 , определяемые формулами (2.11), (2.12), одинаковы для обоих уравнений и если выполнены условия (2.3) для коэффициентов обоих уравнений.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для сравнения с результатами разд. 1 вместо I_1 , I_2 будем использовать инварианты $J_1 = I_2 - a_{12}I_1$, $J_2 = I_2$, так что для J_2 справедливо выражение (2.12), а J_1 определяется выражением

$$J_1 = a_{11}B'_{1x} + a_{12}B'_{2x} + a_{22}B'_{2y} + \frac{(a_{22} + b_{22})b_{01}^2 + (a_{11} + b_{11})b_{02}^2 - (a_{12} + b_{12})b_{01}b_{02}}{\Delta}. \quad (2.13)$$

Нетрудно проверить, что в частном случае $a_{11} = b_{11} = a_{22} = b_{22} = 0$, $a_{12} = 1$ инварианты (2.13), (2.12) сводятся к инвариантам (1.13), (1.16) соответственно, полученным в разд. 1 для гиперболического уравнения со смешанной производной.

Теорема 2.2. Пусть коэффициенты уравнения (2.1)

$$a_{11} = 1, \quad a_{22} = -1, \quad a_{12} = 0, \quad (2.14)$$

что соответствует гиперболическому уравнению канонического вида.

1. Если выполнено дополнительное условие

$$b_{12} = -b_{11} - b_{22}, \quad (2.15)$$

то уравнение (2.1) эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} u(u'_x - u'_y) + \frac{b_{01} + b_{02}}{2 + b_{11} - b_{22}} u^2 = w, \\ w'_x + w'_y + \left(\frac{b_{01}(1 - b_{22}) - b_{02}(1 + b_{11})}{2 + b_{11} - b_{22}} + (b_{11} - 1) \frac{u'_x}{u} - (b_{22} + 1) \frac{u'_y}{u} \right) w = H_1 u. \end{cases} \quad (2.16)$$

2. Если выполнено дополнительное условие

$$b_{12} = b_{11} + b_{22}, \quad (2.17)$$

то уравнение (2.1) эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} u(u'_x + u'_y) + \frac{b_{01} - b_{02}}{2 + b_{11} - b_{22}} u^2 = w, \\ w'_x - w'_y + \left(\frac{b_{01}(1 - b_{22}) + b_{02}(1 + b_{11})}{2 + b_{11} - b_{22}} + (b_{11} - 1) \frac{u'_x}{u} + (b_{22} + 1) \frac{u'_y}{u} \right) w = H_2 u. \end{cases} \quad (2.18)$$

Здесь H_1, H_2 — инварианты уравнения (2.1), которые для рассматриваемого случая определяются выражениями

$$H_1 = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{b_{01} + b_{02}}{2 + b_{11} - b_{22}} + \frac{b_{01}^2(1 - b_{22}) - b_{02}^2(1 + b_{11}) + b_{01}b_{02}b_{12}}{(2 + b_{11} - b_{22})^2} - c, \quad (2.19)$$

$$H_2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{b_{01} - b_{02}}{2 + b_{11} - b_{22}} + \frac{b_{01}^2(1 - b_{22}) - b_{02}^2(1 + b_{11}) + b_{01}b_{02}b_{12}}{(2 + b_{11} - b_{22})^2} - c. \quad (2.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть нелинейный дифференциальный оператор $P[u]$ определяется выражением

$$P[u] = \left(p_1 \frac{\partial}{\partial x} + p_2 \frac{\partial}{\partial y} + p_3 + p_4 \frac{u'_x}{u} + p_5 \frac{u'_y}{u} \right) \left(q_1 u \frac{\partial}{\partial x} + q_2 u \frac{\partial}{\partial y} + q_3 u \right) u, \quad (2.21)$$

где $p_{1,2,3,4,5}(x, y)$, $q_{1,2,3}(x, y)$ — пока неопределенные коэффициенты, которые будут определены ниже. В результате элементарных преобразований выражение (2.21) можно представить в виде

$$\begin{aligned} P[u] = & p_1 q_1 u u''_{xx} + (p_1 q_2 + p_2 q_1) u u''_{xy} + p_2 q_2 u u''_{yy} + (p_1 + p_4) q_1 (u'_x)^2 + (p_2 + p_5) q_2 (u'_y)^2 \\ & + (p_1 q_2 + p_2 q_1 + p_4 q_2 + p_5 q_1) u'_x u'_y + (p_1 q'_{1x} + p_2 q'_{1y} + 2p_1 q_3 + p_3 q_1 + p_4 q_3) u u'_x \\ & + (p_1 q'_{2x} + p_2 q'_{2y} + 2p_2 q_3 + p_3 q_2 + p_5 q_3) u u'_y + (p_1 q'_{3x} + p_2 q'_{3y} + p_3 q_3) u^2, \end{aligned} \quad (2.22)$$

Определим p_i , q_i так, чтобы коэффициенты во всех слагаемых в (2.22), кроме последнего, совпадали с соответствующими коэффициентами уравнения (2.1). Учитывая условия (2.14), получаем систему уравнений относительно p_i , q_i :

$$p_1 q_1 = 1, \quad p_1 q_2 + p_2 q_1 = 0, \quad p_2 q_2 = -1, \quad (2.23a)$$

$$(p_1 + p_4)q_1 = b_{11}, \quad (p_1 + p_4)q_2 + (p_2 + p_5)q_1 = b_{12}, \quad (p_2 + p_5)q_2 = b_{22}, \quad (2.23б)$$

$$p_1 q'_{1x} + p_2 q'_{1y} + 2p_1 q_3 + p_3 q_1 + p_4 q_3 = b_{01}, \quad (2.23в)$$

$$p_1 q'_{2x} + p_2 q'_{2y} + 2p_2 q_3 + p_3 q_2 + p_5 q_3 = b_{02}. \quad (2.23г)$$

Из уравнений (2.23а) нетрудно получить, что

$$p_2/p_1 = \pm 1. \quad (2.24)$$

Далее, из уравнений (2.23а,б) следует:

$$p_4/p_1 = b_{11} - 1, \quad p_5/p_2 = -b_{22} - 1. \quad (2.25)$$

Подставим (2.25) во второе из уравнений (2.23б). Учитывая (2.24), получаем

$$\frac{p_2}{p_1}(b_{11} + b_{22}) = -b_{12}. \quad (2.26)$$

На основании (2.24) рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. $p_2/p_1 = 1$. Без ограничения общности положим $p_1 = 1$, тогда с учетом (2.23а), (2.25) имеем

$$p_2 = q_1 = 1, \quad q_2 = -1, \quad p_4 = b_{11} - 1, \quad p_5 = -b_{22} - 1. \quad (2.27)$$

Кроме того, из (2.26) в этом случае следует условие (2.15). Подставляя (2.27) в (2.23в,г), получаем систему линейных уравнений относительно p_3 , q_3 :

$$\begin{cases} p_3 + (1 + b_{11})q_3 = b_{01}, \\ -p_3 + (1 - b_{22})q_3 = b_{02}. \end{cases} \quad (2.28)$$

Из (2.28) находим

$$p_3 = \frac{b_{01}(1 - b_{22}) - b_{02}(1 + b_{11})}{D}, \quad q_3 = \frac{b_{01} + b_{02}}{D}, \quad D = 2 + b_{11} - b_{22}. \quad (2.29)$$

Учитывая (2.27) и (2.29), выражение (2.22) преобразуем к виду

$$P[u] = (uu''_{xx} - uu''_{yy} + b_{11}(u'_x)^2 + b_{22}(u'_y)^2 + b_{12}u'_x u'_y + b_{01}uu'_x + b_{02}uu'_y + cu^2) + H_1 u^2, \quad (2.30)$$

где H_1 определяется выражением (2.19). Нетрудно проверить, что при выполнении условий (2.14)

$$H_1 = I_1 + I_2,$$

где I_1 , I_2 определяются выражениями (2.11), (2.12); поэтому H_1 также является инвариантом Лапласа.

Если в условиях данной теоремы функция $u = u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (2.1), то выражение в скобках в правой части (2.30) тождественно равно 0 и (2.30) сводится к следующему:

$$P[u] = H_1 u^2. \quad (2.31)$$

Вводя новую неизвестную функцию

$$w(x, y) = q_1 u u'_x + q_2 u u'_y + q_3 u^2, \quad (2.32)$$

получаем из (2.21), (2.27), (2.29), (2.31), что функции $u(x, y), w(x, y)$ удовлетворяют системе уравнений (2.16).

Случай 2. $p_2/p_1 = -1$. Без ограничения общности положим $p_1 = 1$, тогда с учетом (2.23а), (2.25) имеем

$$p_2 = -1, \quad q_1 = 1, \quad q_2 = -1, \quad p_4 = b_{11} - 1, \quad p_5 = b_{22} + 1. \quad (2.33)$$

Аналогично случаю 1 из (2.26) следует условие (2.17). Подставляя (2.33) в (2.23в,г), получаем систему линейных уравнений относительно p_3, q_3 :

$$\begin{cases} p_3 + (b_{11} + 1)q_3 = b_{01}, \\ p_3 + (b_{22} - 1)q_3 = b_{02}. \end{cases} \quad (2.34)$$

Из (2.34) находим

$$p_3 = \frac{b_{01}(1 - b_{22}) + b_{02}(1 + b_{11})}{D}, \quad q_3 = \frac{b_{01} - b_{02}}{D}, \quad D = 2 + b_{11} - b_{22}. \quad (2.35)$$

Проводя рассуждения, аналогичные случаю 1, получаем, что если в условиях данной теоремы функция $u = u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (2.1), то

$$P[u] = H_2 u^2, \quad (2.36)$$

где H_2 определяется выражением (2.20). Нетрудно проверить, что при выполнении условий (2.14)

$$H_2 = I_1 - I_2, \quad (2.37)$$

где I_1, I_2 определяются выражениями (2.11), (2.12); поэтому H_2 также является инвариантом Лапласа.

Вводя новую неизвестную функцию с помощью выражения (2.32), получаем из (2.21), (2.33), (2.35), (2.36), что функции $u(x, y), w(x, y)$ удовлетворяют системе уравнений (2.18). Теорема доказана.

Заключение

В данной работе найдены инварианты Лапласа для двумерных уравнений в частных производных, левая часть которых имеет вид однородного полинома второй степени по искомой функции и ее производным и получены эквивалентные исходному уравнению системы уравнений первого порядка, содержащие

инвариантны Лапласа. Инвариантны Лапласа определяются как инвариантны линейного мультиплекативного преобразования, преобразующего исходное уравнение к уравнению того же вида. Исследования проведены для гиперболического уравнения второго порядка со смешанной производной и для уравнения второго порядка общего вида. Приведены некоторые решения, полученные в квадратурах, для случая, когда один из инвариантов Лапласа равен 0. Данный подход может быть обобщен для нелинейных многомерных уравнений более сложного вида.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 3. Ч. 1. М.-Л.: ГИТТЛ, 1933.
2. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1957.
3. Джохадзе О. М. Об инвариантах Лапласа для некоторых классов линейных дифференциальных уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 1. С. 58–68.
4. Миронов А. Н., Миронова Л. Б. Об инвариантах Лапласа для уравнения с доминирующей частной производной третьего порядка с двумя независимыми переменными // Мат. заметки. 2016. Т. 99, № 1. С. 89–96. DOI: 10.4213/mzm10613.
5. Миронов А. Н., Миронова Л. Б. Об инвариантах Лапласа для одного уравнения четвертого порядка с двумя независимыми переменными // Изв. вузов. Математика. 2014. № 10. С. 27–34.
6. Миронов А. Н., Миронова Л. Б. К инвариантам Лапласа для одного уравнения с доминирующей частной производной с тремя независимыми переменными // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 1. С. 67–73. DOI: 10.1134/S0374064119010072.
7. Кузнецова М. Н. Преобразование Лапласа и нелинейные гиперболические уравнения // Уфим. мат. журн. 2009. Т. 1, № 3. С. 87–96.
8. Жибер А. В., Соколов В. В. Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувилевского типа // Успехи мат. наук. 2001. Т. 56, № 1. С. 63–106.
DOI: <https://doi.org/10.4213/gm357>.
9. Старцев С. Я. Об инвариантах Лапласа гиперболических уравнений, линеаризуемых дифференциальной подстановкой // Теор. мат. физика. 1999. Т. 120, № 2. С. 237–247.

Поступила в редакцию 15 сентября 2023 г.

После доработки 17 мая 2024 г.

Принята к публикации 30 мая 2024 г.

Рахмелеевич Игорь Владимирович

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского,

пр. Гагарина, 23, Нижний Новгород 603950

igor-kitpd@yandex.ru

ON LAPLACE INVARIANTS OF TWO-DIMENSIONAL
NON-LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL
EQUATIONS OF POLYNOMIAL TYPE

I. V. Rakhmelevich

Abstract: We study two-dimensional nonlinear partial differential equations of the second order with variable coefficients. The left-hand side of these equations is a homogeneous polynomial of the second degree on unknown function and its derivatives. We consider a set of linear multiplicative transformations of the unknown function which keep a form of initial equation. By analogy with linear equations, the Laplace invariants are determined as the invariants of this transformation. Expressions for the Laplace invariants are obtained through the coefficients of the equation and their first derivatives. For the equations under consideration, equivalent systems of first-order equations are found, containing the Laplace invariants. It is shown that if one of the Laplace invariants is equal to zero, then the corresponding system is reduced to a single first-order equation. Also in this case, if certain additional conditions on the coefficients are met, a solution to the original equation in quadratures can be obtained. The studies were carried out for a hyperbolic equation with a mixed derivative and for a nonlinear second-order equation of general form with a homogeneous polynomial of the second degree in the unknown function and its derivatives. In these cases, expressions for the Laplace invariants are obtained and the corresponding equivalent systems are given.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-2-46-58

Keywords: partial differential equation, hyperbolic equation, Laplace invariant, linear multiplicative transformation.

REFERENCES

1. Goursat E., Cours d'Analyse Mathematique, Paris (1933).
2. Tricomi F., Lectures on Partial Differential Equations [in Russian], Izdat. Inostr. Lit., Moscow (1957).
3. Dzhokhadze O. M., “Laplace invariants for some classes of linear partial differential equations,” Differ. Equ., **40**, No. 1, 63–74 (2004). DOI: 10.1023/B:DIEQ.0000028714.62481.2d.
4. Mironov A. N. and Mironova L. B., “On Laplace invariants for equations with dominating third-order partial derivative and two independent variables,” Math. Notes, **99**, No. 1-2, 110–115 (2016). DOI: 10.1134/S0001434616010119.
5. Mironov A. N. and Mironova L. B., “Laplace invariants for a fourth-order equation with two independent variables,” Russ. Math., **58**, No. 10, 22–28 (2014). DOI: 10.3103/S1066369X14100041.
6. Mironov A. N. and Mironova L. B., “Laplace invariants of an equation with a dominating partial derivative and three independent variables,” Differ. Equ., **55**, No. 1, 68–74 (2019). DOI: 10.1134/S0012266119010075.
7. Kuznetsova M. N., “Laplace transform and nonlinear hyperbolic equations [in Russian],” Ufim. Mat. Zhurn., **1**, No. 3, 87–96 (2009).

-
- 8. Zhiber A. V. and Sokolov V. V., “Exactly integrable hyperbolic equations of Liouville type,” Russ. Math. Surv., **56**, No. 1, 61–101 (2001). DOI: 10.1070/RM2001v056n01ABEH000357.
 - 9. Startsev S. Ya., “Laplace invariants of hyperbolic equations linearizable by a differential substitution,” Theor. Math. Phys., **120**, No. 2, 1009–1018 (1999). DOI: 10.1007/BF02557408.

Submitted September 15, 2023

Revised May 17, 2024

Accepted May 30, 2024

Igor V. Rakhmelevich
Nizhny Novgorod State University,
23 Gagarin Avenue, Nizhny Novgorod 603950, Russia
igor-kitpd@yandex.ru

ANALYSIS OF A RELATIONAL FIXED POINT PROBLEM

B. S. Choudhury, C. Bandyopadhyay,
and P. Chakraborty

Abstract: We obtain a result by combining three prevalent trends of the fixed point theory, namely (i) replacement of the Lipschitz constants in contraction inequality by functions, (ii) considerations of functions without continuity assumption and (iii) use of binary relations in the space. Specifically, we define a Mizoguchi–Takahashi–Kannan type contraction, which is shown to have fixed points in a metric space with an appropriate binary relation. The issue of the uniqueness of fixed point is separately considered. There are two illustrative examples, in one of which the discontinuity of the function occurs at a fixed point. We discuss Hyers–Ulam–Rassias stability of the fixed point problem and also establish a data dependence result.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-2-59-69

Keywords: fixed point, *MT*-function, Kannan type contraction, binary relation, Hyers–Ulam–Rassias stability, data dependence.

1. Introduction and mathematical preliminaries

It is a widely recognized fact that Banach's contraction mapping principle is the origin of what is known today as metric fixed point theory. It is a vast and expanding domain having important implications in various branches of mathematics. Several generalizations of this celebrated principle were established over the years. These efforts are also being continued in contemporary academics. Some prominent instances from these works are [1–5], etc. Particularly in [2] Nalder proved a multivalued generalization of Banach's result. Later a generalization was advanced by Mizoguchi and Takahashi [1], where they have extended the result of Nalder [2] with the replacement of the contractive constant k ($0 \leq k < 1$) by a suitable function. In [6] Suzuki provided an example of the function used in [1], which is known as *MT-function*, and showed that [1] is a real generalization of [2]. This function has been used in a number of works in recent times, as, for instances [6–11]. In the following we consider *MT*-functions for replacement of contraction constants.

On the other hand a separate type of contraction mapping was defined by Kannan [12] which is now known by his name as *Kannan type contraction*. These mappings are important since they are not necessarily continuous and hence are different in category from the Banach's contraction. The work of Kannan initiated the line of research for investigation of fixed points of functions with discontinuities. Kannan type contractions have appeared in a large number of papers like those

in references [4, 13–15]. In this paper we consider such mappings to establish our results.

The use of binary relations in establishing fixed point results has become a new trend. In this line of research the contractive conditions are not assumed to hold on the whole space, but only on some pairs of points which are related by a suitable binary relation \mathcal{R} . The notion of \mathcal{R} -completeness enables us to take the domain of the function to be non-complete. The relation theoretic notions are effective to encompass a larger class of sets to be considered as the domain sets and allows a less restrictive class of functions to be taken into account for fixed point studies on these domain sets. This is a new and emerging area in the field of fixed point theory. A few works in this line are [16–19].

In this paper the above three ideas are incorporated to fabricate new fixed point results. Illustrative examples are provided to support them. It is noted that in one of the examples one of the fixed points is a point of discontinuity of the function.

The concept of Hyers–Ulam–Rassias stability has its root in the question which Ulam [20] had raised in 1940 that whether an approximately linear transformation has a linear approximation? This question was partially addressed affirmatively by Hyers in the context of Banach spaces [21]. The notion of Hyers–Ulam–Rassias stability of the fixed point equation $x = fx$ has appeared in the literature in several works like [21–27]. Here we discuss the Hyers–Ulam–Rassias stability of our fixed point problem and show that approximate fixed points can be approximated by the actual fixed point.

Given two operators on X , if the distances between the images of each point under those maps are bounded by a finite number, then determining a bound for the distance between the fixed points sets (if non-empty) of the two operators is known as the problem of data dependence. Few works in this topic are [26, 28–30]. Here in our paper we have a data dependence result for our problem.

In this paper we denote \mathbb{N} as the set of natural numbers; \mathbb{R} as the set of real numbers and \mathbb{R}_+ as the set of non-negative real numbers.

DEFINITION 1.1 [16]. Let X be a nonempty set. A subset \mathcal{R} of $X \times X$ is a binary relation on X . We say that x and y are \mathcal{R} -comparative if either $(x, y) \in \mathcal{R}$ or $(y, x) \in \mathcal{R}$. We denote it by $[x, y] \in \mathcal{R}$.

DEFINITION 1.2 [16]. Let X be a nonempty set and \mathcal{R} be a binary relation on X . A sequence $\{x_n\} \subseteq X$ is called \mathcal{R} -preserving if $(x_n, x_{n+1}) \in \mathcal{R}$, for all $n \in \mathbb{N}$.

DEFINITION 1.3 [31]. Let (X, d) be a metric space and \mathcal{R} be a binary relation on X . We say that (X, d) is \mathcal{R} -complete if every \mathcal{R} -preserving Cauchy sequence in X is convergent.

DEFINITION 1.4 [16]. Let X be a nonempty set and T be a self-mapping on X . A binary relation \mathcal{R} defined on X is called T -closed if for any $x, y \in X$, $(x, y) \in \mathcal{R}$ implies $(Tx, Ty) \in \mathcal{R}$.

DEFINITION 1.5 [31]. Let (X, d) be a metric space and \mathcal{R} be a binary relation on X and $x \in X$. A mapping $T : X \rightarrow X$ is called \mathcal{R} -continuous at x if for any \mathcal{R} -

preserving sequence $\{x_n\}$, $Tx_n \rightarrow Tx$, whenever $x_n \rightarrow x$. T is called \mathcal{R} -continuous if it is \mathcal{R} -continuous at each point of X .

DEFINITION 1.6 [16]. Let (X, d) be a metric space. A binary relation \mathcal{R} defined on X is called *d-self closed* if every \mathcal{R} -preserving convergent sequence $\{x_n\}$ (with $x_n \rightarrow x$, as $n \rightarrow \infty$), has a subsequence $\{x_{n_k}\}$ such that $[x_{n_k}, x] \in \mathcal{R}$, for all $k \in \mathbb{N}$.

DEFINITION 1.7 [32]. Let X be a nonempty set and \mathcal{R} be a binary relation on X . For $x, y \in X$, a path of length k (where k is a natural number) in \mathcal{R} from x to y is a finite sequence $\{z_0, z_1, z_2, \dots, z_k\} \subseteq X$ satisfying the following conditions:

- (i) $z_0 = x$ and $z_k = y$,
- (ii) $(z_i, z_{i+1}) \in \mathcal{R}$ for each i where $0 \leq i \leq k - 1$.

DEFINITION 1.8 [17]. A relation \mathcal{R} is called *transitive* if $(x, z) \in \mathcal{R}$, whenever $(x, y), (y, z) \in \mathcal{R}$.

DEFINITION 1.9 [17]. Given a mapping $T : X \rightarrow X$, a relation \mathcal{R} is called *T-transitive* if $(Tx, Tz) \in \mathcal{R}$ whenever $(Tx, Ty), (Ty, Tz) \in \mathcal{R}$, for all $x, y, z \in X$.

DEFINITION 1.10. Let (X, d) be a metric space and \mathcal{R} be a relation on it. X is called \mathcal{R} -connected if for all $x, y \in X$ there is a path in \mathcal{R} from x to y .

DEFINITION 1.11 [1, 7, 8]. A function $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ is said to be an *MT-function* if it satisfies Mizoguchi–Takahashi's condition, that is, $\limsup_{s \rightarrow t+} \varphi(s) < 1$ for all $t \in [0, \infty)$.

Clearly, if $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ is a nondecreasing function or a nonincreasing function, then φ is an MT-function.

In particular, if $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ is defined by $f(t) = c$, where $c \in [0, 1)$, then φ is an *MT-function*.

We now state a result, given by W. S. Du [9], which will be useful to prove our theorem.

Theorem 1.1 [9]. Let $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ be a function. Then the following statements are equivalent:

- (a) ϕ is an *MT-function*.
- (b) For each $t \in [0, \infty)$, $\exists r_t^{(1)} \in [0, 1)$ and $\varepsilon_t^{(1)} > 0$ such that $\phi(s) \leq r_t^{(1)}$ for all $s \in (t, t + \varepsilon_t^{(1)})$.
- (c) For each $t \in [0, \infty)$, $\exists r_t^{(2)} \in [0, 1)$ and $\varepsilon_t^{(2)} > 0$ such that $\phi(s) \leq r_t^{(2)}$ for all $s \in [t, t + \varepsilon_t^{(2)})$.
- (d) For each $t \in [0, \infty)$, $\exists r_t^{(3)} \in [0, 1)$ and $\varepsilon_t^{(3)} > 0$ such that $\phi(s) \leq r_t^{(3)}$ for all $s \in (t, t + \varepsilon_t^{(3)})$.
- (e) For each $t \in [0, \infty)$, $\exists r_t^{(4)} \in [0, 1)$ and $\varepsilon_t^{(4)} > 0$ such that $\phi(s) \leq r_t^{(4)}$ for all $s \in [t, t + \varepsilon_t^{(4)})$.

In the following we use the following notations:

- $X(T; \mathcal{R}) := \{x : (x, Tx) \in \mathcal{R}\}$.
- $F(T) := \{x : x = Tx\}$.

- $G(T, \varepsilon) := \{x : d(x, Tx) \leq \varepsilon\}$.

DEFINITION 1.12 [27]. Let X be a nonempty set and T a self-mapping on X . The fixed point problem $x = Tx$ is said to be *generalized Hyers–Ulam–Rassias stable* if there exists a function $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, which is non-decreasing, continuous at 0 with $f(0) = 0$, such that for each $\varepsilon > 0$ and each $w \in G(T, \varepsilon)$ there exists $x_0 \in F(T)$, with $d(x_0, w) < f(\varepsilon)$.

If $f(t) = ct$ for some $c > 0$, then the problem is called *Hyers–Ulam–Rassias stable*.

2. Existence of fixed points

Theorem 2.1. Let (X, d) be a metric space equipped with a binary relation \mathcal{R} and a self map T . Assume that the following conditions hold:

- (i) (X, d) is \mathcal{R} -complete;
- (ii) $X(T; \mathcal{R})$ is non empty;
- (iii) \mathcal{R} is T -closed;
- (iv) either T is \mathcal{R} -continuous or \mathcal{R} is d -self closed;
- (v) there exists an MT -function $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ such that for all $x, y \in X$, with $[x, y] \in \mathcal{R}$ the following condition holds:

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{1}{2}\varphi(d(x, y))(d(x, Tx) + d(y, Ty)). \quad (2.1)$$

Then T has a fixed point.

PROOF. Since $X(T; R) \neq \emptyset$, let us choose $x_0 \in X(T; R)$ and construct a sequence $\{x_n\}$ by $x_n = Tx_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Since $(x_0, Tx_0) \in \mathcal{R}$ and \mathcal{R} is T -closed, $(x_n, x_{n+1}) \in \mathcal{R}$ for all $n \in \mathbb{N}$. So the sequence $\{x_n\}$ is \mathcal{R} -preserving.

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &= d(Tx_0, Tx_1) \leq \frac{1}{2}\varphi(d(x_0, x_1))(d(x_0, Tx_0) + d(x_1, Tx_1)) \\ &= \frac{1}{2}\varphi(d(x_0, x_1))(d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)), \\ &\implies d(x_1, x_2) \leq \frac{\varphi(d(x_0, x_1))}{2 - \varphi(d(x_0, x_1))}d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Put $\psi(t) = \frac{\varphi(t)}{2 - \varphi(t)}$. So, $\limsup_{s \rightarrow t^+} \psi(s) < 1$. Therefore $\psi(t)$ is an MT -function. Note that $\psi(t) < 1$ for any $t > 0$. Thus, $d(x_1, x_2) \leq \psi(d(x_0, x_1))d(x_0, x_1) < d(x_0, x_1)$.

Continuing the above process n -times, we have

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \psi(d(x_n, x_{n+1}))d(x_n, x_{n+1}) < d(x_n, x_{n+1}). \quad (2.2)$$

Thus, the sequence $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ is monotone decreasing in $[0, \infty)$. Then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = \inf_{n \in \mathbb{N}} d(x_n, x_{n+1}) \geq 0.$$

Let $\inf_{n \in \mathbb{N}} d(x_n, x_{n+1}) = t_0$. Since ψ is an MT -function, there exists $r_{t_0} \in [0, 1)$ and $\varepsilon_{t_0} > 0$ such that $\psi(d(x_n, x_{n+1})) \leq r_{t_0}$ whenever $t_0 \leq d(x_n, x_{n+1}) < t_0 + \varepsilon_{t_0}$. As

$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = t_0$, for the above $\varepsilon_{t_0} > 0$, $\exists l \in \mathbb{N}$ such that $t_0 \leq d(x_n, x_{n+1}) < t_0 + \varepsilon_{t_0}$, for all $n \in \mathbb{N}$ with $n \geq l$. Let

$$\lambda = \max\{\psi(d(x_1, x_2), \psi(d(x_2, x_3)), \dots, \psi(d(x_{l-1}, x_l), r_{t_0})\}.$$

Therefore we have

$$0 \leq \psi(d(x_n, x_{n+1})) \leq \lambda < 1 \text{ for all } n \in \mathbb{N}. \quad (2.3)$$

Using this in (2.2) we get

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda d(x_{n-1}, x_n) \leq \lambda^n d(x_0, x_1). \quad (2.4)$$

Now, for $m, n \in \mathbb{N}$ with $m \geq n$, we have

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq \sum_{i=n}^{m-1} \lambda^i d(x_0, x_1) \\ &\leq d(x_0, x_1) \sum_{i=n}^{m-1} \lambda^i \leq d(x_0, x_1) \sum_{i=n}^{\infty} \lambda^i = \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_0, x_1). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Now, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n = 0$ as $\lambda \in (0, 1)$. Thus from (2.3) we have, $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$, as $m, n \rightarrow \infty$. Therefore $\{x_n\}$ is a Cauchy sequence. Since (X, d) is \mathcal{R} -complete and $\{x_n\}$ is \mathcal{R} -preserving Cauchy sequence, there exists $z \in X$ such that $\{x_n\}$ converges to z .

Now we consider two cases to incorporate condition-(iv) of this theorem.

Case-I: T is \mathcal{R} -continuous.

Since $x_{n+1} = Tx_n$, taking $\lim n \rightarrow \infty$ and using \mathcal{R} -continuity of T , we have $z = Tz$. Hence z is a fixed point of T .

Case-II: \mathcal{R} is d -self closed.

If \mathcal{R} is d -self closed, since $\{x_n\}$ is \mathcal{R} -preserving and $x_n \rightarrow z$ as $n \rightarrow \infty$, there exists a subsequence $\{x_{n_k}\}$ of $\{x_n\}$ such that $[x_{n_k}, z] \in \mathcal{R}$ for all $k \in \mathbb{N}$. Therefore,

$$\begin{aligned} d(x_{n_k+1}, Tz) &= d(Tx_{n_k}, Tz) \leq \frac{1}{2} \varphi(d(x_{n_k}, z))(d(x_{n_k}, Tx_{n_k}) + d(z, Tz)) \\ &= \frac{1}{2} \varphi(d(x_{n_k}, z))(d(x_{n_k+1}, x_{n_k}) + d(z, Tz)). \end{aligned}$$

Taking limit superior $k \rightarrow \infty$ in the above inequality, we get

$$d(z, Tz) \leq \frac{1}{2} (\limsup_{k \rightarrow \infty} \varphi(d(x_{n_k}, z))) d(z, Tz).$$

This implies that $d(z, Tz) = 0$ that is $z = Tz$.

Hence in any cases, T has a fixed point. \square

EXAMPLE 2.1. Let $X = (-2, \infty)$, endowed with the usual metric d . \mathcal{R} is a relation on X , defined by $(x, y) \in \mathcal{R}$ if $1 \geq x \geq y \geq 0$. $T : X \rightarrow X$ be a mapping defined by

$$Tx = \begin{cases} \frac{x}{5} & \text{if } x \in [0, \infty), \\ 0 & \text{if } x \in (-2, 0] \cap \mathbb{Q}, \\ -\sqrt{2} & \text{if } x \in (-2, 0] \cap \mathbb{Q}^c. \end{cases}$$

Let $\{x_n\}$ be any \mathcal{R} -preserving Cauchy sequence in X . Then $x_n \geq x_{n+1}$ and $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Clearly $\{x_n\}$ is convergent. Hence (X, d) is \mathcal{R} -complete.

Again we have $(1, T(1)) \in \mathcal{R}$, as $0 \leq T(1) = \frac{1}{5} \leq 1$. So $X(T, \mathcal{R})$ is non empty.

If $(x, y) \in \mathcal{R}$, then $1 \geq x \geq y \geq 0$ which implies $1 > \frac{x}{5} \geq \frac{y}{5} \geq 0$. Thus $(Tx, Ty) \in \mathcal{R}$. Hence \mathcal{R} is T -closed.

To show that T is \mathcal{R} -continuous, let $x \in X$ be any element. If $x < 0$ or $x > 1$ then there is no \mathcal{R} -preserving sequence converging to x . Then the condition of \mathcal{R} -continuity is vacuously satisfied for such x . Now assume $0 \leq x \leq 1$ and $\{x_n\}$ be any \mathcal{R} -preserving sequence converging to x . Then, $x_n \geq x_{n+1}$ and $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Thus $Tx_n = \frac{x_n}{5} \rightarrow \frac{x}{5} = Tx$, as $n \rightarrow \infty$. Thus T is \mathcal{R} -continuous.

Now, let $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ be defined by $\varphi(t) = \frac{1}{2}$, for all $t \geq 0$. Clearly φ is an MT -function.

For any $[x, y] \in \mathcal{R}$,

$$d(Tx, Ty) = \left| \frac{x}{5} - \frac{y}{5} \right| = \frac{|x - y|}{5}.$$

Again we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\varphi(d(x, y))(d(x, Tx) + d(y, Ty)) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left(\left| x - \frac{x}{5} \right| + \left| y - \frac{y}{5} \right| \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left(\left| \frac{4x}{5} \right| + \left| \frac{4y}{5} \right| \right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{4(x+y)}{5} = \frac{(x+y)}{5}. \end{aligned}$$

Since $[x, y] \in \mathcal{R}$, either $(x, y) \in \mathcal{R}$ or $(y, x) \in \mathcal{R}$. In any case,

$$d(Tx, Ty) = \frac{|x - y|}{5} \leq \frac{x+y}{5} = \frac{1}{2}\varphi(d(x, y))(d(x, Tx) + d(y, Ty)).$$

So the relation (2.1) is satisfied.

Hence all the conditions of Theorem 2.1 are satisfied. Here it is seen that 0 is a fixed point of T .

REMARK 1. In this example it is seen that other than 0, the point $-\sqrt{2}$ is also a fixed point of T . Thus fixed points are not unique.

REMARK 2. If we take $x = -\sqrt{3}$, $y = -1$ then relation (2.1) is not satisfied. Hence the relation (2.1) is not necessarily satisfied for every pair $x, y \in X$. This shows that our theorem do not require the function T to be contractive on the whole space X , but only to satisfy the contractive condition on those elements which are related by \mathcal{R} for assuring the existence of a fixed point.

REMARK 3. In this example it is seen that the function T is not continuous when $x < 0$, but it is \mathcal{R} -continuous on the whole space. So our result do not require continuity of T but only \mathcal{R} -continuity.

REMARK 4. The function T has discontinuities at both of its fixed points.

REMARK 5. The domain of the function T is non-complete. So our result do not require the domain of T to be complete but only to be \mathcal{R} -complete.

3. Uniqueness of the fixed point

Lemma 3.1. Let (X, d) be a metric space equipped with a binary relation \mathcal{R} on X . Let T be a self map on X and there exists an MT-function $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ such that for all $x, y \in X$, with $[x, y] \in \mathcal{R}$ the following condition holds:

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{1}{2}\varphi(d(x, y))(d(x, Tx) + d(y, Ty)). \quad (3.1)$$

If T has two distinct fixed points x_0 and y_0 , then $[x_0, y_0] \notin \mathcal{R}$.

PROOF. If possible let T has two distinct fixed points x_0, y_0 , and $[x_0, y_0] \in \mathcal{R}$. By equation (2.2) we have

$$d(Tx_0, Ty_0) \leq \frac{1}{2}\varphi(d(x_0, y_0))(d(x_0, Tx_0) + d(y_0, Ty_0)) = \frac{1}{2}\varphi(d(x_0, y_0)) \times 0 = 0$$

since $x_0 = Tx_0$, $y_0 = Ty_0$. Thus we have $Tx_0 = Ty_0$, that is $x_0 = y_0$, which is a contradiction to our assumption. Hence the result is proved. \square

NOTE. If T has fixed points x_0, y_0 with $[x_0, y_0] \in \mathcal{R}$, then $x_0 = y_0$.

Theorem 3.1. In addition to the conditions stated in Theorem 2.1, if the following conditions hold:

(vi) $T(X)$ is \mathcal{R} -connected;

(vii) \mathcal{R} is T -transitive;

then, the fixed point is unique.

PROOF. Suppose that, along with the conditions stated in Theorem 2.1, the above conditions (vi) and (vii) also hold. Let x, y be two fixed points of T .

By (vi), there is a path $\{z_0, z_1, \dots, z_k\}$ of finite length such that $x = z_0$, $y = z_k$, $z_i \in T(X)$ and $(z_i, z_{i+1}) \in \mathcal{R}$ for $0 \leq i \leq k - 1$.

As \mathcal{R} is T -transitive, we have $(x, y) \in \mathcal{R}$. Then, by the previous lemma, we conclude that $x = y$.

Thus the fixed point is unique. \square

REMARK 3.1. The following example 3.1 shows that conditions of Theorem 2.1, although sufficient for ensuring the existence of a fixed point, is not enough to assure its uniqueness. We have Theorem 3.1 for that purpose. We now present one example to illustrate the role of Theorem 3.1 for the uniqueness part.

EXAMPLE 3.1. Let $X = \mathbb{R}$ endowed with the usual metric d , \mathcal{R} be the relation defined on X by $(x, y) \in \mathcal{R}$ if $x \geq y \geq 0$, ϕ be the MT-function as in example 2.1 and $T : X \rightarrow X$ be a mapping defined by

$$Tx = \begin{cases} \frac{x}{5} & \text{if } x \geq 0, \\ 0 & \text{if } x < 0, \ x \in \mathbb{Q}, \\ 2 & \text{if } x < 0, \ x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

By the similar argument as in the example 2.1 it can easily be verified that all the conditions of Theorem 3.1 are satisfied.

Moreover for any $x, y \in T(X)$, we have $x \geq 0$ and $y \geq 0$. As, either $x \geq y$ or $y \geq x$, $[x, y] \in \mathcal{R}$. Thus there is a path of length 1 from x to y .

Again, if $x, y, z \in T(X)$ with $(x, y) \in \mathcal{R}$ and $(y, z) \in \mathcal{R}$ then $x \geq y \geq 0$ and $y \geq z \geq 0$. Therefore $x \geq z \geq 0$ which implies $(x, z) \in \mathcal{R}$. Hence \mathcal{R} is T -transitive.

Thus we see that all the conditions of Theorem 3.1 are satisfied. Here it is seen that 0 is the unique fixed point of T .

4. Hyers–Ulam–Rassias stability and data dependence

In this section we first investigate the Hyers–Ulam–Rassias stability of our fixed point problem.

Theorem 4.1. *Let X, T and \mathcal{R} be as in Theorem 2.1. Consider the fixed point problem*

$$x = Tx. \quad (4.1)$$

In addition to the conditions in Theorem 2.1 if the following condition hold:

(viii) if $x^* \in F(T)$, then $[u, x^*] \in \mathcal{R} \forall u \in X$,
then the problem (4.1) is Hyers–Ulam–Rassias stable.

PROOF. By condition (viii) and Lemma 3.1, it is clear that $F(T) = \{z\}$. Let $\varepsilon > 0$ and consider $w \in G(T, \varepsilon)$. Then $d(w, Tw) \leq \varepsilon$. By condition (viii) we have $[w, z] \in \mathcal{R}$, so from relation (2.1) we have

$$\begin{aligned} d(Tz, Tw) &\leq \frac{1}{2}\varphi(d(z, w))(d(z, Tz) + d(w, Tw)) \\ &\leq \frac{1}{2}\varphi(d(z, w))(d(z, z) + d(w, Tw)) \leq \frac{1}{2}\varphi(d(z, w))d(w, Tw). \end{aligned}$$

Then finally we have

$$\begin{aligned} d(w, z) &\leq d(w, Tw) + d(Tw, z) = d(w, Tw) + d(Tw, Tz) \\ &\leq d(w, Tw) + \frac{1}{2}\varphi(d(z, w))d(w, Tw) \leq \varepsilon + \frac{1}{2}\varphi(d(z, w))\varepsilon \leq \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{3}{2}\varepsilon. \end{aligned}$$

since $\varphi(d(z, w)) < 1$. Thus taking $f(\varepsilon) = \frac{3}{2}\varepsilon$, we have for each $\varepsilon > 0$ and each $w \in G(T, \varepsilon)$ there exists $x_0 \in F(T)$, with $d(x_0, w) < f(\varepsilon)$. Hence the problem is Hyers–Ulam–Rassias stable. \square

We now establish a data dependence result.

Theorem 4.2. *Let (X, d) be a metric space and $T_1, T_2 : X \rightarrow X$ two self maps. Let the following conditions be satisfied:*

- (ix) T_1 satisfies all the conditions of Theorem 3.1 and $F(T_2) \neq \emptyset$.
- (x) $d(T_1x, T_2x) < \eta, \forall x \in X$ for some $\eta > 0$.
- (xi) for any $u \in F(T_2), (u, T_1u) \in \mathcal{R}$.

Then $d(s, t) \leq \frac{\eta}{1-\lambda_t}$, for some $0 \leq \lambda_t < 1$, where $s \in F(T_1)$ and $t \in F(T_2)$.

PROOF. Clearly by Theorem 3.1, $F(T_1) = \{z\}$. Thus we put $s = z$. Let $t \in F(T_2)$. By the condition (xi) we have $(t, T_1t) \in \mathcal{R}$. Thus taking $x_0 = t$ and

$x_n = T_1 x_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, we can provide the argument as in Theorem 2.1 to get $x_n \rightarrow z$ as $n \rightarrow \infty$.

By relation (2.4), we have

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda_t d(x_{n-1}, x_n) \leq \lambda_t^n d(x_0, x_1), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Again, by condition (x), we have

$$d(x_0, x_1) = d(T_2 x_0, T_1 x_0) \leq \eta.$$

Therefore,

$$\begin{aligned} d(s, t) &= d(s, x_0) \leq \sum_{i=0}^n d(x_i, x_{i+1}) + d(x_{n+1}, s) \\ &\leq \sum_{i=0}^n \lambda_t^i d(x_0, x_1) + d(x_{n+1}, s) \leq d(x_0, x_1) \sum_{i=0}^n \lambda_t^i + d(x_{n+1}, s). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Taking limit as $n \rightarrow \infty$ in (4.2), we get

$$d(s, t) \leq d(x_0, x_1) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_t^i + d(s, s) = \frac{1}{1 - \lambda_t} d(x_0, x_1) \leq \frac{\eta}{1 - \lambda_t}.$$

Hence our theorem is proved. \square

Acknowledgment. The authors have gratefully acknowledged the comments of the learned reviewer.

REFERENCES

1. Mizoguchi N. and Takahashi W., “Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces,” J. Math. Anal. Appl., **141**, 177–188 (1989).
2. Nadler S. B., Jr., “Multi-valued contraction mappings,” Pac. J. Math., **30**, No. 2, 475–488 (1969).
3. Rhoades B. E., “A comparison of various definitions of contractive mappings,” Trans. Amer. Math. Soc., **226**, 257–290 (1977).
4. Suzuki T., “A generalized Banach contraction principle that characterizes metric completeness,” Proc. Amer. Math. Soc., **136**, 1861–1869 (2008).
5. Weston J. D., “A characterization of metric completeness,” Proc. Amer. Math. Soc., **64**, No. 1, 186–188 (1977).
6. Suzuki T., “The Mizoguchi–Takahashi fixed point theorem is a real generalization of Nadler’s,” J. Math. Anal. Appl., **340**, 752–755 (2008).
7. Du W. S., “Some new results and generalizations in metric fixed point theory,” Nonlinear Anal., **73**, 1439–1446 (2010).
8. Du W. S., “Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions satisfied Mizoguchi–Takahashi’s condition in quasi ordered metric spaces,” Fixed Point Theory Appl., Article ID 876372 (2010).
9. Du W. S., “On coincidence point and fixed point theorems for nonlinear multivalued maps,” Topoloy Appl., **159**, 49–56 (2012).
10. Kamran T., “Mizoguchi–Takahashi’s type fixed point theorem,” Comput. Math. Appl., **57**, No. 3, 507–511 (2009).
11. Sultana A. and Qin X., “On the equivalence of the Mizoguchi–Takahashi locally contractive map and the Nadler’s locally contractive map,” Numer. Funct. Anal. Optimization, **40**, 16 (2019).

12. Kannan R., "Some results on fixed points, II," Amer. Math. Mon., **76**, 405–408 (1969).
13. Enjouji Y., Nakanishi M., and Suzuki T., "A generalization of Kannan's fixed point theorem," Fixed Point Theory Appl., Article ID 192872 (2009).
14. Moradi S., "New extensions of Kannan's fixed-point theorem on complete metric and generalized metric spaces," Int. J. Math. Anal., **5**, No. 47, 2313–2320 (2011).
15. Subrahmanyam P. V., "Completeness and fixed-points," Monatsh. Math., **80**, No. 4, 325–330 (1975).
16. Alam A. and Imdad M., "Relation-theoretic contraction principle," J. Fixed Point Theory Appl., **17**, 693–702 (2015).
17. Alam A. and Imdad M., "Nonlinear contractions in metric spaces under locally T-transitive binary relations," Fixed Point Theory, **19**, No. 1, 13–24 (2018).
18. Chakraborty P., Choudhury B. S., and De la Sen M., "Relation-theoretic fixed point theorems for generalized weakly contractive mappings," Symmetry, **12**, No. 1, 29 (2020).
19. Samet B. and Turinici M., "Fixed point theorems on a metric space endowed with an arbitrary binary relation and applications," Commun. Math. Anal., **13**, 82–97 (2012).
20. Ulam S. M., Problems in Modern Mathematics, Wiley, New York (1964).
21. Hyers D. H., "On the stability of the linear functional equation," Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **27**, No. 4, 222–224 (1941).
22. Aoki T., "On the stability of the linear transformation in Banach spaces," J. Math. Soc. Japan, **2**, 64–66 (1950).
23. Phiangsungnoen S. and Kumam P., "Generalized Ulam–Hyers stability and well-posedness for fixed point equation via α -admissibility," J. Inequal. Appl., **2014**, 418 (2014).
24. Rassias T. M., "On the stability of the linear mappings in Banach spaces," Proc. Amer. Math. Soc., **72**, 297–300 (1978).
25. Rus I. A., "Remarks on Ulam stability of the operational equation," Fixed Point Theory, **10**, No. 2, 305–320 (2009).
26. Rus I. A. and Ţerban M. A., "Basic problems of the metric fixed point theory and the relevance of a metric fixed point theorem," Carpath. J. Math., **29**, No. 2, 239–258 (2013).
27. Sintunavarat W., "Generalized Ulam–Hyers stability, well-posedness, and limit shadowing of fixed point problems for $\alpha - \beta$ contraction mapping in metric spaces," Sci. World J., Article ID 569174 (2014).
28. Choudhury B. S., Metiya N., and Kundu S., "Existence, data-dependence and stability of coupled fixed point sets of some multivalued operators," Chaos Solitons Fractals, **133**, Article ID 109678 (2020).
29. Choudhury B. S., Metiya N., and Kundu S., "Coupled fixed point sets with data dependence and stability," Surv. Math. Appl. (to appear).
30. Rus I. A., Petrușel A., and Sîntămărian A., "Data dependence of the fixed points set of multivalued weakly picard operators," Stud. Univ. Babeș–Bolyai, Math., **46**, No. (2), 111–121 (2001).
31. Alam A. and Imdad M., "Relation-theoretic metrical coincidence theorems," Filomat, **31**, No. 14, 4421–4439 (2017).
32. Kolman B., Busby R. C., and Ross S., Discrete Mathematical Structures, PHI Pvt. Ltd., New

Delhi (2000).

Submitted July 08, 2022

Revised March 22, 2024

Accepted May 30, 2024

Binayak S. Choudhury
Department of Mathematics,
Indian Institute of Engineering, Science and Technology,
Shibpur, Howrah 711103, West Bengal, India
binayak12@yahoo.co.in, binayak@math.iiests.ac.in

Chaitali Bandyopadhyay
Department of Mathematics,
Indian Institute of Engineering, Science and Technology,
Shibpur, Howrah 711103, West Bengal, India
chaitali.math@gmail.com

Priyam Chakraborty (corresponding author)
Department of Mathematics,
Indian Institute of Information Technology Ranchi,
Namkum, Ranchi 834010, Jharkhand, India
priyam.math123@gmail.com

TIME-OPTIMAL CONTROL PROBLEM ASSOCIATED WITH A FOURTH-ORDER PARABOLIC EQUATION

F. N. Dekhkonov

Abstract: We consider a boundary control problem for a fourth-order parabolic equation in a bounded one-dimensional domain. At a part of the boundary, a value of the solution is given and it is required to find control to get the average value of solution. By the method of separation of variables, the problem is reduced to the Volterra integral equation of the first kind. The existence of the control function was proven by the Laplace transform method and an estimate on the minimum time to reach the given average temperature in the rod was found.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-2-70-80

Keywords: boundary value problem, fourth-order parabolic equation, admissible control, minimal time, integral equation, Laplace transform method.

1. Introduction. Problem statement

In this paper, we consider the following fourth-order parabolic equation

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} = 0, \quad (x, t) \in \Omega_T := (0, l) \times (0, \infty), \quad (1)$$

with boundary conditions

$$u(0, t) = h(t), \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

and

$$u_{xx}(0, t) = 0, \quad u_{xx}(l, t) = 0, \quad (3)$$

and initial condition

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (4)$$

Let $M > 0$ be some given constant. We say that the function $h(t) \in W_2^1(\mathbb{R}_+)$ is an *admissible control*, if this function satisfies the conditions

$$h(0) = 0, \quad |h(t)| \leq M, \quad t \geq 0.$$

Assume that the *weight function* $\rho(x) \in W_2^1([0, l])$ satisfies the conditions

$$\rho(x) \geq 0, \quad \rho'(x) \leq 0, \quad \int_0^l \rho(x) dx = 1, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (5)$$

Let

$$\rho(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad x \in (0, l),$$

where ρ_k is the Fourier coefficient of the function $\rho(x)$ and it follows

$$\rho_k = \frac{2}{l} \int_0^l \rho(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

It is well known that some fourth-order parabolic equations were introduced to describe the epitaxial growth of nanoscale thin films, and thus have been of increasing interest in materials science in recent years [1].

Time-Optimal Problem. Let $\theta > 0$ be a given constant. Problem consists of looking for the minimal value of $T > 0$ so that for $t > 0$ the solution $u(x, t)$ of the problem (1)–(4) with control function $h(t)$ exists and for some $T_1 > T$ satisfies the equation

$$\int_0^l \rho(x) u(x, t) dx = \theta, \quad T \leq t \leq T_1. \quad (7)$$

The optimal control problem for the second order parabolic type equations was studied by Fattorini and Friedman [2, 3]. Time-optimal problems with control on the boundary for the second order parabolic equation have been treated by Egorov [4].

The boundary control problem for a second order parabolic type equation with a piecewise smooth boundary in an n -dimensional domain was studied by Albeverio and Alimov [5] and an estimate for the minimum time required to reach a given average temperature was found. In [6, 7], mathematical models of thermocontrol processes for the second order parabolic equation are considered. In the model under consideration, the temperature inside a domain is controlled by m convectors acting on the boundary. In this work, the necessary and sufficient conditions for achieving the given projection of the temperature into some m -dimensional subspace are studied. Control problems for the second-order parabolic equation in the three-dimensional domain are studied in [8].

Control problems for second-order parabolic equations in bounded two-dimensional domains are studied in works [9, 10]. In these articles, an estimate was found for the minimum time required to heat a bounded domain to an estimate average temperature. The existence of control function is proved by Laplace transform method. Similar control problems in the one-dimensional domain were studied in [11–14]. In [15], the existence of control functions was proved using the Laplace transform method when there are two control functions on the boundary.

Basic information on optimal control problems is given in detail in monographs by Lions and Fursikov [16, 17]. General numerical optimization and optimal control for second-order parabolic equations have been studied in many publications such as [18]. Practical applications of optimal control problems for equations of parabolic type are presented in [19].

Some boundary control problems for the pseudo-parabolic equation in one- and two-dimensional bounded domains were studied in works [20–22]. In these works, the existence of the control function is proved using the method of Laplace transform.

In recent years, due to the increasing interest in physics and mathematics, much effort has been devoted to the study of boundary control problems for fourth-order parabolic equations. In [23], Guo considered the null- boundary control problem for a fourth-order parabolic equation in a one-dimensional bounded domain. This problem uses the method of reducing the control problem to well-posed problems proposed by Guo and Littman [24].

In [25], the null interior controllability for a fourth-order parabolic equation was studied. The method they used is based on Lebeau–Rabbiano inequality. The initial boundary value problem of a class of fourth-order semilinear parabolic equations was studied by Xu, et al. [26], and the global existence and nonexistence of solutions with initial data in the potential well are derived. Further research results on the global dynamic behavior of solutions associated with fourth-order parabolic equations for the epitaxial thin film model were studied by Chen [27].

In this work, the boundary control problem for the fourth-order parabolic equation is considered. The boundary control problem studied in this work is reduced to the Volterra integral equation of the first kind by the Fourier method (Section 2). In Section 3, the existence of a solution to the integral equation is proved using the Laplace transform method. Section 4 gives an estimate of the minimum time required to reach a given average temperature of the rod.

We consider

$$\begin{cases} X^{(4)}(x) = \lambda X(x), & 0 < x < l, \\ X(0) = X(l) = 0, & X''(0) = X''(l) = 0, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

Then we have

$$\lambda_k = \frac{k^4\pi^4}{l^4}, \quad X_k(x) = \sin \frac{k\pi}{l}x, \quad k = 1, 2, \dots$$

Set

$$\beta_k = \frac{\pi^3 k^3}{l^3} \rho_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Theorem 1. Let

$$0 < \theta < \frac{\beta_1 M}{\lambda_1}.$$

Set

$$T_0 = -\frac{1}{\lambda_1} \ln \left(1 - \frac{\theta \lambda_1}{\beta_1 M} \right).$$

Then a solution T_{min} of the time-optimal problem exists and the estimate $T_{min} \leq T_0$ is valid.

2. Integral equation

By the solution of the problem (1)–(4) we mean function $u(x, t)$, expressed the form

$$u(x, t) = h(t) \frac{l-x}{l} - w(x, t), \quad (9)$$

where the function $w(x, t) \in C_{x,t}^{4,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$, $w_{xx} \in C(\overline{\Omega}_T)$ is the solution to the problem

$$w_t(x, t) + w_{xxxx}(x, t) = \frac{l-x}{l} h'(t),$$

with boundary conditions

$$w(0, t) = w(l, t) = 0, \quad w_{xx}(0, t) = w_{xx}(l, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

and initial condition

$$w(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Consequently, we have (see [28])

$$w(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} h'(s) ds \right) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (10)$$

It follows from (9) and (10), we get the solution of the problem (1)–(4):

$$u(x, t) = \frac{l-x}{l} h(t) - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} h'(s) ds \right) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (11)$$

Let there exists $M_0 > 0$ constant. Then we denote by $W(M_0)$ the set of function $f \in W_2^2(-\infty, +\infty)$, $f(t) = 0$ for $t \leq 0$ which satisfies the condition

$$\|f\|_{W_2^2(R_+)} \leq M_0.$$

From (11) and the condition (7), we can write

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^l \rho(x) u(x, t) dx \\ &= h(t) \int_0^l \rho(x) \frac{l-x}{l} dx - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_0^l \rho(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} h'(s) ds, \end{aligned}$$

where $f(t) = \theta$ for $T \leq t \leq T_1$.

Then from (6), we have

$$f(t) = h(t) \int_0^l \rho(x) \frac{l-x}{l} dx - \frac{l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_k}{k} \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} h'(s) ds. \quad (12)$$

According to Parseval equation, we have

$$\int_0^l \rho(x) \frac{l-x}{l} dx = \frac{l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_k}{k}. \quad (13)$$

From (12) and (13) we may write

$$\begin{aligned} f(t) &= h(t) \int_0^l \rho(x) \frac{l-x}{l} dx - h(t) \frac{l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_k}{k} \\ &\quad + \frac{l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_k \lambda_k}{k} \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} h(s) ds = \frac{\pi^3}{l^3} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k k^3 \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} h(s) ds. \end{aligned}$$

We set

$$K(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e^{-\lambda_k t}, \quad t > 0, \quad (14)$$

where β_k is defined by (8).

Then we get the integral equation

$$\int_0^t K(t-s)h(s) ds = f(t), \quad t > 0, \quad (15)$$

where $f(t) = \theta = \text{const} > 0$ for $T \leq t \leq T_1$.

Theorem 2. *There exists $M_0 > 0$ such that for any function $f \in W(M_0)$ the solution $h(t)$ of the equation (15) exists and satisfies condition $|h(t)| \leq M$.*

Lemma 1 [11]. *Let $g(x) \geq 0$ and $g'(x) \leq 0$ on $x \in [0, \infty)$. Then the following inequality is valid:*

$$\int_0^{n\pi} g(x) \sin x dx \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Corollary 1. *Let the function $\rho(x)$ satisfies conditions (5). Then the following inequality is valid:*

$$\int_0^l \rho(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Proposition 1. *For the coefficients $\{\rho_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ defined by (6), the following estimate is valid:*

$$0 \leq \rho_k \leq \frac{C}{k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

where $C = \text{const} > 0$.

PROOF. According to Lemma 1, we have

$$\rho_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

From (6), we write

$$\begin{aligned} \rho_k &= \frac{2}{l} \int_0^l \rho(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx = -\frac{2}{l} \rho(x) \frac{l}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{l} \Big|_{x=0}^{x=l} \\ &\quad + \frac{2}{k\pi} \int_0^l \rho'(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{2}{k\pi} (\rho(0) - (-1)^k \rho(l)) + \frac{o(1)}{k}. \end{aligned}$$

It is clear that $\rho(0) - (-1)^k \rho(l) \geq 0$, $k = 1, 2, \dots$, where function $\rho(x)$ is satisfies conditions (5). Then we obtain

$$0 \leq \rho_k \leq \frac{C}{k}.$$

Proposition 1 is proved.

Proposition 2. *Let $\alpha \in (\frac{3}{4}, 1)$. Then for the function $K(t)$ defined by (14) the following estimate:*

$$0 < K(t) \leq C_\alpha t^{-\alpha}, \quad 0 < t \leq 1,$$

is valid, where C_α is a constant only depending on α .

PROOF. It is clear that from (8) and Proposition 1, we have

$$0 \leq \beta_k \leq Ck^2.$$

Let $3/4 < \alpha < 1$ and $\eta > 0$. Then the maximum value of the function $\chi(t, \eta) = t^\alpha e^{-\eta t}$ is reached at the point $t = \frac{\alpha}{\eta}$ and this value is equal to $\frac{\alpha^\alpha}{\eta^\alpha} e^{-\alpha}$. As a result, for any $3/4 < \alpha < 1$, we get the estimate

$$K(t) = \frac{1}{t^\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k t^\alpha e^{-\lambda_k t} \leq \frac{C\alpha^\alpha e^{-\alpha}}{t^\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{\lambda_k^\alpha} \leq \frac{C_\alpha}{t^\alpha},$$

where $\lambda_k = \frac{k^4 \pi^4}{l^4}$ and

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{\lambda_k^\alpha} = \frac{l^{4\alpha}}{\pi^{4\alpha}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{4\alpha-2}} < +\infty.$$

Proposition 2 is proved.

3. Proof of Theorem 2

We write integral equation (15)

$$\int_0^t K(t-s)h(s) ds = f(t), \quad t > 0.$$

We use the Laplace transform method to solve equation (15). We introduce the notation

$$\tilde{h}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} h(t) dt.$$

Then we obtain the following equation using Laplace transform

$$\tilde{f}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t K(t-s)h(s) ds = \tilde{K}(p)\tilde{h}(p).$$

Consequently, we obtain

$$\tilde{h}(p) = \frac{\tilde{f}(p)}{\tilde{K}(p)}, \quad \text{where } p = \sigma + i\tau, \sigma > 0, \tau \in \mathbb{R},$$

and

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\tilde{f}(p)}{\tilde{K}(p)} e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{f}(\sigma+i\tau)}{\tilde{K}(\sigma+i\tau)} e^{(\sigma+i\tau)t} d\tau. \quad (16)$$

Proposition 3. *The following estimate is valid:*

$$|\tilde{K}(\sigma + i\tau)| \geq \frac{C_\sigma}{\sqrt{1 + \tau^2}}, \quad \sigma > 0, \tau \in \mathbb{R},$$

where C_σ is a constant only depending on σ .

PROOF. It is clear that

$$\tilde{K}(p) = \int_0^\infty K(t)e^{-pt} dt = \sum_{k=1}^\infty \beta_k \int_0^\infty e^{-(p+\lambda_k)t} dt = \sum_{k=1}^\infty \frac{\beta_k}{p + \lambda_k},$$

where $K(t)$ is defined by (14) and

$$\begin{aligned} \tilde{K}(\sigma + i\tau) &= \sum_{k=1}^\infty \frac{\beta_k}{\sigma + \lambda_k + i\tau} = \sum_{k=1}^\infty \frac{\beta_k(\sigma + \lambda_k)}{(\sigma + \lambda_k)^2 + \tau^2} - i\tau \sum_{k=1}^\infty \frac{\beta_k}{(\sigma + \lambda_k)^2 + \tau^2} \\ &= \operatorname{Re} \tilde{K}(\sigma + i\tau) + i \operatorname{Im} \tilde{K}(\sigma + i\tau), \end{aligned}$$

where

$$\operatorname{Re} \tilde{K}(\sigma + i\tau) = \sum_{k=1}^\infty \frac{\beta_k(\sigma + \lambda_k)}{(\sigma + \lambda_k)^2 + \tau^2}, \quad \operatorname{Im} \tilde{K}(\sigma + i\tau) = -\tau \sum_{k=1}^\infty \frac{\beta_k}{(\sigma + \lambda_k)^2 + \tau^2}.$$

We know that

$$(\sigma + \lambda_k)^2 + \tau^2 \leq [(\sigma + \lambda_k)^2 + 1](1 + \tau^2),$$

and we have the following inequality:

$$\frac{1}{(\sigma + \lambda_k)^2 + \tau^2} \geq \frac{1}{1 + \tau^2} \frac{1}{(\sigma + \lambda_k)^2 + 1}. \quad (17)$$

Consequently, according to (17) we can obtain the following: estimates

$$|\operatorname{Re} \tilde{K}(\sigma + i\tau)| = \sum_{k=1}^\infty \frac{\beta_k(\sigma + \lambda_k)}{(\sigma + \lambda_k)^2 + \tau^2} \geq \frac{1}{1 + \tau^2} \sum_{k=1}^\infty \frac{\beta_k(\sigma + \lambda_k)}{(\sigma + \lambda_k)^2 + 1} = \frac{C_{1,\sigma}}{1 + \tau^2}, \quad (18)$$

and

$$|\operatorname{Im} \tilde{K}(\sigma + i\tau)| = |\tau| \sum_{k=1}^\infty \frac{\beta_k}{(\sigma + \lambda_k)^2 + \tau^2} \geq \frac{|\tau|}{1 + \tau^2} \sum_{k=1}^\infty \frac{\beta_k}{(\sigma + \lambda_k)^2 + 1} = \frac{C_{2,\sigma}|\tau|}{1 + \tau^2}, \quad (19)$$

where $C_{1,\sigma}$, $C_{2,\sigma}$ as follows

$$C_{1,\sigma} = \sum_{k=1}^\infty \frac{\beta_k(\sigma + \lambda_k)}{(\sigma + \lambda_k)^2 + 1}, \quad C_{2,\sigma} = \sum_{k=1}^\infty \frac{\beta_k}{(\sigma + \lambda_k)^2 + 1}.$$

From (18) and (19), we have the estimate

$$|\tilde{K}(\sigma + i\tau)|^2 = |\operatorname{Re} \tilde{K}(\sigma + i\tau)|^2 + |\operatorname{Im} \tilde{K}(\sigma + i\tau)|^2 \geq \frac{\min(C_{1,\sigma}^2, C_{2,\sigma}^2)}{1 + \tau^2},$$

and

$$|\tilde{K}(\sigma + i\tau)| \geq \frac{C_\sigma}{\sqrt{1 + \tau^2}}, \quad \text{where } C_\sigma = \min(C_{1,\sigma}, C_{2,\sigma}). \quad (20)$$

Proposition 3 is proved.

Then, when $\sigma \rightarrow 0$ from (16), we obtain

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{f}(i\tau)}{\tilde{K}(i\tau)} e^{i\tau t} d\tau. \quad (21)$$

Proposition 4 [21]. Let $f(t) \in W(M_0)$. Then for the imaginary part of the Laplace transform of function $f(t)$, the inequality

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(i\tau)| \sqrt{1 + \tau^2} d\tau \leq C_1 \|f\|_{W_2^2(\mathbb{R}_+)},$$

is valid, where $C_1 > 0$ is a constant.

PROOF OF THEOREM 2. We prove that $h \in W_2^1(\mathbb{R}_+)$. Indeed, according to (20) and (21), we obtain

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{h}(\tau)|^2 (1 + |\tau|^2) d\tau &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\tilde{f}(i\tau)}{\tilde{K}(i\tau)} \right|^2 (1 + |\tau|^2) d\tau \\ &\leq C_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(i\tau)|^2 (1 + |\tau|^2)^2 d\tau = C_0 \|f\|_{W_2^2(\mathbb{R}_+)}^2, \end{aligned}$$

where $C_0 = \min(C_{1,0}, C_{2,0})$ which is defined by (20). Further,

$$|h(t) - h(s)| = \left| \int_s^t h'(\xi) d\xi \right| \leq \|h'\|_{L_2} (t-s)^{1/2}.$$

From (20), (21) and Propositions 3 and 4, we have

$$\begin{aligned} |h(t)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{f}(i\tau)|}{|\tilde{K}(i\tau)|} d\tau \\ &\leq \frac{1}{2\pi C_0} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(i\tau)| \sqrt{1 + \tau^2} d\tau \leq \frac{C_1}{2\pi C_0} \|f\|_{W_2^2(\mathbb{R}_+)} \leq \frac{C_1 M_0}{2\pi C_0} = M, \end{aligned}$$

where

$$M_0 = \frac{2\pi C_0}{C_1} M.$$

Theorem 2 is proved.

4. Proof of Theorem 1

We consider the following integral equation:

$$\int_0^t K(t-s) h(s) ds = \theta, \quad T \leq t \leq T_1,$$

where $K(t)$ is defined by (14).

Proposition 5. The following estimate is valid:

$$K(t) \geq \beta_1 e^{-\lambda_1 t},$$

where the function $K(t)$ is defined by (14).

The proof of its proposition is based on the fact that the functional series defined by (14) is non-negative.

We introduce a specific heating as

$$L(t) = \int_0^t K(t-s) ds = \int_0^t K(s) ds.$$

The physical meaning of this function is the average temperature in the rod (see [5]). It is known $L(0) = 0$ and $L'(t) = K(t) > 0$.

We set

$$L^* = \lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = \int_0^\infty K(s) ds.$$

Certainly, the average temperature of the rod in the case where the heater is acting with unit load cannot exceed L^* . It is clear that from (14) we write

$$L^* = \int_0^\infty K(s) ds = \sum_{k=1}^\infty \frac{\beta_k}{\lambda_k} < +\infty,$$

where β_k is defined by (8) and $\lambda_k = \frac{k^4 \pi^4}{l^4}$.

Proposition 6 [10]. *Let $0 < \theta < ML^*$. Then there exist $T > 0$ and a real-valued measurable function $h(t)$ and the following equality*

$$\int_0^T K(T-s)h(s) ds = \theta,$$

is valid.

It is clear that the value T , which was found in Proposition 6, gives a solution to the problem. Namely, T is the root of the equation

$$L(T) = \frac{\theta}{M}. \quad (22)$$

Lemma 2. *Let*

$$0 < \theta < \frac{\beta_1 M}{\lambda_1}.$$

Then there exists $T > 0$ so that

$$T < -\frac{1}{\lambda_1} \ln \left(1 - \frac{\theta \lambda_1}{\beta_1 M} \right),$$

and the Eq. (22) is fulfilled.

PROOF. For obtaining the required estimate we use Proposition 5. We may write

$$L(t) = \int_0^t K(s) ds \geq \beta_1 \int_0^t e^{-\lambda_1 s} ds = \frac{\beta_1}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 t}). \quad (23)$$

Consider the following equation for the defining of T_0 :

$$\frac{\beta_1}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 T_0}) = \frac{\theta}{M}. \quad (24)$$

Then

$$T_0 = -\frac{1}{\lambda_1} \ln \left(1 - \frac{\theta \lambda_1}{\beta_1 M} \right).$$

In accordance with (23) and (24) we have

$$0 < \frac{\theta}{M} \leq L(T_0).$$

Then obviously there exists T , $0 < T < T_0$, which is a solution to the equation (22).

Lemma 2 is proved.

The proof of Theorem 1 follows from lemma 2.

5. Conclusion

Note that in case where the temperature θ is small enough, the value of T_0 can be replaced by the following one:

$$T_0 = \frac{\theta}{\beta_1 M}.$$

Hence, in this case the estimate of optimal time given by Theorem 1 is proportional to required temperature θ and inversely proportional to size of the rod l and to the maximum output of heat source M .

Acknowledgements. The author is grateful to Academician Sh. A. Alimov for his valuable comments.

REFERENCES

1. King B. B., Stein O., and Winkler M., “A fourth-order parabolic equation modeling epitaxial thin film growth,” *J. Math. Anal. Appl.*, **286**, No. 2, 459–490 (2003).
2. Fattorini H. O., “Time-optimal control of solutions of operational differential equations,” *SIAM J. Control*, **2**, No. 1, 49–65 (1965).
3. Friedman A., “Optimal control for parabolic equations,” *J. Math. Anal. Appl.*, **18**, No. 3, 479–491 (1967).
4. Egorov Yu. V., “Optimal control in Banach spaces [in Russian],” *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **150**, No. 2, 241–244 (1963).
5. Albeverio S. and Alimov Sh. A., “On one time-optimal control problem associated with the heat exchange process,” *Appl. Math. Optimization*, **57**, 58–68 (2008).
6. Alimov Sh. A., “On a control problem associated with the heat transfer process,” *Euras. Math. J.*, **1**, No. 2, 17–30 (2010).
7. Alimov Sh. A., “On the null-controllability of the heat exchange process,” *Euras. Math. J.*, **2**, No. 3, 5–19 (2011).
8. Dekhkonov F. N., “On the control problem associated with the heating process,” *Mat. Zamet. SVFU*, **29**, No. 4, 62–71 (2022).
9. Fayazova Z. K., “Boundary control of the heat transfer process in the space,” *Izv. Vuzov, Mat.*, **12**, 82–90 (2019).
10. Dekhkonov F. N., “On a time-optimal control of thermal processes in a boundary value problem,” *Lobachevskii J. Math.*, **43**, No. 1, 192–198 (2022).
11. Alimov Sh. A. and Dekhkonov F. N., “On a control problem associated with fast heating of a thin rod,” *Bull. Natl. Univ. Uzbekistan, Math. Nat. Sci.*, **2**, No. 1, 1–14 (2019).
12. Dekhkonov F. N. and Kuchkorov E. I., “On the time-optimal control problem associated with the heating process of a thin rod,” *Lobachevskii J. Math.*, **44**, No. 3, 1134–1144 (2023).
13. Dekhkonov F. N., “Boundary control associated with a parabolic equation,” *J. Math. Comput. Sci.*, **33**, No. 2, 146–154 (2024).
14. Dekhkonov F. N., “On the time-optimal control problem for a heat equation,” *Bull. Karaganda Univ., Math. Ser.*, **111**, No. 3, 28–38 (2023).
15. Dekhkonov F. N., “Boundary control problem for the heat transfer equation associated with heating process of a rod,” *Bull. Karaganda Univ., Math. Ser.*, **110**, No. 2, 63–71 (2023).

-
16. Lions J. L., Contrôle Optimal de Systèmes Gouvernés par des Équations aux Dérivées Partielles, Dunod Gauthier-Villars, Paris (1968).
17. Fursikov A. V., Optimal Control of Distributed Systems, Theory and Applications, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2000) (Transl. Math. Monogr.; vol. 187).
18. Altmüller A. and Grüne L., Distributed and Boundary Model Predictive Control for the Heat Equation, Techn. Report, Univ. Bayreuth, Dep. Math. (2012).
19. Dubljevic S. and Christofides P. D., “Predictive control of parabolic PDEs with boundary control actuation,” Chem. Eng. Sci., **61**, No. 18, 6239–6248 (2006).
20. Fayazova Z. K., “Boundary control for pseudoparabolic equations in space,” Mat. Zamet. SVFU, **26**, No. 3, 98–108 (2019).
21. Dekhkonov F. N., “On a boundary control problem for a pseudo-parabolic equation,” Commun. Anal. Mech., **15**, No. 2, 289–299 (2023).
22. Dekhkonov F. N., “Boundary control problem associated with a pseudo-parabolic equation,” Stoch. Model. Computat. Sci., **3**, No. 1, 117–128 (2023).
23. Guo Y. J. L., “Null boundary controllability for a fourth-order parabolic equation,” Taiwanese J. Math., **6**, No. 3, 421–431 (2002).
24. Guo Y. J. L. and Littman W., “Null boundary controllability for semilinear heat equations,” Appl. Math. Optimization, **32**, No. 3, 281–316 (1995).
25. Yu H., “Null controllability for a fourth-order parabolic equation,” Sci. China, Ser. F, Inf. Sci., **52**, No. 11, 2127–2132 (2009).
26. Xu R., Chen T., Liu C., and Ding Y., “Global well-posedness and global attractor of fourth-order semilinear parabolic equation,” Math. Methods Appl. Sci., **38**, No. 8, 1515–1529 (2015).
27. Chen Y., “Global dynamical behavior of solutions for finite degenerate fourth-order parabolic equations with mean curvature nonlinearity,” Commun. Anal. Mech., **15**, No. 4, 658–694 (2023).
28. Tikhonov A. N. and Samarsky A. A., Equations of Mathematical Physics [in Russian], Nauka, Moscow (1966).

Submitted May 13, 2024

Revised May 23, 2024

Accepted May 30, 2024

Farrukh N. Dekhkonov
Namangan State University,
316, Uychi Street, Namangan 160136, Uzbekistan
f.n.dehqonov@mail.ru

APPLICATION OF AN INDICATOR
RANDOM PROCESS FOR MODELING
OPEN STOCHASTIC SYSTEMS
V. Doobko and E. Karachanskaya

Abstract: The authors present a method of indicator random processes, applicable to constructing models of jump processes associated with the diffusion process. Indicator random processes are processes that take only two values: 1 and 0, in accordance with some probabilistic laws. It is shown that the indicator random process is invariant when reduced to an arbitrary positive degree. Equations with random coefficients used in modeling dynamic systems, when applying the method of indicator random processes, can take into account the possibility of adaptation to external changes, including random ones, in order to preserve indicators important for the existence of the system, which can be continuous or discrete. In the case of indicator random processes, defined as functions of the Poisson process, equations for dynamic processes in a media with abruptly changing properties are constructed and studied. To study the capabilities of the proposed method, dynamic models of the diffusion process in media were studied with delay centers and diffusion processes during transitions by switching from one subspace to another. For these models, equations for characteristic functions are constructed. Using the method of indicator random processes, a characteristic function for the Kac model was constructed. It is shown that in the case of dependence of the indicator random process on the Poisson process, the equation for the characteristic function corresponds to the telegraph equation. This result coincides with the result of Kac.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-2-81-98

Keywords: indicator random processes, stochastic dynamical models.

1. Introduction

An open system is a system that has external interactions. These systems have applications in engineering and economics [1], and they are used to describe the dynamics of quantum systems [2], as well as in financial mathematics [3, 4]. Open stochastic quantum systems can be described by quantum stochastic differential equations [5]. Modeling processes in an open system is difficult due to external random disturbances that greatly affect the process.

Modeling of diffusion processes with jumps is still a pressing problem, since many applied problems are described by similar models. Sharp fluctuations in option prices have led to the need to study jump diffusion models, for example, the Merton model [6, 7], and Kou model [8]. Stochastic processes that can instantly change their parameters due to a jump, described by systems of stochastic differential equations with regime switching, are used in problems of financial mathematics

[9, 10]. Switching jump-diffusion models are applied in control theory, problems of diffusion in random media [11–15], and others.

In contrast to the models mentioned above, we will consider the Itô stochastic differential equations with regime switching based on the method, which we propose below. These equations can be used in the simulation of dynamic systems that can adapt to external changes, including random ones. These changes in the structure of the system can be continuous, discrete or mixed. If changes in the coefficients of the equations are jump-like, then one of the ways to model transitions from one state of the system to another is to use methods from the theory of queuing systems. Nevertheless, to describe the dynamics of the implementation of these states, one needs to use a stochastic equation.

The purpose of the article is to show the possibility of studying random processes described by the stochastic differential Itô equations, the properties of which can change jump-like at random times, using the method of indicator random processes.

In our opinion, it is also important to obtain the same mathematical results using different methods, based on different initial assumptions. This allows you to look at a mathematical problem from different angles and make a choice of initial axioms and interpretations within a particular area of mathematics. When solving applied problems, many proof schemes are considered as multiple approaches to solving a problem, expanding the possibilities for choosing the most adequate interpretation.

When modeling systems with regime switching, a Markov chain is used, which is specified by an intensity matrix. In the simplest case, the intensities are constant, and the random times t , at which switching occurs, usually have an exponential distribution. The use of a random indicator process to model systems such as systems with regime switching allows the state of the system to change at a random time t , which can be determined by an arbitrary distribution, for example, uniform. Thus, the proposed method allows solving a wider class of problems.

In the [16], a method and an idea for its use in modeling diffusion with delay centers are proposed. In this work, we present new application examples of our method [17].

The main original contributions of this work are: 1) demonstration of the application of our method of indicator random processes to construct several models of random processes associated with diffusion processes, 2) differential equations for characteristic functions are constructed for these models of random processes, 3) equations for characteristic functions are solved analytically, which allows us to determine the probabilistic characteristics of these processes.

The structure of the article is as follows. Section 2 introduces the concept of an indicator random process and its properties. It also presents the procedure for constructing a complete group of random events for any time using a set of incompatible indicator random processes. In Section 3, a characteristic function of a mixture of independent processes is constructed using a set of incompatible indicator random processes. This mixture has the property that at any time only one of the many specified random processes will be realized. In Section 4, several interesting exam-

ples of the use of indicator random processes for constructing mathematical models of physical processes are considered. The application of the method proposed in the article is shown for constructing a model of the diffusion process with time delay centers, a diffusion model with a random change in the direction of movement, and a diffusion model with random transitions between subspaces. The examples presented have independent theoretical significance, as they result in new mathematical models for random processes of practical value. The example presented in the Appendix is of methodological significance.

2. Indicator random process

Indicator functions are often used to identify subsets, points, and properties from a certain set. An indicator function in the form of a "delta function" is used, for example, to make the transition from the original, generally nonlinear dynamic system to an equivalent description in terms of linear partial differential equations [18].

Let us introduce the concept of an indicator random process. Here and below, all random processes under consideration are defined on a common probability space.

DEFINITION 1. A random process $\chi(t)$ is called an indicator random process if it takes only two values: 1 or 0.

To study the properties of the process $\chi(t)$, we use the following notations: $Prob(A)$ is the probability of an event A, $E[\chi(t)]$ is the mathematical expectation of a random process $\chi(t)$, $t \geq 0$ is a time.

Property 1. For any time t the following conditions are satisfied:

$$(\chi(t))^\alpha = \chi(t), \quad (1 - \chi(t))^\alpha = 1 - \chi(t) \quad \forall \alpha > 0. \quad (1)$$

Property 2. The following equalities are satisfied:

$$E[\chi(t)] = Prob(\chi(t) = 1), \quad Prob(\chi(t) = 0) = 1 - E[\chi(t)]. \quad (2)$$

DEFINITION 2. Two and more random processes $\xi_1(t), \xi_2(t), \dots$ are called *incompatible processes* if for every $t \geq 0$ only one process from this collection is nonzero:

$$\begin{aligned} \xi_{k_1}(t_1) &\neq 0, & \xi_j(t_1) &= 0 \quad \forall j \neq k_1; \\ \xi_{k_2}(t_2) &\neq 0, & \xi_j(t_2) &= 0 \quad \forall j \neq k_2; \\ && \dots & \end{aligned} \quad (3)$$

Lemma 1. Let $\chi_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, n - 1$, be independent indicator random processes. Then the random processes

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \chi_1(t); & z_k(t) &= \chi_k(t) \prod_{j=1}^{k-1} (1 - \chi_j(t)), \quad k = 2, 3, \dots, n - 1; \\ z_n(t) &= \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \chi_j(t)), \end{aligned} \quad (4)$$

form a complete group of incompatible processes for every $t \geq 0$.

PROOF. 1. Each of the processes (4) can take only two values: 1 and 0. Let us consider the product of random processes $z_l(t)z_k(t)$ at any time t for any $1 \leq k, l < n$. Taking into account Definition 1 of an indicator random process and Property 1, we obtain

$$\begin{aligned} z_l(t)z_k(t) &= \chi_k(t) \prod_{j=1}^{k-1} (1 - \chi_j(t)) \chi_l(t) \prod_{j=1}^{l-1} (1 - \chi_j(t)) \\ &= \chi_k(t)(1 - \chi_k(t)) \prod_{j=1}^{k-1} (1 - \chi_j(t))^2 \chi_l(t) \prod_{i=k+1}^{l-1} (1 - \chi_i(t)) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Similarly, for any $1 \leq k < n$ the following holds: $z_k(t)z_n(t) = 0$. Therefore, random processes (4) are incompatible (see Definition 2).

2. Consider the process $Z_n(t) = \sum_{j=1}^n z_n(t)$, $j = 1, 2, \dots, n$:

$$\begin{aligned} Z_n(t) &= \chi_1(t) + \sum_{k=2}^{n-1} \chi_k(t) \prod_{j=1}^{k-1} (1 - \chi_j(t)) + \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \chi_j(t)) \\ &= \chi_1(t) + (1 - \chi_1(t))[\chi_2(t) + \chi_3(t)(1 - \chi_2(t)) + \dots \\ &\quad + \chi_{n-1}(t)(1 - \chi_2(t)) \cdots (1 - \chi_{n-2}(t)) + (1 - \chi_2(t)) \cdots (1 - \chi_{n-1}(t))]. \end{aligned} \quad (6)$$

At any time t , the process (6) will take the value 1 (due to Definition 1 of processes $\chi_j(t)$). Thus, at any given time t , only one of the processes (4) will take the value 1.

The results (5), (6) lead to the statement of the Lemma.

REMARK 1. Using a given set of incompatible processes that form the complete group, and knowing their probabilities, one can proceed to constructively specify the realizations of random processes with variable structure (see Appendix A).

3. Characteristic function for a sum of incompatible processes

Let $g_1(t), \dots, g_n(t)$ be random processes. Consider the random process

$$Y(t) = \sum_{j=1}^n y_j(t),$$

where

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \chi_1(t)g_1(t); \quad y_k(t) = \chi_k(t) \prod_{j=1}^{k-1} (1 - \chi_j(t))g_k(t), \quad k = 2, 3, \dots, n-1; \\ y_n(t) &= \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \chi_j(t))g_n(t), \end{aligned}$$

and indicator random processes $\chi_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, n$, are independent of each other and with the random processes $g_l(t)$, $l = 1, \dots, n$. Then the random process $Y(t)$ has the form:

$$Y(t) = \chi_1(t)g_1(t) + \sum_{k=2}^{n-1} \chi_k(t) \prod_{j=1}^{k-1} (1 - \chi_j(t))g_k(t) + \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \chi_j(t))g_n(t). \quad (7)$$

In accordance with Lemma 1, at any time t only one of the processes $g_k(t)$, $k = 1, \dots, n$, will be realized.

Let us construct the characteristic function of the random process (7).

Theorem 1. *Let $\chi_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, n-1$, be independent indicator random processes, and $\text{Prob}(\chi_i(t) = 1) = p_i(t)$. Then the characteristic function of the process (7) has the form:*

$$J(t) = p_1(t)E[e^{i\beta g_1(t)}] + \sum_{k=2}^{n-1} E[e^{i\beta g_k(t)}]p_k(t) \prod_{j=1}^{k-1} (1 - p_j(t)) + E[e^{i\beta g_n(t)}] \prod_{j=1}^{n-1} (1 - p_j(t)).$$

PROOF. Construct the characteristic function for the process (7):

$$\begin{aligned} J(t) &= E[e^{i\beta Y(t)}] \\ &= E\left[\exp\left\{i\beta\left(\chi_1(t)g_1(t) + \sum_{k=2}^{n-1} \chi_k(t) \prod_{j=1}^{k-1} (1 - \chi_j(t))g_k(t) + \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \chi_j(t))g_n(t)\right)\right\}\right] \\ &= E\left[e^{i\beta g_1(t)} \prod_{k=2}^{n-1} \exp\left\{i\beta \chi_1(t) \prod_{j=1}^{k-1} (1 - \chi_j(t))g_k(t)\right\} \exp\left\{i\beta \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \chi_j(t))g_n(t)\right\}\right]. \end{aligned}$$

Further, we apply the exponential series expansion, taking into account Lemma 1, Property 2, and the mutual independence of $g_k(t)$ and $\chi_l(t)$ for any indices k, l . Next, we calculate the mathematical expectation, and taking into account (2), we obtain the statement of the theorem.

4. Application of indicator random processes

Let us examine several interesting examples of using indicator random processes to construct mathematical models of physical processes which are associated with diffusion processes.

4.1. Processes in an environment with jump-like changes in properties. Using the properties of indicator random processes $\chi_1(t)$ and $\chi_2(t)$, we can construct an equation for dynamic processes with jump-like changes in properties. Let us consider the system of the Itô stochastic differential equations:

$$\begin{aligned} dx(t) &= \chi_1(t)a_1(x(t), t)dt + \chi_2(t)B_1(x(t), t)dw(t) \\ &\quad + (1 - \chi_1(t))a_2(x(t), t)dt + (1 - \chi_2(t))B_2(x(t), t)dw(t), \end{aligned}$$

where $x(t), a_j(x(t), t) \in \mathbb{R}^n$, $B_j(x(t), t)$ is the matrix of size $n \times m$, $j = 1, 2$, $w(t)$ is the m -dimensional Wiener process with independent components.

Using the indicator random process $\chi(t)$, one can also construct a model of the diffusion process with transitions from one subspace to another:

$$\begin{aligned} dx(t) &= \chi(t)[a_1(x(t), y(t), t) dt + B_1(x(t), y(t), t) dw(t)], \\ dy(t) &= (1 - \chi(t))[a_2(x(t), y(t), t) dt + B_2(x(t), y(t), t) dw(t)], \end{aligned} \quad (8)$$

etc. Such problems arise in the course of simulating a diffusion process with a non-random modulus of speed, when the magnitude of the velocity modulus can change abruptly under the influence of external random disturbances, and remain constant between these jumps [19].

If the coefficients of (8) satisfy conditions

$$B_j(x(t), y(t), t) = 0, \quad a_1(x(t), y(t), t) = -a_2(x(t), y(t), t) = c, \quad c = \text{const} > 0,$$

then the process $x(t) + y(t)$ corresponds to the Kac model of particle motion with random changes in the direction of velocity [20].

4.2. Diffusion process with random time delay centers. We propose a new version of the model of dynamic process with delay centers using indicator random processes.

The process under consideration proceeds for some time, then at a random moment in time it stops for a random period of time and then proceeds again for a random time. The points in space at which the process stops are called the center of time delay.

A delay center, or a time absorption center, arises, for example, for queuing processes: a device becomes a delay center when serving a customer. For the diffusion process, such centers can be considered points in space where a particle temporarily stopping and leaves them at a random moment in time.

We will correlate the randomness of the moment of stopping the particle's movement and the moment of resumption of its movement with a random function of a random function $N(t)$ that have non-random integer values and independent increments (indicator random process) [16]:

$$\chi(t) = \bar{\chi}(N(t)).$$

DEFINITION 3. An indicator random function $\chi(t)$ is called conditionally periodic if it satisfies the condition

$$\bar{\chi}(N(t) + 2k) = \chi(t), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

The conditions (1), (9) are satisfied by the function

$$\chi(t) = \bar{\chi}(N(t)) = 0.5(1 + \cos[\pi N(t)]). \quad (10)$$

This function has the following properties:

$$\chi(t) = \begin{cases} 0.5(1 + \cos[\pi N(t)]) = 1, & \text{for } N(t) = 2s, \quad s \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ 0.5(1 + \cos[\pi N(t)]) = 0, & \text{for } N(t) = 2s + 1, \quad s \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

For example, as $N(t)$ we can take a homogeneous Poisson process: $E[N(t)] = \mu t$. Then $E[\bar{\chi}(N(t))] = 0.5(1 + \exp\{-2\mu t\})$.

To model the diffusion process with random time delay centers (diffusion interruption) and subsequent restoration of the movement process, let us use the following Itô stochastic differential equation:

$$dx(t) = \chi(t)[a(x(t), t) dt + B(x(t), t) dw(t)], \quad (11)$$

where, in the general case, $x(t), a(x(t), t) \in \mathbb{R}^n$, $B(x(t), t)$ is the matrix of size $n \times m$ and $w(t)$ is the m -dimensional Wiener process with independent components.

As is known, diffusion occurs by several mechanisms. Surface diffusion is a general process involving the motion of molecules, and atomic clusters at solid material surfaces, and the corresponding model is the system of equations (11) in \mathbb{R}^2 . Bulk diffusion, i.e. diffusion in the bulk of the material, can be modelled by the system of equations (11) in \mathbb{R}^3 .

Let us consider the equation

$$dx(t) = a(t) dt + 0.5(1 + \cos[\pi N(t)])b(t) dw(t), \quad x(0) = 0. \quad (12)$$

This model corresponds to the case when the state of the system changes according to a deterministic law, and then, over a random period of time, it is affected by random disturbances. Let us make a change of variables:

$$y(t) = x(t) - \int_0^t a(\tau) d\tau.$$

Then the equation (12) takes the form

$$dy(t) = 0.5(1 + \cos[\pi N(t)])b(t) dw(t), \quad (13)$$

where $y(t), a(t), b(t) \in \mathbb{R}$, $N(t)$ is the Poisson process, $w(t)$ is the one-dimensional Wiener process, and $N(t)$ and $w(t)$ are mutually independent ones. Suppose, that $y(0) = 0$.

The characteristic function for the random process (13) is

$$J_1(t) = E[e^{i\beta y(t)}] = E\left[\exp\left\{0.5i\beta \int_0^t (1 + \cos[\pi N(\tau)])b(\tau) dw(\tau)\right\}\right].$$

Applying Itô formula, Property 1, and the Poisson distribution [21], we obtain

$$D(t) = \frac{dE[y^2(t)]}{dt} = 0.5b^2\langle 1 + \cos[\pi N(t)] \rangle = \frac{1}{4}b^2(1 + e^{-2\lambda t}), \quad (14)$$

where b^2 is the diffusion coefficient without time delay centers. It follows from the equality (14) that

$$D(0) = \frac{b^2}{2}, \quad D(\infty) = \frac{b^2}{4}.$$

Note that the difference between probabilities for even and odd $N(t)$ is due to the fact that $N(t) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ and $N(0) = 0$, i.e., $N(t)$ does not start with an odd number. This leads to a discrepancy among the analytical expressions for probabilities:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} \text{Prob}(N(t) = 2s) &= e^{-\mu t} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^{2s}}{(2s)!} = e^{-\mu t} \cosh \mu t = 0.5(1 + e^{-2\mu t}), \\ \sum_{s=0}^{\infty} \text{Prob}(N(t) = 2s+1) &= e^{-\mu t} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^{2s+1}}{(2s+1)!} = e^{-\mu t} \sinh \mu t = 0.5(1 - e^{-2\mu t}) \\ &= 1 - \sum_{s=0}^{\infty} \text{Prob}(N(t) = 2s). \end{aligned}$$

The equality of probabilities is only asymptotic:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{s=0}^{\infty} \text{Prob}(N(t) = 2s) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{s=0}^{\infty} \text{Prob}(N(t) = 2s+1) = 0.5.$$

We can conclude that if in a homogeneous media there is a nonlinear time dependence of the average square displacement of a particle and an asymptotic decrease in the diffusion coefficient, then there exist time delay centers.

4.3. Diffusion with random change in direction of movement. The Kac model. Let us consider one-dimensional particle movement with speed v , when the direction of movement changes at random times [20]:

$$dx^+(t) = \chi(t)v dt, \quad dx^-(t) = -(1 - \chi(t))v dt.$$

Since we are interested in the total displacement $x(t) = x^+(t) + x^-(t)$, we obtain the equation

$$dx(t) = (2\chi(t) - 1)v dt. \quad (15)$$

For $\chi(t)$ we take the representation (10):

$$\chi(t) = \bar{\chi}(N(t)) = 0.5(1 + \cos[\pi N(t)]).$$

Let $v = \text{const} = c > 0$. Then the characteristic function for the process $x(t)$ takes the form:

$$I(t) = E \left[\exp \left\{ i\beta \int_0^t \cos[\pi N(\tau)]c d\tau \right\} \right]. \quad (16)$$

Theorem 2. If $N(t)$ is the stationary Poisson process with parameter λ , then the characteristic function for the process $x(t)$ subordinate to the system (15) is a solution to the Cauchy problem:

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + 2\lambda \frac{dI(t)}{dt} + c^2 \beta^2 I(t) = 0, \quad I(0) = 0, \quad \frac{dI(0)}{dt} = ic\beta. \quad (17)$$

PROOF. Let us differentiate (16):

$$\frac{dI(t)}{dt} = E \left[i\beta \cos[\pi N(t)] c \exp \left\{ i\beta \int_0^t \cos[\pi N(\tau)] c d\tau \right\} \right]. \quad (18)$$

Let $f(x) \in \mathcal{C}^\infty$. Then

$$df(N(t)) = [f(N(t) + 1) - f(N(t))] dN(t), \quad (19)$$

where $dN(t)$ is an advanced increment, i.e., it is independent of the previous values of $N(t)$. Since $E[dN(t)] = \lambda dt$, $\lambda > 0$, then taking into account (18), we obtain

$$\begin{aligned} d\frac{dI(t)}{dt} &= -c^2 \beta^2 E \left[\cos^2[\pi N(t)] \exp \left\{ i\beta \int_0^t \cos[\pi N(\tau)] c d\tau \right\} \right] dt \\ &\quad + i\beta c E \left[(\cos[\pi(N(t) + 1)] - \cos[\pi N(t)]) \exp \left\{ i\beta \int_0^t \cos[\pi N(\tau)] c d\tau \right\} \right] \lambda dt \\ &= -c^2 \beta^2 E \left[\exp \left\{ i\beta \int_0^t \cos[\pi N(\tau)] c d\tau \right\} \right] dt \\ &\quad + 2i\beta c \lambda E \left[\cos[\pi N(t)] \exp \left\{ i\beta \int_0^t \cos[\pi N(\tau)] c d\tau \right\} \right] dt \\ &= -c^2 \beta^2 I(t) dt - 2\lambda \frac{dI(t)}{dt} dt. \end{aligned}$$

From the last equality we obtain the statement of the theorem.

REMARK 2. As is known, the characteristic function allows one to find the distribution density function. Applying the inverse Fourier transform to the equation (17) from Theorem 2, we obtain the telegraph equation for the distribution density function $\rho(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial t^2} + 2\lambda \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} = 0,$$

which coincides with the results obtained [20].

Note that the Kac model is finding new applications. In particular, it is used to study the model of random colliding particles interacting with the infinite reservoir at a fixed temperature and chemical potential [22]. This is the so-called thermostat problem, in which particles can leave the system towards the reservoir or enter the system from the reservoir at random times. Accordingly, the proposed random indicator process method can also be used to solve the thermostat problem.

4.4. Diffusion model with random transitions from one subspace to another. Two-dimensional case. Let us consider the following diffusion model:

$$dx(t) = \tilde{\chi}(t)b dw(t), \quad dy(t) = (1 - \tilde{\chi}(t))b dw(t), \quad (20)$$

where b is the diffusion coefficient, i.e., at random moments of time the process occurs either in the space $x(t)$ or $y(t)$. Such models can describe the diffusion process in random porous media. As a random process $\tilde{\chi}(t)$ we choose the representation $\tilde{\chi}(t) = 0.5(1 + \cos N(t))$. Then the characteristic function for the process $\{x(t), y(t)\}$, in accordance with (20), takes the form:

$$J(t) = E \left[\exp \left\{ i\alpha \int_0^t 0.5(1 + \cos N(\tau))b d\omega(\tau) + i\beta \int_0^t 0.5(1 - \cos N(\tau))b d\omega(\tau) \right\} \right].$$

Theorem 3. If $(N(t)/\pi)$ is the stationary Poisson process with parameter λ , then $J(t)$ is a solution to the equation:

$$\frac{d^2 J(t)}{dt^2} + 0.5(4\lambda + [\alpha^2 + \beta^2]b^2) \frac{dJ(t)}{dt} + 0.5(\lambda\alpha^2 + 0.5\alpha^2\beta^2b^2 + \lambda\beta^2b^2)J(t) = 0. \quad (21)$$

PROOF. Since the processes $N(t)$ and $\omega(t)$ are independent, we obtain

$$\begin{aligned} J(t) &= E \left[\exp \left\{ i \int_0^t 0.5[(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) \cos N(\tau)]b d\omega(\tau) \right\} \right] \\ &= E \left[\exp \left\{ - \int_0^t 2^{-3}[(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) \cos N(\tau)]^2 b^2 d\tau \right\} \right] \\ &= E \left[\exp \left\{ - \int_0^t 2^{-3}[(\alpha + \beta)^2 + 2(\alpha^2 - \beta^2) \cos N(\tau) + (\alpha - \beta)^2]b^2 d\tau \right\} \right] \\ &= E \left[\exp \left\{ -\alpha^2 \int_0^t 2^{-2}(1 + \cos N(\tau))b^2 d\tau - \beta^2 \int_0^t 2^{-2}(1 - \cos N(\tau))b^2 d\tau \right\} \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

For compactness, let us denote by $f(t)$ the last expression under the mathematical expectation sign in (22):

$$f(t) = \exp \left\{ -\alpha^2 \int_0^t 2^{-2}(1 + \cos N(\tau))b^2 d\tau - \beta^2 \int_0^t 2^{-2}(1 - \cos N(\tau))b^2 d\tau \right\}. \quad (23)$$

Next we get

$$\frac{dJ(t)}{dt} = -E[f(t)\{\alpha^2 2^{-2}(1 + \cos N(t))b^2 + \beta^2 2^{-2}(1 - \cos N(t))b^2\}]. \quad (24)$$

Taking into account that $dN(t)$ is an advanced increment, i.e., it does not depend on the previous values of $N(t)$, for which, due to the properties of the Poisson distribution,

$$E[d(N(t)/\pi)] = \lambda dt, \quad \lambda > 0.$$

Let us calculate the differential (compare with (19)):

$$d \cos N(t) = [\cos(N(t) + \pi) - \cos N(t)] d(N(t)/\pi) = -2 \cos N(t) d(N(t)/\pi).$$

The process $\cos N(t)$ have the following properties:

$$\begin{aligned} \cos N(t) \cos N(t) &\equiv 1, \quad (1 - \cos N(t))(1 + \cos N(t)) = 1 - \cos^2 N(t) \equiv 0, \\ (1 - \cos N(t))^2 &= 2(1 - \cos N(t)), \quad (1 + \cos N(t))^2 = 2(1 + \cos N(t)). \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} \frac{d^2 J(t)}{dt^2} &= E[f(t)\{0.5\alpha^2 b^2 \cos N(t) - \beta^2 2^{-2} 2b^2 \cos N(t)\}\lambda] \\ &\quad + E[f(t)\{\alpha^2 2^{-2}(1 + \cos N(t))b^2 + \beta^2 2^{-2}(1 - \cos N(t))^2 b^4\}^2] \\ &= E[f(t)\{0.5\alpha^2 b^2 \cos N(t) - 0.5\beta^2 b^2 \cos N(t)\}\lambda] \\ &\quad + E[f(t)\{\alpha^4 2^{-4}(1 + \cos N(t))^2 b^4 + \beta^4 2^{-4}(1 - \cos N(t))^2 b^4\}] \\ &= \lambda E[f(t)\{0.5\alpha^2(1 + \cos N(t))b^2 + 0.5\beta^2(1 - (\cos N(t)))b^2\}] \\ &\quad - 0.5\lambda(\alpha^2 + \beta^2)b^2 J(t) \\ &\quad + E[f(t)\{\alpha^4 2^{-3}(1 + \cos N(t))b^4 + \beta^4 2^{-3}(1 - \cos N(t))b^4\}]. \end{aligned}$$

Therefore, we get the equation

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 J(t)}{\partial t^2} &= -2\lambda \frac{\partial J(t)}{\partial t} - 0.5\lambda(\alpha^2 + \beta^2)b^2 J(t) \\ &\quad + E[f(t)\alpha^4 2^{-3}(1 + \cos N(t))b^4] + E[f(t)\beta^4 2^{-3}(1 - \cos N(t))b^4]. \quad (25) \end{aligned}$$

Let us continue the transformation for the last terms in (25). For simplicity, let us examine each of them separately.

Considering the first term:

$$\begin{aligned} E[f(t)\alpha^4 2^{-3}(1 + \cos N(t))b^4] &= 0.5\alpha^2 b^2 E[f(t)\{\alpha^2 2^{-2}(1 + \cos N(t))b^2 + \beta^2 2^{-2}(1 - \cos N(t))b^2\}] \\ &\quad - \alpha^2 \beta^2 b^4 E[f(t)2^{-3}(1 - \cos N(t))], \end{aligned}$$

and taking into account (24), we have

$$E[f(t)\alpha^4 2^{-3}(1 + \cos N(t))b^4] = -0.5\alpha^2 b^2 \frac{dJ(t)}{dt} - \alpha^2 \beta^2 b^4 E[f(t)2^{-3}(1 - \cos N(t))]. \quad (26)$$

Let us transform the second term:

$$\begin{aligned} E[f(t)\beta^4 2^{-3}(1 - \cos N(t))b^4] &= 0.5\beta^2 b^2 E[f(t)\{\alpha^2 2^{-2}(1 + \cos N(t))b^2 + \beta^2 2^{-2}(1 - \cos N(t))b^2\}] \\ &\quad - \alpha^2 \beta^2 b^4 E[f(t)2^{-3}(1 + \cos N(t))] \\ &= -0.5\beta^2 b^2 \frac{dJ(t)}{dt} - \alpha^2 \beta^2 b^4 E[f(t)2^{-3}(1 + \cos N(t))]. \quad (27) \end{aligned}$$

Substituting the resulting representations (26) and (27) into (25), we obtain:

$$\alpha^2\beta^2b^4E[f(t)2^{-3}(1-\cos N(t)] + \alpha^2\beta^2b^4E[f(t)2^{-3}(1+\cos N(t))] = \alpha^2\beta^2b^42^{-2}J(t).$$

As a result, taking into account the notation $E[f(t)] = J(t)$, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{d^2J(t)}{dt^2} &= -2\lambda\frac{dJ(t)}{dt} - 0.5\lambda(\alpha^2 + \beta^2)b^2J(t) \\ &\quad - 0.5\alpha^2\beta^2b^2\frac{dJ(t)}{dt} - \alpha^2\beta^2b^42^{-2}E[f(t)] \\ &= -(2\lambda + 0.5\alpha^2\beta^2b^2)\frac{dJ(t)}{dt} - [\alpha^2\beta^2b^42^{-2} + 0.5\lambda(\alpha^2 + \beta^2)b^2]J(t). \end{aligned}$$

The statement of Theorem 3 is obtained.

The equation (21) can be solved. However, its construction will be cumbersome. Using the result obtained in Theorem 3, we find an explicit view of the characteristic function for a simpler process. We will solve the equation for a simpler model, and then we will show how to move to the explicit form of solving the equation (21).

As such a simple model, consider the characteristic function $J(t)$ for the diffusion model (20):

$$\frac{d^2J(t)}{dt^2} + 0.5(4\lambda + [\alpha^2 + \beta^2]b^2)\frac{dJ(t)}{dt} + 0.5(\lambda\alpha^2 + 0.5\alpha^2\beta^2b^2 + \lambda\beta^2)b^2J(t) = 0.$$

The equation for the characteristic function $J_1(t)$ should coincide with (21) if we set $\alpha = 0$. Formally, this corresponds to the following substitutions of coefficients in (21):

$$\begin{aligned} 0.5(4\lambda + [\alpha^2 + \beta^2]b^2) &\Rightarrow 0.5(4\lambda + \beta^2b^2), \\ 0.5(\lambda\alpha^2 + 0.5\alpha^2\beta^2 + \lambda\beta^2b^2) &\Rightarrow 0.5\lambda\beta^2b^2. \end{aligned} \tag{28}$$

Accordingly, the characteristic function $J_1(t)$ for the diffusion model with delay centers is a solution to the equation:

$$\frac{d^2J_1(t)}{dt^2} + 0.5(\beta^2b^2 + 4\lambda)\frac{dJ_1(t)}{dt} + 0.5\lambda\beta^2b^2J_1(t) = 0. \tag{29}$$

Since the conditions are satisfied

$$\begin{aligned} 2^{-2}(\beta^2b^2 + 4\lambda)^2 - 2\lambda\beta^2b^2 &= 2^{-2}\beta^4b^4 + 2\beta^2b^2\lambda + 4\lambda^2 - 2\beta^2b^2\lambda \\ &= 2^{-2}\beta^4b^4 + 4\lambda^2 > 0 \quad \forall \lambda > 0, \end{aligned}$$

then the solution to the equation (29) [23, p. 375, formula 235(a)] will be as follows:

$$\begin{aligned} J_1(t) &= C_1 \exp \left\{ -0.5t(\beta^2b^2 + 4\lambda) + t\sqrt{\frac{1}{4}\beta^4b^4 + 4\lambda^2} \right\} \\ &\quad + C_2 \exp \left\{ -0.5t(\beta^2b^2 + 4\lambda) - t\sqrt{\frac{1}{4}\beta^4b^4 + 4\lambda^2} \right\}. \end{aligned}$$

Since $\frac{1}{4}(\beta^2 b^2 + 4\lambda)^2 > \frac{1}{4}\beta^4 b^4 + 4\lambda^2$, then the first and second terms decrease with increasing t , and therefore $\lim_{t \rightarrow \infty} J_1(t) = 0$. Taking into account the initial conditions

$$\left. \frac{dJ_1(t)}{dt} \right|_{t=0} = -0.5\beta^2 b^2, \quad J_1(t)|_{t=0} = 1,$$

we obtain an equation for determining the constants:

$$C_1 + C_2 = 1,$$

$$\begin{aligned} 0.5\beta^2 b^2 &= C_1 \exp \left\{ -0.5t(\beta^2 b^2 + 4\lambda) + t\sqrt{\frac{1}{4}\beta^4 b^4 + 4\lambda^2} \right\} \\ &\quad + C_2 \exp \left\{ -0.5t(\beta^2 b^2 + 4\lambda) - t\sqrt{\frac{1}{4}\beta^4 b^4 + 4\lambda^2} \right\}, \\ 0.5\beta^2 b^2 &= (1 - C_2) \exp \left\{ -0.5t(\beta^2 b^2 + 4\lambda) + t\sqrt{\frac{1}{4}\beta^4 b^4 + 4\lambda^2} \right\} \\ &\quad + C_2 \exp \left\{ -0.5t(\beta^2 b^2 + 4\lambda) - t\sqrt{\frac{1}{4}\beta^4 b^4 + 4\lambda^2} \right\}, \\ 2\lambda &= C_2 \sqrt{\frac{1}{4}\beta^4 b^4 + 4\lambda^2}. \end{aligned}$$

Having solved these equations, we establish that

$$\begin{aligned} C_2 &= 2\lambda \left(\sqrt{\frac{1}{4}\beta^4 b^4 + 4\lambda^2} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{16}\lambda^{-2}\beta^4 b^4 + 1 \right)^{-0.5}, \\ C_1 &= 1 - \left(\frac{1}{16}\lambda^{-2}\beta^4 b^4 + 1 \right)^{-0.5}. \end{aligned}$$

Thus, the solution to the equation (29) takes the form

$$\begin{aligned} J_1(t) &= \exp \left\{ -0.5t(\beta^2 b^2 + 4\lambda) + t\sqrt{\frac{1}{4}\beta^4 b^4 + 4\lambda^2} \right\} \\ &\quad + \left(\frac{1}{16}\lambda^{-2}\beta^4 b^4 + 1 \right)^{-0.5} \left[\exp \left\{ -0.5t(\beta^2 b^2 + 4\lambda) - t\sqrt{\frac{1}{4}\beta^4 b^4 + 4\lambda^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \exp \left\{ -0.5t(\beta^2 b^2 + 4\lambda) + t\sqrt{\frac{1}{4}\beta^4 b^4 + 4\lambda^2} \right\} \right]. \end{aligned}$$

Since the condition is satisfied

$$\left(\frac{1}{16}\lambda^{-2}\beta^4 b^4 + 1 \right)^{-0.5} < 1,$$

then $J_1(t) > 0$ for all $t \geq 0$.

Using inverse substitutions of coefficients based on relations (28), we obtain the solution to the equation (21). Taking into account the relationship between characteristic functions and moments, we can find random moments for the processes under consideration.

Conclusion

The proposed method of indicator random processes, together with the use of the method of characteristic functions, allows us to consider both previously known models and new ones that have a physical interpretation, such as a model of a diffusion process with random centers of time delay and a diffusion model with random transitions from one subspace to another. Theorems have been proven in which equations for the characteristic functions of the random processes under consideration are obtained. These equations are solved analytically, which makes it possible to determine the probabilistic characteristics of these random processes.

Also we note that if a complete group of incompatible random processes is given, then it is established that there is a set of independent indicator random processes. Based on the latter, it is possible to construct a complete group of events whose distribution will coincide with the distribution of a given group of incompatible events (see Appendix A).

Of course, this brief description cannot capture all aspects of the method of the indicator random processes.

Appendix. Application of a random indicator process to specify realizations of random processes with variable structure

Lemma 2. *Let the following be given: a collection of independent set-events A_j , $j = 1, 2, \dots, n - 1$, and a complete group of incompatible events B_j , $j = 1, 2, \dots, n$:*

$$B_1 = A_1; \quad B_j = A_j \bigcap \left(\bigcap_{k=1}^{j-1} \overline{A}_k \right), \quad j = 2, 3, \dots, n - 1; \quad B_n = \bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{A}_k.$$

Let us assume that a set of probabilities is given:

$$\text{Prob}(B_j), \quad j = 1, 2, \dots, n - 1; \quad \text{Prob}(B_n) = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} \text{Prob}(B_j).$$

Then it is possible to establish a one-to-one correspondence between the sets $\text{Prob}(A_j)$ and $\text{Prob}(B_r)$, $r, j = 1, 2, \dots, n - 1$.

PROOF. Due to the independence of A_j , $j = 1, 2, \dots, n - 1$, we get the equalities:

$$\begin{aligned} \text{Prob}(B_1) &= \text{Prob}(A_1), \\ \text{Prob}(B_2) &= \text{Prob}(A_2)\text{Prob}(\overline{A}_1), \\ \text{Prob}(B_3) &= \text{Prob}(A_3)\text{Prob}(\overline{A}_2)\text{Prob}(\overline{A}_1), \\ &\dots, \\ \text{Prob}(B_{n-1}) &= \text{Prob}(A_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-2} \text{Prob}(\overline{A}_k) \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} \text{Prob}(B_1) &= \text{Prob}(A_1), \\ \text{Prob}(B_2) &= \text{Prob}(A_2)(1 - \text{Prob}(A_1)), \\ \text{Prob}(B_3) &= \text{Prob}(A_3)(1 - \text{Prob}(A_2))(1 - \text{Prob}(A_1)), \\ &\dots, \\ \text{Prob}(B_{n-1}) &= \text{Prob}(A_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-2} (1 - \text{Prob}(A_k)). \end{aligned}$$

Switching from one equality to another, we obtain

$$\begin{aligned} \text{Prob}(B_1) &= \text{Prob}(A_1), \\ \text{Prob}(B_2) &= \text{Prob}(A_2)(1 - \text{Prob}(A_1)) = \text{Prob}(A_2)(1 - \text{Prob}(B_1)) \\ &\Rightarrow \text{Prob}(A_2) = \frac{\text{Prob}(B_2)}{1 - \text{Prob}(B_1)}, \\ \text{Prob}(B_3) &= \text{Prob}(A_3)(1 - \text{Prob}(A_2))(1 - \text{Prob}(A_1)) \\ &\Rightarrow \text{Prob}(A_3) = \frac{\text{Prob}(B_3)}{1 - \text{Prob}(B_1) - \text{Prob}(B_2)}, \\ &\dots, \\ \text{Prob}(B_{n-1}) &= \text{Prob}(A_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-2} (1 - \text{Prob}(A_k)) \\ &\Rightarrow \text{Prob}(A_{n-1}) = \frac{\text{Prob}(B_{n-1})}{1 - \sum_{k=1}^{n-2} \text{Prob}(B_k)}. \end{aligned}$$

Thus, a one-to-one correspondence is established.

Consider an example. Let $\chi_j(t)$ be independent indicator random processes. For example, $\chi_j(t)$ can be as follows:

$$\chi_j(t) = 0.5(1 - \cos(\pi N_j(t))), \quad (30)$$

where $N_j(t)$ are independent Poisson processes with variable intensity $\lambda_j(t)$, and

$$\text{Prob}(N_j(t) = m) = \frac{a_j^m(t)}{m!} e^{-a_j(t)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad a_j(t) = \int_0^t \lambda_j(\tau) d\tau.$$

Let the events B_j , $j = 1, \dots, n$, be incompatible events that form a complete group. Let us assume that events A_j are associated with process $\chi_j(t)$, and events B_j are associated with the process $N_j(t)$.

Let the events B_j , $j = 1, \dots, n$, be incompatible events that form a complete group. Let us assume that the event process A_j is associated with the process $\chi_j(t)$, and the event process B_j is associated with probabilities $\text{Prob}_t(B_j) = p_j(t)$.

Taking into account (30), events A_j will correspond only to odd values of the process $N_j(t)$. Therefore,

$$\begin{aligned} Prob_t(\bar{A}_j) &= Prob(N_j(t)|N_j(t)=2k, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \\ &= e^{-a_j(t)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a_j(t))^{2m}}{(2m)!} = e^{-a_j(t)} \cosh a_j(t) = 0.5(1 + e^{-2a_j(t)}). \end{aligned}$$

Let us proceed to comparing the distributions $Prob_t(A_j)$ and $Prob_t(B_j)$:

$$\begin{aligned} 0 < Prob_t(A_j) &= 0.5(1 - e^{-2a_j(t)}) \\ &= \frac{Prob_t(B_j)}{1 - \sum_{k=1}^{j-1} Prob_t(B_k)} = \frac{p_j(t)}{1 - \sum_{k=1}^{j-1} p_k(t)} = p_j(\chi(t)) < 1, \\ 1 - 2p_j(\chi(t)) &= e^{-2a_j(t)} = 1 - \frac{2p_j(t)}{1 - \sum_{k=1}^{j-1} p_k(t)} = \frac{-\sum_{k=1}^j p_k(t) - p_j(t)}{1 - \sum_{k=1}^{j-1} p_k(t)} \geq 0. \end{aligned}$$

From this equality it follows:

$$a_j(t) = 0.5 \ln \left[\frac{1 - \sum_{k=1}^{j-1} p_k(t)}{1 - \sum_{k=1}^j p_k(t) - p_j(t)} \right]. \quad (31)$$

As the numerator in the equality (31) is positive,

$$1 - \sum_{k=1}^{j-1} p_k(t) = \sum_{k=j}^n p_k(t) \geq 0,$$

it is necessary to establish the conditions when the denominator is positive:

$$1 - \sum_{k=1}^j p_k(t) \geq p_j(t) \Rightarrow \sum_{k=j+1}^n p_k(t) \geq p_j(t) \quad \forall j = 1, \dots, n-1. \quad (32)$$

The requirement follows from (32):

$$p_{j+1}(t) \geq p_j(t).$$

Such ranking is always possible, and therefore we consider it as the initial one. Since $a_j(t) \geq 0$, the following inequality must hold:

$$1 - \sum_{k=1}^{j-1} p_k(t) \geq 1 - \sum_{k=1}^j p_k(t) - p_j(t).$$

Indeed,

$$\left[1 - \sum_{k=1}^j p_k(t) \right] + p_j(t) \geq \left[1 - \sum_{k=1}^j p_k(t) \right] - p_j(t) \Rightarrow 0 \geq -2p_j(t).$$

REFERENCES

1. Willems J. C., “Open stochastic systems,” IEEE Trans. Autom. Control, **58**, 406–421 (2013).
2. Engel A. and Parker S. E., “Correspondence between open bosonic systems and stochastic differential equations,” Eur. Phys. J. Plus., **138**, 578 (2023).
3. Antwi O. A., Bright K. P., and Wereko K. A., “Jump diffusion simulation of stock prices on Ghana stock exchange,” J. Appl. Math. Phys., **8**, 1736–1754 (2020).
4. Akyildirim E., Hekimoglu A. A., Sensoy A., et al., “Extending the Merton model with applications to credit value adjustment,” Ann. Oper. Res., **326**, 27–65 (2023).
5. Vladimirov I. G., “A transverse Hamiltonian approach to infinitesimal perturbation analysis of quantum stochastic systems,” Entropy, **25**, 1179 (2023).
6. Li M. J., “Numerical methods for discrete double barrier option pricing based on Merton jump diffusion model,” Open J. Stat., **7**, 446–458 (2017).
7. Novat K., Charles W. M., and Masanja V. G., “Merton’s jump diffusion model an application to stock markets of East African countries,” Int. J. Adv. Sci. Res. Eng., **8**, 16–24 (2019).
8. Kou S. G., “Jump-diffusion models for asset pricing,” in: Financial Engineering (J. R. Birge, V. Linetsky, eds.), pp. 73–116, Elsevier (2007) (Handb. Oper. Res. Manage. Sci.; vol. 15).
9. Siu T. K. and Elliott R. J., “American option pricing and filtering with a hidden regime-switching jump diffusion,” J. Deriv., **29**, 106–123 (2022).
10. Ramponi A., “Spread option pricing in regime-switching jump diffusion models,” Math., **10**, 1574 (2022).
11. Tran Ky Q., Nguyen D. H., and Yin G., “Stability in distribution and stabilization of switching jump diffusions,” ESAIM: COCV, **28**, 72 (2022).
12. Ji H., Shao J., and Xi F., “Stability of regime-switching jump diffusion processes,” J. Math. Anal. Appl., **484**, No. 1, 123727 (2020).
13. Jakubowski J. and Niewgowski M., “Jump-diffusion processes in random environments,” J. Differ. Equ., **257**, 2671–2703 (2014).
14. Averina T. A. and Rybakov K. A., “Solving approximately a prediction problem for stochastic jump-diffusion systems,” Numer. Anal. Appl., **10**, 1–10 (2017).
15. Averina T. A., Karachanskaya E. V., and Rybakov K. A., “Statistical analysis of diffusion systems with invariants,” Russ. J. Numer. Anal. Math. Model., **33**, 1–13 (2018).
16. Doobko V. A., “Simulation of distribution of impurities in the environment with delay centers using indicator functions [in Ukrainian],” in: Proc. Agrarian Science and Education in the 21st Century: Problems, Prospects and Innovations (Ukraine, May 17–18, 2018).
17. Doobko V. and Karachanskaya E., “Indicator random processes and its application for modeling open stochastic systems,” <https://arxiv.org/pdf/2402.02493.pdf>.
18. Klyatskin V. I., Lectures on Dynamics of Stochastic Systems, Elsevier, Burlington, USA (2010).
19. Karachanskaya E. V., Simulation Processes with Invariants [in Russian], Dal’nevost. Nats. Univ., Khabarovsk (2014).
20. Kac M., Probability and Related Topics in Physical Sciences, Intersci. Publ., London (1959).
21. Gihman I. and Skorohod A., Stochastic Differential Equations, Springer, Berlin; New York (1972).
22. Beck J. and Bonetto F., “Grand canonical evolution for the Kac model,” J. Stat. Phys., **188**, 7 (2022).
23. Kamke E., Differential Equations, Solution Methods and Solutions, vol. 1: Ordinary Differen-

tial Equations, Akad. Verlagsges. Becker & Erler, Leipzig (1951).

Submitted March 11, 2024

Revised April 25, 2024

Accepted May 30, 2024

Valery Doobko
Research Center of the Institute of Cybernetics,
Kiev, Ukraine
doobko2017@ukr.net

Elena Karachanskaya
Far Eastern State Transport University,
47 Seryshev Street, 680000 Khabarovsk, Russia
elena_chal@mail.ru

МНОГОСТАДИЙНАЯ
ПРОИЗВОДСТВЕННО-РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНАЯ
ЗАДАЧА

Б. В. Анисимов, Е. В. Сазанова

Аннотация. Представлена новая постановка производственно-распределительной задачи в сетях со сложной структурой производства готовой продукции. Выделены особенности задачи, включая последовательность процедур производства и поставки продукции, учет разнообразных видов продукции на одной стадии, различие между этапом и стадией. Введены понятия «фиктивная» и «реальная» часть (объемы) поставки продукции от реальных поставщиков, которые позволили избежать применения эвристических приемов при решении задачи. Представлена методика, основанная на симплекс-методе, для оптимизации производства и поставок различных видов продукции на каждой стадии производственной цепочки, позволяющая решить задачу за одну оптимизационную процедуру. Результаты исследования могут быть полезны при планировании в комплексных и многопрофильных («сетевых») компаниях для принятия экономически обоснованных решений в области управления производственными цепочками.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-2-99-115

Ключевые слова: производственно-распределительная задача, цепочки поставок, транспортная задача, симплекс-метод, последовательное производство продукции, оптимизация поставок, фиктивные поставки, многопрофильные («сетевые») компании.

Введение

Крупные многопрофильные компании («сетевые компании») могут владеть бизнесом по производству и поставке сложной и высокотехнологической продукции, для которой необходимы многочисленные промежуточные стадии обработки, изготовления и сборки продукции предприятиями этой компании или компаний-партнеров. В частности, одни предприятия могут из сырья изготавливать (отливать, штамповывать) детали (комплектующие), другие — собирать из них агрегаты (узлы, блоки), а третьи — заниматься сборкой из агрегатов готовой продукции (конечного изделия или продукта) в виде сложных комплексов (машин, оборудования). При планировании производства и поставки такого изделия (изделий) встает задача минимизации затрат или увеличения прибыли на всех стадиях производственно-распределительной цепочки.

Данная работа имеет непосредственное отношение к проблемам проектирования (моделирования) и управления цепочками поставок и производственно-

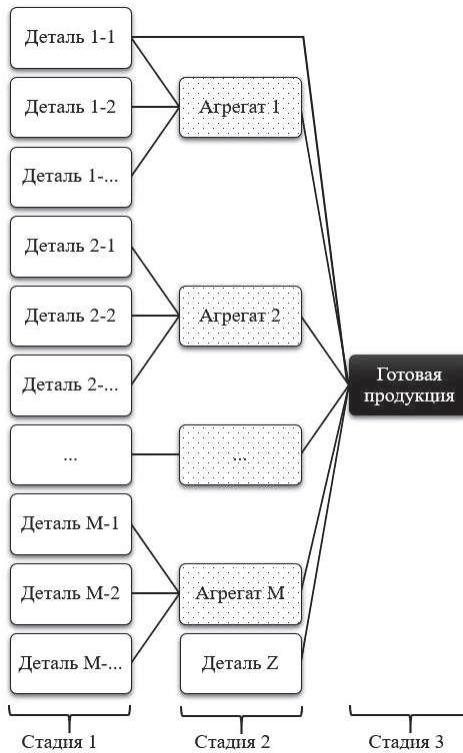


Рис. 1. Взаимосвязь видов продукции при производстве готовой продукции.

распределительных сетей [1, 2]. В свете глобализации производства и расширения направлений ведения бизнеса крупных компаний этой проблематике уделяется повышенное внимание — выпускается специализированная литература и публикуются многочисленные статьи. В работах [1, 3–5] приведены хороший обзор и анализ исследований в этой области.

В [2, 6] наиболее четко выражены две ключевые особенности таких сетей:

- наличие в сети пунктов (узлов) разного типа:
 - внешние поставщики или производители отдельных видов продукции, не выпускаемых на предприятиях компаний;
 - собственные предприятия (заводы, фабрики) переработки, производства или сборки видов продукции;
 - распределительные центры (склады) продукции;
 - конечные потребители (клиенты, дилеры) готовой продукции;
- сложная структура производства готовой продукции. На отдельных стадиях (этапах) для изготовления более сложного вида продукции может потребоваться предварительные закупка, изготовление и поставка в пункт производства нескольких, более простых видов продукции. Схематично данная особенность показана на рис. 1.

Вторая особенность является ключевой при производстве подавляющего

числа видов продукции, но она игнорируется большинством исследователей. В настоящей работе предлагается конструктивный подход к ее учету, который может быть использован при оперативном и тактическом (на срок от нескольких недель до года) планировании работ действующих (устоявшихся) производственно-распределительных сетей.

Обзор исследований

Для решения производственно-распределительных задач предлагались различные методы линейного, целочисленного и динамического программирования, нечеткие множества, генетические алгоритмы и различные эвристические приемы [1, 3–5].

В то же время для определения оптимального плана поставки (в том числе включая производство) продукции из пунктов отправления в пункты потребления на практике давно и успешно применяют транспортную задачу. Классическая ее постановка известна как «транспортная задача Монжа — Канторовича». Гаспар Монж впервые formalизовал данную задачу [7], а Леонид Канторович и Марк Гавурин предложили действенный метод ее решения [8]. Формулировка транспортной задачи как задачи линейного программирования была предложена Фрэнком Хичкоком [9]. С середины XX века и по настоящее время появились многочисленные варианты ее постановки и решения, связанные со специфическими условиями и нюансами, возникающими на практике. В частности, транспортные задачи [10, 11]:

- открытая и закрытая (замкнутая);
- с запретами;
- с ограниченными пропускными возможностями;
- с промежуточными пунктами (многоэтапная);
- с промежуточной обработкой;
- многопродуктовая со взаимозаменяемыми видами продукции;
- и др.

Для решения классической и некоторых специфических видов транспортных задач могут быть применены различные методы оптимизации.

- Венгерский метод. Разработан Гарольдом Куном [12] для решения задачи о назначениях и был в значительной степени основан на более ранних работах двух венгерских математиков: Денеса Кенига и Йене Эгервари. В дальнейшем метод был усовершенствован для решения классической транспортной задачи [13, 14].
- Метод потенциалов. Первый точный метод решения транспортной задачи, предложенный Леонидом Канторовичем и Марком Гавуриным [8].
- Симплекс-метод. Разработан Джорджем Данцигом для решения задач линейного программирования и применен им для решения транспортной задачи [15].

- Метод разрешающих слагаемых (метод приближения условно-оптимальными планами) Александра Лурье [16, 17].
- Метод дифференциальных рент (алгоритм вычеркивающей нумерации) Александра Брудно [18].
- Метод фиктивной диагонали (метод Ордена — Маша) [19];
- и т. д.

Несмотря на обилие методов решения транспортной задачи, подавляющее большинство методов не подходит для рассматриваемой задачи в силу отмеченной выше особенности — сложной структуры производства готовой продукции. В частности, венгерский метод и метод потенциалов не позволяют ее решить за одну оптимизационную процедуру. Для того чтобы решить задачу на стадии s необходимо распределить объемы поставок на стадии $s - 1$ или наоборот. Соответственно возможны два варианта последовательного решения с помощью этих методов, где на каждой стадии решается несколько транспортных задач:

- прямой метод — вначале с помощью серии транспортных задач распределяется продукция на 1-й стадии (исходная продукция), затем, зная распределенные объемы на начальной стадии, распределяется продукция на 2-й стадии и т. д., вплоть до распределения готовой продукции на последней стадии;
- обратный метод — тот же набор транспортных задач, но решаемых в обратном порядке.

Так, если готовая продукция (например, оборудование или устройство) состоит из трех агрегатов, а те, в свою очередь, состоят каждый из трех разных комплектующих, то в общей сложности надо решить 13 транспортных задач ($1 + 3 + 9$). При этом и прямой, и обратный метод не гарантируют нахождение итогового оптимального плана производства и поставки готовой продукции. Описанные варианты решения являются аналогом алгоритма A^* [20], где каждый уровень алгоритма соответствует определенной стадии решения задачи.

В подавляющем большинстве проанализированных работ эта ключевая особенность производственно-распределительных сетей либо игнорируется, либо в них рассматриваются двух- или трехстадийные процедуры по производству готовой продукции из одного вида сырья или полуфабриката (например, с некоторыми упрощениями схемы: сахарная свекла — сахар, доски — стулья, боксы — глинозем — алюминиевые чушки). Таким образом, на отдельной стадии перемещается только один вид продукции, что может быть легко учтено за счет ввода в модель соответствующего коэффициента приведения.

В ряде работ [6, 21] эта особенность явно обозначена и введена в модель, но привела к необходимости использования в методе (методике) решения задачи эвристических приемов, что не гарантирует получения оптимального результата.

Основные положения

Перед формулировкой постановки задачи и изложения методики ее решения примем следующие положения.

П. 1. Под *продукцией* (*видом продукции*) p будем понимать любой материальный или нематериальный актив, перемещаемый между пунктами (узлами) сети, за исключением самих транспортных средств доставки. Как правило, это материальные объекты (например, сырье или готовая продукция), но они могут и не иметь физического воплощения (например, информация, знания, услуги и т. д.) [2].

Перерабатываемая продукция — продукция внешних поставщиков или продукция собственных предприятий, необходимая для производства готовой продукции (например, сырье, полуфабрикаты, детали, комплектующие, агрегаты и т. п.).

Готовая продукция — продукция, поступающая конечным потребителям.

Многокомпонентная (составная, сложная) продукция p^+ — продукция, для изготовления которой требуется несколько видов перерабатываемой продукции. Как правило, готовая продукция является многокомпонентной, но и некоторые виды перерабатываемой продукции могут быть, в свою очередь, многокомпонентными. В частности, для производства на последней стадии единицы готовой продукции p^+ (см. рис. 1) может потребоваться поставка нескольких разных видов агрегатов p с предыдущих стадий, составляющих множество M^{p^+} . Тогда необходимо приведение объемов поставки агрегатов V^p к объемам производства готовой продукции V^{p^+} через соответствующий *коэффициент приведения* k_{pp^+} : $k_{pp^+} \cdot V^p = V^{p^+}$. Например, для сборки одного автомобиля требуется один двигатель, четыре колеса, два стеклоочистителя и т. д. Тогда при сборке автомобилей в количестве V^{p^+} штук потребуется $1 \cdot V^{p^+}$ двигателей, $4 \cdot V^{p^+}$ колес, $2 \cdot V^{p^+}$ стеклоочистителей и т. д. Аналогичным образом через коэффициенты k_{pp^+} выполняется приведение объемов для всех предыдущих стадий вплоть до первичной перерабатываемой продукции. В целях обобщения примем, что множество M^{p^+} может также включать только один вид продукции (например, для складов или конечных потребителей).

П. 2. Пункты производственно-распределительной сети, как отмечено выше, могут быть четырех типов: внешние поставщики, собственные предприятия, распределительные центры (склады), конечные потребители. Каждую пару пунктов, соединенных дугой (перемещением одного вида продукции), как и в классической транспортной задаче, можно отнести к пункту одного из двух типов: *поставщик* i и *потребитель* j .

П. 3. Объемы поставки, производства, переработки, сборки, хранения или потребления одного вида продукции p в пункте i (j) ограничены максимально возможной величиной $[V_i^p]$ ($[V_j^p]$).

П. 4. Пропускная способность каналов поставки продукции между пунктами не ограничена.

П. 5. Для производства и поставки готового изделия требуется несколько стадий переработки, где на каждой стадии от поставщика к потребителю перемещаются *разные виды продукции* (рис. 2).

Следует отметить, что в данной работе перемещение одного и того же вида продукции через склад (группу складов) является *одной стадией*. Это положение не отменяет того факта, что в каждой конкретной паре поставщик-склад, склад-склад или склад-потребитель в соответствии с п. 2 первый является поставщиком, а второй потребителем (рис. 3).

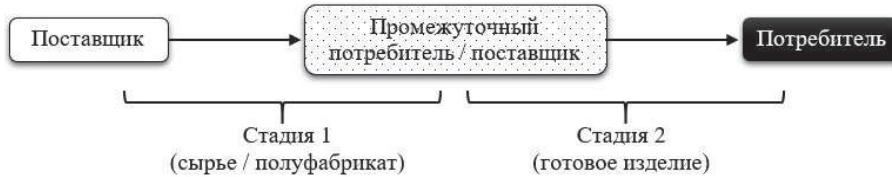


Рис. 2. Многостадийное производство и поставка продукции.

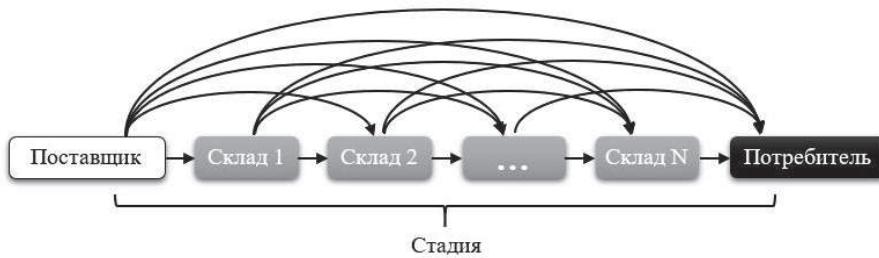


Рис. 3. Стадия производства.

П. 6. Стоимость поставки c_{ij} единицы продукции p между двумя пунктами i и j складывается из двух составляющих:

- первый пункт i поставщик (закупка у внешнего поставщика или собственное производство):

$$c_{ij} = e_i^{\text{произв}} + e_p^{\text{перев}} L_{ij}; \quad (1)$$

- первый пункт i склад (хранение):

$$c_{ij} = e_i^{\text{хран}} + e_p^{\text{перев}} L_{ij}. \quad (2)$$

В формулах (1) и (2):

- $e_i^{\text{перев}}$ — стоимость производства (закупки, переработки, выпуска или сборки) продукции;

- $e_i^{\text{хран}}$ — стоимость хранения единицы продукции. Как правило, стоимость хранения зависит от времени хранения, но можно вывести некоторую среднюю статистическую величину;
- $e_p^{\text{перев}}$ — тариф (стоимость на единицу расстояния) перевозки единицы продукции;
- L_{ij} — расстояние между пунктами, обычно определяемое как длина кратчайшего пути между пунктами.

П. 7. В качестве целевой функции (критерия оптимизации) выбрана минимизация затрат F на закупку, производство, хранение и перевозку всех видов продукции P на всех стадиях S от внешних поставщиков до конечных потребителей. Так как в соответствии с п. 3 объемы потребления готовой продукции фиксированы, то цели минимизации затрат и максимизации прибыли в контексте решения данной задачи эквивалентны.

Для получения оптимального решения в рамках одной оптимизационной процедуры авторам настоящей работы потребовалось ввести дополнительные положения.

П. 8. По каждому виду продукции p для всех поставщиков определяются суммарные максимально возможные объемы поставки (производства, переработки, сборки) продукции $[V^p]$,

$$p \in P : \sum_{i=1}^I [V_i^p] = [V^p]. \quad (3)$$

Аналогичным образом поступают для складов и конечных потребителей — определяют суммарные максимально возможные объемы соответственно хранения или потребления одного вида продукции $[V^p]$.

П. 9. Определяются лимитирующие звенья цепочки поставок и уравновешиваются объемы поставки и потребления продукции. Объемы поставки (производства) и потребления по всем звеньям цепочки определяются и уравновешиваются с учетом коэффициентов k_{pp+} (см. п. 1) — задача из открытой постановки сводится к закрытой, т. е. если возможности поставщиков превышают возможности потребителей, то вводится фиктивный потребитель на недостающие объемы потребления, иначе — фиктивный поставщик на недостающие объемы производства.

На рис. 4 отражены порядок производства и суммарные объемы закупки, производства, хранения и поставки продукции.

Порядок производства:

- Стадия 1 — закупка и поставка деталей:
 - закупка и поставка деталей p_1 и p_2 для сборки агрегатов p_5 ;
 - закупка и поставка деталей p_3 и p_4 для сборки агрегатов p_6 ;
- Стадия 2 — сборка, хранение и поставка агрегатов:
 - сборка агрегатов p_5 и p_6 ;

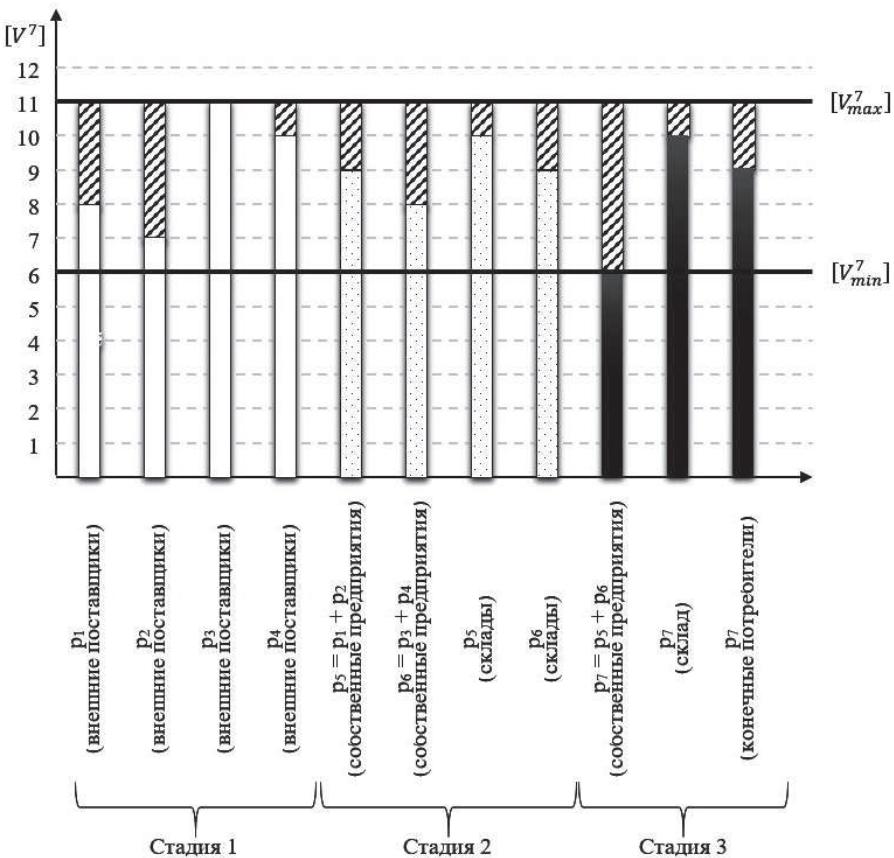


Рис. 4. Пример определения суммарных объемов продукции.

- перемещение агрегатов p_5 и p_6 на склады;
 - поставка агрегатов p_5 и p_6 для сборки готовой продукции p_7 ;

— Стадия 3 — сборка, хранение и поставка готовой продукции:

 - сборка готовой продукции p_7 ;
 - перемещение готовой продукции p_7 на склады;
 - поставка готовой продукции p_7 конечным потребителям.

Суммарные объемы приведены с учетом коэффициентов k_{pp^+} в пересчете на единицу готовой продукции p_7 . Объемы без диагонального узора — максимально возможные объемы поставки (производства, переработки, сборки, хранения, потребления) продукции, с диагональным узором — недостающие объемы относительно самого производительного звена цепочки поставок. Как видно из рис. 4, самым производительным звеном ($[V_{\max}^7]$) является поставка деталей p_3 , достаточных для сборки 11 единиц готовой продукции, самым слабым звеном ($[V_{\min}^7]$) — сборка готовой продукции p_7 в количестве 6 единиц. На звенья с недостаточными объемами вводятся фиктивные поставщики или потребители

на соответствующие объемы $[V^{ff,p}]$. Например, для поставки деталей p_1 будет введен фиктивный внешний поставщик с объемом, достаточным для сборки 3 единиц готовой продукции, для сборки агрегатов p_5 — фиктивное собственное предприятие на 2 единицы, для хранения агрегата p_5 — фиктивный склад на 1 единицу, для получения готовой продукции p_7 — фиктивный потребитель 2 единиц и т. п.

П. 10. По звеньям цепи, не относящимся к лимитирующим, определяются суммарные реальные и фиктивные объемы поставки и потребления продукции относительно самого слабого звена $[V^{rr,p}]$ и $[V^{rf,p}]$.

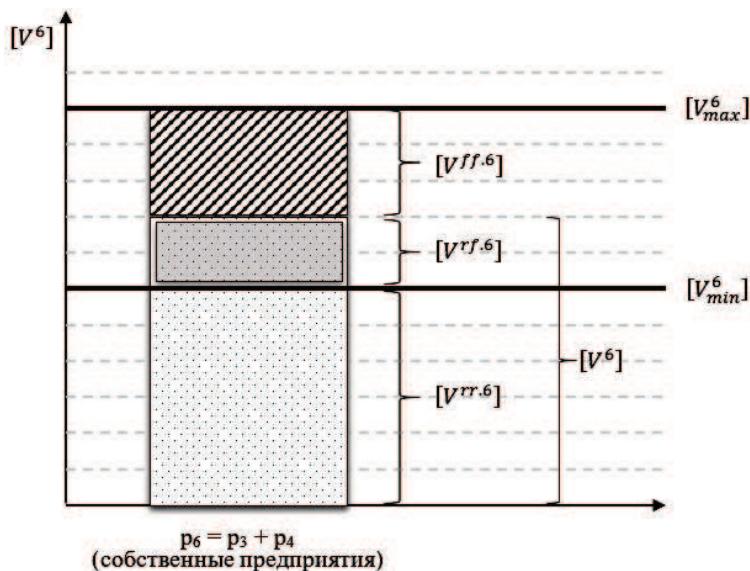


Рис. 5. Пример определения реального и фиктивного объемов продукции.

Объемы пересчитываются в исходных единицах измерения продукции p с учетом определенных в п. 9 лимитирующих звеньев и коэффициентов k_{pp+} . На рис. 5 приняты следующие обозначения объемов (при $p = 6$):

- $[V^p] = [V^{rr,p}] + [V^{rf,p}]$ — суммарные максимально возможные объемы поставки (производства, переработки, сборки) продукции от реальных поставщиков;
- $[V_{min}^p] = [V^{rr,p}]$ — суммарные реальные объемы поставки продукции от реальных поставщиков, которые будут действительно востребованы;
- $[V^{rf,p}]$ — суммарные фиктивные объемы поставки продукции от реальных поставщиков, которые могут быть поставлены, но в действительности не востребованы (избыток продукции);
- $[V^{ff,p}]$ — суммарные фиктивные объемы поставки продукции от фиктивных поставщиков, которые в действительности не могут быть поставлены (дефицит продукции);

- $[V_{\max}^p] = [V^{rr,p}] + [V^{rf,p}] + [V^{ff,p}]$ — суммарные объемы поставки продукции, которые будут распределены при решении задачи.

Аналогичным образом определяются соответствующие объемы для складов и конечных потребителей.

П. 11. Каждый пункт сети (внешний поставщик, собственное предприятие, склад, конечный потребитель) разделяется на две части (t — тип части):

- $t = r$ — реальная часть, с которой осуществляется реальная поставка или потребление продукции;
- $t = f$ — фиктивная часть, с которой осуществляется фиктивная поставка или потребление продукции.

Реальная часть может быть только у реальных поставщиков или потребителей, фиктивная часть — у реальных и фиктивных. Очевидно, что у фиктивных поставщиков объемы поставки с реальной части r равны 0.

В соответствии с таким делением пунктов стоимости поставки $c_{ij}^{t_i t_j \cdot p}$ единицы продукции p между двумя пунктами i и j делятся на 4 составляющие:

- $c_{ij}^{rr,p}$ — стоимость поставки с реальной части реального поставщика на реальную часть реального потребителя (традиционная стоимость поставки, см. формулы (1), (2));
- $c_{ij}^{rf,p} = BN$ — стоимость поставки с реальной части реального поставщика на фиктивную часть реального или фиктивного потребителя;
- $c_{ij}^{fr,p} = BN$ — стоимость поставки с фиктивной части реального или фиктивного поставщика на реальную часть реального потребителя;
- $c_{ij}^{ff,p} = BN$ — стоимость поставки с фиктивной части реального или фиктивного поставщика на фиктивную часть реального или фиктивного потребителя.

Если хотя бы один из пунктов является фиктивным или поставка выполняется с участием фиктивной части пункта, то стоимость поставки $c_{ij}^{t_i t_j \cdot p}$ задается最大的 числом BN .

Аналогичным образом при определении объемов поставок продукции p между двумя пунктами i и j искомые объемы будут делиться на 4 составляющие $x_{ij}^{t_i t_j \cdot p}$.

Математическая постановка задачи

Учитывая указанные выше положения, многостадийную производственно-распределительную задачу можно сформулировать следующим образом: минимизировать суммарные затраты F на закупку, производство, хранение и перевозку всех видов продукции P на всех стадиях S от первичных поставщиков до конечных потребителей:

$$F = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{t \in \{r, f\}} c_{ij}^{t_i t_j \cdot p} \cdot x_{ij}^{t_i t_j \cdot p} \rightarrow \min, \quad (4)$$

с учетом следующих ограничений:

(О.1) для реальных поставщиков i — суммарный поставленный объем продукции p с реальной и фиктивных частей одного реального поставщика должен равняться его максимально возможному объему производства (закупки, переработки, сборки, хранения):

$$\forall p \in P, \forall i \in I^r : \sum_{j=1}^J \sum_{t \in \{r,f\}} x_{ij}^{t_i t_j \cdot p} = [V_i^p]; \quad (5)$$

(О.2) для реальных поставщиков i — суммарный поставленный объем продукции p с фиктивной части всех реальных поставщиков должен равняться избыточному объему (избытку) этой продукции в сети:

$$\forall p \in P : \sum_{i=1}^{I^r} \sum_{j=1}^J \sum_{t \in \{r,f\}} x_{ij}^{f t_j \cdot p} = [V^{rf \cdot p}]; \quad (6)$$

(О.3) для фиктивных поставщиков i — суммарный поставленный объем продукции p фиктивного поставщика должен равняться недостающему объему (дефициту) этой продукции в сети:

$$\forall p \in P, \forall i \in I^f : \sum_{j=1}^J \sum_{t \in \{r,f\}} x_{ij}^{f t_j \cdot p} = [V_i^{ff \cdot p}] \quad (7)$$

(О.4) для реальных потребителей j — суммарный потребляемый объем продукции $p \in M^{p^+}$, поступающий на фиктивную и реальную части одного реального потребителя, должен равняться его максимально возможному объему производства (закупки, переработки, сборки, хранения, потребления) продукции p^+ с учетом коэффициента k_{pp^+} :

$$\forall p^+ \in P^+, \forall p \in P \wedge p \in M^{p^+}, \forall j \in J^r : \sum_{i=1}^I \sum_{t \in \{r,f\}} x_{ij}^{t_i t_j \cdot p} = k_{pp^+} \cdot [V_j^{p^+}]; \quad (8)$$

(О.5) для реальных потребителей j — суммарный потребляемый объем продукции $p \in M^{p^+}$, поступающий на фиктивную часть всех реальных потребителей, должен равняться избыточному объему (избытку) продукции p^+ в сети с учетом коэффициента k_{pp^+} :

$$\forall p^+ \in P^+, \forall p \in P \wedge p \in M^{p^+} : \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J^r} \sum_{t \in \{r,f\}} x_{ij}^{t_i f \cdot p} = k_{pp^+} \cdot [V^{rf \cdot p^+}]; \quad (9)$$

(О.6) для фиктивных потребителей j — суммарный потребляемый объем продукции $p \in M^{p^+}$ фиктивного потребителя должен равняться недостающему объему (дефициту) продукции p^+ в сети с учетом коэффициента k_{pp^+} :

$$\forall p^+ \in P^+, \forall p \in P \wedge p \in M^{p^+}, \forall j \in J^f : \sum_{i=1}^I \sum_{t \in \{r,f\}} x_{ij}^{t_i f \cdot p} = k_{pp^+} \cdot [V_j^{ff \cdot p^+}]; \quad (10)$$

(O.7) для реальных потребителей j , производящих многокомпонентную продукцию p^+ — суммарные потребляемые объемы разных видов продукции $p_v \in M^{p^+}$ и $p_w \in M^{p^+}$, поступающие с реальной части реальных поставщиков на реальную часть реального потребителя, должны быть взаимосогласованы (равными) с учетом коэффициентов $k_{p_v p^+}$ и $k_{p_w p^+}$:

$$\forall p^+ \in P^+, (\forall p_v \in P \wedge p_v \in M^{p^+}) \wedge (\forall p_w \in P \wedge p_w \in M^{p^+}) \wedge p_v \neq p_w, \forall j \in J^r :$$

$$\sum_{i=1}^{I^r} \left(\frac{x_{ij}^{rr,p_v}}{k_{p_v p^+}} \right) = \sum_{i=1}^{I^r} \left(\frac{x_{ij}^{rr,p_w}}{k_{p_w p^+}} \right); \quad (11)$$

(O.8) для реального промежуточного узла (потребителя-поставщика) j — суммарный потребляемый объем продукции $p \in M^{p^+}$, поступающий с реальной части реальных поставщиков предыдущего этапа (стадии) на реальную часть реального промежуточного узла, должен быть взаимосогласован (равным) с поставляемым (\approx производимым) им объемом продукции p^+ , поступающим на реальные части реальных потребителей следующего этапа (стадии), с учетом коэффициента k_{pp^+} :

$$\forall p^+ \in P^+, \forall p \in P \wedge p \in M^{p^+}, \forall j \in J^r : \sum_{i=1}^{I^r} \left(\frac{x_{ij}^{rr,p}}{k_{pp^+}} \right) = \sum_{l=1}^{L^r} x_{jl}^{rr,p^+}; \quad (12)$$

(O.9) объемы поставок любой продукции не должны быть отрицательными:

$$\forall i \in I, \forall j \in J, \forall l \in L : x_{ij}^{rr,p} \geq 0, x_{jl}^{rr,p} \geq 0, x_{ij}^{rf,p} \geq 0, x_{ij}^{fr,p} \geq 0, x_{ij}^{ff,p} \geq 0. \quad (13)$$

Ограничения обеспечивают взаимосогласованность «перемещения» по всей цепочке поставок:

- (O.2) и (O.5) — избыточного объема продукции от реальных поставщиков, которые могут быть поставлены, но в действительности не востребованы (фиктивная часть);
- (O.3) и (O.6) — дефицитного объема продукции от фиктивных поставщиков, которые в действительности не могут быть поставлены (фиктивная часть);
- (O.7) и (O.8) — реальные объемы поставки продукции от реальных поставщиков, которые будут действительно востребованы (реальная часть).

Предложенный вариант постановки задачи с учетом линейность его целевой функции и ограничений прямо указывает на возможность применения для ее решения метода линейного программирования — *симплекс-метода*, который позволит за одну оптимизационную процедуру получить итоговый оптимальный план производства и поставки продукции по всем звеньям цепочки. Более того, в симплекс-методе используется схожая с уравниванием объемов концепция — неравенства в задаче преобразуются в равенства путем ввода так называемых «свободных переменных» [22, 23].

Методика решения задачи

В общем виде методика (алгоритм) решения задачи выглядит следующим образом.

(М.1) Определяются коэффициенты приведения k_{pp^+} продукции с видом p к продукции с видом p^+ . Если продукция с видом p не требуется для производства продукции с видом p^+ , то соответствующий коэффициент $k_{pp^+} = 0$. В этих коэффициентах можно также учесть необходимые резервы (например, на случай низкого качества сырья или брака комплектующих).

(М.2) Для реальных поставщиков и потребителей определяются суммарные максимально возможные объемы производства (закупки, переработки, сборки, хранения, потребления) всех видов продукции $[V^p]$. В случае необходимости (для уравновешивания объемов) вводятся фиктивные поставщики и/или потребители, пункты делятся на две части и определяются суммарные объемы $[V^{rr,p}]$, $[V^{rf,p}]$ и $[V^{ff,p}]$.

(М.3) Определяются расстояния L_{ij} от поставщика i до потребителя j (как правило, методом определения кратчайших путей на графе). Если продукция поставщика i потребителю j не требуется, то $L_{ij} = 0$.

(М.4) Для каждого вида продукции p определяется стоимость поставки $c_{ij}^{rr,p}$ единицы продукции от поставщика i до потребителя j (см. формулы (1), (2)). Стоимости фиктивных поставок $c_{ij}^{rf,p}$, $c_{ij}^{fr,p}$ и $c_{ij}^{ff,p}$ единицы продукции p задаются большим числом BN.

(М.5) Оптимационная задача решается в постановке (4)–(13) симплекс-методом.

(М.6) После выполнения оптимационной процедуры из плана удаляются все фиктивные поставки $x_{ij}^{rf,p}$, $x_{ij}^{fr,p}$ и $x_{ij}^{ff,p}$, тем самым определяются окончательные реальные объемы производства и поставки всех видов продукции для конкретных реальных поставщиков и потребителей.

Заключение

Предложенная постановка производственно-распределительной задачи своей простотой существенно отличается от ранее опубликованных другими авторами. Помимо постановки задачи предложена методика ее решения на базе симплекс-метода, не требующего лишнего представления. Это позволило избежать применения различных эвристических приемов для ее решения.

С помощью изложенной методики можно получить оптимальный план производства и поставок в сетях со сложной структурой производства готовой продукции за одну оптимационную процедуру.

Постановка и методика могут стать основой для решения других, более сложных ситуаций, а также в случаях применения классической транспортной задачи или ее модификаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шапиро Дж. Моделирование цепи поставок. СПб.: Питер, 2006.
2. Lakhal S., Martel A., Oral M., Montreuil B. Network companies and competitiveness: A framework for analysis // EJOR. 1999. V. 118, N 2. P. 278–294.
3. Thomas D. J., Griffin P. M. Coordinated supply chain management // Europ. J. Operat. Res. 1996. V. 94, N 1. P. 1–15. doi:10.1016/0377-2217(96)00098-7.
4. Meixell M. J., Gargeya V. B. Global supply chain design: A literature review and critique // Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review. 2005. V. 41, N 6. P. 531–550. doi:10.1016/j.tre.2005.06.003.
5. Mula J., Peidro D., Díaz-Madriñero M., Vicens E. Mathematical programming models for supply chain production and transport planning // Europ. J. Operat. Res. 2010. V. 204, N 3. P. 377–390.
6. Martel A. The design of production-distribution networks: A mathematical programming approach // Geunes J. and Pardalos P. M. (Eds.). Supply chain optimization. Berlin: Springer, 2005. P. 265–305.
7. Monge G. Memoire sur la theorie des deblais et des remblais // Histoire de l'Academie Royale des Sciences de Paris, avec les Memoires de Mathematique et de Physique pour la memme annee. 1781. P. 666–704.
8. Канторович Л. В., Гавурин М. К. Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков // Проблемы повышения эффективности работы транспорта. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949. С. 110–138.
9. Hitchcock F. L. The distribution of a product from several sources to numerous localities // MIT J. Mathematics and Physics. 1941. V. 20. P. 224–230.
10. Триус Е. Б. Задачи математического программирования транспортного типа. М.: Сов. радио, 1967.
11. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. М.: Наука, 1969.
12. Kuhn H. W. The Hungarian method for the assignment problem // Naval Res. Logistics Quart. 1955, V. 2. P. 83–97. (Kuhn's original publication).
13. Ford L. R., Fulkerson D. R. A simple algorithm for finding maximal network flows and an application to the Hitchcock problem // Santa Monica: RAND Corporation, 1955. Sept. 26. P–743.
14. Munkres J. Algorithms for the assignment and transportation problems // J. Soc. Industr. Appl. Math. 1957. V. 5, N 1. P. 32–38.
15. Dantzig G. B. Application of the simplex method to a transportation problem, activity analysis of production and allocation // New York: John Wiley and Sons, 1951. P. 359–373.
16. Александров А. П., Лурье А. Л., Олейник Ю. А. Применение электроники вычислительных машин в оперативном планировании // Автомобильный транспорт. 1959. № 6. С. 31–35.
17. Лурье А. Л. Алгоритм решения транспортной задачи путем приближения условно оптимальными планами. М.: ВИНИТИ, 1959.
18. Брудно А. Л. Метод дифференциальных рент Лурье для определения плана оптимальных перевозок // Докл. АН СССР. 1960. Т. 131, № 6. С. 1238–1241.
19. Orden A. Transshipment problem // Management Sci. 1956. V. 3. P. 276–285.
20. Люггер Дж. Ф. Искусственный интеллект: стратегии и методы решения сложных проблем. М.: Вильямс, 2004.
21. Arntzen B. C., Brown G. G., Harrison T. P., Trafton L. L. Global supply chain management at digital equipment corporation // Interfaces. 1995. V. 25. P. 69–93.
22. Вагнер Г. Основы исследования операций. М.: Мир, 1972. Т. 1.

-
23. Taxa X. A. Введение в исследование операций. М.: Вильямс, 2006.

Поступила в редакцию 9 января 2024 г.

После доработки 11 апреля 2024 г.

Принята к публикации 30 мая 2024 г.

Анисимов Владимир Викторович, Сазанова Екатерина Владимировна
Дальневосточный государственный университет путей сообщения,
ул. Серышева, 47, Хабаровск 680021
avv@anis.khv.ru, anysia.khv@mail.ru

MULTISTAGE
PRODUCTION–DISTRIBUTION PROBLEM
V. V. Anisimov and E. V. Sazanova

Abstract: The paper presents a new formulation of the production-distribution problem in networks with a complex structure of manufacturing the end product. The paper highlights different features of the problem, including the sequence of procedures for product manufacturing and delivery, taking into account various types of products at one stage, the distinction between a step and a stage. The concepts of "fictitious" and "real" parts (volumes) of product supply from real suppliers were introduced, which made it possible to avoid the use of heuristic methods in solving the problem. The paper presents a technique based on the simplex method for optimizing the production and supply of different types of products at each stage of the production chain, allowing the problem to be solved in one optimization procedure. The results of the study can be useful for planning in complex and multidisciplinary ("network") companies to make economically sound decisions in the field of production chain management.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-2-99-115

Keywords: production-distribution problem, supply chains, transportation problem, simplex method, sequential production of products, optimization of supplies, fictitious supplies, multidisciplinary ("network") companies.

REFERENCES

1. Shapiro J., Supply Chain Modeling, Piter, St. Petersburg (2006).
2. Lakhal S., Martel A., Oral M., and Montreuil B., "Network companies and competitiveness: a framework for analysis," Eur. J. Oper. Res., **118**, No. 2, 278–294 (1999).
3. Thomas D. J. and Griffin P. M., "Coordinated supply chain management," Eur. J. Oper. Res., **94**, No. 1, 1–15 (1996). DOI:10.1016/0377-2217(96)00098-7.
4. Meixell M. J. and Gargeya V. B., "Global supply chain design: A literature review and critique," Transport. Res. Part E: Logistics Transport. Rev., **41**, No. 6, 531–550 (2005). DOI:10.1016/j.tre.2005.06.003.
5. Mula J., Peidro D., Diaz-Madronero M., and Vicens E., "Mathematical programming models for supply chain production and transport planning," Eur. J. Oper. Res., **204**, No. 3, 377–390 (2010).
6. Martel A., "The design of production-distribution networks: a mathematical programming approach," in: Supply Chain Optimization (J. Geunes, P. M. Pardalos, eds.), pp. 265–305, Springer (2005).
7. Monge G., "Memoire sur la theorie des deblais et des remblais," in: Hist. de l'Acad. Sci. Paris, pp. 666–704, Imprim. R. (1781).
8. Kantorovich L. V. and Gavurin M. K., "Application of mathematical methods in issues of analyzing cargo flows [in Russian]," in: Problems of Increasing the Efficiency of Transport, pp. 110–138, Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow; Leningrad (1949).
9. Hitchcock F. L., "The distribution of a product from several sources to numerous localities," MIT J. Math. Phys., **20**, 224–230 (1941).

10. Trius E. B., Problems of Mathematical Programming of Transport Type [in Russian], Sov. Radio, Moscow (1967).
11. Golshtain E. G. and Yudin D. B., Transport-type Linear Programming Problems, Nauka, Moscow (1969).
12. Kuhn H. W., "The Hungarian method for the assignment problem," *Nav. Res. Logist. Q.*, **2**, 83–97 (1955).
13. Ford L. R. and Fulkerson D. R., "A simple algorithm for finding maximal network flows and an application to the Hitchcock problem," *Can. J. Math.*, **9**, 210–218 (1957).
14. Munkres J., "Algorithms for the assignment and transportation problems," *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, **5**, No. 1, 32–38 (1957).
15. Dantzig G. B., "Application of the simplex method to a transportation problem," in: Activity Analysis of Production and Allocation (T. C. Koopmans, ed.), pp. 359–373, John Wiley and Sons, New York (1951).
16. Alexandrov A. P., Lurie A. L., and Oleinik Yu. A., "Application of computer electronics in operational planning [in Russian]," *Avtomob. Transp.*, No. 6, 31–35 (1959).
17. Lurie A. L., An Algorithm for Solving a Transport Problem by Approximating Conditionally Optimal Plans [in Russian], VINITI, Moscow (1959).
18. Brudno A. L., "Lurie's method of differential rents for determining the optimal transportation plan [in Russian]," *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **131**, No. 6, 1238–1241 (1960).
19. Orden A., "Transshipment problem," *Manage. Sci.*, **3**, 276–285 (1956).
20. Lugger G. F., Artificial Intelligence: Strategies and Methods for Solving Complex Problems, Williams, Moscow (2004).
21. Arntzen B. C., Brown G. G., Harrison T. P., and Trafton L. L., "Global supply chain management at digital equipment corporation," *Interfaces*, **25**, 69–93 (1995).
22. Wagner G., Fundamentals of Operations Research, Mir, Moscow (1972).
23. Taha H. A., Introduction to Operations Research, Williams, Moscow (2006).

Submitted January 09, 2024

Revised April 11, 2024

Accepted May 30, 2024

Vladimir V. Anisimov, Ekaterina V. Sazanova
Far Eastern State Transport University,
Institute of Management, Automation and Telecommunications,
47 Seryshev Street, Khabarovsk 680021, Russia
avv@anis.khv.ru, anysia.khv@mail.ru

Математическая жизнь
Межгородской научно-исследовательский семинар
«Неклассические задачи математической физики»

30 марта 2024 г.

«К вопросу постановки и разрешимости основных краевых задач для нагруженных гиперболических уравнений».

Докладчик: А. Х. Аттаев (Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия).

В докладе обсуждены вопросы, связанные с влиянием нагрузки на постановку и разрешимость той или иной краевой задачи для линейных нагруженных гиперболических уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными.

13 апреля 2024 г.

«Решения краевых задач для нерегулярно вырождающихся эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами в прямоугольнике».

Докладчик: Д. П. Емельянов (ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия)

В прямоугольнике $\Omega: 0 < x < 1, 0 < y < b$ рассматривается краевая задача E (в терминологии М. В. Келдыша) для уравнения

$$y^2 u''_{yy} + u''_{xx} + c(y)u'_y + a(y)u = f(x, y)$$

с аналитическими в замыкании области Ω коэффициентами и правой частью. Методом спектрального выделения особенностей И. С. Ломова вводится счетное число новых переменных τ_k и ставится расширенная регуляризованная краевая задача, формальное решение которой строится в виде ряда и является аналитическим по переменным y и τ_k .

Устанавливаются достаточные условия на коэффициенты и правую часть исходного уравнения, при которых формальное решение расширенной задачи сходится и при подстановке $\tau_k = g_k(y)$ является классическим решением исходной задачи. Вид функций $g_k(y)$ указывается явно. Таким образом доказывается аналог теоремы Коши — Ковалевской для вырождающихся уравнений данного класса, устанавливающий явным образом характер неаналитической зависимости решения уравнения от переменной y в окрестности отрезка вырождения.

Также будет установлено, что полученный после подстановки $\tau_k = g_k(y)$ ряд сходится при существенно более слабых требованиях на коэффициенты уравнения.

В случаях краевых задач D и E с вырождениями y^m , где $0 < m < 2$, получены аналогичные результаты, касающиеся общего вида их формального решения, характера его неаналитической зависимости от переменного y и сходимости в области Ω .

27 апреля 2024 г.

«Исследование вопросов разрешимости эволюционных уравнений с несколькими производными Герасимова — Капуто».

Докладчик: К. В. Бойко (Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия)

Доклад посвящен вопросам существования и единственности решения начальных задач для линейных и квазилинейных уравнений с дробными производными в банаховых пространствах с приложениями к начально-краевым задачам для уравнений и систем уравнений в частных производных. В частности, рассмотрена задача Коши для разрешенных относительно старшей производной линейных уравнений с ограниченными операторами при производных Герасимова — Капуто, получены теорема о ее однозначной разрешимости и представление решения в терминах интегралов типа Данфорда — Тейлора. Это позволило исследовать соответствующие квазилинейные уравнения, а также задачи типа Шоултера — Сидорова для линейных и квазилинейных уравнений с вырожденным оператором при старшей производной при условии спектральной ограниченности пары операторов при двух старших производных.

Для исследования задачи Коши для уравнений с несколькими дробными производными (multi-term fractional equations) и линейными замкнутыми операторами при них введено в рассмотрение понятие разрешающего семейства уравнения и предложены условия секториальности набора операторов, доказаны их необходимость и достаточность для существования аналитических в секторе разрешающих семейств уравнения. Формула представления решения линейного неоднородного уравнения позволила исследовать задачу Коши для соответствующих квазилинейных уравнений, в которых нелинейный оператор зависит от нескольких младших производных Герасимова — Капуто. Вырожденные линейные и квазилинейные уравнения исследованы при условии секториальности пары операторов при старших производных.

Абстрактные результаты использованы для исследования начально-краевых задач для уравнений с многочленами от эллиптического оператора, для систем уравнений, моделирующих динамику и термоконвекцию вязкоупругой среды, начальных задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с несколькими дробными производными.

11 мая 2024 г.

«Разрешимость некоторых обратных задач для псевдопараболического уравнения».

Докладчик: С. Е. Айтжанов (Казахский национальный университет имени Аль-Фараби, Нур-Султан, Казахстан)

В докладе рассмотрены обратные задачи определения коэффициента правой части псевдопараболического уравнения, зависящего от временной перемен-

ной. Также рассмотрены обратные задачи для псевдопараболического уравнения, неизвестные коэффициенты которого зависят как от пространственной переменной, так и от временной переменной. В настоящее время исследования прямых и обратных задач для соболевских уравнений активно развиваются в связи с необходимостью моделирования и управления процессами в гидродинамике, механике, теплофизике, механике окружающей среды. Доказываются существование и единственность регуляярных решений обратных задач.

25 мая 2024 г.

«Регуляризованная асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи Коши для однородного уравнения Шредингера с потенциалом $Q = x^2$, содержащей фокальные точки».

Докладчик: А. Г. Елисеев (Московский энергетический институт, Москва, Россия)

В настоящее время различным методам асимптотического интегрирования сингулярно возмущенных задач посвящено огромное количество работ, их столь много, что полного обзора в докладе ограниченного объема привести не представляется возможным.

Данная работа посвящена развитию метода регуляризации С. А. Ломова на сингулярно возмущенные задачи при наличии спектральных особенностей у предельного оператора. В частности, строится регуляризованное асимптотическое решение сингулярно возмущенной однородной задачи Коши для уравнения Шредингера при наличии «сильной» точки поворота у предельного оператора на промежутках времени, содержащих фокальные точки. На основе идеи асимптотического интегрирования задач с нестабильным спектром указано, каким образом следует вводить регуляризирующие функции, подробно описан формализм метода регуляризации для указанного вида особенности, проведено обоснование этого алгоритма и построено асимптотическое решение любого порядка по малому параметру. Основная проблема, с которой сталкивается исследователь при применении метода регуляризации, связана с поиском и описанием регуляризирующих функций, которые содержат в себе неравномерную сингулярную зависимость решения исходной задачи, выделяя которые, можно оставшуюся часть решения искать в виде степенных рядов по малому параметру.

8 июня 2024 г.

«Дробный анализ на основе d -оператора. Обобщение производных, формулы Ньютона — Лейбница и основной теоремы алгебры».

Докладчик: В. А. Чуриков (Томский государственный университет, Томск, Россия)

Рассматривается подход построения d -анализа, в котором обобщается интегродифференцирование на любые вещественные и комплексные порядки. В основе d -анализа лежит d -оператор интегродифференцирования вещественных и комплексных порядков, имеющий алгебраический характер и действующий на степенные функции и на их конечные и бесконечные суперпозиции. В частном случае, когда порядок интегродифференцирования равен 1, d -оператор совпада-

ет с операторами интегродифференцирования степенных функций классического анализа. Рассмотрены некоторые частные случаи и обобщения d -оператора, в частности, обобщение на случай некоторых переменных вещественных порядков.

Рассмотрены особенности d -анализа. Показана многозначность производных в d -анализе, а также многозначность первообразных. Дано обобщение формулы Ньютона — Лейбница.

Показана важная роль дробностепенных рядов в d -анализе с постоянным шагом, через которые выражаются многие элементарные и специальные функции d -анализа: экспоненты, гиперболические и тригонометрические функции и др. Получена ζ -функция Римана с помощью d -оператора комплексных порядков дискретной переменной.

Вводятся полиномы любых вещественных порядков, с помощью которых обобщаются алгебраические уравнения на случай любых вещественных порядков. Приводится способ решения таких уравнений. Для этого формулируется теорема и дается ее доказательство, в основе которого лежит классическая основная теорема алгебры.

Обсуждается частный случай d -анализа, в соответствии с которым для любого порядка интегродифференцирования можно развивать свою ветвь анализа аналогично классическому анализу.

Показывается возможность использования для расчетов свойств однородных фракталов и физико-химических процессов в них.

22 июня 2024 г.

«Спрятанные атTRACTоры в уравнениях биохимической кинетики».

Докладчик: В. П. Голубятников (Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия).

Рассматриваются трехмерные системы обыкновенных дифференциальных уравнений биохимической кинетики с блочно-линейными правыми частями. В фазовых портретах таких систем описаны спрятанные атTRACTоры, установлены условия существования циклов, лежащих вне областей притяжения таких атTRACTоров. Получены результаты о неединственности циклов в таких фазовых портретах.

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. К публикации в журнале «Математические заметки СВФУ» принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики, механики и информатики. Статьи, опубликованные ранее, а также направленные в другие издания, редакцией не рассматриваются. Редакционный совет вправе воздержаться от принятия статьи к рассмотрению, если она не соответствует профилю журнала.

2. Направляя статью в редакцию журнала, автор (соавторы) на безвозмездной основе передает(ют) издателю на срок действия авторского права по действующему законодательству РФ исключительное право на использование статьи или отдельной ее части (в случае принятия статьи к опубликованию) на территории всех государств, где авторские права в силу международных договоров Российской Федерации являются охраняемыми, в том числе следующие права: на воспроизведение, на распространение, на публичный показ, на доведение до всеобщего сведения, на перевод на иностранные языки (и исключительное право на использование переведенного произведения вышеуказанными способами), на предоставление всех вышеперечисленных прав другим лицам. Одновременно со статьей автор (соавторы) направляет в редакцию подписанный лицензионный договор на право использования научного произведения в журнале. Образец договора высыпается авторам по электронной почте вместе с сообщением о принятии статьи к печати.

3. Для рассмотрения статьи на предмет ее публикации в журнале в редакцию представляются текст статьи объемом не более 1,5 авторских листов (18 страниц журнального текста), написанной на русском или, по согласованию с редакцией, на английском языке, а также сопроводительное письмо, в котором сообщается, что статья направляется именно в журнал «Математические заметки СВФУ», и информация об авторе (коллективе авторов) с указанием фамилии, имени и отчества, полного почтового адреса для переписки, места работы, подробного служебного адреса, адреса электронной почты и номера телефона. Статьи объемом более 1,5 авторских листов, как правило, не рассматриваются и могут быть приняты к рассмотрению и опубликованы лишь по специальному решению редакционного совета.

4. Статья должна быть подготовлена с использованием текстового редактора LaTeX и представлена в виде файлов форматов pdf и tex.

5. В начале статьи указывается индекс УДК и/или MSC. Статья сопровождается аннотацией объемом не менее 100 слов, желательно без формул, и списком ключевых слов. Аннотация и список должны быть представлены на русском и английском языках.

6. Список литературы печатается в конце текста. Ссылки на литературу в тексте нумеруются в порядке их появления и даются в квадратных скобках. Ссылки на неопубликованные работы нежелательны. Оформление литературы должно соответствовать требованиям стандартов (примеры библиографических описаний см. в последних номерах журнала).

7. Издание осуществляет рецензирование всех поступающих в редакцию материалов, соответствующих ее тематике, с целью их экспертной оценки. Все рецензенты являются признанными специалистами по тематике рецензируемых материалов и имеют в течение последних 3 лет публикации по тематике рецензируемой статьи. Рецензии хранятся в редакции издания в течение 5 лет.

8. Принятая к рассмотрению статья направляется на анонимное рецензирование. На основании рецензии редсовет принимает решение о возможности публикации статьи, которое сообщается автору. Автор вправе сообщить свои замечания и возражения к рецензии. Повторное решение редсовета по статье является окончательным.

9. Редакция издания направляет авторам представленных материалов копии рецензий или мотивированный отказ, а также обязуется направлять копии рецензий в Министерство науки и высшего образования Российской Федерации при поступлении в редакцию издания соответствующего запроса.

10. После редакционной подготовки непосредственно перед публикацией автору высыпается корректура. По возможности в наиболее короткие сроки необходимо ее прочесть, внести исправления (правка против авторского оригинала нежелательна) и направить в редакцию. Статья выходит в свет только после получения от автора (коллектива авторов) авторской корректуры, подписанной автором (всеми соавторами) в печать.

11. В соответствии с международными законами об авторском праве Редакция уведомляет авторов журнала об их ответственности за получение ими в случае необходимости письменного разрешения на использование охраняемых авторским правом материалов, таких, как цитаты, воспроизведение данных, иллюстраций и любых иных материалов, которые могут быть использованы в их публикациях, а также о том, что вытекающая отсюда ответственность за нарушение таких авторских прав лежит на авторах. Плата за опубликование с авторами или учреждений, где работают авторы, не взимается, и опубликованные статьи не оплачиваются.

12. Права авторов на использование материалов статей и переводов статей из журнала «Математические заметки СВФУ» в иных публикациях определяются общими международными и российскими законами об авторских правах.



Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций
Свидетельство о регистрации № ПИ № ФС 77-59001 от 11.08.2014 г.

Учредитель: ФГАОУ ВО «Северо-Восточный
федеральный университет имени М. К. Аммосова»
ул. Белинского, 58, Якутск 677000

Подписано в печать 10.07.2024. Дата выхода 10.07.2024. Формат 70 × 108/16. Печать офсетная.
Печ. л. 10,85. Уч.-изд. л. 11,0. Тираж 50 экз. Заказ № 153.

Издательский дом Северо-Восточного федерального университета,
677891, г. Якутск, ул. Петровского, 5.
Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии ИД СВФУ