

СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М. К. АММОСОВА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ СВФУ

ОСНОВАН В 1994 ГОДУ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ВЫХОДИТ 4 РАЗА В ГОД

Том 21, № 1 (81)

Январь—март, 2014

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Алсыкова А. А. О разрешимости пространственно-нелокальных краевых задач для некоторых аналогов уравнения Буссинеска	3
Егоров И. Е. О краевой задаче для уравнения смешанного типа со спектральным параметром	11
Кожанов А. И., Шарин Е. Ф. Задача сопряжения для некоторых неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка. II	18
Крылова Е. А. Численное решение обратной задачи Стефана методом введения распределенного источника теплоты	29
Попов С. В., Ткаченко Л. Ю. Исследование контактных параболических краевых задач в гёльдеровских пространствах ...	38
Попова Т. С. Задача о равновесии вязкоупругого тела с тонким жестким включением	47
Спиридонова Н. Р. Видоизмененная краевая задача для сильно вырождающихся неклассических дифференциальных уравнений ..	56
Хашимов А. Р., Тургинов А. М. О некоторых нелокальных задачах для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками ..	69
Шадрина Н. Н. О разрешимости некоторых задач сопряжения для уравнений эллиптического типа	75

Математическое моделирование

Волчков Ю. М. Моделирование краевого эффекта в цилиндрической оболочке в условиях ползучести	90
Григорьев Ю. М., Борисова М. Н. Различные подходы моделирования наведенных токов в линии передач	98

Никифорова Л. В., Матвеев А. И., Слепцова Е. С., Яковлев Б. В. <i>Математическое моделирование процесса</i> <i>отсадки</i>	106
--	-----

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

СВФУ, ул. Белинского, 58, Якутск, 677000
 Телефон: 8(4112)32-14-99, Факс: 8(4112)36-43-47;
[http://s-vfu.ru/universitet/rukovodstvo-i-struktura/
 instituty/niim/mzsvfu/](http://s-vfu.ru/universitet/rukovodstvo-i-struktura/instituty/niim/mzsvfu/)
 e-mail: prokopevav85@gmail.com; madu@ysu.ru;
 ivanegorov51@mail.ru

УДК 517.956

О РАЗРЕШИМОСТИ
ПРОСТРАНСТВЕННО-НЕЛОКАЛЬНЫХ
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ
АНАЛОГОВ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА
А. А. Алсыкова

Аннотация. Для аналога уравнения Буссинеска рассматриваются пространственно-нелокальные краевые задачи с условиями Самарского. Для исследуемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений.

Ключевые слова: нелокальная краевая задача, уравнение Буссинеска, существование и единственность регулярных решений.

Пусть Ω — интервал $(0,1)$ оси Ox , Q — прямоугольник $\Omega \times (0, T)$ конечной высоты T , $f(x, t)$, $a(x, t)$, $b(x, t)$, $c(x, t)$, $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ ($i = 1, 2$) — заданные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T]$ функции.

Краевая задача I. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$Lu(x, t) \equiv u_{tt}(x, t) - u_{xxtt}(x, t) + a(x, t)u_{xx}(x, t) + b(x, t)u_x(x, t) + c(x, t)u(x, t) = f(x, t) \quad (1)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$\begin{cases} u_x(0, t) = \alpha_1(t)u(0, t) + \alpha_2(t)u(1, t), & 0 < t < 1, \\ u_x(1, t) = \beta_1(t)u(0, t) + \beta_2(t)u(1, t), & 0 < t < 1, \end{cases} \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \quad \text{при } x \in \Omega. \quad (3)$$

Краевая задача II. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняется условие (3), а также условие

$$\begin{cases} u(0, t) = \alpha_1(t)u_x(0, t) + \alpha_2(t)u(1, t), & 0 < t < 1, \\ u_x(1, t) = \beta_1(t)u_x(0, t) + \beta_2(t)u(1, t), & 0 < t < 1. \end{cases} \quad (4)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта БГУ, 2012.

Краевая задача III. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняется условие (3), а также условие

$$\begin{cases} u(0, t) = \alpha_1(t)u_x(0, t) + \alpha_2(t)u_x(1, t), & 0 < t < 1, \\ u(1, t) = \beta_1(t)u_x(0, t) + \beta_2(t)u_x(1, t), & 0 < t < 1. \end{cases} \quad (5)$$

Уравнение (1) представляет собой аналог уравнения Буссинеска, возникающего в теории длинных волн при описании волн в плазме и при описании продольных колебаний в стержне (см., например, [1]). Разрешимость тех или иных краевых и начально-краевых задач для уравнений вида (1) достаточно хорошо изучена (см. [1–5]), в то время как о нелокальных задачах этого не скажешь, можно отметить лишь работу [6], в которой изучались задачи с интегральными условиями весьма специфического вида, и статью [7], в которой рассмотрены задачи с интегральными по пространственным переменным условиями (уточним, что как в [6], так и в [7] доказано существование обобщенных условий).

1. Разрешимость краевой задачи I

Пусть V — следующее пространство функций:

$$V = \{v(x, t) : v(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega)), \quad v_t(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega)), \\ v_{tt}(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega))\},$$

норму в этом пространстве определим естественным образом:

$$\|v\|_V = \|v\|_{L_2(0, T; W_2^2(\Omega))} + \|v_t\|_{L_2(0, T; W_2^2(\Omega))} + \|v_{tt}\|_{L_2(0, T; W_2^2(\Omega))}.$$

Введем обозначение

$$F(x, t) = f(x, t) - a(x, t)u_{xx}(x, t) - b(x, t)u_x(x, t) - c(x, t)u(x, t).$$

При доказательстве разрешимости краевых задач будем использовать неравенство

$$v^2(y, \tau) \leq \delta_0^2 \int_0^1 v_x^2(x, \tau) dx + \left(1 + \frac{1}{\delta_0^2}\right) \int_0^1 v^2(x, \tau) dx, \quad (6)$$

справедливое для любого произвольного положительного числа δ_0 и любой точки y из отрезка $[0, 1]$.

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия:

$$a(x, t) \in L_\infty(Q), \quad b(x, t) \in L_\infty(Q), \quad c(x, t) \in L_\infty(Q), \quad (7)$$

$$\alpha_i(t) \in C^2([0, T]), \quad \beta_i(t) \in C^2([0, T]), \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

$$\alpha_1(t)\xi^2 + [\alpha_2(t) - \beta_1(t)]\xi\eta - \beta_2(t)\eta^2 \geq 0, \quad t \in [0, T], \quad (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2, \quad (9)$$

$$\lambda_0[\alpha_2(t) + \beta_2(t)] \neq 2. \quad (10)$$

Тогда для любой функции $f(x, t) \in L_2(Q)$ краевая задача I разрешима в пространстве V , притом единственным образом.

Доказательство. Покажем, что для решения краевой задачи I из пространства V имеют место «хорошие» априорные оценки (в дальнейшем эти

оценки позволят применить метод продолжения по параметру). Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^1 [u_{\tau\tau}(x, \tau) - u_{xx\tau\tau}(x, \tau) + a(x, \tau)u_{xx}(x, \tau) + b(x, \tau)u_x(x, \tau) \\ + c(x, \tau)u(x, \tau)]u_{\tau\tau}(x, \tau) dx d\tau = \int_0^t \int_0^1 f(x, \tau)u_{\tau\tau}(x, \tau) dx d\tau. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, с учетом граничных условий нетрудно перейти от данного равенства к следующему:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^1 u_{\tau\tau}^2(x, \tau) dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 u_{x\tau\tau}^2(x, \tau) dx d\tau \\ + \int_0^t [\alpha_1(\tau)u_{\tau\tau}^2(0, \tau) + (\alpha_2(\tau) - \beta_1(\tau))u_{\tau\tau}(1, \tau)u_{\tau\tau}(0, \tau) - \beta_2(\tau)u_{\tau\tau}^2(1, \tau)] d\tau \\ = \int_0^t [-\alpha_{1\tau\tau}(\tau)u(0, \tau)u_{\tau\tau}(0, \tau) - 2\alpha_{1\tau}(\tau)u_\tau(0, \tau)u_{\tau\tau}(0, \tau) - \alpha_{2\tau\tau}(\tau)u(1, \tau)u_{\tau\tau}(0, \tau) \\ - 2\alpha_{2\tau}(\tau)u_\tau(1, \tau)u_{\tau\tau}(0, \tau) + \beta_{1\tau\tau}(\tau)u(0, \tau)u_{\tau\tau}(1, \tau) + 2\beta_{1\tau}(\tau)u_\tau(0, \tau)u_{\tau\tau}(1, \tau) \\ + \beta_{2\tau\tau}(\tau)u(1, \tau)u_{\tau\tau}(1, \tau) + 2\beta_{2\tau}(\tau)u_\tau(1, \tau)u_{\tau\tau}(1, \tau)] d\tau + \int_0^t \int_0^1 F(x, \tau)u_{\tau\tau}(x, \tau) dx d\tau, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$F(x, \tau) = f(x, \tau) - a(x, \tau)u_{xx}(x, \tau) - b(x, \tau)u_x(x, \tau) - c(x, \tau)u(x, \tau).$$

Оценим правую часть (11). Для первого слагаемого, используя неравенство Юнга, неравенство (6) и условия (7), (8), получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \alpha_{1\tau\tau}(\tau)u(0, \tau)u_{\tau\tau}(0, \tau) d\tau \right| \leq \delta^2 \int_0^t \int_0^1 [u_{x\tau\tau}^2(x, \tau) + u_{\tau\tau}^2(x, \tau)] dx d\tau \\ + \frac{A}{\delta^2} \int_0^t \int_0^1 [u_x^2(x, \tau) + u^2(x, \tau)] dx d\tau. \end{aligned}$$

Здесь δ — произвольное положительное число, A определяется функцией α_1 . С помощью очевидного неравенства

$$\int_0^t \int_0^1 u^2 dx d\tau \leq T^2 \int_0^t \int_0^\tau \int_0^1 u_{\xi\xi}^2 dx d\xi d\tau$$

имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \alpha_{1\tau\tau}(\tau)u(0, \tau)u_{\tau\tau}(0, \tau) d\tau \right| \leq \delta^2 \int_0^t \int_0^1 [u_{x\tau\tau}^2(x, \tau) + u_{\tau\tau}^2(x, \tau)] dx d\tau \\ + \frac{AT^2}{\delta^2} \int_0^t \int_0^1 [u_{x\xi\xi}^2(x, \xi) + u_{\xi\xi}^2(x, \xi)] dx d\xi. \end{aligned}$$

Оценив аналогично остальные слагаемые и проинтегрировав последнее слагаемое по частям, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^1 u_{\tau\tau}^2(x, \xi) dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 u_{x\tau\tau}^2(x, \xi) dx d\tau \\ \leq M_1 \int_0^t \int_0^\tau \int_0^1 [u_{\xi\xi}^2(x, \xi) + u_{x\xi\xi}^2(x, \xi)] dx d\xi d\tau + M_2, \end{aligned}$$

где M_1 и M_2 определяются функциями $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $i = 0, 1$, $a(x, t)$, $b(x, t)$ и $c(x, t)$.

Из леммы Гронуолла вытекает оценка

$$\int_0^t \int_0^1 u_{\tau\tau}^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 u_{x\tau\tau}^2 dx d\tau \leq M_3.$$

Для получения второй оценки умножим уравнение (1), записанное в переменных x и τ , на $-u_{xx\tau\tau}$ и проинтегрируем по переменной x от 0 до 1 и по переменной τ от 0 до t :

$$\int_0^t \int_0^1 u_{xx\tau\tau}^2 dx d\tau = \int_0^t \int_0^1 u_{\tau\tau} u_{xx\tau\tau} dx d\tau - \int_0^t \int_0^1 F u_{xx\tau\tau} dx d\tau,$$

где

$$F(x, \tau) = f(x, \tau) - a(x, \tau)u_{xx}(x, \tau) - b(x, \tau)u_x(x, \tau) - c(x, \tau)u(x, \tau).$$

Используя неравенства Юнга и Гёльдера, а также первую оценку, приходим к следующему неравенству:

$$\int_0^t \int_0^1 u_{xx\tau\tau}^2 dx d\tau \leq M_4 \int_0^t \int_0^\tau \int_0^1 u_{xx\xi\xi}^2 dx d\xi d\tau + M_5.$$

Здесь постоянные M_4 и M_5 определяются функциями $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $i = 0, 1$, $a(x, t)$, $b(x, t)$, $c(x, t)$ и числом T .

Из этого неравенства лемма Гронуолла позволяет вывести вторую априорную оценку:

$$\int_0^t \int_0^1 u_{xx\tau\tau}^2 dx d\tau \leq M_5 e^{M_4} \leq M_6.$$

На основании полученных оценок можно сделать вывод, что норма функции $u(x, t)$ в пространстве V ограничена постоянной:

$$\|u\|_V \leq M_7, \quad (12)$$

где M_7 определяется функциями $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $i = 0, 1$, $a(x, t)$, $b(x, t)$, $c(x, t)$ и числом T .

При доказательстве разрешимости краевой задачи будем использовать метод продолжения по параметру. Пусть λ — число из отрезка $[0, 1]$. Рассмотрим

семейство краевых задач: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняется условие (3), а также условие

$$\begin{cases} u_x(0, t) = \lambda[\alpha_1(t)u(0, t) + \alpha_2(t)u(1, t)], & 0 < t < 1, \\ u_x(1, t) = \lambda[\beta_1(t)u(0, t) + \beta_2(t)u(1, t)], & 0 < t < 1. \end{cases} \quad (2_\lambda)$$

Обозначим через Λ множество тех чисел λ из отрезка $[0, 1]$, для которых задача (1), (2_λ) , (3) разрешима в пространстве V для любой функции $f(x, t)$ из пространства $L_2(Q)$. Известно, что если множество λ непусто, открыто и замкнуто, то оно совпадает со всем отрезком $[0, 1]$ (см. [8]). Совпадение множества Λ с отрезком $[0, 1]$ означает, что краевая задача (1)–(3) имеет решение из пространства V .

Непустота множества Λ очевидна, так как число 0 принадлежит ему. Для доказательства открытости множества Λ достаточно показать, что если $\lambda_0 \in \Lambda$, то при малой величине $|\tilde{\lambda}|$ число $\lambda = \lambda_0 + \tilde{\lambda}$ также принадлежит Λ .

Пусть $v(x, t)$ — произвольно заданная функция из пространства V . Положим

$$\varphi(t) = \tilde{\lambda}[\alpha_1(t)v(0, t) + \alpha_2(t)v(1, t)],$$

$$\psi(t) = \tilde{\lambda}[\beta_1(t)v(0, t) + \beta_2(t)v(1, t)],$$

$$u_0(x, t) = \frac{[(1 - \lambda_0\beta_2(t))x^2 - (2 - \lambda_0\beta_2(t))x]\varphi(t) - [(1 - \lambda_0\alpha_2(t))x^2 + \lambda_0\alpha_2(t)x]\psi(t)}{\lambda_0[\alpha_2(t) + \beta_2(t)] - 2}.$$

Пусть

$$g_v(x, t) = f(x, t) - Lu_0(x, t).$$

Рассмотрим вспомогательную задачу: найти функцию $w(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$Lw(x, t) = g_v(x, t) \quad (1')$$

и такую, что для нее выполняются условия (2_{λ_0}) , (3).

Поскольку $v(x, t)$ — функция из пространства V , имеет место $Lu_0 \in L_2(Q)$, и решение данной задачи также будет из этого пространства. Значит, возможно определить оператор Φ , переводящий пространство V в себя: $\Phi(w) = v$.

Пусть $v_1(x, t)$, $v_2(x, t)$ — две функции из пространства V , $w_1(x, t)$, $w_2(x, t)$ — решения задачи $(1')$, (2_{λ_0}) , (3) с функциями $g_{v_1}(x, t)$ и $g_{v_2}(x, t)$ соответственно. Повторяя доказательство оценки (12), приходим к неравенству

$$\|\Phi(w_1) - \Phi(w_2)\|_V \leq |\tilde{\lambda}|M_8\|v_1 - v_2\|_{L_2(Q)}.$$

Если теперь число $\tilde{\lambda}$ взять настолько малым, что будет выполняться неравенство $|\tilde{\lambda}|M_8 \leq 1$, то оператор Φ будет сжимающим. Неподвижная точка этого оператора и даст функцию $w(x, t)$, являющуюся решением краевой задачи.

Для функции $g_w(x, t)$ определим функцию $u(x, t)$:

$$\begin{aligned} u(x, t) = w(x, t) + & \frac{\tilde{\lambda}[(1 - \lambda_0\beta_2(t))x^2 - (2 - \lambda_0\beta_2(t))x][\alpha_1(t)w(0, t) + \alpha_2(t)w(1, t)]}{\lambda_0[\alpha_2(t) + \beta_2(t)] - 2} \\ & + \frac{\tilde{\lambda}[(1 - \lambda_0\alpha_2(t))x^2 + \lambda_0\alpha_2(t)x][\beta_1(t)w(0, t) + \beta_2(t)w(1, t)]}{\lambda_0[\alpha_2(t) + \beta_2(t)] - 2}. \end{aligned}$$

Функция $u(x, t)$ принадлежит пространству V и будет решением задачи (1), (2_λ) , (3) для $\lambda = \lambda_0 + \tilde{\lambda}$. Это означает, что число $\lambda_0 + \tilde{\lambda}$ принадлежит Λ и множество Λ открыто.

Докажем, что из оценки (12) следует замкнутость множества Λ . Пусть λ_m — последовательность чисел из множества Λ такая, что $\lambda_m \rightarrow \lambda_0$ при $m \rightarrow \infty$, $u_m(x, t)$ — последовательность решений задачи (1), (2_{λ_m}) , (3). Положим $w_{mk}(x, t) = u_m(x, t) - u_k(x, t)$. Для функции $w_{mk}(x, t)$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} Lw_{mk} &= 0, \\ \begin{cases} w_{mkx}(0, t) &= \lambda_k[\alpha_1(t)w_{mk}(0, t) + \alpha_2(t)w_{mk}(1, t)] \\ &+ (\lambda_m - \lambda_k)[\alpha_1(t)u_m(0, t) + \alpha_2(t)u_m(1, t)], \\ w_{mkx}(1, t) &= \lambda_k[\beta_1(t)w_{mk}(0, t) + \beta_2(t)w_{mk}(1, t)] \\ &+ (\lambda_m - \lambda_k)[\beta_1(t)u_m(0, t) + \beta_2(t)u_m(1, t)], \end{cases} \\ w_{mk}(x, 0) &= w_{mkt}(x, 0) = 0 \quad \text{при } x \in \Omega. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что последовательность $u_{mk}(x, t)$ фундаментальна в пространстве V . Стало быть, существует $u(x, t) \in V$ такая, что $u_{mk}(x, t) \rightarrow u(x, t)$ при $m \rightarrow \infty$ в пространстве V . Для функции $u(x, t)$ выполняются уравнение (1) и условия (2_{λ_0}) , (3). Тем самым число λ_0 принадлежит множеству Λ . Принадлежность предельной точки множеству Λ означает, что Λ замкнуто.

Таким образом, множество Λ непусто, открыто и замкнуто. Следовательно, оно совпадает со всем отрезком $[0, 1]$. Значит, краевая задача (1)–(3) разрешима в пространстве V .

2. Разрешимость краевой задачи II

Теорема 2. Пусть выполняются условия (7)–(9) теоремы 1, а также условие

$$\lambda_0^2[\alpha_1(t)\beta_2(t) - \alpha_2(t)\beta_1(t)] + \lambda_0[\alpha_2(t) + \beta_1(t) + \beta_2(t)] \neq 1.$$

Тогда для любой функции $f(x, t) \in L_2(Q)$ краевая задача II разрешима в пространстве V и притом единственным образом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что для решений задачи II справедлива оценка (12) (устанавливается эта оценка дословным повторением соответствующих рассуждений доказательства теоремы 1). Далее вновь воспользуемся методом продолжения по параметру. Пусть по-прежнему λ — число из отрезка $[0, 1]$.

Рассмотрим семейство краевых задач: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняется условие (3), а также условие

$$\begin{cases} u(0, t) = \lambda[\alpha_1(t)u_x(0, t) + \alpha_2(t)u(1, t)], & 0 < t < 1, \\ u_x(1, t) = \lambda[\beta_1(t)u_x(0, t) + \beta_2(t)u(1, t)], & 0 < t < 1. \end{cases} \quad (4_\lambda)$$

Обозначим через Λ множество тех λ из отрезка $[0, 1]$, для которых задача (1), (4_λ) , (3) разрешима в пространстве V для любой функции $f(x, t)$ из пространства $L_2(Q)$. Как говорилось ранее, если множество Λ непусто, открыто и замкнуто, то оно совпадает со всем отрезком $[0, 1]$. Совпадение Λ с отрезком $[0, 1]$ означает, что краевая задача (1), (3), (4) имеет решение из пространства V .

Непустота Λ очевидна, так как число 0 принадлежит ему. Для доказательства открытости множества Λ достаточно показать, что если $\lambda_0 \in \Lambda$, то при малой величине $|\tilde{\lambda}|$ число $\lambda = \lambda_0 + \tilde{\lambda}$ также принадлежит Λ .

Пусть $v(x, t)$ — произвольно заданная функция из пространства V . Положим

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= \tilde{\lambda}[\alpha_1(t)v_x(0, t) + \alpha_2(t)v(1, t)], \\ \psi_1(t) &= \tilde{\lambda}[\beta_1(t)v_x(0, t) + \beta_2(t)v(1, t)], \\ \bar{u}_0(x, t) &= \frac{[\lambda_0(\beta_1(t) + (1-x)\beta_2(t)) - 1]\varphi_1(t) - [x + \lambda_0[\alpha_1(t) + (1-x)\alpha_2(t)]]\psi_1(t)}{\lambda_0^2[\alpha_1(t)\beta_2(t) - \alpha_2(t)\beta_1(t)] + \lambda_0[\alpha_2(t) + \beta_1(t) + \beta_2(t)] - 1}.\end{aligned}$$

Пусть $\bar{g}_v(x, t) = f(x, t) - L\bar{u}_0(x, t)$. Рассмотрим вспомогательную задачу: найти функцию $\bar{w}(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$L\bar{w}(x, t) = \bar{g}_v(x, t) \quad (1'')$$

и такую, что для нее выполняются условия $(4_{\lambda_0}), (3)$.

Поскольку $v(x, t)$ — функция из пространства V , то $L\bar{u}_0 \in L_2(Q)$ и решение данной задачи также будет из этого пространства. Следовательно, возможно определить оператор Φ , переводящий пространство V в себя: $\Phi(\bar{w}) = v$.

Пусть $v_1(x, t), v_2(x, t)$ — две функции из пространства V , $\bar{w}_1(x, t), \bar{w}_2(x, t)$ — решения задачи $(1''), (4_{\lambda_0}), (3)$ с функциями $\bar{g}_{v_1}(x, t)$ и $\bar{g}_{v_2}(x, t)$ соответственно. Повторяя доказательство оценки (12), приходим к неравенству

$$\|\Phi(\bar{w}_1) - \Phi(\bar{w}_2)\|_V \leq |\tilde{\lambda}|M_9\|v_1 - v_2\|_{L_2(Q)}.$$

Если теперь число $\tilde{\lambda}$ взять настолько малым, что $|\tilde{\lambda}|M_9 \leq 1$, то оператор Φ будет сжимающим. Неподвижная точка этого оператора и даст функцию $\bar{w}(x, t)$, являющуюся решением краевой задачи.

Для функции $\bar{g}_{\bar{w}(x, t)}$ определим функцию $u(x, t)$:

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \bar{w}(x, t) + \frac{\tilde{\lambda}[\lambda_0(\beta_1(t) + (1-x)\beta_2(t)) - 1][\alpha_1(t)w_x(0, t) + \alpha_2(t)w(1, t)]}{\lambda_0^2[\alpha_1(t)\beta_2(t) - \alpha_2(t)\beta_1(t)] + \lambda_0[\alpha_2(t) + \beta_1(t) + \beta_2(t)] - 1} \\ &\quad + \frac{\tilde{\lambda}[x + \lambda_0[\alpha_1(t) + (1-x)\alpha_2(t)]][\beta_1(t)w_x(0, t) + \beta_2(t)w(1, t)]}{\lambda_0^2[\alpha_1(t)\beta_2(t) - \alpha_2(t)\beta_1(t)] + \lambda_0[\alpha_2(t) + \beta_1(t) + \beta_2(t)] - 1}.\end{aligned}$$

Функция $u(x, t)$ принадлежит пространству V и будет решением задачи (1), $(4_\lambda), (3)$ для $\lambda = \lambda_0 + \tilde{\lambda}$. Это означает, что число $\lambda_0 + \tilde{\lambda}$ принадлежит множеству Λ и множество Λ открыто.

Докажем, что из оценки (12) следует замкнутость Λ . Пусть λ_m — последовательность чисел из Λ такая, что $\lambda_m \rightarrow \lambda_0$ при $m \rightarrow \infty$, $u_m(x, t)$ — последовательность решений задачи (1), $(4_{\lambda_m}), (3)$. Положим $\bar{w}_{mk}(x, t) = u_m(x, t) - u_k(x, t)$. Для функции $\bar{w}_{mk}(x, t)$ выполняются равенства

$$\begin{aligned}L\bar{w}_{mk} &= 0, \\ \begin{cases} \bar{w}_{mk}(0, t) &= \lambda_k[\alpha_1(t)\bar{w}_{mkx}(0, t) + \alpha_2(t)\bar{w}_{mk}(1, t)] \\ &\quad + (\lambda_{mx} - \lambda_k)[\alpha_1(t)u_m(0, t) + \alpha_2(t)u_m(1, t)], \\ \bar{w}_{mkx}(1, t) &= \lambda_k[\beta_1(t)\bar{w}_{mkx}(0, t) + \beta_2(t)\bar{w}_{mk}(1, t)] \\ &\quad + (\lambda_m - \lambda_k)[\beta_1(t)u_{mx}(0, t) + \beta_2(t)u_m(1, t)], \end{cases} \\ \bar{w}_{mk}(x, 0) &= \bar{w}_{mkt}(x, 0) = 0 \quad \text{при } x \in \Omega.\end{aligned}$$

Тем самым последовательность $u_{mk}(x, t)$ фундаментальна в пространстве V . Стало быть, существует функция $u(x, t) \in V$ такая, что $u_{mk}(x, t) \rightarrow u(x, t)$ при $m \rightarrow \infty$ в пространстве V . Для $u(x, t)$ выполняются уравнение (1) и условия (4_{λ_0}) , (3). Это означает, что число λ_0 принадлежит Λ . Принадлежность предельной точки множеству Λ означает, что Λ замкнуто.

Таким образом, множество Λ непусто, открыто и замкнуто. Следовательно оно совпадает со всем отрезком $[0, 1]$. Значит, краевая задача (1), (3), (4) разрешима в пространстве V .

3. Разрешимость краевой задачи III

Теорема 3. Пусть выполняются условия (7)–(9) теоремы 1, а также условие

$$\lambda_0[\beta_1(t) + \beta_2(t) - \alpha_1(t) - \alpha_2(t)] \neq 1.$$

Тогда для любой функции $f(x, t) \in L_2(Q)$ краевая задача III разрешима в пространстве V , притом единственным образом.

Доказательство проводится аналогично доказательству теорем 1 и 2, отличие состоит лишь в выборе функций

$$\begin{aligned}\varphi_2(t) &= \tilde{\lambda}[\alpha_1(t)v_x(0, t) + \alpha_2(t)v_x(1, t)], \\ \psi_2(t) &= \tilde{\lambda}[\beta_1(t)v_x(0, t) + \beta_2(t)v_x(1, t)], \\ \tilde{u}_0(x, t) &= \frac{[x - 1 + \lambda_0(\beta_1(t) + \beta_2(t))]\varphi_2(t) - [1 + \lambda_0(\alpha_1(t) + \alpha_2(t))]\psi_2(t)}{\lambda_0[\beta_1(t) + \beta_2(t) - \alpha_1(t) - \alpha_2(t)] - 1},\end{aligned}$$

с помощью которых доказывается открытость соответствующего множества Λ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998.
2. Kiguradze T. On the correctness of the Dirichlet problem in a characteristic rectangle for fourth order linear hyperbolic equations // Georgian Math. J. 1999. V. 6, N 5. P. 447–470.
3. Уткина Е. А. Задача Дирихле для одного уравнения четвертого порядка // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 4. С. 400–404.
4. Уткина Е. А. Характеристические граничные задачи для линейных уравнений высокого порядка со старшими частными производными: Автореф. дис. ... д-ра. физ.-мат. наук. — Казань, 2011.
5. Якубов С. Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985.
6. Пулькина Л. С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений. Самара: Изд-во Самарск. ун-та, 2012.
7. Guezane-Lakoud A., Boumaza N. Galerkin method for the Boussinesq equation with integral condition // J. Nonlinear Evol. Equations Appl. 2012. N 3. P. 29–40.
8. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

Статья поступила 1 марта 2014 г.

Алсыкова Аюна Андреевна
Бурятский гос. университет,
ул. Смолина, 24а, Улан-Удэ 675000
888552@mail.ru

УДК 517.956

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
СМЕШАННОГО ТИПА
СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

И. Е. Егоров

Аннотация. В цилиндрической области пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ для уравнения смешанного типа второго порядка со спектральным параметром изучается краевая задача В. Н. Врагова. При определенных условиях на коэффициенты уравнения установлены априорные оценки, которые позволяют доказать однозначную разрешимость краевой задачи в энергетическом классе. Получены достаточные условия фредгольмовой разрешимости краевой задачи в энергетическом классе.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, априорная оценка, неравенство, равенство, условия ортогональности.

В настоящее время изучению краевых задач для уравнения смешанного типа со спектральным параметром посвящено довольно много работ [1–7]. Наиболее полную библиографию по данной теме можно найти в [2, 5, 6]. Но большинство результатов получены для модельных уравнений смешанного типа со спектральным параметром на плоскости.

В данной работе исследуется краевая задача для уравнения смешанного типа со спектральным параметром в многомерном случае, которая впервые была изучена В. Н. Враговым [3, 4, 8].

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей $S \in C^1$, $\Omega_t = \Omega \times t$ для $0 \leq t \leq T$, $S_T = S \times (0, T)$, $Q = \Omega \times (0, T)$.

В цилиндрической области Q рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu - \lambda u = f(x, t), \quad (1)$$

где

$$Lu \equiv k(x, t)u_{tt} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(x)u_{x_i}) + a(x, t)u_t + c(x)u,$$

λ — комплексное число.

Будем предполагать, что коэффициенты дифференциального оператора L — вещественные достаточно гладкие функции в $\bar{Q}$ и выполнены условия

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \nu|\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \nu > 0.$$

Введем множества

$$P_0^\pm = \{(x, 0) : k(x, 0) \gtrless 0, x \in \Omega\}, \quad P_T^\pm = \{(x, T) : k(x, T) \gtrless 0, x \in \Omega\}.$$

Краевая задача. Найти решение уравнения (1) в области Q такое, что

$$u|_{S_T} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{\overline{P}_0^+} = 0, \quad u_t|_{\overline{P}_T^-} = 0. \quad (2)$$

Пусть C_L — класс комплекснозначных функций из $W_2^2(Q)$, удовлетворяющих условиям (2). Через C_{L^*} обозначим класс комплекснозначных функций из $W_2^2(Q)$, удовлетворяющих сопряженным краевым условиям

$$v|_{S_T} = 0, \quad v|_{\overline{P}_0^-} = 0, \quad v|_{\overline{P}_T^+} = 0, \quad [kv_t + (k_t - a)v]|_{t=T} = 0, \quad (2^*)$$

причем

$$L^*v \equiv k(x, t)v_{tt} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)v_{x_j}) + (2k_t - a)v_t + (c + k_{tt} - a_t)v.$$

Рассмотрим известное пространство Соболева $W_2^1(Q)$ со скалярным произведением

$$(u, v)_1 = \int_Q \left[u\bar{v} + \sum_{i=1}^n u_{x_i}\bar{v}_{x_i} + u_t\bar{v}_t \right] dQ, \quad \|u\|_1^2 = (u, u)_1, \quad u, v \in W_2^1(Q),$$

и пространство $L_2(Q)$, в котором

$$(u, v) = \int_Q u\bar{v} dQ, \quad \|u\|^2 = (u, u), \quad u, v \in L_2(Q).$$

Пусть $\widetilde{W}_2^1(Q)$ — пополнение класса C_L по норме пространства Соболева $W_2^1(Q)$, а $\widehat{W}_2^1(Q)$ — подпространство $W_2^1(Q)$, выделенное условиями

$$v|_{S_T} = 0, \quad v|_{\overline{P}_0^-} = 0, \quad v|_{\overline{P}_T^+} = 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функцию $u \in L_2(Q)$ будем называть *сильным решением краевой задачи* (1), (2), если существует последовательность функций $u_m \in C_L$ таких, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m - u\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|Lu_m - \lambda u_m - f\| = 0, \quad f \in L_2(Q).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $u(x, t) \in \widetilde{W}_2^1(Q)$ называется *обобщенным решением краевой задачи* (1), (2), если выполнено интегральное тождество

$$a(u, v) - \lambda(u, v) = (f, v) \quad (3)$$

для любой функции $v \in \widehat{W}_2^1(Q)$, $f \in L_2(Q)$ и

$$a(u, v) \equiv \int_Q \left[-ku_t\bar{v}_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}\bar{v}_{x_j} + (a - k_t)u_t\bar{v} + cu\bar{v} \right] dQ.$$

Аналогично даются определения сильного решения и обобщенного решения сопряженной краевой задачи для уравнения $L^*v - \lambda v = g$, $g \in L_2(Q)$, с краевыми условиями (2*).

В силу равенства

$$(Lu, v) = (u, L^*v), \quad u \in C_L, \quad v \in C_{L^*},$$

оператор L с областью определения C_L допускает замыкание $\overline{L} = A$ в пространстве $L_2(Q)$. Введем множество

$$D(\delta, \gamma, \mu) = \left\{ \lambda \in C : \operatorname{Re} \lambda \leq \mu - \frac{1}{\delta\gamma}(\operatorname{Im} \lambda)^2 \right\}.$$

Лемма 1. Пусть выполнены условия

$$c(x) \geq c_0, \quad a - \frac{1}{2}k_t + \gamma k \geq \delta > 0, \quad \gamma > 0.$$

Тогда при $\lambda \in D(\delta, \gamma, c_0)$ имеет место неравенство

$$\|u\|_1 \leq c_1 \|Au - \lambda u\|, \quad c_1 > 0, \quad (4)$$

для всех функций $u \in D(A - \lambda E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (4) достаточно установить для функций $u(x, t)$ из C_L . Для функций $u \in C_L$ после интегрирования по частям с учетом краевых условий (2) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_Q (Lu - \lambda u) e^{-2\gamma t} \bar{u}_t dQ &= \int_Q e^{-2\gamma t} \left[\left(a - \frac{1}{2}k_t + \gamma k \right) |u_t|^2 \right. \\ &+ \gamma \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} \bar{u}_{x_j} + (-\operatorname{Re} \lambda + c) \gamma |u|^2 - (\operatorname{Im} \lambda) \operatorname{Im}(u \bar{u}_t) \Big] dQ + \frac{1}{2} \int_{P_T^+} k e^{-2\gamma T} |u_t|^2 dx \\ &- \frac{1}{2} \int_{P_0^-} k |u_t|^2 dx + \frac{e^{-2\gamma T}}{2} \int_{\Omega_T} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} \bar{u}_{x_j} + (-\operatorname{Re} \lambda + c) |u|^2 \right] dx. \end{aligned}$$

Отсюда, используя неравенство Коши с ε и неравенство Пуанкаре — Фридрихса, получим оценку (4). Лемма 1 доказана.

Из неравенства (4) следует, что $D(A - \lambda E) \subseteq \widetilde{W}_2^1(Q)$. Рассмотрим множество $D^*(\delta_2, \gamma, \mu_1, \mu_2) = \{ \lambda \in C : \operatorname{Re} \lambda \leq -\frac{1}{\gamma} \mu_1 - \frac{1}{\delta_2 \gamma} e^{4\gamma T} (\operatorname{Im} \lambda)^2, \operatorname{Re} \lambda \leq -\mu_2 \}$, $\delta_2 > 0$, $\mu_1 > 0$, $\mu_2 \geq 0$.

Лемма 2. Пусть выполнено условие

$$a - \frac{3}{2}k_t + \gamma k \geq \delta > 0, \quad \gamma > 0,$$

и имеет место один из следующих случаев:

$$\text{либо } k(x, 0) \geq 0, \quad k(x, T) < 0, \quad \text{либо } k(x, 0) < 0, \quad k(x, T) > 0,$$

$$\text{либо } k(x, 0) < 0, \quad k(x, T) < 0, \quad \text{либо } k(x, 0) \geq 0, \quad k(x, T) > 0.$$

Тогда при $\lambda \in D^*(\delta_2, \gamma, \mu_1, \mu_2)$ имеет место неравенство

$$\|v\|_1 \leq c_2 \|A^* v - \bar{\lambda} v\|, \quad c_2 > 0, \quad (5)$$

для всех функций $v \in D(A^* - \bar{\lambda} E)$, причем параметры δ_2, μ_1, μ_2 выбираются в зависимости от вышеназванных случаев.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой функции $v(x, t)$ из C_{L^*} рассмотрим выражение

$$I \equiv \operatorname{Re} \int_Q e^{2\gamma t} (L^* v - \bar{\lambda} v) (-\xi \bar{v}_t + \eta \bar{v}) dQ,$$

где $\xi(t), \eta(t)$ — неотрицательные бесконечно дифференцируемые функции, которые в дальнейшем выбираются соответствующим образом. Интегрируя по частям, имеем

$$\begin{aligned}
I = & \int_Q e^{2\gamma t} \left\{ \left[\left(a - \frac{3}{2}k_t + \gamma k \right) \xi - k \left(\eta - \frac{1}{2}\xi_t \right) \right] |v_t|^2 \right. \\
& + \left(\eta + \frac{1}{2}\xi_t + \gamma \xi \right) \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{x_i} \bar{v}_{x_j} + \left[\left(-\operatorname{Re} \lambda \left(\eta + \frac{1}{2}\xi_t + \gamma \xi \right) + (c + k_{tt} - a_t) \eta \right) \right] |v|^2 \\
& + \xi \operatorname{Im} \lambda \operatorname{Im}(v_t \bar{v}) + [(k_t - a - \gamma k) \eta - k \eta_t] \operatorname{Re}(v_t \bar{v}) - (c + k_{tt} - a_t) \xi \operatorname{Re}(v_t \bar{v}) \Big\} dQ \\
& - \frac{1}{2} \int_{\Omega} k e^{2\gamma t} \xi |v_t|^2 dx \Big|_{t=0}^{t=T} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} e^{2\gamma t} \xi \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \bar{v}_{x_i} v_{x_j} - \operatorname{Re} \lambda |v|^2 \right] dx \Big|_{t=0}^{t=T} \\
& + \int_{\Omega} k e^{2\gamma t} \eta \operatorname{Re}(v_t \bar{v}) dx \Big|_{t=0}^{t=T}. \quad (6)
\end{aligned}$$

1. Пусть имеют место неравенства $k(x, 0) \geq 0$, $k(x, T) < 0$. Выберем число T_0 так, что $k(x, T) \leq -\delta_1 < 0$, $t \in [T_0, T]$, $T_0 < T$.

Будем считать, что $\xi(t) = 1$, $t \in [0, T_0]$, и $\xi_t \leq 0$, $\xi(T) = 0$. Положим $\eta(t) = -\frac{1}{2}\xi_t + \gamma$. Тогда в силу условия леммы 2 имеем

$$\left(a - \frac{3}{2}k_t + \gamma k \right) \xi - k \left(\eta - \frac{1}{2}\xi_t \right) \geq \delta_2 = \min\{\delta, \delta_1 \gamma, \nu \gamma\}.$$

В силу краевых условий (2*) и теоремы вложения справедливо неравенство

$$\left| \int_{\Omega_T} k e^{2\gamma T} \eta \operatorname{Re}(v_t \bar{v}) dx \right| \leq \varepsilon_1 \int_Q \left[|v_t|^2 + \sum_{i=1}^n |v_{x_i}|^2 \right] dQ + C_{\varepsilon_1} \int_Q |v|^2 dQ, \quad (7)$$

где $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\delta_2$. С другой стороны, имеем оценку

$$\left| \int_{\Omega_0} k(x, 0) \eta(0) \operatorname{Re}(v_t \bar{v}) dx \right| \leq \frac{1}{4} \int_{\Omega_0} k(x, 0) |v_t|^2 dx + \int_{\Omega_0} k(x, 0) \eta^2(0) |v|^2 dx. \quad (8)$$

С учетом неравенств (7), (8) из соотношения (6) получаем

$$\begin{aligned}
I \geq & \int_Q \left\{ \frac{\delta_2}{8} |v_t|^2 + \frac{1}{2} \nu \gamma \sum_{j=1}^n |v_{x_j}|^2 + \left[(-\operatorname{Re} \lambda) \gamma - \frac{1}{\delta_2} e^{4\gamma t} (\operatorname{Im} \lambda)^2 - \mu_1 \right] |v|^2 \right\} dQ \\
& + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} (-\operatorname{Re} \lambda - \mu_2) |v|^2 dx, \quad (9)
\end{aligned}$$

где

$$\mu_1 = \max_Q \{ (2/\delta_2) [k_t - a - \gamma k |\eta| + |k \eta_t| + |c + k_{tt} - a_t|]^2 e^{4\gamma t} + e^{2\gamma t} |c + k_{tt} - a_t| \eta \} + C_{\varepsilon_1},$$

$$\mu_2 = 2 \max_{\bar{\Omega}} (k(x, 0) \eta^2(0)).$$

Для вывода априорной оценки (5) из (9) остается воспользоваться неравенствами Пуанкаре — Фридрихса и Гёльдера.

2. При $k(x, 0) < 0$, $k(x, T) > 0$ возьмем число t_0 такое, что

$$k(x, t) \leq -\delta_1 < 0, \quad t \in [0, t_0], \quad 0 < t_0 < T.$$

Пусть функция $\xi(t)$ удовлетворяет условиям

$$\xi(0) = 0, \quad \xi_t \geq 0, \quad \xi(t) = 1, \quad t \in [t_0, T].$$

Положим $\eta_t = \frac{1}{2}\xi_t + \gamma$. Снова используя неравенство Коши с ε из (6), получим

$$I \geq \int_Q \left\{ \frac{\delta_2}{4} |v_t|^2 + \nu \gamma \sum_{j=1}^n |v_{x_j}|^2 + \left[(-\operatorname{Re} \lambda) \gamma - \frac{1}{\delta_2} e^{4\gamma t} (\operatorname{Im} \lambda)^2 - \mu_1 \right] |v|^2 \right\} dQ, \quad (10)$$

где $\delta_2 = \min\{\delta, \delta_1 \gamma\}$ и $\mu_2 = 0$. Отсюда следует искомая априорная оценка леммы 2.

3. При $k(x, 0) < 0$, $k(x, T) < 0$ будем считать, что

$$k(x, t) \leq -\delta_1 < 0, \quad t \in [0, t_0] \cup [T_0, T].$$

Функция $\xi(t)$ такова, что

$$\xi(0)=0, \quad \xi_t \geq 0, \quad t \in [0, t_0], \quad \xi(t) = 1, \quad t \in [t_0, T_0], \quad \xi_t \leq 0, \quad t \in [T_0, T], \quad \xi(T)=0.$$

Положим $\eta_t = \frac{1}{2}\xi_t + \gamma$, $0 \leq t \leq t_0$, $\eta(t) = \gamma$, $t \in [t_0, T_0]$, $\eta(t) = -\frac{1}{2}\xi_t + \gamma$, $T_0 \leq t \leq T$. Тогда в силу условий леммы 2 имеем

$$\left(a - \frac{3}{2}k_t + \gamma k \right) - k \left(\eta - \frac{1}{2}\xi_t \right) \geq \delta_2 = \min\{\delta, \delta_1 \gamma, \nu \gamma\}.$$

Из соотношения (6) в силу неравенства (7) получим неравенство (9) без граничного интеграла по Ω_0 , $\mu_2 = 0$. Из (9) вытекает оценка (5).

4. Пусть $k(x, 0) \geq 0$, $k(x, T) > 0$. В данном случае для получения априорной оценки леммы 2 достаточно рассмотреть функции $\xi(t) \equiv 1$, $\eta(t) \equiv 0$.

Тогда из (6) следует неравенство (10), в котором $\delta_2 = \delta$, $\mu_2 = 0$ и

$$\mu_1 = \frac{e^{4\gamma T}}{2\delta} \max_Q |c + k_{tt} - a_t|^2.$$

Лемма 2 доказана.

Теорема 1. Пусть выполнены условия лемм 1, 2 и $\lambda \in D(\delta, \gamma, c_0) \cap D^*(\delta_2, \gamma, \mu_1, \mu_2)$. Тогда для любой функции $f \in L_2(Q)$ существует и притом единственное сильное решение краевой задачи (1), (2) из $D(A - \lambda E)$.

Доказательство. Из априорной оценки (5) следует, что $N(A^* - \bar{\lambda}E) = 0$. Отсюда непосредственно имеем $\overline{R(A - \lambda E)} = L_2(Q)$. С другой стороны, в силу априорной оценки (4) имеем равенство $R(A - \lambda E) = \overline{R(A - \lambda E)}$. Стало быть, уравнение $Au - \lambda u = f$ везде разрешимо. Единственность искомого решения следует из леммы 1. Теорема 1 доказана.

Отметим, что сильное решение краевой задачи (1), (2) из $D(A - \lambda E)$, гарантированное теоремой 1, является обобщенным решением краевой задачи (1), (2) из пространства $\widetilde{W}_2^1(Q)$.

Краевая задача, сопряженная к задаче (1), (2), имеет вид

$$L^*v - \bar{\lambda}v = g(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (1^*)$$

с краевыми условиями (2*).

Теорема 2. Пусть выполнены условия лемм 1, 2 и $\lambda \in D(\delta, \gamma, c_0) \cap D^*(\delta_2, \gamma, \mu_1, \mu_2)$. Тогда для любой функции $g \in L_2(Q)$ существует и притом единственное сильное решение краевой задачи (1^*) , (2^*) из $D(A^* - \bar{\lambda}E)$.

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично доказательству теоремы 1. Заметим, что при более сильных ограничениях на коэффициенты уравнения (1) и на поверхность S результаты теоремы 1 в вещественном случае получены В. Н. Враговым [8].

Следуя [2], введем энергетические классы

$$V_L^1(Q) = D(A - \lambda E), \quad V_{L^*}^1(Q) = D(A^* - \bar{\lambda}E)$$

для операторов $A_\lambda = A - \lambda E$, $A_\lambda^* = A^* - \bar{\lambda}E$.

Лемма 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда имеет место равенство $(A_\lambda^{-1})^* = (A_\lambda^*)^{-1}$.

Доказательство. В силу теорем 1 и 2 справедливо равенство

$$(A_\lambda u, v) = (u, A_\lambda^* v), \quad u \in V_L^1(Q), \quad v \in V_{L^*}^1(Q).$$

В этом равенстве положим $\varphi = A_\lambda u$, $\psi = A_\lambda^* v$. На основании теорем 1 и 2 оно принимает вид

$$(\varphi, (A_\lambda^*)^{-1} \psi) = (A_\lambda^{-1} \varphi, \psi) = (\varphi, (A_\lambda^{-1})^* \psi), \quad \varphi, \psi \in L_2(Q),$$

откуда $(A_\lambda^*)^{-1} \psi = (A_\lambda^{-1})^* \psi$, $\psi \in L_2(Q)$. Лемма 3 доказана.

Теорема 3. Пусть выполнены условия лемм 1, 2. Тогда имеют место следующие утверждения.

1. Тогда краевая задача (1), (2) однозначно разрешима в $V_L^1(Q)$ кроме не более чем счетного множества $\{\lambda_k\}$, причем единственной предельной для $\{\lambda_k\}$ точкой может быть $\lambda = \infty$. Наряду с λ_k в спектр краевой задачи (1), (2) входит $\bar{\lambda}_k$. При значениях $\lambda = \lambda_k$ из спектра задачи (1), (2) однородная краевая задача (1), (2) имеет нетривиальные решения в $V_L^1(Q)$, причем каждому λ_k соответствует конечное число n_k линейно независимых решений.

2. Числа $\{\lambda_k\}$, $\{\bar{\lambda}_k\}$ являются собственными значениями сопряженной краевой задачи (1^*) , (2^*) , причем $\bar{\lambda}_k$ имеет кратность n_k и соответствующие собственные функции v_{k_j} , $j = \overline{1, n_k}$, принадлежат $V_{L^*}^1$. Для разрешимости краевой задачи (1), (2) при $\lambda = \lambda_k$ необходимо и достаточно выполнения условий ортогональности $(f, v_{k_j}) = 0$, $j = \overline{1, n_k}$.

Доказательство. Краевая задача (1), (2) эквивалентна операторному уравнению

$$A_{\lambda_0} u \equiv Au - \lambda_0 u = (\lambda - \lambda_0)u + f. \quad (11)$$

При $\lambda_0 \in D(\delta, \gamma, c_0) \cap D^*(\delta_2, \gamma, \mu_1, \mu_2)$ оператор A_{λ_0} по теореме 1 имеет ограниченный обратный $A_{\lambda_0}^{-1}$, действующий из $L_2(Q)$ в $V_L^1(Q)$. Поэтому операторное уравнение (11) эквивалентно уравнению

$$u = (\lambda - \lambda_0)A_{\lambda_0}^{-1}u + A_{\lambda_0}^{-1}f. \quad (12)$$

В силу вполне непрерывности вложения $V_L^1(Q)$ в $L_2(Q)$ заключаем, что $A_{\lambda_0}^{-1}$ — вполне непрерывный оператор из $L_2(Q)$ в $L_2(Q)$. Тем самым доказано утверждение 1 теоремы 3.

Заметим, что сопряженная краевая задача (1*), (2*) эквивалентна операторному уравнению

$$v = (\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0)(A_{\lambda_0}^*)^{-1}v + (A_{\lambda_0}^*)^{-1}g. \quad (12^*)$$

В силу леммы 3 однородное уравнение (12*) является сопряженным к однородному уравнению (12).

Для разрешимости уравнения (12) при $\lambda = \lambda_k$ необходимо и достаточно выполнения условий ортогональности

$$(A_{\lambda_0}^{-1}f, v_{k_j}) = 0, \quad j = \overline{1, n_k}.$$

Отсюда получаем

$$0 = (f, (A_{\lambda_0}^{-1})^* v_{k_j}) = (f, (A_{\lambda_0}^*)^{-1} v_{k_j}) = \frac{1}{\lambda_k - \lambda_0} (f, v_{k_j}).$$

Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Е. И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: Изд-во МГУ, 1988.
2. Кузьмин А. Г. Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1990.
3. Егоров И. Е., Федоров В. Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995.
4. Салахитдинов М. С., Уринов А. Н. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. Ташкент: Изд-во ФАН, 1997.
5. Салахитдинов М. С., Уринов А. Н. К спектральной теории уравнений смешанного типа. Ташкент: Изд-во MUMTOZ SO'Z, 2010.
6. Егоров И. Е. О фредгольмовой разрешимости одной краевой задачи для уравнения смешанного типа // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, № 1. С. 55–64.
7. Егоров И. Е., Захарова Т. И. О фредгольмовости краевой задачи для уравнения смешанного типа // Мат. заметки ЯГУ. 2013. Т. 20, № 1. С. 20–26.
8. Врагов В. Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 6. С. 1098–1105.

Статья поступила 5 марта 2014 г.

Егоров Иван Егорович

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
НИИ математики

ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)

ivanegorov51@mail.ru

ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА. II

А. И. Кожанов, Е. Ф. Шарин

Аннотация. Данная работа является продолжением работы авторов [1] и посвящена исследованию разрешимости задач сопряжения (обобщенных задач дифракции) для неклассических дифференциальных уравнений составного типа высокого порядка. Для изучаемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение составного типа высокого порядка, задача сопряжения, регулярное решение, существование, единственность.

Введение

В [1] изучались задачи сопряжения (обобщенные задачи дифракции) для дифференциальных уравнений

$$(-1)^{p+1} D_t^{2p} u - h(x) u_{xx} + c(x, t) u = f(x, t) \quad (*)$$

($D_t^{2p} = \frac{\partial^{2p}}{\partial t^{2p}}$, $p \geq 1$) в случае строго положительной функции $h(x)$, непрерывной всюду за исключением, быть может, одной внутренней точки области определения. В настоящей работе будут изучаться аналогичные задачи для уравнения составного типа

$$(-1)^{p+1} D_t^{2p} (u - g(x) u_{xx}) - h(x) u_{xx} + c(x, t) u = f(x, t) \quad (**)$$

в случае строго положительной функции $g(x)$ и функции $h(x)$, уже не обязательно положительной. Уточним, что необходимые краевые условия для уравнений (**) будут аналогичны краевым условиям, предложенным для уравнений (*) в [2–4].

Задачи сопряжения, или обобщенные задачи дифракции, изучаются в математике и в математическом моделировании с давних времен — см., например, работы [5–17]. Заметим также следующее. Задачи с условиями сопряжения (склейки) естественным образом возникают в теории уравнений смешанного типа; их изучению посвящено очень много работ, из которых отметим статьи и монографии [18–33] (хотя на самом деле можно указать гораздо больше статей). Наконец, заметим, что для неклассических дифференциальных уравнений задачи сопряжения, помимо упомянутой выше статьи [1], изучались в работах [34–37].

В [1] вначале предлагалась задача сопряжения в общем виде, однако требования на коэффициенты были такими, что в действительности выделялись четыре специальных случая, и именно эти четыре случая и изучались. В настоящей работе сразу будут рассматриваться специальные случаи.

1. Постановка задач

Пусть Ω — интервал $(-1, 1)$ оси Ox , Q — прямоугольник $\Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$. Далее, пусть $g(x)$, $h(x)$, $c(x, t)$ и $f(x, t)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T]$, причем $g(x)$ строго положительна при $x \in \overline{\Omega}$, a_i, b_i, c_i, d_i , $i = \overline{1, 4}$ — заданные действительные числа. Обозначим $D_t^k = \frac{\partial^k}{\partial t^k}$. Пусть L — дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x, t)$ определяется равенством

$$Lv = (-1)^{p+1} D_t^{2p} (v - g(x)) v_{xx} - h(x) v_{xx} + c(x, t) v$$

(здесь $p \geq 1$ — натуральное число).

Обозначим $Q_1 = (-1, 0) \times (0, T)$, $Q_2 = (0, 1) \times (0, T)$, $Q_0 = Q_1 \cup Q_2$.

Задача сопряжения I. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся на множестве Q_0 решением уравнения

$$Lu = f(x, t) \quad (1)$$

и такую, что для нее выполняются краевые условия

$$D_t^k u(x, t)|_{t=0} = 0, \quad x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \quad k = 0, \dots, p, \quad (2)$$

$$D_t^k u(x, t)|_{t=T} = 0, \quad x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \quad k = 1, \dots, p-1 \quad (3)$$

(в случае $p = 1$ данные условия отсутствуют),

$$u(-1, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (4)$$

а также условия сопряжения

$$u(-0, t) = a_1 u_x(-0, t) + b_1 u_x(+0, t), \quad t \in (0, T), \quad (5)$$

$$u(+0, t) = c_1 u_x(-0, t) + d_1 u_x(+0, t), \quad t \in (0, T). \quad (6)$$

Задача сопряжения II. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся на множестве Q_0 решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются краевые условия (2)–(4), а также условия сопряжения

$$u(-0, t) = a_2 u(+0, t) + b_2 u_x(-0, t), \quad t \in (0, T), \quad (7)$$

$$u_x(+0, t) = c_2 u(+0, t) + d_2 u_x(-0, t), \quad t \in (0, T). \quad (8)$$

Задача сопряжения III. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся на множестве Q_0 решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются краевые условия (2)–(4), а также условия сопряжения

$$u(+0, t) = a_3 u(-0, t) + b_3 u_x(+0, t), \quad t \in (0, T), \quad (9)$$

$$u_x(-0, t) = c_3 u(-0, t) + d_3 u_x(+0, t), \quad t \in (0, T). \quad (10)$$

Задача сопряжения IV. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся на множестве Q_0 решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются краевые условия (2)–(4), а также условия сопряжения

$$u_x(-0, t) = a_4 u(-0, t) + b_4 u(+0, t), \quad t \in (0, T), \quad (11)$$

$$u_x(+0, t) = c_4 u(-0, t) + d_4 u(+0, t), \quad t \in (0, T). \quad (12)$$

Заметим, что задачи II и III соответствуют классическим задачам дифракции, в которых задаются условия сопряжения решения и градиента решения.

Определим пространство, в котором будут изучаться свойства единственности и существования решений задач сопряжения I–IV. Именно, положим

$$V_m = \{v(x, t) : v(x, t) \in W_{2,x,t}^{2,m}(Q_1), v(x, t) \in W_{2,x,t}^{2,m}(Q_2), \\ v_{xx}(x, t) \in W_{2,x,t}^{2,m}(Q_1), v_{xx}(x, t) \in W_{2,x,t}^{2,m}(Q_2)\}.$$

Нормируем пространство V_m :

$$\|v\|_{V_m} = (\|v\|_{W_{2,x,t}^{2,m}(Q_1)}^2 + \|v_{xx}\|_{W_{2,x,t}^{2,m}(Q_1)}^2 + \|v\|_{W_{2,x,t}^{2,m}(Q_2)}^2 + \|v_{xx}\|_{W_{2,x,t}^{2,m}(Q_2)}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что пространство V_m с такой нормой есть банахово пространство.

2. Единственность решений

Всюду ниже будем считать, что для функций $g(x)$ и $h(x)$ существуют конечные значения $g(-0)$, $g(+0)$, $h(-0)$ и $h(+0)$. Положим

$$h_1(x) = \begin{cases} h(x) & \text{при } x \in [-1, 0), \\ h(-0) & \text{при } x = 0, \end{cases} \quad h_2(x) = \begin{cases} h(x) & \text{при } x \in (0, 1), \\ h(+0) & \text{при } x = 0, \end{cases} \\ g_1(x) = \begin{cases} g(x) & \text{при } x \in [-1, 0), \\ g(-0) & \text{при } x = 0, \end{cases} \quad g_2(x) = \begin{cases} g(x) & \text{при } x \in (0, 1), \\ g(+0) & \text{при } x = 0, \end{cases} \\ \varphi_1(x) = \frac{h_1(x)}{g_1(x)}, \quad \varphi_2(x) = \frac{h_2(x)}{g_2(x)}.$$

Пусть функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ представлены в виде

$$\varphi_1(x) = \varphi_{10}(x) + \varphi_{11}(x), \quad \varphi_2(x) = \varphi_{20}(x) + \varphi_{21}(x).$$

Обозначим

$$\bar{g}_{11} = \max_{-1 \leq x \leq 0} g_1(x), \quad \bar{g}_{21} = \max_{0 \leq x \leq 1} g_2(x), \quad C_1 = \min_{Q_1} \frac{c(x, t)}{g_1(x)}, \quad C_2 = \min_{Q_2} \frac{c(x, t)}{g_2(x)}, \\ k_1 = \sup_{-1 \leq x \leq 0} |\varphi_{11}(x)|, \quad k_2 = \sup_{0 \leq x \leq 1} |\varphi_{21}(x)|, \\ m_1 = \sup_{-1 \leq x \leq 0} |\varphi_{11}'(x)|, \quad m_2 = \sup_{0 \leq x \leq 1} |\varphi_{21}'(x)|.$$

Для функций $v(x, t)$, принадлежащих пространству V_{2p} и таких, что для них выполняются условия (2), справедливы неравенства

$$\int_{Q_1} v^2 dx dt \leq M_0 \int_{Q_1} (D_t^p v)^2 dx dt, \quad \int_{Q_2} v^2 dx dt \leq M_0 \int_{Q_2} (D_t^p v)^2 dx dt, \quad (13)$$

$$\int_{Q_1} v_t^2 dxdt \leq M_1 \int_{Q_1} (D_t^p v)^2 dxdt + M_2 \int_{Q_1} v^2 dxdt, \quad (14)$$

$$\int_{Q_2} v_t^2 dxdt \leq N_1 \int_{Q_2} (D_t^p v)^2 dxdt + N_2 \int_{Q_2} v^2 dxdt, \quad (15)$$

в которых число M_0 определяется лишь числом T , числа M_1 и N_1 — либо произвольные положительные числа, и тогда числа M_2 и N_2 определяются числами M_1 и N_1 соответственно, а также числом T , либо же числа M_1 и N_1 суть величины, определяющиеся числом T , и тогда $M_2 = 0$, $N_2 = 0$.

Пусть λ_0 есть фиксированное число из промежутка $[T, +\infty)$. Положим

$$A_1 = 2p - 1 - k_1 M_- (\lambda_0 - T) k_1 M_0 T - m_1 M_0 T,$$

$$A_2 = \frac{2p - 1}{\bar{g}_{11}} - m_1 M_1 T, \quad A_3 = C_1 - \frac{m_1 M_2 T}{2},$$

$$B_1 = 2p - 1 - k_2 M_0 - (\lambda_0 - T) k_2 M_0 T - m_2 M_0 T,$$

$$B_2 = \frac{2p - 1}{\bar{g}_{21}} - m_2 N_1 T, \quad B_3 = C_2 - \frac{m_2 N_2 T}{2}.$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия

$$g_1(x) \in C^1([-1, 0]), \quad g_2(x) \in C^1([0, 1]), \quad 0 < \bar{g}_{01} \leq g_1(x) \leq \bar{g}_{11} \quad (16)$$

при $x \in [-1, 0]$, $0 < \bar{g}_{02} \leq g_2(x) \leq \bar{g}_{21}$ при $x \in [0, 1]$;

$$h_1(x) \in C^1([-1, 0]), \quad h_2(x) \in C^1([0, 1]); \quad (17)$$

$$\varphi_{10}(x) \geq 0 \quad \text{при } x \in [-1, 0], \quad \varphi_2(x) \geq 0 \quad \text{при } x \in [0, 1]; \quad (18)$$

$$c(x, t) \in C^1(\bar{Q}), \quad c(x, t) \geq 0, \quad c_t(x, t) \leq 0 \quad \text{при } (x, t) \in \bar{Q}; \quad (19)$$

$$a_1 \leq 0, \quad b_1 c_1 \leq 0, \quad d_1 \geq 0, \quad a_1 d_1 - b_1 c_1 \leq 0; \quad (20)$$

$$\varphi_1(0) \geq 0, \quad \varphi_2(0) \geq 0, \quad b_1[\varphi_1(0) - \varphi_2(0)] = 0; \quad \text{если } c_1 \neq 0,$$

$$\text{то квадратичная форма } -a_1 \varphi_1(0) \xi^2 - 2b_1 \varphi_2(0) \xi \eta - \frac{b_1 d_1 \varphi_2(0)}{c_1} \eta^2$$

неотрицательно определена при $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$; (21)

$$A_i \geq 0, \quad B_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 > 0, \quad B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 > 0. \quad (22)$$

Тогда задача сопряжения I не может иметь в пространстве V_{2p} более одного решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вначале выполняется $b_1 \neq 0$, $c_1 \neq 0$, и пусть $f(x, t)$ — тождественно нулевая в Q функция. Рассмотрим равенство

$$\int_{Q_1} \frac{\lambda_0 - t}{g(x)} Lu \cdot u_t dxdt + \gamma \int_{Q_2} \frac{\lambda_0 - t}{g(x)} Lu \cdot u_t dxdt = 0, \quad (23)$$

в котором γ — число $-\frac{b_1}{c_1}$, а λ_0 зафиксировано выше. Интегрируя по частям и используя условия (2)–(4), получим следствие из (23):

$$\frac{2p - 1}{2} \int_{Q_1} \frac{1}{g(x)} (D_t^p u)^2 dxdt + \frac{2p - 1}{2} \int_{Q_1} (D_t^p u_x)^2 dxdt$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\gamma(2p-1)}{2} \int_{Q_2} \frac{1}{g(x)} (D_t^p u)^2 dx dt + \frac{\gamma(2p-1)}{2} \int_{Q_2} (D_t^p u_x)^2 dx dt \\
& + \frac{1}{2} \int_{Q_1} \varphi_{10}(x) u_x^2 dx dt + \frac{\gamma}{2} \int_{Q_2} \varphi_{20}(x) u_x^2 dx dt \\
& + \int_{Q_1} \frac{c(x, t) - (\lambda_0 - t)c_t(x, t)}{g(x)} u^2 dx dt + \gamma \int_{Q_2} \frac{c(x, t) - (\lambda_0 - t)c_t(x, t)}{g(x)} u^2 dx dt \\
& + \frac{\lambda_0 - T}{2} \int_{-1}^0 \frac{1}{g(x)} [D_t^p u(x, T)]^2 dx + \frac{\lambda_0 - T}{2} \int_{-1}^0 [D_t^p u_x(x, T)]^2 dx \\
& + \frac{\gamma(\lambda_0 - T)}{2} \int_0^1 \frac{1}{g(x)} [D_t^p u(x, T)]^2 dx + \frac{\gamma(\lambda_0 - T)}{2} \int_0^1 [D_t^p u_x(x, T)]^2 dx \\
& + \frac{\lambda_0 - T}{2} \int_{-1}^0 \frac{c(x, t)}{g(x)} u^2(x, T) dx + \frac{\gamma(\lambda_0 - T)}{2} \int_0^1 \frac{c(x, t)}{g(x)} u^2(x, T) dx \\
& + \int_0^T \left\{ -\frac{a_1}{2} [D_t^p u_x(-0, t)]^2 + \gamma c_1 D_t^p u_x(+0, t) D_t^p u_x(-0, t) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\gamma d_1}{2} [D_t^p u_x(+0, t)]^2 \right\} dt - \frac{a_1(\lambda_0 - T)}{2} [D_t^p u_x(-0, T)]^2 \\
& + \gamma c_1(\lambda_0 - T) D_t^p u_x(+0, T) D_t^p u_x(-0, T) + \frac{\gamma d_1(\lambda_0 - T)}{2} [D_t^p u_x(+0, T)]^2 \\
& + (p-1) \int_0^T \left\{ -a_1 [D_t^p u_x(-0, t)]^2 + (\gamma c_1 - b_1) D_t^p u_x(+0, t) D_t^p u_x(-0, t) \right. \\
& \quad \left. + \gamma d_1 [D_t^p u_x(+0, t)]^2 \right\} dt + \frac{\lambda_0 - T}{2} \int_{-1}^0 \varphi_{10}(x) u_x^2(x, T) dx \\
& + \frac{\gamma(\lambda_0 - T)}{2} \int_0^1 \varphi_{20}(x) u_x^2(x, T) dx + \int_0^T \left\{ -\frac{a_1 \varphi_1(0)}{2} u_x^2(-0, t) \right. \\
& \quad \left. + \gamma c_1 \varphi_2(0) u_x(+0, t) u_x(-0, t) + \frac{\gamma d_1 \varphi_2(0)}{2} u_x^2(+0, t) \right\} dt \\
& - \frac{a_1 \varphi_1(0)}{2} u_x^2(-0, T) + \gamma c_1 \varphi_2(0) u_x(+0, T) u_x(-0, T) + \frac{\gamma d_1 \varphi_2(0)}{2} u_x^2(+0, T) \\
& = -\frac{1}{2} \int_{Q_1} \varphi_{11}(x) u_x^2 dx dt - \frac{\gamma}{2} \int_{Q_2} \varphi_{21}(x) u_x^2 dx dt - \int_{Q_1} (\lambda_0 - t) \varphi_1'(x) u_x u_t dx dt \\
& - \gamma \int_{Q_2} (\lambda_0 - t) \varphi_2'(x) u_x u_t dx dt - \frac{\lambda_0 - T}{2} \int_{-1}^0 \varphi_{11}(x) u_x^2(x, T) dx
\end{aligned}$$

$$- \frac{\gamma(\lambda_0 - T)}{2} \int_0^1 \varphi_{21}(x) u_x^2(x, T) dx. \quad (24)$$

Правая часть (24) с помощью неравенств (13)–(15), элементарных неравенств

$$\int_{-1}^0 u_x^2(x, T) dx \leq T \int_{Q_1} u_{xt}^2 dx dt, \quad \int_0^1 u_x^2(x, T) dx \leq T \int_{Q_2} u_{xt}^2 dx dt,$$

а также неравенства Юнга оценивается величиной

$$\begin{aligned} & \left[\frac{k_1 M_0}{2} + \frac{(\lambda_0 - T) k_1 M_0 T}{2} + \frac{m_1 M_0 T}{2} \right] \int_{Q_1} [D_t^p u_x]^2 dx dt \\ & + \frac{m_1 M_1 T}{2} \int_{Q_1} [D_t^p u]^2 dx dt + \frac{m_1 M_2 T}{2} \int_{Q_1} u^2 dx dt \\ & + \gamma \left[\frac{k_2 M_0}{2} + \frac{(\lambda_0 - T) k_2 M_0 T}{2} + \frac{m_2 M_0 T}{2} \right] \int_{Q_2} [D_t^p u_x]^2 dx dt \\ & + \frac{\gamma m_2 N_1 T}{2} \int_{Q_2} [D_t^p u]^2 dx dt + \frac{\gamma m_2 N_2 T}{2} \int_{Q_2} u^2 dx dt. \end{aligned}$$

Учитывая эту оценку, используя условия (16)–(21), получим, что следствием (23) будет неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{A_1}{2} \int_{Q_1} [D_t^p u_x]^2 dx dt + \frac{A_2}{2} \int_{Q_1} [D_t^p u]^2 dx dt + A_3 \int_{Q_1} u^2 dx dt \\ & + \frac{\gamma B_1}{2} \int_{Q_2} [D_t^p u_x]^2 dx dt + \frac{\gamma B_2}{2} \int_{Q_2} [D_t^p u]^2 dx dt + \gamma B_3 \int_{Q_2} u^2 dx dt \leq 0. \quad (25) \end{aligned}$$

Согласно (22) из этого неравенства следует, что $u(x, t) \equiv 0$ в Q_1 , $u(x, t) \equiv 0$ в Q_2 .

Пусть теперь выполняется $b_1 = 0$. Тогда задача I в прямоугольнике Q_1 представляет собой самостоятельную задачу; анализируя для решения $u(x, t)$ этой задачи равенство

$$\int_{Q_1} \frac{\lambda_0 - t}{g(x)} Lu \cdot u_t dx dt = 0 \quad (26)$$

и используя условия теоремы, получим $u(x, t) \equiv 0$ в Q_1 . Условие (6) теперь порождает самостоятельную задачу в прямоугольнике Q_2 ; анализируя равенство

$$\int_{Q_2} \frac{\lambda_0 - t}{g(x)} Lu \cdot u_t dx dt = 0 \quad (27)$$

и используя условия теоремы, получим $u(x, t) \equiv 0$ в Q_2 .

В случае $c_1 = 0$ рассуждения аналогичны.

Теорема полностью доказана.

Теорема 2. Пусть выполняются условия (16)–(19), (22) теоремы 1, а также условия

$$b_2 \leq 0, \quad c_2 \geq 0, \quad a_2 d_2 \geq 0; \quad (28)$$

$$\varphi_1(0) \geq 0, \quad \varphi_2(0) \geq 0, \quad a_2[\varphi_1(0) - \varphi_2(0)] = 0. \quad (29)$$

Тогда задача сопряжения II не может иметь в пространстве V_{2p} более одного решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2 проводится вполне аналогично доказательству теоремы 1 — именно с помощью анализа равенства (23), в котором γ есть число $\frac{a_2}{d_2}$ в случае $a_2 \neq 0, d_2 \neq 0$, или же с помощью анализа равенств (26) или (27) в случае $a_2 = 0$ или $d_2 = 0$.

Теорема 3. Пусть выполняются условия (16)–(19), (22) теоремы 1, а также условия

$$b_3 \geq 0, \quad c_3 \leq 0, \quad a_3 d_3 \geq 0; \quad (30)$$

$$\varphi_1(0) \geq 0, \quad \varphi_2(0) \geq 0, \quad d_3[\varphi_1(0) - \varphi_2(0)] = 0. \quad (31)$$

Тогда задача сопряжения III не может иметь в пространстве V_{2p} более одного решения.

При доказательстве этой теоремы используется равенство (23), в котором γ есть число $\frac{a_3}{d_3}$.

Теорема 4. Пусть выполняются условия (16)–(19), (22) теоремы 1, а также условия

$$a_4 \leq 0, \quad b_4 c_4 \leq 0, \quad d_4 \geq 0, \quad b_4 c_4 \leq a_4 d_4; \quad (32)$$

$$\varphi_1(0) \geq 0, \quad \varphi_2(0) \geq 0, \quad b_4[\varphi_1(0) - \varphi_2(0)] = 0. \quad (33)$$

Тогда задача сопряжения IV не может иметь в пространстве V_{2p} более одного решения.

Для доказательства теорем 3 и 4 вновь используется равенство (23) с числами $\gamma = \frac{a_3}{d_3}$ и $-\frac{b_4}{c_4}$ соответственно, либо же по отдельности равенства (26) или (27).

ЗАМЕЧАНИЕ. Условия (28), (30) и (32) можно ослабить, если потребовать выполнения неравенств

$$\varphi_1(x) \geq m_{01} > 0 \quad \text{при} \quad x \in [-1, 0], \quad \varphi_2(x) \geq m_{02} > 0 \quad \text{при} \quad x \in [0, 1]$$

(именно такая ситуация рассматривается в [1]).

3. Существование решений

Для доказательства разрешимости задач сопряжения I–IV, как и в [1], будем использовать метод продолжения по параметру.

Следуя [1], рассмотрим вначале задачу сопряжения II.

Теорема 5. Пусть выполняются условия (16)–(19), (22), (28) и (29). Тогда для любой функции $f(x, t)$ из пространств $L_2(Q)$ задача сопряжения II разрешима в пространстве V_{2p} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть μ — число из отрезка $[0, 1]$. Рассмотрим семейство задач: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся на множестве Q решением уравнения

$$L_\mu u \equiv (-1)^{p+1} D_t^{2p}(u - g(x)u_{xx}) - \mu[h(x)u_{xx} + c(x, t)u] = f \quad (1_\mu)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2)–(4), а также условия

$$u(-0, t) = \mu[a_2 u(+0, t) + b_2 u_x(-0, t)], \quad t \in (0, T), \quad (7_\mu)$$

$$u_x(+0, t) = \mu[c_2 u(+0, t) + d_2 u_x(-0, t)], \quad t \in (0, T). \quad (8_\mu)$$

Заметим, что при $\mu = 0$ данная задача разрешима в пространстве V_{2p} — это следует из того, что задача (1_0) , (2)–(4), (7_0) , (8_0) распадается на две независимые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной t и по переменной x , разрешимость каждой из которых очевидна. Согласно теореме о методе продолжения по параметру [38], задача (1_μ) , (2)–(4), (7_μ) , (8_μ) будет разрешима в пространстве V_{2p} при всех μ из отрезка $[0, 1]$, если для всевозможных решений $u(x, t)$ этой задачи имеет место равномерная по μ априорная оценка

$$\|u\|_{V_{2p}} \leq R_0 \quad (34)$$

с постоянной R_0 , определяющейся лишь коэффициентами оператора L , числом T , а также нормой функции $f(x, t)$ в пространстве $L_2(Q)$.

Покажем наличие искомой оценки.

Пусть выполняется $a_2 \neq 0$, $d_2 \neq 0$. Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} \int_{Q_1} \frac{\lambda_0 - t}{g(x)} Lu \cdot u_t \, dxdt + \gamma \int_{Q_2} \frac{\lambda_0 - t}{g(x)} Lu \cdot u_t \, dxdt \\ = \int_{Q_1} \frac{\lambda_0 - t}{g(x)} f \cdot u_t \, dxdt + \gamma \int_{Q_2} \frac{\lambda_0 - t}{g(x)} f \cdot u_t \, dxdt \end{aligned}$$

(λ_0 и γ определены при доказательстве теоремы 2).

Повторяя выкладки, которые были проделаны при анализе равенства (23), используя условия (2)–(4), (7_μ) , (8_μ) , условия теоремы и применяя неравенство Юнга, нетрудно получить первую априорную оценку для решений $u(x, t)$ задачи (1_μ) , (2)–(4), (7_μ) , (8_μ) :

$$\int_{Q_1} (D_t^p u_x)^2 \, dxdt + \int_{Q_2} (D_t^p u_x)^2 \, dxdt \leq R_1; \quad (35)$$

постоянная R_1 в этой оценке определяется лишь коэффициентами оператора L , числом T , а также нормой функции $f(x, t)$ в пространстве $L_2(Q)$. На следующем шаге рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} \int_{Q_1} \frac{\lambda_0 - t}{g(x)} Lu \cdot u_{xxt} \, dxdt + \gamma \int_{Q_2} \frac{\lambda_0 - t}{g(x)} Lu \cdot u_{xxt} \, dxdt \\ = \int_{Q_1} \frac{\lambda_0 - t}{g(x)} f \cdot u_{xxt} \, dxdt + \gamma \int_{Q_2} \frac{\lambda_0 - t}{g(x)} f \cdot u_{xxt} \, dxdt. \end{aligned}$$

Вновь интегрируя по частям, используя условия (2)–(4), (7_μ) , (8_μ) , условия теоремы и применяя неравенство Юнга, получаем, что для решений $u(x, t)$ задачи (1_μ) , (2)–(4), (7_μ) , (8_μ) будет выполняться оценка

$$\int_{Q_1} (D_t^p u_{xx})^2 \, dxdt + \int_{Q_2} (D_t^p u_{xx})^2 \, dxdt \leq R_2 \quad (36)$$

с постоянной R_2 , определяющей лишь коэффициентами оператора L , числом T и нормой функции $f(x, t)$ в пространстве $L_2(Q)$.

Анализируя теперь равенство

$$\begin{aligned} \int_{Q_1} Lu \cdot D_t^{2p} u_{xx} dxdt + \gamma \int_{Q_2} Lu \cdot D_t^{2p} u_{xx} dxdt \\ = \int_{Q_1} f \cdot D_t^{2p} u_{xx} dxdt + \gamma \int_{Q_2} f \cdot D_t^{2p} u_{xx} dxdt, \end{aligned}$$

используя условия теоремы, оценки (35) и (36), применяя неравенство Юнга, получим, что имеет место оценка

$$\int_{Q_1} (D_t^{2p} u_{xx})^2 dxdt + \int_{Q_2} (D_t^{2p} u_{xx})^2 dxdt \leq R_3 \quad (37)$$

с постоянной R_3 , вновь определяющей коэффициентами оператора L , числом T и нормой функции $f(x, t)$ в пространстве $L_2(Q)$.

Из оценок (35)–(37) следует, что имеет место искомая оценка (34). Как уже говорилось выше, справедливость этой оценки означает разрешимость задачи (1_μ) , (2) – (4) , (7_μ) , (8_μ) при всех μ из отрезка $[0, 1]$ — в частности, и при $\mu = 1$.

Итак, в случае $a_2 \neq 0$, $d_2 \neq 0$ требуемое утверждение доказано. Если же $a_2 = 0$ или $d_2 = 0$, то в одном из прямоугольников Q_1 или Q_2 (или же и в Q_1 , и в Q_2) задача сопряжения II становится обычной начально-краевой задачей, разрешимость которой вновь вытекает из априорной оценки (34) и теоремы о методе продолжения по параметру (сама по себе оценка выводится вполне аналогично выводу оценки (34), но вначале в соответствующем прямоугольнике Q_1 или Q_2 , затем в другом).

Из проведенных рассуждений следует, что в случае $a_2 = 0$ или $d_2 = 0$ задача сопряжения II также будет разрешима в пространстве V_{2p} .

Теорема полностью доказана.

Теорема 6. Пусть выполняются условия (16)–(19), (21), (30) и (31). Тогда для любой функции $f(x, t)$ из пространств $L_2(Q)$ задача сопряжения III разрешима в пространстве V_{2p} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ проводится вполне аналогично доказательству теоремы 5 — именно, с помощью теоремы о методе продолжения по параметру и априорных оценок.

Теорема 7. Пусть выполняются условия (16)–(22). Тогда для любой функции $f(x, t)$ из пространства $L_2(Q)$ задача сопряжения I разрешима в пространстве V_{2p} .

Теорема 8. Пусть выполняются условия (16)–(19), (22), (32) и (33). Тогда для любой функции $f(x, t)$ из пространств $L_2(Q)$ задача сопряжения IV разрешима в пространстве V_{2p} .

Доказательство теорем 7 и 8 проводится вполне аналогично доказательству соответствующих теорем в [1] — именно, с помощью теорем 5 и 6 о разрешимости задач сопряжения II и III.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кожанов А. И., Шарин Е. Ф. Задача сопряжения для некоторых неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка // Укр. мат. вісник. 2014. Т. 11, № 2. С. 181–202.
2. Врагов В. Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 6. С. 1098–1105.
3. Врагов В. Н. О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанно-составного типа // Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск, 1978. С 5–13.
4. Егоров И. Е., Федоров В. Е. Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Вычислительный центр СО АН СССР, 1995.
5. Ладыженская О. А. О решении общей задачи дифракции // Докл. АН СССР. 1954. Т. 96, № 3. С. 433–436.
6. Олейник О. А. Краевые задачи для линейных уравнений эллиптического и параболического типов с разрывными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1961. Т. 25, № ????. С. 3–20..
7. Ильин В. А. О разрешимости задач Дирихле и Неймана для линейного эллиптического оператора с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. 161. Т. 137, № 1. С. 28–30.
8. Ильин В. А. Метод Фурье для гиперболического уравнения с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1962. Т. 142, № 1. С. 21–24.
9. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
10. Ильин В. А., Луференко П. В. Смешанные задачи, описывающие продольные колебания стержня, состоящего из двух участков, имеющих разные плотности, разные упругости, но одинаковые импедансы // Докл. АН. 2009. Т. 428, № 1. С. 12–15.
11. Ильин В. А., Луференко П. В. Обобщенные решения смешанных задач для разрывного волнового уравнения при условии равенства импедансов // Докл. АН. 2009. Т. 429, № 3. С. 317–321.
12. Андропова О. А. Спектральные задачи сопряжения с поверхностной диссипацией энергии // Тр. ИПММ НАН Украины. 2009. Т. 19. С. 10–22.
13. Никольский Д. Н. Трехмерная эволюция границы загрязнения в ограниченной кусочно-однородной пористой среде // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2011. Т. 51, № 5. С. 913–919.
14. Рогожников А. М. Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков, при условии совпадения времени прохождения волн по каждому из этих участков // Докл. АН. 2012. Т. 441, № 4. С. 449–451.
15. Кулешов А. А. Смешанные задачи для уравнения продольных колебаний неоднородного стержня со свободным либо закрепленным правым концом, состоящего из двух участков разной плотности и упругости // Докл. АН. 2012. Т. 442, № 4. С. 451–454.
16. Рогожников А. М. Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков с произвольными длинами // Докл. АН. 2012. Т. 444, № 5. С. 488–491.
17. Смирнов И. Н. О колебаниях, описываемых телеграфным уравнением в случае системы, состоящей из нескольких участков разной плотности и упругости // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 49, № 5. С. 643–648.
18. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Из-во АН СССР, 1959.
19. Ладыженская О. А., Ступялис Л. Об уравнениях смешанного типа // Вестник ЛГУ. 1967. № 18. С. 38–46.
20. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа.. М.: Наука, 1970.
21. Ладыженская О. А., Ступялис Л. Краевые задачи для уравнений смешанного типа // Тр. МИАН СССР. 1971. Т. 116. С. 101–136.
22. Ступялис Л. Краевые задачи для эллипτικο-гиперболических уравнений // Тр. МИАН СССР. 1973. Т. 125. С. 211–229.
23. Терсенов С. А. Введение в теорию уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Ин-т математики, 1982.
24. Джураев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1986.
25. Моисеев Е. И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.

26. Солдатов А. П. Задача типа Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. I. Теоремы единственности // Докл. РАН. 1993. Т. 332, № 6. С. 696–698; II. Теоремы существования. Докл. РАН. 1993. Т. 333, № 1. С. 16–18.
27. Хачев М. М. Первая краевая задача для линейного уравнения смешанного типа. Нальчик: Эльбрус, 1988.
28. Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В. Неклассические операторно-дифференциальные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.
29. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.
30. Сабитов К. Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // Докл. АН. 2007. Т. 413, № 1. С. 23–26.
31. Маричев О. И., Килбас А. А., Репин О. А. Краевые задачи для уравнений с частными производными с разрывными коэффициентами. Самара: Самарск. гос. экономический ун-т, 2008.
32. Моисеев Е. И., Лихоманенко Т. Н. Об одной нелокальной задаче для уравнения Лаврентьева — Бицадзе // Докл. АН. 2012. Т. 446, № 3. С. 256–258.
33. Сабитов К. Б. Краевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка в прямоугольной области // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 2. С. 488–496.
34. Кожанов А. И. Задача сопряжения для одного класса уравнений составного типа переменного направления // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2002. С. 96–109.
35. Шубин В. В. Краевые задачи для уравнений третьего порядка с разрывным коэффициентом // Вестник НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2012. Т. 12, № 1. С. 126–138.
36. Potapova S. V. Boundary value problems for pseudohyperbolic equations with a variable time direction. TWMS // J. Pure Appl. Math. 2012. V. 3, N 1. P. 73–91.
37. Кожанов А. И., Потапова С. В. Задача Дирихле для одного класса уравнений составного типа с разрывным коэффициентом при старшей производной // Дальневост. мат. журн. 2014. Т. 14, № 1. С. 48–65.
38. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

Статья поступила 20 апреля 2014 г.

Кожанов Александр Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
пр. Академика Коптюга, 4;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
kozhanov@math.nsc.ru

Шарин Евгений Федорович
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
eugene_sharin@mail.ru

УДК 519.63

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА МЕТОДОМ ВВЕДЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛОТЫ

Е. А. Крылова

Аннотация. Рассматривается двухфазная обратная задача Стефана по восстановлению правой части уравнения теплопроводности от времени при известном распределении по пространству. Предложен новый способ учета теплоты фазового перехода путем введения распределенного в окрестности межфазовой границы источника тепла. Построен вычислительный алгоритм, основанный на преобразовании исходной задачи к краевой задаче для нагруженного уравнения теплопроводности. Приведены примеры численных расчетов.

Ключевые слова: теплота фазового перехода, распределенный источник тепла, задача Стефана, краевая задача для нагруженного уравнения, обратная задача, восстановление правой части уравнения теплопроводности, сеточная задача, разностная схема.

Введение

Задачи по восстановлению неизвестных источников тепла по дополнительным измерениям температуры в отдельных точках являются одними из основных в теории обратных задач математической физики [1–3]. Во многих случаях неизвестной является зависимость правой части от времени. Для приближенного решения задач восстановления неизвестной правой части используются различные подходы, которые базируются на методах регуляризации [4].

В ряде исследований [5, 6] численные алгоритмы приближенного решения обратной задачи основаны на преобразовании исходной задачи к краевой задаче для нагруженного уравнения теплопроводности, в которых за счет специальной организации вычислений решение обратной задачи сводится к решению двух прямых задач. Данная методика использована в работе [7] для численного решения простейшей одномерной по пространству однофазной обратной задачи по восстановлению переменной интенсивности источников тепла при известном их распределении по пространству.

В работе рассматривается задача по восстановлению зависимости правой части параболического уравнения от времени при известном распределении по пространству. Такая линейная обратная задача относится к классу некорректных в классическом смысле задач математической физики при специальных предположениях о точках дополнительных измерений — при условии действия источника в точках наблюдения [5]. На базе методики из [7] построен вычислительный алгоритм приближенного решения одномерной по пространству двухфазной обратной задачи Стефана при новом способе учета теплоты фазового перехода — путем введения распределенного в окрестности межфазовой границы источника тепла [8, 9].

1. Постановка задачи

Распределение температуры и положение границы фазового перехода определяется решением системы уравнений:

$$c_1 \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad 0 < x < \xi(t), \quad (1.1)$$

$$c_2 \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad \xi(t) < x < l. \quad (1.2)$$

На границе раздела фаз выполнены условия:

$$T = T_*, \quad x = \xi(t), \quad (1.3)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x} - \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x} = L \frac{d\xi}{dt}. \quad (1.4)$$

Для уравнений (1.1)–(1.4) зададим граничные условия третьего рода:

$$\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha(T - T_C), \quad x = 0, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad x = l. \quad (1.6)$$

Задано также начальное условие

$$T(x, 0) = T_C, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (1.7)$$

В уравнениях (1.1)–(1.7) введены следующие обозначения: c — объемная теплоемкость, λ — коэффициент теплопроводности, T_* , T_C — температуры фазового перехода и окружающей среды соответственно, L — скрытая теплота кристаллизации (плавления), α — коэффициент теплоотдачи, $x = \xi(t)$ — уравнение границы раздела фаз. Индексы 1 и 2 относятся к фазам, у которых $T > T_*$ и $T < T_*$ соответственно.

Прямая задача формулируется в виде (1.1)–(1.7).

В данной работе рассматривается обратная задача, в которой неизвестной помимо $T(x, t)$ является и правая часть $f(x, t)$ уравнений (1.1), (1.2).

Будем считать, что $f(x, t)$ представляется в виде

$$f(x, t) = \tilde{c}\eta(t)\psi(x), \quad (1.8)$$

где функция $\psi(x)$ задана, а неизвестной является зависимость источника от времени — функция $\eta(t)$. Эта зависимость восстанавливается по дополнительному наблюдению за $T(x, t)$ в некоторой внутренней точке $0 < x^* < l$:

$$T(x^*, t) = \varphi(t). \quad (1.9)$$

Решение задачи по восстановлению зависимости правой части параболического уравнения от времени при известном распределении по пространству рассматривается при следующих ограничениях:

- 1) $\psi(x^*) \neq 0$,
- 2) $\psi(x)$ — достаточно гладкая функция ($\psi \in C^2[0, 1]$),
- 3) $\psi(x) = 0$ на границе расчетной области (для простоты изложения).

Особого внимания заслуживает первое предположение, которое связано с тем, что в точке наблюдения x^* действует восстанавливаемый источник. Именно это обуславливает корректность рассматриваемой задачи идентификации — непрерывную зависимость решения от начальных данных, правой части и измерений во внутренней точке.

2. Метод введения распределенного источника теплоты

Для численного решения задачи Стефана (1.1)–(1.7) разработан ряд методов. Наиболее широкое распространение получил метод, описанный в [10, 11], где с помощью введения функции энтальпии решение задачи Стефана сводится к решению краевой задачи для уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами. Разностная схема сквозного счета для таких уравнений строится с заменой дельта-функции Дирака дельтаобразной функцией на интервале $(T_* - \Delta, T_* + \Delta)$. При этом функция энтальпии аппроксимируется различными непрерывными в указанном интервале функциями. В [12] вместо функции энтальпии рассматривается аппроксимация единичной функции Хевисайда. В указанных методах принимается допущение, что фазовый переход при кристаллизации происходит начиная с некоторой температуры, которая выше температуры кристаллизации.

В настоящей работе для численного решения обратной задачи Стефана предлагается модификация учета теплоты фазового перехода, более точно описывающая реальный процесс тепловыделения на границе фазового перехода, путем введения распределенного в окрестности $(T_* - \Delta, T_*)$ (в сторону образующейся фазы) источника тепла [8]. Для этого вводится кусочно непрерывная неотрицательная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) $v(T)$ определена во всем диапазоне изменения температур, отлична от нуля в промежутке $(T_* - \Delta, T_*)$, а вне его тождественно равна нулю;
- 2) $v(T_*) = 1$;
- 3) $\frac{\partial v}{\partial T} < 0$ для $T \in (T_* - \Delta, T_*)$.

Утверждение. Если $v(T)$ удовлетворяет указанным выше условиям, то уравнения (1.1), (1.2), (1.4) заменяются одним уравнением (2.1), заданным во всей области $0 < x < l$:

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + L \frac{\partial v}{\partial t} + f(x, t), \quad (2.1)$$

где $c = c_1$, $\lambda = \lambda_1$ при $T > T_*$ и $c = c_2$, $\lambda = \lambda_2$ при $T < T_*$.

Доказательство данного утверждения по методике [10] приведено в работах [8, 9]: в [8] — в случае одномерной области, когда правые части уравнений (1.1), (1.2) равны нулю ($f(x, t) = 0$), в [9] — в случае двумерной области при $f(x, t) \neq 0$.

Коэффициенты уравнения (2.1) как функции температуры терпят разрывы при $T = T_*$ и не определены в этой точке. Последний член правой части объединим с левой частью, тогда эффективная теплоемкость $c - L \frac{dv}{dT}$ имеет разрывы в точках $T = T_*$ и $T = T_* + \Delta$. Исходя из сказанного, уравнение (2.1) представим в виде

$$\tilde{c} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{\lambda} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + f, \quad (2.2)$$

коэффициенты которого определены во всем диапазоне изменения температуры следующим образом:

$$\tilde{c} = \begin{cases} c_2, & \text{если } T \leq T_* - \Delta, \\ c_2 - L \frac{dv}{dT}, & \text{если } T_* - \Delta < T \leq T_*, \\ 0.5(c_1 + c_2) - L \frac{dv}{dT}, & \text{если } T = T_*, \\ c_1, & \text{если } T \geq T_*, \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\tilde{\lambda} = \begin{cases} \lambda_1, & \text{если } T \leq T_* - \Delta, \\ (\lambda_1 + \lambda_2)/2 - (\lambda_2 + \lambda_1)(T - T_*)/2\Delta, & \text{если } T_* - \Delta \leq T \leq T_* + \Delta, \\ \lambda_2, & \text{если } T > T_* + \Delta. \end{cases} \quad (2.4)$$

Для коэффициента теплопроводности принята аппроксимация непрерывной функцией. Можно также доопределить его аналогично коэффициенту теплоемкости. Так как температурное поле наиболее чувствительно к величине коэффициента теплоемкости, он должен быть доопределен так, чтобы наиболее точно соответствовать реальному процессу фазового перехода. Этим обусловлен выбор функции $\tilde{c}$ в приведенном виде.

Таким образом, прямая задача (1.1)–(1.7) сводится к решению уравнения (2.2) с граничными условиями (1.5), (1.6) и с начальным условием (1.7).

При выборе функции $v(T)$ необходимо учитывать направление хода процесса — фазовый переход происходит в результате понижения температуры или ее повышения. Она должна быть выбрана отличной от нуля в области вновь образующейся фазы.

Для численного решения рассматриваемой обратной задачи применяется методика из [5, 7], которая заключается в сведении обратной задачи к краевой задаче для нагруженного уравнения, в построении разностной схемы и сеточной нелокальной задачи для ее численной реализации.

3. Сведение обратной задачи к краевой задаче для нагруженного уравнения

Будем искать решение обратной задачи в виде

$$T(x, t) = \theta(t)\psi(x) + \omega(x, t), \quad (3.1)$$

где

$$\theta(t) = \int_0^t \eta(s) ds. \quad (3.2)$$

Подстановка (1.8), (1.9), (3.2) в (2.2) дает уравнение для $\omega(x, t)$:

$$\tilde{c} \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{\lambda} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \theta(t) \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{\lambda} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right). \quad (3.3)$$

С учетом (3.2) условие (1.9) приводит к следующему представлению для неизвестной $\theta(t)$:

$$\theta(t) = \frac{1}{\psi(x^*)} (\varphi(t) - \omega(x^*, t)). \quad (3.4)$$

Подстановка (3.4) в (3.3) дает искомое нагруженное параболическое уравнение

$$\tilde{c} \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{\lambda} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \frac{1}{\psi(x^*)} \left(\varphi(t) - \omega(x^*, t) \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{\lambda} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right). \quad (3.5)$$

Граничное условие с учетом наших предположений о правой части на границе области имеет вид

$$\tilde{\lambda} \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = \alpha(w(0, t) + T_C), \quad \frac{\partial w(l, t)}{\partial x} = 0, \quad 0 \leq t \leq t_0. \quad (3.6)$$

Как следует из (3.2), для вспомогательной функции $\theta(t)$ имеем

$$\theta(0) = 0, \quad (3.7)$$

что позволяет использовать начальное условие

$$w(x, 0) = T_C, \quad 0 < x < l. \quad (3.8)$$

Тем самым обратная задача (2.2), (1.5)–(1.7) формулируется как краевая задача для нагруженного уравнения (3.5)–(3.8) с представлением (3.2), (3.4) для неизвестной зависимости источника от времени.

4. Разностная схема

Будем считать, что по переменной x введена равномерная сетка $\bar{\omega}$ с шагом h . Через $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$, $Nh = l$, обозначим узлы сетки, и пусть $v = v_i = v(x_i)$. Для простоты будем считать, что точка наблюдения $x = x^*$ совпадает с внутренним узлом, отвечающим номеру $i = k$.

При переходе с одного временного слоя $t_j = j\tau$, $j = 0, 1, \dots, j_0$, $\tau > 0$, на другой временной слой t_{j+1} будем использовать чисто неявную разностную схему для уравнения (3.5). Во внутренних узлах сетки по пространству имеем

$$\tilde{c} \frac{\omega^{j+1} - \omega^j}{\tau} = (a\omega_x^{j+1})_x + \frac{1}{\psi_k} (\varphi^{j+1} - \omega_k^{j+1}) (a\psi_x)_x. \quad (4.1)$$

Для задач с достаточно гладким коэффициентом $\tilde{\lambda}$ положим $a_i = \tilde{\lambda} \cdot 0,5(x_i + x_{i-1})$. Аппроксимируя (3.6), (3.8), получим

$$\tilde{\lambda} \frac{\omega_1^{j+1} - \omega_0^{j+1}}{h} = \alpha(\omega_0^{j+1} - T_C),$$

$$\frac{\omega_N^{j+1} - \omega_{N-1}^{j+1}}{h} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1, \quad (4.2)$$

$$\omega_i^0 = T_C, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (4.3)$$

Из решения разностной задачи (4.1)–(4.3) в соответствии с (3.4) определим

$$\theta^{j+1} = \frac{1}{\psi_k} (\varphi^{j+1} - \omega_k^{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1, \quad (4.4)$$

дополнив эти соотношения условием (см. (3.7)) $\theta^0 = 0$. Принимая во внимание (3.2), для искомой зависимости правой части от времени используем простейшую процедуру численного дифференцирования:

$$\eta^{j+1} = \frac{\theta^{j+1} - \theta^j}{\tau}, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1. \quad (4.5)$$

Есть необходимость отдельно остановиться на вопросе решения сеточной задачи для реализации рассматриваемой неявной схемы.

5. Сеточная нелокальная задача и программная реализация

Никаких особых проблем с вычислительной реализацией схемы (4.1)–(4.3), несмотря на нестандартность (нелокальность) сеточной задачи на новом временном слое, не возникает. Следуя методике [5, 7], запишем уравнение (4.1) во внутренних узлах в виде

$$\tilde{c} \frac{\omega_i^{j+1}}{\tau} - (a\omega_x^{j+1})_{x,i} + \frac{1}{\psi_k} (a\psi_x)_{x,i} \omega_k^{j+1} = g_i^j \quad (5.1)$$

с заданной правой частью g_i^j и граничными условиями (4.2). Решение системы (4.2), (5.1) ищется в виде

$$\omega_i^{j+1} = y_i + \omega_k^{j+1} z_i, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (5.2)$$

Подстановка (5.2) в (5.1) позволяет сформулировать следующие сеточные задачи для вспомогательных функций y_i, z_i :

$$\tilde{c} \frac{y_i}{\tau} - (ay_{\bar{x}})_{x,i} = g_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (5.3)$$

$$\tilde{\lambda} \frac{y_1 - y_0}{h} = \alpha(y_0 - T_C), \quad \tilde{\lambda} \frac{y_N - y_{N-1}}{h} = 0, \quad (5.4)$$

$$\tilde{c} \frac{z_i}{\tau} - (az_{\bar{x}})_{x,i} + \frac{1}{\psi_k} (a\psi_{\bar{x}})_{x,i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (5.5)$$

$$\tilde{\lambda} \frac{z_1 - z_0}{h} = \alpha z_0, \quad -\tilde{\lambda} \frac{z_N - z_{N-1}}{h} = 0. \quad (5.6)$$

После этого с учетом представления (5.2) находится ω_k^{j+1} :

$$\omega_k^{j+1} = \frac{y_k}{1 - z_k}. \quad (5.7)$$

Корректность алгоритма обеспечивается необращением знаменателя (5.7) в нуль. Для сеточной задачи (5.5), (5.6) на основе принципа максимума для разностных схем устанавливается априорная оценка

$$\max_{0 \leq i \leq N} |z_i| \leq \tau \max_{0 < i < N} \left| \frac{1}{\psi_k} \right| (a\psi_{\bar{x}})_{x,i}.$$

Поэтому $|z_i| < 1$ при достаточно малых $\tau = O(1)$, т. е. необходимо использовать малые шаги по времени.

Для численного решения рассматриваемой обратной задачи получен следующий алгоритм. На каждом временном шаге выполняются последовательно вычисления.

1. По известному предыдущему распределению температуры выбирается параметр Δ для сглаживания разрывных коэффициентов $\tilde{c}$ и $\tilde{\lambda}$ так, чтобы промежуток сглаживания $(T_* - \Delta, T_*]$ содержал в себе значения температуры хотя бы в двух соседних узлах сетки, между которыми находится граница фазового перехода. Если в указанный интервал не попадает ни одно из узловых значений температуры, то температурное поле будет определено без учета выделения теплоты фазового перехода.

2. Вводится функция распределенного источника $v(T)$, удовлетворяющая условиям утверждения, и с помощью нее определяются согласно формулам (2.3), (2.4) значения разрывных коэффициентов $\tilde{c}$ и $\tilde{\lambda}$.

3. Решаются вспомогательные сеточные задачи: для y — (5.3), (5.4), для z — (5.5), (5.6).

4. Далее последовательно определяются значения ω_k^{j+1} — по формуле (5.7), ω_i^{j+1} — по формуле (5.2), θ^{j+1} — по формуле (4.4).

5. Восстановление неизвестной зависимости правой части от времени η^{j+1} производится по формуле (4.5).

6. Распределение температурного поля для данного временного слоя находится по формуле (3.1) и присваивается значению предыдущего распределения температуры.

7. Процесс итерации (пп. 1–6) продолжаем до выполнения условия

$$|T_\delta(x, t) - T(x, t)| < \delta,$$

где δ — уровень погрешности, $T(x, t)$ — решение прямой задачи. Далее переходим на следующий временной слой.

По данному алгоритму проведены численные расчеты. В рамках концепции квазиреального эксперимента рассматривается прямая задача (2.2), (1.5)–(1.7) с некоторой заданной правой частью (1.8), где

$$\eta(t) = \begin{cases} t, & \text{если } 0 < t < 0.6, \\ 0, & \text{если } t \geq 0.6, \end{cases} \quad \psi(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right).$$

Рассмотрены два варианта выбора функции $v(T)$:

- 1) $v(T) = 1 + \frac{T_* - T}{\Delta}$,
- 2) $v(T) = \exp(0.69(T_* - T + \Delta)/\Delta) - 1$.

Такая задача численно решается при следующих значениях параметров: $c_1 = 2814$ кДж/м³·К, $\lambda_1 = 6,3$ кДж/м·ч·К, $c_2 = 2016$ кДж/м³·К, $\lambda_2 = 8,4$ кДж/м·ч·К, $T_* = 0^\circ$ С, $T_C = -25^\circ$ С, $L = 0,4175 \cdot 10^6$ кДж/м³, $\alpha = 83,5$ кДж/м²·ч·К, $l = 0,1$ м, $N = 100$, $k = 40$, $\tau = 0,0125$.

Для решения обратной задачи (3.1)–(3.8) по значениям функции $T(x, t)$ в точке $x^* = 0,6$, найденной решением прямой задачи, определяется функция дополнительного наблюдения $\varphi(t)$.

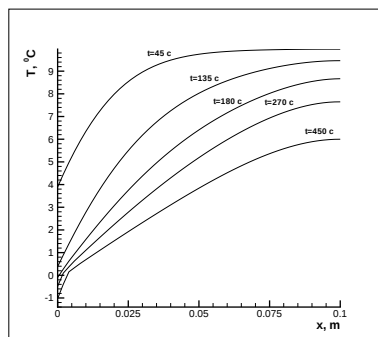
Для проверки корректности разработанного алгоритма результаты расчетов обратной задачи сопоставлены с результатами прямой задачи.

В табл. 1 приведены результаты расчетов в узлах сетки при $j_0 = 50$ ($t = 0,625$ ч). В первых двух строках сопоставлены значения температуры, полученные решением прямой задачи (T_1) и обратной задачи (T_2) при первом виде функции $v(T)$; в строках 3, 4 — результаты прямой задачи (T_1) и обратной задачи (T_3) при втором виде функции $v(T)$; в строках 5, 6 — результаты прямой задачи (T_1) и обратной задачи (T_4) при традиционном методе сглаживания.

Таблица 1

	Узлы	0	5	10	20	30	40	50
1	$T_1, ^\circ\text{C}$	−0.210	1.481	3.007	5.611	7.445	8.481	8.805
2	$T_2, ^\circ\text{C}$	−0.262	1.589	3.178	5.701	7.376	8.411	8.814
3	$T_1, ^\circ\text{C}$	−0.210	1.584	3.070	5.632	7.450	8.482	8.806
4	$T_3, ^\circ\text{C}$	−0.261	1.593	3.184	5.711	7.385	8.416	8.816
5	$T_1, ^\circ\text{C}$	−0.312	1.404	2.961	5.598	7.441	8.480	8.805
6	$T_4, ^\circ\text{C}$	−0.262	1.587	3.174	5.694	7.368	8.403	8.799

Из таблицы видно, что значения температуры, полученные традиционным методом сглаживания (строки 5 и 6), ниже значений, полученных предложенным методом введения распределенного источника тепла. Это обусловлено выбором величины объемной теплоемкости, которая при традиционном методе сглаживания принимается большей, чем ее действительное значение.

Рис. 1. Распределение температурного поля ($\delta = 0.5$)

На рис. 1 представлено распределение температурного поля, полученное решением обратной задачи при $v(T) = 1 + \frac{T_* - T}{\Delta}$ в различные моменты времени, δ — уровень погрешности.

Иллюстрацией корректности рассматриваемой обратной задачи и предлагаемого способа учета теплоты фазового перехода являются данные расчетов при различном уровне погрешностей. На рис. 2 слева дано решение задачи при $\delta = 0.75$, справа — при $\delta = 0.25$. При уменьшении уровня погрешности решение восстанавливается более точно.

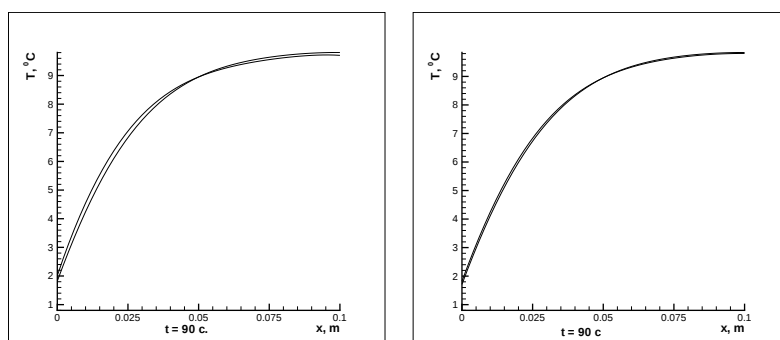


Рис. 2. Распределения температуры при различном уровне погрешностей

ЛИТЕРАТУРА

1. Алифанов О. М. Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988.
2. Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент-Клэр Ч. Некорректные обратные задачи теплопроводности. М.: Мир, 1989.
3. Samarskii A. A., Vabishchevich P. N. Computational heat transfer. Chichester: Wiley, 1995.
4. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
5. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Изд-во ЛКИ, 2009.
6. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995.
7. Борухов В. Т., Вабищевич П. Н. Численное решение обратной задачи восстановления источника в параболическом уравнении // Мат. моделирование. 1998. Т. 10, № 11. С. 93–100.
8. Павлов А. Р., Слепцова Е. А. Численное решение задачи Стефана введением распределенного источника // Мат. VI научно-техн. конф. «Современные проблемы теплофизики в условиях Крайнего Севера», посвящ. памяти проф. Н. С. Иванова. Якутск: ???, 2004. С. 74–79.

9. Слепцова Е. А. Математическое моделирование развития напряженно-деформированного состояния тонких пластин при их стыковой сварке: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. — Якутск, 2009. — 109 с.
10. Самарский А. А., Моисеенко Б. Д. Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1965. Т. 5, № 5. С. 816–827.
11. Будаков Б. М., Соловьева Е. Н., Успенский А. Б. Разностный метод со сглаживанием коэффициентов для решения задач Стефана // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1965. Т. 5, № 5. С. 828–840.
12. Мажукин В. И., Повещенко Ю. А., Попов С. Б., Попов Ю. П. Об однородных алгоритмах численного решения задачи Стефана. М., 1985. 23 с. (Препринт/Ин-т прикл. математики им. М. В. Келдыша АН СССР; № 122).

Статья поступила 25 февраля 2014 г.

Крылова Екатерина Анатольевна
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
krekan2012@mail.ru

УДК 517.956.4

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНТАКТНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ГЁЛЬДЕРОВСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

С. В. Попов, Л. Ю. Ткаченко

Аннотация. Рассматриваются параболические уравнения второго порядка с меняющимся направлением времени с условиями склеивания с переменными коэффициентами по $t \in [0, T]$, связанными с применением теории сингулярных интегральных уравнений. Устанавливается разрешимость краевых задач в пространствах Гёльдера. Показано, что гёльдеровские классы их решений зависят как от нецелого показателя Гёльдера, так и от знаков коэффициентов условий склеивания на концах интервала $[0, T]$ при выполнении необходимых и достаточных условий на входные данные задачи.

Ключевые слова: параболические уравнения с меняющимся направлением времени, условия склеивания, корректность, пространство Гёльдера, сингулярное интегральное уравнение

В работе [1] предлагается единообразный подход к построению моделей сопряжения различных физических процессов, таких как распространение тепла в неоднородных средах (задачи типа дифракции), взаимодействие фильтрационных и каналовых потоков жидкости (фильтрация в скважину), возвратные течения в пограничном слое за точкой его отрыва и др. В [2–4] устанавливается разрешимость краевых задач в гёльдеровских пространствах для некоторых классов уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени с границей раздела, имитирующей противоположные спутные потоки. В настоящей работе мы рассматриваем общий случай границы раздела двух сред, а именно параболические уравнения с меняющимся направлением времени с условиями склеивания с переменными коэффициентами.

В области $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Omega \equiv \mathbb{R}$, рассмотрим уравнение

$$g(x)u_t = u_{xx}, \quad g(x) = \operatorname{sgn} x. \quad (1)$$

В пространстве Гёльдера $H_x^{p,p/2}(Q^\pm)$, $Q^\pm = \mathbb{R}^\pm \times (0, T)$, $p = 2l + \gamma$, $0 < \gamma < 1$, ищется решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad x > 0, \quad u(x, T) = \varphi_2(x), \quad x < 0, \quad (2)$$

и условиям склеивания

$$u(-0, t) = u(+0, t), \quad a(t) \cdot u_x(-0, t) = u_x(+0, t), \quad (3)$$

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2014–2016 гг. (проект № 3047).

где $l \geq 1$ — целое число, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $a(t)$ — заданные функции, определенные при $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0, T]$.

Для удобства вместо уравнения (1), будем рассматривать систему уравнений

$$u_t^1 = u_{xx}^1, \quad -u_t^2 = u_{xx}^2 \quad (4)$$

в области Q^+ . При этом начальные условия и условия склеивания имеют вид

$$u^1(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u^2(x, T) = \varphi_2(x), \quad x > 0, \quad (5)$$

$$u^1(0, t) = u^2(0, t), \quad u_x^1(0, t) + a(t) \cdot u_x^2(0, t) = 0. \quad (6)$$

Будем предполагать, что $\varphi_i(x) \in H^p(\mathbb{R})$, $i = 1, 2$. Тогда функции

$$\begin{aligned} \omega_1(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right) \varphi_1(\xi) d\xi \\ \omega_2(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi(T-t)}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(T-t)}\right) \varphi_2(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (7)$$

являются решениями уравнений (4), удовлетворяющими условиям (5) в $\mathbb{R}$. В силу метода исследования будем пользоваться интегральным представлением решения для системы уравнений (4):

$$\begin{aligned} u^1(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right) (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \alpha(\tau) d\tau + \omega_1(x, t), \\ u^2(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_t^T \exp\left(-\frac{x^2}{4(\tau-t)}\right) (\tau-t)^{-\frac{1}{2}} \beta(\tau) d\tau + \omega_2(x, t). \end{aligned} \quad (8)$$

Функции, представленные формулами (8), удовлетворяют начальным условиям (5) и уравнениям (4) соответственно.

Согласно [5, 6] $u^k(x, t)$, $k = 1, 2$, принадлежат пространству $H_{x,t}^{p,p/2}(Q^+)$, если введенные нами неизвестные плотности $\alpha(t)$, $\beta(t)$ принадлежат пространству $H^{(p-1)/2}(0, T)$, при этом

$$\alpha^{(s)}(0) = \beta^{(s)}(T) = 0, \quad s = 0, \dots, l-1. \quad (9)$$

Из условий склеивания (6) получим систему уравнений относительно $\alpha(t)$, $\beta(t)$:

$$\begin{cases} \int_0^t \frac{\alpha(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau = \int_t^T \frac{\beta(\tau)}{(\tau-t)^{\frac{1}{2}}} d\tau + \Phi_0(t), \\ \alpha(t) + a(t)\beta(t) = \Phi_1(t), \end{cases} \quad (10)$$

где

$$\Phi_0(t) = \sqrt{\pi}(\omega_2(0, t) - \omega_1(0, t)), \quad \Phi_1(t) = a(t) \cdot \omega_{2x}(0, t) + \omega_{1x}(0, t).$$

Если первое уравнение в (10) обратить при помощи известных формул обращения оператора Абеля, то получим

$$\begin{cases} \alpha(t) - \frac{1}{\pi} \int_0^T \left(\frac{\tau}{t}\right)^{1/2} \frac{\beta(\tau)}{\tau-t} d\tau = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\Phi_0(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau, \\ \alpha(t) + a(t)\beta(t) = \Phi_1(t). \end{cases} \quad (11)$$

Введем обозначения: $F_1^s(t) = \Phi_1^{(s)}(t) - \Phi_1^{(s)}(0)$,

$$F_0^s(t) = \int_0^t \frac{\Phi_0^{(s+1)}(\tau) - \Phi_0^{(s+1)}(0)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau, \quad s = 0, \dots, l-1.$$

Легко видеть, что $F_0^{l-1}(t)$, $F_1^{l-1}(t)$ принадлежат пространству Гёльдера с показателем $(1+\gamma)/2$, при этом $F_0^{l-1}(t) = F_1^{l-1}(t) = O(t^{(1+\gamma)/2})$ для малых t .

Если предположить, что функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ принадлежат пространству $H^{(p-1)/2}(0, T)$, то из системы (11) следует, что

$$\int_0^T \frac{\beta(\tau)}{\tau^{1/2}} d\tau = -\pi\Phi_0(0), \quad a(0)\beta(0) = \Phi_1(0). \quad (12)$$

При выполнении (12) систему (11) можно переписать так:

$$\begin{cases} \alpha(t) - \frac{1}{\pi} \int_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2} \frac{\beta(\tau)}{\tau-t} d\tau = 2\Phi_0'(0)t^{1/2} + F_0^0(t), \\ \alpha(t) + a(t)\beta(t) - a(0)\beta(0) = F_1^0(t). \end{cases} \quad (13)$$

Введем в системе (13) новые искомые функции $\bar{\beta}(t) = \beta(t) - \beta(0)\frac{T-t}{T}$. Тогда систему (13) представим в виде

$$\begin{cases} \alpha(t) - \frac{1}{\pi} \int_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2} \frac{\bar{\beta}(\tau)}{\tau-t} d\tau \\ \quad = 2\Phi_0'(0)t^{1/2} + F_0^0(t) - \frac{4}{\pi}\beta(0)F\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; \frac{t}{T}\right)\left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \alpha(t) + a(t)\bar{\beta}(t) = a(t)\beta(0)\frac{t}{T} - \beta(0)[a(t) - a(0)] + F_1^0(t). \end{cases} \quad (14)$$

Если $l > 1$, то продифференцируем полученную систему уравнений (14):

$$\begin{cases} \alpha'(t) - \frac{1}{2\pi} \left(t^{-\frac{1}{2}} \int_0^T \frac{\bar{\beta}(\tau)}{\tau^{1/2}(\tau-t)} d\tau + 2t^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} \int_0^T \frac{\bar{\beta}(\tau)}{\tau^{1/2}(\tau-t)} d\tau \right) \\ \quad = -\frac{2}{\pi}\beta(0)F\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}; \frac{t}{T}\right)(tT)^{-\frac{1}{2}} + \Phi_0'(0)t^{-\frac{1}{2}} + 2\Phi_0''(0)t^{\frac{1}{2}} + F_0^1(t), \\ \alpha'(t) + a(t)\bar{\beta}'(t) = a'(t)[- \bar{\beta}(t) + \beta(0)\frac{t}{T} - \beta(0)] \\ \quad \quad + a(t)\beta(0)\frac{1}{T} + \Phi_1'(0) + F_1^1(t). \end{cases} \quad (15)$$

Из этой системы следует, что

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{\bar{\beta}(\tau)}{\tau^{3/2}} d\tau &= \frac{4}{\sqrt{T}}\beta(0) - 2\pi\Phi_0'(0), \\ a(0)\beta'(0) + a'(0)\beta(0) &= (a(t)\beta(t))'|_{t=0} = \Phi_1'(0). \end{aligned} \quad (16)$$

Систему (15) при выполнении (16) и условия $\beta(T) = 0$ можно переписать в виде

$$\begin{cases} \alpha'(t) - \frac{1}{\pi} \int_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2} \frac{\beta'(\tau)}{\tau-t} d\tau = 2\Phi_0''(0)t^{\frac{1}{2}} + F_0^1(t), \\ \alpha'(t) + (a(t)\beta(t))' - (a(t)\beta(t))'|_{t=0} = F_1^1(t). \end{cases} \quad (17)$$

Уравнения (17) имеют точно такой же вид, как уравнения (13). Легко убедиться, что при выполнении условий

$$\begin{cases} \int_0^T \frac{\beta^{(s)}(\tau) - \beta^{(s)}(0) \frac{T-\tau}{T}}{\tau^{3/2}} d\tau = \frac{4}{\sqrt{T}} \beta^{(s)}(0) - 2\pi \Phi_0^{(s+1)}(0), \\ (a(t)\beta(t))^{(s+1)}|_{t=0} = \Phi_1^{(s+1)}(0), \quad \beta^{(s)}(T) = 0, \end{cases} \quad s = 1, \dots, l-2, \quad (18)$$

получим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha^{(l-1)}(t) - \frac{1}{\pi} \int_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2} \frac{\beta^{(l-1)}(\tau)}{\tau-t} d\tau = 2\Phi_0^{(l)}(0)t^{\frac{1}{2}} + F_0^{l-1}(t), \\ \alpha^{(l-1)}(t) + (a(t)\beta(t))^{(l-1)} - (a(t)\beta(t))^{(l-1)}|_{t=0} = F_1^{l-1}(t). \end{cases} \quad (19)$$

Введем новую искомую функцию $\tilde{\beta}^{(l-1)}(t) = \beta^{(l-1)}(t) - \beta^{(l-1)}(0) \frac{T-t}{T}$. Тогда систему (19) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \alpha^{(l-1)}(t) - \frac{1}{\pi} \int_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2} \frac{\tilde{\beta}^{(l-1)}(\tau)}{\tau-t} d\tau = 2\Phi_0^{(l)}(0)t^{1/2} \\ \quad + F_0^{l-1}(t) - \frac{4}{\pi} \beta^{(l-1)}(0) F\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; \frac{t}{T}\right) \left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \alpha^{(l-1)}(t) + a(t)\tilde{\beta}^{(l-1)}(t) = -P(t) + P(0) + a(t)\beta^{(l-1)}(0) \frac{t}{T} \\ \quad + \beta^{(l-1)}(0)(a(0) - a(t)) + F_1^{l-1}(t), \end{cases} \quad (20)$$

где

$$P(t) = \sum_{k=1}^{l-1} C_{l-1}^k a^{(k)}(t) \beta^{(l-1-k)}(t).$$

Так как $\alpha^{(l-1)}(t), \beta^{(l-1)}(t) \in H^{(1+\gamma)/2}(0, T)$, необходимо выполнение условия

$$\int_0^T \frac{\tilde{\beta}^{(l-1)}(\tau)}{\tau^{3/2}} d\tau = \frac{4}{\sqrt{T}} \beta^{(l-1)}(0) - 2\pi \Phi_0^{(l)}(0). \quad (21)$$

Тогда придем к системе уравнений

$$\begin{cases} \alpha^{(l-1)}(t) - \frac{1}{\pi} \int_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{3/2} \frac{\tilde{\beta}^{(l-1)}(\tau)}{\tau-t} d\tau = \overline{F}_0^{l-1}(t), \\ \alpha^{(l-1)}(t) + a(t)\tilde{\beta}^{(l-1)}(t) = \overline{F}_1^{l-1}(t), \end{cases} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \overline{F}_0^{l-1}(t) &= F_0^{l-1}(t) - \frac{4}{\pi} \beta^{(l-1)}(0) \left[F\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; \frac{t}{T}\right) - 1 \right] \left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \overline{F}_1^{l-1}(t) &= F_1^{l-1}(t) - P(t) + P(0) - a(t)\beta^{(l-1)}(0) \frac{t}{T} \end{aligned}$$

принадлежат пространству $H^{(1+\gamma)/2}(0, T)$, причем

$$\overline{F}_0^{l-1}(t) = \overline{F}_1^{l-1}(t) = O(t^{(1+\gamma)/2})$$

для малых t .

Исключая $\alpha^{(l-1)}(t)$ в системе (22), получим сингулярное уравнение относительно $\tilde{\beta}^{(l-1)}(t)$

$$a(t)\tilde{\beta}^{(l-1)}(t) + \frac{1}{\pi} \int_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{3/2} \frac{\tilde{\beta}^{(l-1)}(\tau)}{\tau-t} d\tau = Q(t), \quad (23)$$

где $Q(t) = \overline{F}_1^{l-1}(t) - \overline{F}_0^{l-1}(t)$.

Сингулярное интегральное уравнение (23) будем рассматривать как уравнение относительно $\beta_0(t) = \tilde{\beta}^{(l-1)}(t) t^{-\frac{3}{2}}$. Найдем решения $\beta_0(t)$, неограниченные при $t = 0$ (допускающие особенность меньше единицы) и ограниченные при $t = T$. Для этого введем кусочно голоморфную функцию (см. [7, 8])

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^T \frac{\beta_0(\tau)}{\tau - z} d\tau.$$

В силу формул Сохоцкого — Племеля уравнение (23) эквивалентно решению краевой задачи Римана

$$\begin{aligned} \Psi^+(t) &= \frac{a(t) - i}{a(t) + i} \Psi^-(t) + \frac{Q(t)}{t^{\frac{3}{2}}(a(t) + i)}, \quad t \in (0, T), \\ \Psi^+(t) &= \Psi^-(t), \quad t \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty), \end{aligned} \quad (24)$$

при дополнительном условии $\Psi(\infty) = 0$. Отметим, что $G(t) = \frac{a(t) - i}{a(t) + i}$ и

$$\ln G(t) = \begin{cases} 2i \arg(a(t) - i) = -2\pi i \theta, & a(t) > 0, \\ 2i \arg(|a(t)| + i) = 2\pi i \theta, & a(t) < 0, \end{cases}$$

где $\theta(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{|a(t)|}$.

На концах контура интегрирования $[0, T]$ имеем представления

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^T \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z} d\tau = -\frac{\ln G(0)}{2\pi i} \ln z + \gamma_0(z),$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^T \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z} d\tau = \frac{\ln G(T)}{2\pi i} \ln(z - T) + \gamma_T(z),$$

где $\gamma_0(z)$, $\gamma_T(z)$ — функции, ограниченные в окрестности концов $[0, T]$.

Всего могут представиться 4 различных случая: 1) $a(0)$ и $a(T)$ обе положительны; 2) $a(0)$ и $a(T)$ обе отрицательны; 3) $a(0)$ положительна, $a(T)$ отрицательна; 4) $a(0)$ отрицательна, $a(T)$ положительна.

В случаях 1 и 2 положим, что функция $a(t)$ не меняет знака при $t \in [0, T]$, а в случаях 3 и 4 $a(t)$ меняет знак лишь в одной точке $t_0 \in [0, T]$.

Введем обозначения $\theta_1 = \theta(0)$, $\theta_2 = \theta(T)$. Тогда в указанном выше классе каноническая функция равна в случае 1 —

$$\chi(z) = z^{-1}(z - T) \exp \left(- \int_0^T \frac{\theta(\tau)}{\tau - z} d\tau \right) = z^{-1+\theta_1}(z - T)^{1-\theta_2} \omega_1(z), \quad \varkappa = 0,$$

в случае 2 —

$$\chi(z) = \exp \left(\int_0^T \frac{\theta(\tau)}{\tau - z} d\tau \right) = z^{-\theta_1}(z - T)^{\theta_2} \omega_2(z), \quad \varkappa = 0,$$

в случае 3 —

$$\begin{aligned}\chi(z) &= z^{-1}(z - t_0) \exp \left(- \int_0^{t_0} \frac{\theta(\tau)}{\tau - z} d\tau + \int_{t_0}^T \frac{\theta(\tau)}{\tau - z} d\tau \right) \\ &= z^{-1+\theta_1}(z - T)^{\theta_2} \omega_3(z), \quad \varkappa = 0,\end{aligned}$$

в случае 4 —

$$\chi(z) = (z - T) \exp \left(\int_0^{t_0} \frac{\theta(\tau)}{\tau - z} d\tau - \int_{t_0}^T \frac{\theta(\tau)}{\tau - z} d\tau \right) = z^{-\theta_1}(z - T)^{1-\theta_2} \omega_4(z), \quad \varkappa = -1.$$

Отметим, что $\omega_k(z) = \exp(\gamma_0(z))$ вблизи $z = 0$ и $\omega_k(z) = \exp(\gamma_T(z))$ вблизи $z = T$.

Согласно общей теории [7, 8] решение (24) имеет вид

$$\Psi(z) = \chi(z)\Phi(z), \quad (25)$$

при этом в случае 4 ($\varkappa = -1$) решение существует при выполнении дополнительного условия

$$\int_0^T \frac{Q(\tau)}{\tau^{\frac{3}{2}}\chi(\tau)} d\tau = 0, \quad (26)$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^T \frac{Q(\tau) d\tau}{\tau^{\frac{3}{2}}\chi(\tau)(\tau - z)}.$$

Тогда решение сингулярного интегрального уравнения (23) имеет вид

$$\tilde{\beta}^{(l-1)}(t) = t^{\frac{3}{2}}(\Psi^+(t) - \Psi^-(t)) = \frac{a(t)Q(t)}{1 + a^2(t)} - \frac{t^{3/2}\chi(t)}{\pi(1 + a^2(t))} \int_0^T \frac{Q(\tau) d\tau}{\tau^{3/2}\chi(\tau)(\tau - t)}, \quad (27)$$

т. е. в случае 1 имеем

$$\tilde{\beta}^{(l-1)}(t) = \frac{a(t)Q(t)}{1 + a^2(t)} + \frac{t^{1/2+\theta_1}(T - t)^{1-\theta_2}\omega_1(t)}{\pi(1 + a^2(t))} \int_0^T \frac{Q(\tau) d\tau}{\tau^{1/2+\theta_1}(T - \tau)^{1-\theta_2}\omega_1(\tau)(\tau - t)}, \quad (28)$$

в случае 2 —

$$\tilde{\beta}^{(l-1)}(t) = \frac{a(t)Q(t)}{1 + a^2(t)} + \frac{t^{3/2-\theta_1}(T - t)^{\theta_2}\omega_2(t)}{\pi(1 + a^2(t))} \int_0^T \frac{Q(\tau) d\tau}{\tau^{3/2-\theta_1}(T - \tau)^{\theta_2}\omega_2(\tau)(\tau - t)}, \quad (29)$$

в случае 3 —

$$\tilde{\beta}^{(l-1)}(t) = \frac{a(t)Q(t)}{1 + a^2(t)} + \frac{t^{1/2+\theta_1}(T - t)^{\theta_2}\omega_3(t)}{\pi(1 + a^2(t))} \int_0^T \frac{Q(\tau) d\tau}{\tau^{1/2+\theta_1}(T - \tau)^{\theta_2}\omega_3(\tau)(\tau - t)}, \quad (30)$$

и в случае 4 —

$$\tilde{\beta}^{(l-1)}(t) = \frac{a(t)Q(t)}{1+a^2(t)} + \frac{t^{3/2-\theta_1}(T-t)^{1-\theta_2}(t-t_0)\omega_4(t)}{\pi(1+a^2(t))} \times \int_0^T \frac{Q(\tau) d\tau}{\tau^{3/2-\theta_1}(T-\tau)^{1-\theta_2}(\tau-t_0)\omega_4(\tau)(\tau-t)}. \quad (31)$$

Так как $Q(t)$ принадлежит пространству $H^{(1+\gamma)/2}(0, T)$, функция $\tilde{\beta}^{(l-1)}(t)$, представленная формулами (28)–(31), удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\frac{1+\gamma}{2}$ во всех точках контура $(0, T)$, отличных от концов. Рассмотрим ее поведение на концах. Согласно формуле поведения интеграла типа Коши на концах контура интегрирования [8, с. 76] легко видеть, что $\tilde{\beta}^{(l-1)}(0) = \tilde{\beta}^{(l-1)}(T) = 0$.

Для дальнейшего исследования поведения их на концах контура воспользуемся леммой Мухелишвили — Терсенова [8, с. 82–86; 2, с. 14–17]. В силу этой леммы в случае 1 получаем, что если $\theta_1 + \theta_2 \geq \frac{1}{2}$, то в формуле (28) функция $\tilde{\beta}^{(l-1)}(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\frac{1+\gamma}{2}$ при $0 < \gamma < 1-2\theta_2$, условию Гёльдера с показателем $1-\theta_2$ при $1-2\theta_2 < \gamma < 1$ и условию Гёльдера с показателем $1-\theta_2-\varepsilon$ при $\gamma = 1-2\theta_2$. Кроме того, если $\theta_1 + \theta_2 < \frac{1}{2}$, то функция $\tilde{\beta}^{(l-1)}(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\frac{1+\gamma}{2}$ при $0 < \gamma < 2\theta_1$, с показателем $\frac{1}{2} + \theta_1$ при $2\theta_1 < \gamma < 1$ и с показателем $\frac{1}{2} + \theta_1 - \varepsilon$ при $\gamma = 2\theta_1$.

В случаях 2 и 3 из неравенства $\theta_2 < \frac{1+\gamma}{2}$ в формулах (29) и (30) функция $\tilde{\beta}^{(l-1)}(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем θ_2 . Если потребуем дополнительно

$$\int_0^T \frac{Q(\tau)}{\tau^{\frac{3}{2}}(T-\tau)\chi(\tau)} d\tau = 0, \quad (32)$$

то функция $\tilde{\beta}^{(l-1)}(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\frac{1+\gamma}{2}$ при всех $0 < \gamma < 1$.

В случае 4 в формуле (31) функция $\tilde{\beta}^{(l-1)}(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\frac{1+\gamma}{2}$ при $0 < \gamma < 1-2\theta_2$, с показателем $1-\theta_2$ при $1-2\theta_2 < \gamma < 1$ и с показателем $1-\theta_2-\varepsilon$ при $\gamma = 1-2\theta_2$.

Таким образом, при выполнении условий (12), (16), (18), (21), имеющих вид

$$\begin{cases} \int_0^T \frac{\beta(\tau)}{\tau^{1/2}} d\tau = -\pi\Phi_0(0), \\ \int_0^T \frac{\beta^{(s)}(\tau) - \beta^{(s)}(0)\frac{T-\tau}{T}}{\tau^{3/2}} d\tau = \frac{4}{\sqrt{T}}\beta^{(s)}(0) - 2\pi\Phi_0^{(s+1)}(0), \\ s = 0, 1, \dots, l-1, \quad \beta^{(k)}(T) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, l-2, \end{cases} \quad (33)$$

получим функцию $\beta(t)$ из пространства Гёльдера, удовлетворяющую условиям

$$(a(t)\beta(t))^{(s)}|_{t=0} = \Phi_1^{(s)}(0), \quad s = 0, 1, \dots, l-1, \quad \beta^{(l-1)}(T) = 0. \quad (34)$$

В формулах (33) значения $\beta^{(s)}(0)$ определяются однозначно из (34), а значения $\beta^{(s)}(t)$ определяются по формуле Тейлора

$$\beta^{(s)}(t) = \sum_{k=s}^{l-2} \frac{\beta^{(k)}(0)}{(k-s)!} t^{k-s} + \frac{1}{(l-2-s)!} \int_0^t (t-\tau)^{l-2-s} \beta^{(l-1)}(\tau) d\tau, \quad s = 0, 1, \dots, l-2.$$

Тогда для выполнения условий $\beta^{(k)}(T) = 0$ при $k = 0, 1, \dots, l-2$ необходимо и достаточно, чтобы

$$0 = \sum_{k=s}^{l-2} \frac{\beta^{(k)}(0)}{(k-s)!} T^{k-s} + \frac{1}{(l-2-s)!} \int_0^T (T-\tau)^{l-2-s} \beta^{(l-1)}(\tau) d\tau, \quad s = 0, 1, \dots, l-2. \quad (35)$$

Подставив найденные значения функций $\beta^{(s)}(t)$ в первые l условий из (33), получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(l-2)!} \int_0^T \tau^{l-3/2} d\tau \int_0^1 (1-\sigma)^{l-2} \beta^{(l-1)}(\sigma\tau) d\sigma = - \sum_{k=0}^{l-2} \frac{\beta^{(k)}(0) T^{k+1/2}}{k!(k-1/2)} - \pi\Phi_0(0), \\ \frac{1}{(l-2-s)!} \int_0^T \tau^{l-s-5/2} d\tau \int_0^1 (1-\sigma)^{l-2-s} \beta^{(l-1)}(\sigma\tau) d\sigma = \\ - \sum_{k=s}^{l-2} \frac{\beta^{(k)}(0) T^{k-s-1/2}}{(k-s)!(k-s-1/2)} - 2\pi\Phi_0^{(s+1)}(0), \quad s = 0, \dots, l-1. \end{array} \right. \quad (36)$$

Отметим, что функцию $\beta^{(l-1)}(t)$ можно найти по формуле (27).

Таким образом, доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$, $p = 2l + \gamma$, $a(t) \in C^{l-1}([0, T])$ и $a(t) > 0$ при $t \in [0, T]$. Тогда при выполнении $2l$ условий (35), (36) существует единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), (3) из пространства

- 1) $H_{x \ t}^{p, p/2}$, если $0 < \gamma < \min\{2\theta_1, 1 - 2\theta_2\}$;
- 2) $H_{x \ t}^{q, q/2}$, $q = 2l + \min\{2\theta_1, 1 - 2\theta_2\}$, если $\min\{2\theta_1, 1 - 2\theta_2\} < \gamma < 1$;
- 3) $H_{x \ t}^{q-\varepsilon, (q-\varepsilon)/2}$, если $\gamma = \min\{2\theta_1, 1 - 2\theta_2\}$, где ε — сколь угодно малая положительная постоянная.

Теорема 2. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$, $p = 2l + \gamma$, $a(t) \in C^{l-1}([0, T])$ и $a(0) < 0$, $a(T) > 0$ и $a(t)$ меняет знак в одной точке. Тогда при выполнении $2l + 1$ условий (26), (35), (36) существует хотя бы одно решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), (3) из пространства

- 1) $H_{x \ t}^{p, p/2}$, если $0 < \gamma < 1 - 2\theta_2$;
- 2) $H_{x \ t}^{q, q/2}$, $q = 2l + 1 - 2\theta_2$, если $1 - 2\theta_2 < \gamma < 1$;
- 3) $H_{x \ t}^{q-\varepsilon, (q-\varepsilon)/2}$, если $\gamma = 1 - 2\theta_2$, где ε — сколь угодно малая положительная постоянная.

Теорема 3. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$, $p = 2l + \gamma$, $a(t) \in C^{l-1}([0, T])$ и $a(t) < 0$ при $t \in [0, T]$ или $a(0) > 0$, $a(T) < 0$ и $a(t)$ меняет знак в одной точке. Тогда при выполнении $2l + 1$ условий (32), (35), (36) существует хотя бы одно решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), (3) из пространства $H_{x \ t}^{p, p/2}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае выполнения $2l$ условий (35) и (36) в теореме 3 решение краевой задачи (1)–(3) принадлежит более широкому пространству $H_{x \ t}^{p-1, (p-1)/2}(Q^\pm)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Полученные решения краевых задач (1)–(3) в теоремах 1–3 зависят от индекса $\varkappa$ краевой задачи Римана (24) при условии, что функция $a(t)$ меняет знак в произвольном количестве точек при $t \in [0, T]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Монахов В. Н., Попов С. В. Контактные задачи математической физики // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН, 2000. С. 62–72.
2. Терсенов С. А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985.
3. Попов С. В. О первой краевой задаче для параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН, 1991. С. 100–113.
4. Туласынов М. С. Первая краевая задача для одного параболического уравнения с меняющимся направлением времени с полной матрицей условий склеивания // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, № 1. С. 57–68.
5. Солонников В. А. О краевых задачах для линейных уравнений общего вида // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1965. Т. 83. С. 3–163.
6. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
7. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963.
8. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

Статья поступила 13 февраля 2014 г.

Попов Сергей Вячеславович
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
madu@ysu.ru

Ткаченко Любовь Юрьевна
Мирнинский политехнический институт
(филиал Северо-Восточного федерального ун-та им. М. К. Аммосова),
ул. Тихонова, 5/1, Мирный 678170
lyubatk@mail.ru

УДК 517.955

ЗАДАЧА О РАВНОВЕСИИ ВЯЗКОУПРУГОГО ТЕЛА С ТОНКИМ ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Т. С. Попова

Аннотация. Рассматривается задача о равновесии двумерного вязкоупругого тела, имеющего тонкое жесткое включение. Дифференциальная постановка задачи содержит интегральное условие, учитывающее воздействие внешних нагрузок на жесткую часть. Приводится эквивалентная вариационная постановка, с помощью которой доказана однозначная разрешимость исходной задачи. Получены дополнительные свойства решений, позволяющие упростить интерпретацию указанного интегрального условия.

Ключевые слова: вязкоупругое тело, тонкое жесткое включение, вариационный метод, квазистатическая задача.

Пусть вязкоупругое двумерное тело занимает в естественном недеформированном состоянии область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей Γ и вектор $u = (u_1, u_2)$ задает перемещения точек этого тела.

Введем соотношения для компонент тензоров малых деформаций и напряжений по формулам

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \sigma_{ij} = a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u), \quad i, j = 1, 2.$$

Здесь и далее предполагается, что по повторяющимся индексам производится суммирование. Коэффициенты a_{ijkl} , $i, j, k, l = 1, 2$, — компоненты тензора модулей упругости, обладающего свойствами симметрии и положительной определенности:

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij},$$

$$a_{ijkl} \xi_{kl} \xi_{ij} \geq c_0 |\xi|^2, \quad \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad c_0 = \text{const} > 0.$$

Для формулировки квазистатической задачи с уравнениями, описывающими вязкоупругую среду, введем следующие обозначения:

$$w(t, x) = u(t, x) + \int_0^t u(\tau, x) d\tau, \quad t \in (0, T). \quad (1)$$

При подстановке (1) в формулы для $\varepsilon_{ij}(w(t, x))$ можно получить соотношения для $\sigma_{ij}(t, x)$ вида

$$\sigma_{ij}(t, x) = a_{ijkl}(x) \varepsilon_{kl}(w(t, x)) = a_{ijkl}(x) \varepsilon_{kl}(u(t, x)) + \int_0^t a_{ijkl}(x) \varepsilon_{kl}(u(\tau, x)) d\tau.$$

Таким образом, в точках $x \in \Omega$ выполнено

$$\sigma_{ij}(t) = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(t) + \int_0^t a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\tau) d\tau, \quad t \in (0, T).$$

Полученные уравнения соответствуют закону, характеризующему вязкоупругое состояние тела:

$$\dot{\sigma} = A\dot{\varepsilon} + A\varepsilon,$$

где $\dot{\sigma}$ обозначает дифференцирование по временной переменной.

Соотношения (1) будем использовать и в уравнениях равновесия:

$$-\frac{\partial \sigma_{ij}(t, x)}{\partial x_j} = f_i(t, x), \quad i = 1, 2,$$

где $f = (f_1, f_2)$ — вектор, задающий внешние нагрузки, а $\sigma_{ij}(t, x)$ находится из формул, указанных выше.

Следовательно, в отличие от уравнений равновесия, используемых вместе с законом Гука (упругое состояние), в рассматриваемой задаче величины компонент тензоров деформаций и напряжений не могут быть вычислены локально по t , а зависят от полной истории нагружения.

Квазистационарные краевые задачи, в уравнениях которых использованы соотношения, аналогичные (1), исследованы в работах [1–4].

Рассматриваемое вязкоупругое тело имеет тонкое жесткое включение, форма которого задана кривой $\gamma \subset \Omega$. Кривая γ гладкая, незамкнутая, без самопересечений. Пусть $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ — единичный вектор нормали к γ и $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$.

Пусть кривую γ можно продолжить до пересечения с Γ таким образом, что область Ω_γ разбита на две подобласти Ω_1 и Ω_2 с липшицевыми границами и при этом $\text{mes}(\Gamma \cap \partial\Omega_i) \neq 0$, $i = 1, 2$.

Понятие «жесткое включение» в рамках данной модели описывается следующим образом. Введем так называемое пространство жестких инфинитезимальных перемещений $R(\gamma)$ следующего вида [5]:

$$R(\gamma) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2) \mid \rho(x) = Bx + C, \quad x \in \gamma\},$$

где $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$, $C = (c^1, c^2)$, $b, c^1, c^2 = \text{const}$. Также введем пространство

$$R_\gamma = \{\rho \in L^2(0, T; R(\gamma)) \mid \rho(t, x) = B(t)x + C(t) \text{ на } \gamma \times (0, T)\},$$

где $B(t)$ — кососимметрическая матрица, элементами которой являются функции, не зависящие от x : $B(t) = \begin{pmatrix} 0 & b(t) \\ -b(t) & 0 \end{pmatrix}$ и $C(t) = (c^1(t), c^2(t))$.

Будем говорить, что вязкоупругое тело *содержит тонкое жесткое включение*, если функции u на $\gamma \times (0, T)$ совпадают с некоторым элементом пространства R_γ :

$$u = \rho^0 \quad \text{на } \gamma \times (0, T), \quad \rho^0 \in R_\gamma.$$

Рассмотрим дифференциальную постановку задачи о равновесии двумерного вязкоупругого тела с тонким жестким включением без отслоения.

В цилиндре $Q = \Omega \times (0, T)$ найти функции u такие, что $u = \rho^0$ на $\gamma \times (0, T)$, $\rho^0 \in R_\gamma$, и одновременно в цилиндре $Q_\gamma = \Omega_\gamma \times (0, T)$ найти функции σ_{ij} , $i, j = 1, 2$, для которых выполняются условия:

$$-\frac{\partial \sigma_{ij}(t, x)}{\partial x_j} = f_i(t, x), \quad i = 1, 2, \quad \text{в } Q_\gamma, \quad (2)$$

$$\sigma_{ij}(t, x) = a_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl}(w(t, x)), \quad i, j = 1, 2, \quad \text{в } Q, \quad (3)$$

$$u(t, x) = 0 \quad \text{на } \Gamma \times (0, T), \quad (4)$$

$$\int_{\gamma} [\sigma_{ij}(t, x)\nu_j]\bar{\rho}_i(x) d\gamma = 0, \quad \bar{\rho} \in R(\gamma), \quad \text{при п. в. } t \in (0, T). \quad (5)$$

Уравнения (2) суть уравнения равновесия при заданных внешних нагрузках f , соотношения (3) — уравнения, описывающие вязкоупругое состояние. В данных уравнениях компоненты тензоров σ и ε зависят от w , т. е. содержат интегралы вида $\int_0^t u(\tau, x) d\tau$. Краевое условие (4) задает закрепление тела на границе. Условие (5) учитывает вектор поверхностных сил на кривой жесткого включения.

Исследование разрешимости задач о жестких включениях в упругих телах, а также свойств их решений проводились в [5–10].

Рассмотрим билинейную форму вида

$$b(u, \bar{u}) = \int_{\Omega} a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u)\varepsilon_{ij}(\bar{u}) d\Omega$$

и функциональное пространство $H_{\gamma} = \{v = (v_1, v_2) \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \mid v = 0 \text{ на } \Gamma \times (0, T), v = \rho \text{ на } \gamma \times (0, T), \rho \in R_{\gamma}\}$.

Обозначим через V пространство, сопряженное к H_{γ} . Введем также линейный оператор $\Lambda : H_{\gamma} \rightarrow V$ такой, что

$$(\Lambda u, \bar{u}) = \int_0^T b(w, \bar{u}) dt, \quad \bar{u} \in H_{\gamma}.$$

Отметим, что в принятых обозначениях

$$b(w, \bar{u}) = b\left(u + \int_0^t u d\tau, \bar{u}\right) = \int_{\Omega} a_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl}\left(u(t, x) + \int_0^t u(\tau, x) d\tau\right)\varepsilon_{ij}(\bar{u}(t, x)) d\Omega.$$

Теорема 1. Пусть $f(t, x) \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$, $a_{ijkl}(x) \in L^{\infty}(\Omega)$, $i, j, k, l = 1, 2$. Тогда задача (2)–(5) имеет единственное решение $u(t, x) \in H_{\gamma}$, $\sigma_{ij}(t, x) \in L^2(Q_{\gamma})$ такое, что $u_t(t, x) \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$.

Для доказательства теоремы сначала докажем лемму о существовании единственного решения вариационной задачи с уравнением Эйлера для оператора Λ . Далее покажем, что указанная вариационная задача является эквивалентной формулировкой задачи (2)–(5). Тем самым будет доказана однозначная разрешимость поставленной краевой задачи. Отметим, что в [11–16] можно найти описание вариационных методов и их применение в теории упругости и вязкоупругости.

Лемма 1. Существует единственное решение $u(t, x)$ вариационной задачи

$$u \in H_{\gamma}, \quad (\Lambda u, v) = \int_0^T \int_{\Omega} f v d\Omega dt, \quad v \in H_{\gamma}. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что в силу неравенства Корна [17]

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega \geq c_1 \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2, \quad v \in H_0^1(\Omega),$$

с постоянной c_1 , не зависящей от v , имеем

$$b(u, u) \geq c_2 \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2, \quad u \in H_0^1(\Omega). \quad (7)$$

Вычислим

$$\begin{aligned} (\Lambda u, u) &= \int_0^T b(w, u) dt = \int_0^T b\left(u + \int_0^t u d\tau, u\right) dt \\ &= \int_0^T b(u, u) dt + \frac{1}{2} b\left(\int_0^T u dt, \int_0^T u dt\right). \end{aligned}$$

Тогда ввиду (7) получим

$$(\Lambda u, u) \geq \|u\|_{H_\gamma}^2. \quad (8)$$

Следовательно,

$$\frac{(\Lambda u, u)}{\|u\|_{H_\gamma}} \rightarrow +\infty, \quad \|u\|_{H_\gamma} \rightarrow +\infty,$$

т. е. Λ — коэрцитивный оператор. Учитывая его монотонность и непрерывность, можно сделать вывод, что Λ псевдомонотонен. Отсюда следует [16], что решение задачи (6) существует. В силу строгой монотонности оператора решение единственно. Лемма 1 доказана.

Далее выведем дополнительное свойство решений задачи (6), а именно существование производной $u_t(t, x)$ в Ω . Это свойство позволит рассматривать задачу (6) на сечениях цилиндра Q при фиксированном значении $t \in (0, T)$. При этом интегрирование по τ от 0 до текущего момента времени t сохраняется и в формулировке на сечениях.

Лемма 2. Пусть $f \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$. Тогда существует производная $u_t \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ решения задачи (6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем уравнение (6) в виде

$$\int_0^T \int_{\Omega} a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(w(t)) \varepsilon_{ij}(v(t)) d\Omega dt = \int_0^T \int_{\Omega} f(t) v(t) d\Omega dt, \quad v \in H_\gamma. \quad (9)$$

При доказательстве данной леммы для удобства в формулах не указана зависимость функций от x .

Обозначим

$$H_\gamma^{1,0}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ на } \Gamma, v = \rho \text{ на } \gamma, \rho \in R(\gamma)\}.$$

Пусть $\alpha > 0$. Рассмотрим следующую функцию:

$$v(\theta) = \begin{cases} \bar{v} - u(t), & \theta \in (t - \alpha, t + \alpha), \\ 0, & \theta \notin (t - \alpha, t + \alpha), \end{cases}$$

где $\bar{v} \in H_\gamma^{1,0}(\Omega)$ — некоторый фиксированный элемент. Подставим $v(\theta)$ в (9), разделим полученное равенство на 2α и получим

$$\frac{1}{2\alpha} \int_{t-\alpha}^{t+\alpha} \int_{\Omega} a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(w(t)) \varepsilon_{ij}(\bar{v} - u(t)) d\Omega dt = \frac{1}{2\alpha} \int_{t-\alpha}^{t+\alpha} \int_{\Omega} f(t)(\bar{v} - u(t)) d\Omega dt.$$

Отсюда при $\alpha \rightarrow 0$ имеем

$$\int_{\Omega} a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(w(t)) \varepsilon_{ij}(\bar{v} - u(t)) d\Omega = \int_{\Omega} f(t)(\bar{v} - u(t)) d\Omega \quad \text{при п.в. } t \in (0, T). \quad (10)$$

Таким образом,

$$b(w(t), \bar{v} - u(t)) = \int_{\Omega} f(t)(\bar{v} - u(t)) d\Omega. \quad (11)$$

Пусть $\bar{v} = u(t+h)$, тогда

$$b(w(t), u(t+h) - u(t)) = \int_{\Omega} f(t)(u(t+h) - u(t)) d\Omega. \quad (12)$$

Теперь запишем (11) в точке $t+h$, а в качестве $\bar{v}$ возьмем $u(t)$. В результате получим

$$b(w(t+h), u(t) - u(t+h)) = \int_{\Omega} f(t+h)(u(t) - u(t+h)) d\Omega. \quad (13)$$

Введем обозначения:

$$d_h v(t) = \frac{v(t+h) - v(t)}{h}, \quad d_h^\tau v(t) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} v(\tau) d\tau, \quad h > 0.$$

Сложив (12) и (13), можем записать

$$b(d_h u(t) + d_h^\tau u(t), d_h u(t)) = \int_{\Omega} d_h f(t) d_h u(t) d\Omega.$$

Отсюда

$$b(d_h u(t), d_h u(t)) = \int_{\Omega} d_h f(t) d_h u(t) d\Omega - b(d_h^\tau u(t), d_h u(t)). \quad (14)$$

Отметим, что

$$b(d_h u(t), d_h u(t)) \geq c_3 \|d_h u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \quad (15)$$

Значит, из (14) следует, что

$$\begin{aligned} c_3 \|d_h u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq \frac{1}{\lambda} \|d_h f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|d_h u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} \|d_h^\tau u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \lambda \|d_h u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

При достаточно малых $\lambda > 0$ существует постоянная $c_4 > 0$ такая, что

$$\|d_h u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq c_4 (\|d_h f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|d_h^\tau u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2). \quad (16)$$

Проинтегрируем (16) по t от 0 до $T - h$:

$$\int_0^{T-h} \|d_h u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \leq c_4 \left(\int_0^{T-h} \|d_h f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^{T-h} \|d_h^\tau u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \right). \quad (17)$$

Заметим, что для любых гладких функций $v(t, x)$ выполняется

$$\int_0^{T-h} \|d_h^\tau v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq \int_0^T \|v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \quad (18)$$

Тогда из (17) с учетом (18) получим

$$\int_0^{T-h} \|d_h^\tau u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \leq c_4 \left(\int_0^{T-h} \|d_h f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \right). \quad (19)$$

Поскольку $f_t(t) \in L^2(Q)$, (18) можно записать для $v = f_t$:

$$\int_0^{T-h} \|d_h^\tau f_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq \int_0^T \|f_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{T-h} \|d_h f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt &= \int_0^{T-h} \left\| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &= \int_0^{T-h} \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f_\tau(\tau) d\tau \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt = \int_0^{T-h} \|d_h^\tau f_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq \int_0^T \|f_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \end{aligned}$$

Следовательно, из (19) имеем

$$\int_0^{T-h} \|d_h u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \leq c_4 \left(\int_0^T \|f_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \right).$$

Пусть h_0 достаточно мало, но $h_0 \geq h$. Тогда

$$\int_0^{T-h_0} \|d_h u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \leq c_4 \left(\int_0^T \|f_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \right).$$

Переходя к пределу $h \rightarrow 0$, имеем

$$\int_0^{T-h_0} \|u_t(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \leq c_4 \left(\int_0^T \|f_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \right).$$

Из произвольности $h_0 \geq 0$ следует, что

$$\|u_t(t)\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 \leq c_4 (\|f_t(t)\|_{L^2(Q)}^2 + \|u(t)\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2). \quad (20)$$

Таким образом, производная $u_t(t, x)$ существует, более того, взяв в (9) $v = u$, получим

$$\int_0^T \int_{\Omega} a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(w(t)) \varepsilon_{ij}(u(t)) d\Omega dt = \int_0^T \int_{\Omega} f(t) u(t) d\Omega dt.$$

С учетом (7) имеем

$$\|u(t)\|_{L^2(0,T;H_{\gamma}^{1,0}(\Omega))}^2 \leq \frac{1}{\lambda} \|f(t)\|_{L^2(Q)}^2 + \lambda \|u(t)\|_{L^2(0,T;H_{\gamma}^{1,0}(\Omega))}^2$$

или при малых $\lambda > 0$

$$\|u(t)\|_{L^2(0,T;H_{\gamma}^{1,0}(\Omega))}^2 \leq c_5 \|f(t)\|_{L^2(Q)}^2.$$

Тогда из (20) следует, что

$$\|u_t(t)\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 \leq c(\|f_t(t)\|_{L^2(Q)}^2 + \|f(t)\|_{L^2(Q)}^2).$$

Отсюда вытекает утверждение леммы. Лемма 2 доказана.

Для завершения доказательства теоремы покажем, что задача (2)–(5) эквивалентна задаче (6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Согласно лемме 2 можем рассматривать задачу (6) при фиксированном $t \in (0, T)$:

$$b(w, v) = \int_{\Omega} f v d\Omega,$$

где $w = w(t, x)$, $v = v(t, x)$, $f = f(t, x)$. Запишем последнее уравнение в виде

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(v) d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega. \quad (21)$$

Здесь, как и ранее, σ_{ij} находится по формулам (1), т. е. содержит интегрирование от 0 до t . Подставим $v \in C_0^\infty(\Omega)$, $v = \rho$ на γ , $\rho \in R(\gamma)$ в (21) и проинтегрируем по частям. Тогда при данном $t \in (0, T)$ выполнены уравнения

$$-\frac{\partial \sigma_{ij}(t, x)}{\partial x_j} = f_i(t, x)$$

в смысле распределений.

Возьмем $v \in H_{\gamma}^{1,0}(\Omega)$. Из (21) интегрированием по частям получим

$$\int_{\gamma} [\sigma_{ij} \nu_j] v_i d\gamma = 0, \quad v \in H_{\gamma}^{1,0}(\Omega).$$

т. е. $v = \bar{\rho}$ на γ , $\bar{\rho}(x) \in R(\gamma)$ при фиксированном $t \in (0, T)$. Можем записать

$$\int_{\gamma} [\sigma_{ij}(t, x) \nu_j] \bar{\rho}_i(x) d\gamma = 0, \quad \bar{\rho} \in R(\gamma), \quad \text{при п.в. } t \in (0, T).$$

Обратно, умножая уравнение (2) на $v \in H_{\gamma}^{1,0}(\Omega)$ и интегрируя по частям, с учетом (5) получим уравнение (6).

Таким образом, при достаточной гладкости решений задачи (2)–(5) и (6) эквивалентны. Покажем, что условию (5) можно придать точный смысл, несмотря на то, что функции $\sigma_{ij}\nu_j$ не определяются на γ в поточечном смысле.

Продолжив кривую γ до пересечения с Γ , как это указано в начале работы, обозначим продолженную кривую через Σ , тогда $\gamma \subset \Sigma$.

Будем использовать формулы Грина [5, 18]

$$-\left\langle \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \bar{u}_i \right\rangle_D = \langle \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}(\bar{u}) \rangle_D - \langle \sigma_{ij} n_j, \bar{u}_i \rangle_{\frac{1}{2}, \partial D}, \quad (22)$$

справедливые для любых функций $\sigma_{ij}(x)$, $\frac{\partial \sigma_{ij}(x)}{\partial x_j} \in L^2(D)$, $i, j = 1, 2$, $\bar{u} \in H^1(D)$, где D — область с липшицевой границей, $n = (n_1, n_2)$ — единичный вектор внешней нормали к ∂D , скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\frac{1}{2}, \partial D}$ обозначают двойственность пространств $H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ и его сопряженного $H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$.

Отметим, что формула (22) справедлива в каждом из случаев $D = \Omega_i$, $i = 1, 2$, при внешней нормали $n^i = (n_1^i, n_2^i)$ к $\partial \Omega_i$.

Введем в рассмотрение пространство $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$ с нормой

$$\|v\|_{\frac{1}{2}, \Sigma}^{00} = \left(\|v\|_{\frac{1}{2}, \Sigma}^2 + \int_{\Sigma} \frac{v^2}{r} d\Sigma \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $\|v\|_{\frac{1}{2}, \Sigma}^2$ — норма в пространстве $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$, $r(x) = \text{dist}(x, \partial \Sigma)$.

Пусть v определена на Σ . Обозначим через $\bar{v}$ продолжение нулем функции v на всю $\partial \Omega_i$:

$$\bar{v} = \begin{cases} v & \text{на } \Sigma, \\ 0 & \text{на } \partial \Omega_i \setminus \Sigma. \end{cases}$$

Тогда $\bar{v} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial \Omega_i)$ в том и только том случае, когда $v \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$.

Зафиксируем $t \in (0, T)$. Из (21) с помощью (22) получим

$$-\left\langle \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, v_i \right\rangle_{\Omega_1} + \langle \sigma_{ij} n_j^1, v_i \rangle_{\frac{1}{2}, \partial \Omega_1} - \left\langle \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, v_i \right\rangle_{\Omega_2} + \langle \sigma_{ij} n_j^2, v_i \rangle_{\frac{1}{2}, \partial \Omega_2} = \langle f, v \rangle_{\Omega}.$$

С учетом (2) отсюда выводим

$$\langle \sigma_{ij} n_j^1, v_i \rangle_{\frac{1}{2}, \partial \Omega_1} + \langle \sigma_{ij} n_j^2, v_i \rangle_{\frac{1}{2}, \partial \Omega_2} = 0.$$

Обозначив через $H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$ пространство, сопряженное к $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$, полученное соотношение можно записать в виде

$$\langle [\sigma_{ij} \nu_j], v_i \rangle_{\frac{1}{2}, \Sigma}^{00} = 0, \quad v \in H_{\gamma}^{1,0}(\Omega), \quad (23)$$

где скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\frac{1}{2}, \Sigma}^{00}$ обозначают двойственность пространств $H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$ и $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$.

В результате получили, что условие (5) выполнено при п. в. $t \in (0, T)$ в смысле (23).

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Khudnev A. M.* On equilibrium problem for a plate having a crack under the creep condition // *Control Cybernetics*. 1996. V. 25, N 5. P. 1015–1030.
2. *Khudnev A. M., Kovtunen V. A.* Analysis of cracks in solids. Southampton; Boston: WIT Press, 2000.
3. *Popova T. S.* The equilibrium problem for a linear viscoelastic body with a crack // *Мат. заметки ЯГУ*. 1998. Т. 5, № 2. С. 118–134.
4. *Попова Т. С.* Метод фиктивных областей в задаче Синьорини для вязкоупругих тел // *Мат. заметки ЯГУ*. 2006. Т. 13, № 1. С. 105–120.
5. *Хлуднев А. М.* Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
6. *Khudnev A. M., Leugering G.* On elastic bodies with thin rigid inclusions and cracks // *Math. Meth. Appl. Sci.* 2010. V. 33, N 16. P. 1955–1967.
7. *Хлуднев А. М.* Задача о трещине на границе жесткого включения в упругой пластине // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2010. № 5. С. 98–110.
В [7] прошу указать номер тома!!!
8. *Lazarev N. P.* An equilibrium problem for the Timoshenko-type plate containing a crack on the boundary of a rigid inclusion // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.* 2013. V. 6, N 1. P. 53–62.
9. *Неустроева Н. В.* Жесткое включение в контактной задаче для упругих пластин // *Сиб. журн. индустр. математики*. 2009. Т. 12, № 4. С. 92–105.
10. *Неустроева Н. В.* Односторонний контакт упругих пластин с жестким включением // *Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика*. 2009. Т. 9, № 4. С. 51–64.
11. *Байocchi К., Капело А.* Вариационные и квазивариационные неравенства. М.: Наука, 1988.
12. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987.
13. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
14. *Киндерлерер Д., Стампакия Г.* Введение в неравенства и их приложения. М.: Мир, 1983.
15. *Кравчук А. С.* Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. М.: Изд-во Моск. гос. академии приборостроения и информатики, 1997.
16. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
17. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.
18. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.

Статья поступила 12 марта 2014 г.

Попова Татьяна Семеновна
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики, кафедра математического анализа,
ул. Белинского, 58, Якутск 677000, Республика Саха (Якутия)
ptsokt@mail.ru

ВИДОИЗМЕНЕННАЯ КРАЕВАЯ
ЗАДАЧА ДЛЯ СИЛЬНО
ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. Р. Спиридонова

Аннотация. Показано, что для сильно вырождающихся неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка вида

$$\sum_{k=0}^{2p} \alpha_k(t) D_t^{2p-k} u(x, t) - Au(x, t) = f(x, t)$$

корректной будет задача с освобождением части границы от несения краевых условий.

Ключевые слова: краевая задача, неклассические дифференциальные уравнения, вырождающиеся уравнения, эллиптический оператор.

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты бесконечно дифференцируемой) границей Γ , Q — цилиндр $\Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$, $a^{ij}(x)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $a_0(x)$, $\alpha^k(t)$, $k = 0, 1, \dots, 2p$, $f(x, t)$ — заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0, T]$, $p > 1$ — заданное целое число. Обозначим через D_t^l производную $\partial^l / \partial t^l$, и пусть A, L — дифференциальные операторы, действия которых на заданной функции $v(x, t)$ определяются равенствами

$$Av = \frac{\partial}{\partial x_i} (a^{ij}(x) v_{x_j}) + a_0(x) v$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование в пределах от 1 до n),

$$Lv = \sum_{k=0}^{2p} \alpha_k(t) D_t^{2p-k} v - Av,$$

при этом оператор A в дальнейшем будет предполагаться эллиптическим на множестве $\bar{\Omega}$.

Рассмотрим в Q уравнение

$$Lu = f(x, t) \tag{1}$$

относительно неизвестной функции $u(x, t)$. Для таких уравнений в [1–3] предложены постановки краевых задач и доказаны теоремы существования и единственности обобщенных и регулярных решений. Основным условием при этом является

$$(-1)^{p-1} [2\alpha_{2p-1}(t) + (1-2p)\alpha'_{2p}(t)] \geq \delta_0 > 0 \quad \text{при } t \in [0, T].$$

В настоящей работе рассмотрена ситуация, когда это условие не выполняется, и показано, что в некоторых случаях постановка из [1–3] должна меняться, а именно, от части граничных условий необходимо будет отказаться.

Проведем все рассуждения и построения для случая $p = 2$.

Рассмотрим уравнение

$$Lu = \alpha_0(t)D_t^4 u + \alpha_1(t)D_t^3 u + \alpha_2(t)D_t^2 u + \alpha_3(t)D_t u - Au = f(x, t). \quad (2)$$

Краевая задача I. В области Q найти решение $u(x, t)$ уравнения (2), удовлетворяющее условиям

$$u(x, t)|_S = 0, \quad (3)$$

$$D_t^k u|_{t=0} = 0, \quad k = 0, 1, 2. \quad (4)$$

Краевая задача II. В области Q найти решение $u(x, t)$ уравнения (2) удовлетворяющее условиям (3), (4), а также условию

$$D_t u|_{t=T} = 0. \quad (5)$$

Определим анизотропное пространство Соболева

$$V = \{v(x, t) : v(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega)), D_t^k v \in L_2(Q), k = \overline{1, 4}\}.$$

Введем обозначения:

$$h_1(t) = \frac{3}{2}\alpha_0'(t) - \alpha_1(t), \quad h_2(t) = -\frac{1}{2}\alpha_0'''(t) + \frac{1}{2}\alpha_1''(t) - \frac{1}{2}\alpha_2'(t) + \alpha_3(t),$$

$$h_3(t) = \frac{3}{2}\alpha_0''(t) - \alpha_1'(t) + \frac{1}{2}\alpha_2(t), \quad h_T = \alpha_0''(T) - \alpha_1'(T) + \alpha_2(T),$$

$$\tilde{h}_1(t) = h_1(t)(\lambda - t) - \frac{3}{2}\alpha_0(t), \quad \tilde{h}_2(t) = h_2(t)(\lambda - t) + h_3(t).$$

Лемма 1. Пусть $u(x, t)$ — решение из пространства V задачи I, и пусть выполняются условия

$$f(x, t), f_t(x, t) \in L_2(Q), \quad (6)$$

$$a^{ij}(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad a_0(x) \in C(\overline{\Omega}), \quad (7)$$

$$a^{ij}(x) = a^{ji}(x), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq k_0|\xi|^2 \text{ при } x \in \overline{\Omega}, \quad k_0 > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (8)$$

$$a_0(x) \leq -\overline{a}_0 < 0, \quad (9)$$

$$\alpha_0(t), \alpha_3(t) \in C^3([0, T]), \quad \alpha_1(t), \alpha_2(t) \in C^2([0, T]), \quad (10)$$

$$\alpha_0(t) < 0 \text{ при } t \in [0, T], \quad (11)$$

$$\alpha_0(T) = \alpha_0'(T) = \alpha_1(T) = 0, \quad h_T \geq 0, \quad (12)$$

$$h_1(t) \geq 0, \quad h_2(t) \geq 0, \quad h_3(t) \geq 0, \quad t \in [0, T]. \quad (13)$$

Тогда имеют место оценки

$$\int_Q \tilde{h}_1(t)(D_t^2 u)^2 dxdt + \int_Q \tilde{h}_2(t)(D_t u)^2 dxdt + \int_Q u^2 dxdt + \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i}^2 dxdt \leq M_1, \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^n \int_Q [\tilde{h}_1(t)(D_t^2 u_{x_i})^2 + \tilde{h}_2(t)(D_t u_{x_i})^2] dxdt + \int_Q (Au)^2 dxdt \leq M_2, \quad (15)$$

где постоянные M_1, M_2 определяются функциями $f(x, t)$, $\alpha_0(t) - \alpha_3(t)$, $a^{ij}(x)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $a_0(x)$, а также числом T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для получения первой оценки умножим уравнение (2) на $(\lambda - t)D_t u$, $\lambda > T$, и проинтегрируем по цилиндру Q . Получим

$$\begin{aligned} \int_Q Lu(\lambda - t)D_t u \, dxdt &= \int_Q \alpha_0(t)D_t^4 u(\lambda - t)D_t u \, dxdt + \int_Q \alpha_1(t)D_t^3 u(\lambda - t)D_t u \, dxdt \\ &+ \int_Q \alpha_2(t)D_t^2 u(\lambda - t)D_t u \, dxdt + \int_Q \alpha_3(t)D_t u(\lambda - t)D_t u \, dxdt \\ &+ \int_Q Au(\lambda - t)D_t u \, dxdt = \int_Q f(\lambda - t)D_t u \, dxdt. \end{aligned}$$

Проинтегрировав, с учетом условий (3), (4) и (12) придем к равенству

$$\begin{aligned} &\int_Q \left[\left(\frac{3}{2}\alpha'_0(t) - \alpha_1(t) \right) (\lambda - t) - \frac{3}{2}\alpha_0(t) \right] (D_t^2 u)^2 \, dxdt \\ &+ \int_Q \left[\left(-\frac{1}{2}\alpha_0'''(t) + \frac{1}{2}\alpha_1''(t) - \frac{1}{2}\alpha_2'(t) + \alpha_3(t) \right) (\lambda - t) + \frac{3}{2}\alpha_0''(t) - \alpha_1'(t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\alpha_2(t) \right] (D_t u)^2 \, dxdt - \frac{1}{2} \int_Q a_0(x)u^2 \, dxdt \\ &+ \frac{1}{2} \int_Q a^{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j} \, dxdt + \frac{\lambda - T}{2} \int_{\Omega} [\alpha_0''(T) - \alpha_1'(T) + \alpha_2(T)] (D_t u(x, T))^2 \, dx \\ &+ (\lambda - T) \int_{\Omega} a^{ij}(x)u_{x_j}(x, T)u_{x_i}(x, T) \, dx - \frac{\lambda - T}{2} \int_{\Omega} a_0(x)(u(x, T))^2 \, dx \\ &= \int_Q f(\lambda - t)D_t u \, dxdt. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Юнга и используя введенные обозначения, получим

$$\begin{aligned} &\int_Q \left[h_1(t)(\lambda - t) - \frac{3}{2}\alpha_0(t) \right] (D_t^2 u)^2 \, dxdt + \int_Q [h_2(t)(\lambda - t) + h_3(t)] (D_t u)^2 \, dxdt \\ &- \frac{1}{2} \int_Q a_0(x)u^2 \, dxdt + \frac{1}{2} \int_Q a^{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j} \, dxdt + \frac{(\lambda - T)h_T}{2} \int_{\Omega} (D_t u(x, T))^2 \, dx \\ &+ (\lambda - T) \int_{\Omega} a^{ij}(x)u_{x_j}(x, T)u_{x_i}(x, T) \, dx - \frac{\lambda - T}{2} \int_{\Omega} a_0(x)u^2(x, T) \, dx \\ &\leq \frac{\tilde{\delta}_1^2}{2} \int_Q u^2 \, dxdt + \frac{1}{2\tilde{\delta}_1^2} \int_Q (\lambda - t)^2 (D_t f)^2 \, dxdt + \frac{\tilde{\delta}_2^2}{2} \int_Q u^2 \, dxdt + \frac{1}{2\tilde{\delta}_2^2} \int_Q f^2 \, dxdt \\ &\quad + \frac{(\lambda - T)\tilde{\delta}_3^2}{2} \int_{\Omega} u^2(x, T) \, dx + \frac{1}{2\tilde{\delta}_3^2} \int_{\Omega} f^2(x, T) \, dx, \end{aligned}$$

где $\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2, \tilde{\delta}_3$ — произвольные положительные числа. Подбирая эти числа малыми и используя (6)–(13), приходим к искомой оценке (14).

Чтобы получить вторую оценку, умножим уравнение (2) на $-(\lambda - t)Au_t$, $\lambda > T$, и проинтегрируем по цилиндру Q :

$$\begin{aligned} - \int_Q Lu(\lambda - t)Au_t dxdt &= - \int_Q \alpha_0(t)D_t^4 u(\lambda - t)Au_t dxdt \\ &\quad - \int_Q \alpha_1(t)D_t^3 u(\lambda - t)Au_t dxdt - \int_Q \alpha_2(t)D_t^2 u(\lambda - t)Au_t dxdt \\ &\quad - \int_Q \alpha_3(t)D_t u(\lambda - t)Au_t dxdt + \int_Q Au(\lambda - t)Au_t dxdt = - \int_Q f(\lambda - t)Au_t dxdt. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, учитывая (3), (4) и (12), применяя неравенство Юнга и используя введенные обозначения, придем к неравенству

$$\begin{aligned} &\int_Q \left[h_1(t)(\lambda - t) - \frac{3}{2}\alpha_0(t) \right] (D_t^2 u_{x_i})^2 dxdt + \int_Q [h_2(t)(\lambda - t) + h_3(t)] (D_t u_{x_i})^2 dxdt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_Q (Au)^2 dxdt + \frac{(\lambda - T)}{2} \int_{\partial Q} (Au(x, T))^2 ds \\ &\leq \frac{\tilde{\delta}_4^2}{2} \int_Q (Au)^2 dxdt + \frac{1}{2\tilde{\delta}_4^2} \int_Q (\lambda - t)^2 f_t^2 dxdt + \frac{\tilde{\delta}_5^2}{2} \int_Q (Au)^2 dxdt + \frac{1}{2\tilde{\delta}_5^2} \int_Q f^2 dxdt \\ &\quad + \frac{(\lambda - T)\tilde{\delta}_6^2}{2} \int_{\partial Q} (Au(x, T))^2 ds + \frac{1}{2\tilde{\delta}_6^2} \int_{\partial Q} f^2(x, T) ds, \end{aligned}$$

где $\tilde{\delta}_4, \tilde{\delta}_5, \tilde{\delta}_6$ — произвольные положительные числа. Подбирая эти числа малыми, получим вторую оценку (15).

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $u(x, t)$ — решение из пространства V задачи I, и пусть выполняются все условия леммы 1, а также условия

$$\begin{aligned} \alpha_3^4(t) &\leq K_1 \alpha_2^2(t), \quad \alpha_2^4(t) \leq K_2 \alpha_3^2(t) \alpha_1^2(t), \quad (\alpha_2'(t))^2 \leq K_3 \alpha_3^2(t), \\ \alpha_1^4(t) &\leq K_4 \alpha_2^2(t) \alpha_0^2(t), \quad (\alpha_1'(t))^2 \leq K_5 \alpha_2^2(t), \quad K_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 5. \end{aligned} \quad (16)$$

Тогда имеет место оценка

$$\int_Q \alpha_0^2(t) (D_t^4 u)^2 dxdt \leq M_3, \quad (17)$$

где постоянная M_3 определяется лишь функцией $f(x, t)$ и числами K_1 – K_5 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножив уравнение (2) на $\alpha_0(t)D_t^4 u$, получим

$$\begin{aligned} \int_Q \alpha_0^2(t) [D_t^4 u]^2 dxdt &= \int_Q f(x, t) \alpha_0(t) D_t^4 u dxdt + \int_Q Au \alpha_0(t) D_t^4 u dxdt \\ &\quad - \int_Q \alpha_1(t) D_t^3 u \alpha_0(t) D_t^4 u dxdt - \int_Q \alpha_2(t) D_t^2 u \alpha_0(t) D_t^4 u dxdt \\ &\quad - \int_Q \alpha_3(t) D_t u \alpha_0(t) D_t^4 u dxdt. \end{aligned}$$

Оценим слагаемые в правой части с помощью неравенства Юнга:

$$\begin{aligned}
\int_Q \alpha_0^2(t) [D_t^4 u]^2 dx dt &\leq \frac{\delta_0^2}{2} \int_Q \alpha_0^2(t) [D_t^4 u]^2 dx dt + \frac{1}{2\delta_0^2} \int_Q f^2(x, t) dx dt \\
&+ \frac{\delta_0^2}{2} \int_Q \alpha_0^2(t) [D_t^4 u]^2 dx dt + \frac{1}{2\delta_0^2} \int_Q [Au]^2 dx dt + \frac{\delta_1^2}{2} \int_Q \alpha_0^2(t) [D_t^4 u]^2 dx dt \\
&+ \frac{1}{2\delta_1^2} \int_Q \alpha_1^2(t) [D_t^3 u]^2 dx dt + \frac{\delta_2^2}{2} \int_Q \alpha_0^2(t) [D_t^4 u]^2 dx dt + \frac{1}{2\delta_2^2} \int_Q \alpha_2^2(t) [D_t^2 u]^2 dx dt \\
&+ \frac{\delta_3^2}{2} \int_Q \alpha_0^2(t) [D_t^4 u]^2 dx dt + \frac{1}{2\delta_3^2} \int_Q \alpha_3^2(t) [D_t u]^2 dx dt, \\
\int_Q \alpha_0^2(t) [D_t^4 u]^2 dx dt &\leq \delta_0^2 \int_Q \alpha_0^2(t) [D_t^4 u]^2 dx dt + \frac{1}{2\delta_0^2} \int_Q f^2(x, t) dx dt \\
&+ \frac{1}{2\delta_0^2} \int_Q [Au]^2 dx dt + \frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}{2} \int_Q \alpha_0^2(t) [D_t^4 u]^2 dx dt \\
&+ \frac{1}{2\delta_1^2} I_1 + \frac{1}{2\delta_2^2} I_2 + \frac{1}{2\delta_3^2} I_3. \quad (18)
\end{aligned}$$

Оценим интеграл I_3 :

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_Q \alpha_3^2(t) [D_t u]^2 dx dt = - \int_Q \alpha_3^2(t) u D_t^2 u dx dt - 2 \int_Q \alpha_3(t) \alpha_3'(t) u D_t u dx dt \\
&\leq \frac{\delta_4^2}{2} \int_Q \alpha_3^4(t) [D_t^2 u]^2 dx dt + \frac{1}{2\delta_4^2} \int_Q u^2 dx dt + \delta_5^2 \int_Q \alpha_3^2(t) [D_t u]^2 dx dt \\
&\quad + \frac{1}{\delta_5^2} \int_Q [\alpha_3'(t)]^2 u^2 dx dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1 - \delta_5^2) \int_Q \alpha_3^2(t) [D_t u]^2 dx dt &\leq \delta_4^2 \int_Q \alpha_3^4(t) [D_t^2 u]^2 dx dt \\
&+ \left(\frac{1}{\delta_4^2} \int_Q u^2 dx dt + \frac{2}{\delta_5^2} \int_Q [\alpha_3'(t)]^2 u^2 dx dt \right).
\end{aligned}$$

Фиксируем $\delta_5^2 = \frac{1}{2}$. По условию (16) получим

$$\int_Q \alpha_3^2(t) [D_t u]^2 dx dt \leq \delta_4^2 K_1 \int_Q \alpha_2^2(t) [D_t^2 u]^2 dx dt + C(\delta_4), \quad (19)$$

где постоянная $C(\delta_4)$ определяется помимо числа δ_4 функциями $\alpha_3(t)$, $u(x, t)$.

Оцениваем I_2 :

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_Q \alpha_2^2(t) [D_t^2 u]^2 dx dt = - \int_Q \alpha_2^2(t) D_t^3 u D_t u dx dt - 2 \int_Q \alpha_2(t) \alpha_2'(t) D_t^2 u D_t u dx dt \\
 &= - \int_Q \alpha_1^2(t) D_t^3 u \frac{\alpha_2^2(t)}{\alpha_1^2(t)} D_t u dx dt - 2 \int_Q \alpha_2(t) D_t^2 u \alpha_2'(t) D_t u dx dt \\
 &\leq \frac{\delta_6^2}{2} \int_Q \alpha_1^2(t) [D_t^3 u]^2 dx dt + \frac{1}{2\delta_6^2} \int_Q \frac{\alpha_2^4(t)}{\alpha_1^2(t)} [D_t u]^2 dx dt \\
 &\quad + \frac{\delta_7^2}{2} \int_Q \alpha_2^2(t) [D_t^2 u]^2 dx dt + \frac{1}{2\delta_7^2} \int_Q [\alpha_2'(t)]^2 [D_t u]^2 dx dt,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2 - \delta_7^2) \int_Q \alpha_2^2(t) [D_t^2 u]^2 dx dt &\leq \delta_6^2 \int_Q \alpha_1^2(t) [D_t^3 u]^2 dx dt \\
 &\quad + \frac{1}{\delta_6^2(t)} \int_Q \frac{\alpha_2^4(t)}{\alpha_1^2(t)} [D_t u]^2 dx dt + \frac{1}{\delta_7^2} \int_Q [\alpha_2'(t)]^2 [D_t u]^2 dx dt.
 \end{aligned}$$

Положим $\delta_7 = 1$. В силу условия (16) имеем

$$\begin{aligned}
 \int_Q \alpha_2^2(t) [D_t^2 u]^2 dx dt &\leq \delta_6^2 \int_Q \alpha_1^2(t) [D_t^3 u]^2 dx dt \\
 &\quad + \frac{K_2}{\delta_6^2} \int_Q \alpha_3^2(t) [D_t u]^2 dx dt + K_3 \int_Q \alpha_3^2(t) [D_t u]^2 dx dt.
 \end{aligned}$$

Воспользуемся неравенством (19). Тогда

$$\begin{aligned}
 \int_Q \alpha_2^2(t) [D_t^2 u]^2 dx dt &\leq \delta_6^2 \int_Q \alpha_1^2(t) [D_t^3 u]^2 dx dt \\
 &\quad + \frac{K_2}{\delta_6^2} \left[\delta_4^2 K_1 \int_Q \alpha_2^2(t) [D_t^2 u]^2 dx dt + C(\delta_4) \right] \\
 &\quad + K_3 \left[\delta_4^2 K_1 \int_Q \alpha_2^2(t) [D_t^2 u]^2 dx dt + C(\delta_4) \right]
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 \int_Q \alpha_2^2(t) [D_t^2 u]^2 dx dt &\leq \delta_6^2 \int_Q \alpha_1^2(t) [D_t^3 u]^2 dx dt \\
 &\quad + \left(\frac{K_2}{\delta_6^2} + K_3 \right) K_1 \delta_4^2 \int_Q \alpha_2^2(t) [D_t^2 u]^2 dx dt + C_1(\delta_4, \delta_6). \quad (20)
 \end{aligned}$$

Оценим I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_Q \alpha_1^2(t) [D_t^3 u]^2 dxdt = - \int_Q \alpha_1^2(t) D_t^4 u D_t^2 u dxdt \\ &\quad - 2 \int_Q \alpha_1(t) \alpha_1'(t) D_t^3 u D_t^2 u dxdt = - \int_Q \alpha_0(t) D_t^4 u \frac{\alpha_1^2(t)}{\alpha_0(t)} D_t^2 u dxdt \\ &\quad - 2 \int_Q \alpha_1(t) D_t^3 u \alpha_1'(t) D_t^2 u dxdt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_Q \alpha_1^2(t) [D_t^3 u]^2 dxdt &\leq \frac{\delta_8^2}{2} \int_Q \alpha_0^2(t) [D_t^4 u]^2 dxdt + \frac{1}{2\delta_8^2} \int_Q \frac{\alpha_1^4(t)}{\alpha_0^2(t)} [D_t^2 u]^2 dxdt \\ &\quad + \delta_9^2 \int_Q \alpha_1^2(t) [D_t^3 u]^2 dxdt + \frac{1}{\delta_9^2} \int_Q [\alpha_1'(t)]^2 [D_t^2 u]^2 dxdt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 - \delta_9^2) \int_Q \alpha_1^2(t) [D_t^3 u]^2 dxdt &\leq \frac{\delta_8^2}{2} \int_Q \alpha_0^2(t) [D_t^4 u]^2 dxdt \\ &\quad + \frac{1}{2\delta_8^2} \int_Q \frac{\alpha_1^4(t)}{\alpha_0^2(t)} [D_t^2 u]^2 dxdt + \frac{1}{\delta_9^2} \int_Q [\alpha_1'(t)]^2 [D_t^2 u]^2 dxdt. \end{aligned}$$

Фиксируем $\delta_9^2 = \frac{1}{2}$. В силу (16) имеем

$$\int_Q \alpha_1^2(t) [D_t^3 u]^2 dxdt \leq \delta_8^2 \int_Q \alpha_0^2(t) [D_t^4 u]^2 dxdt + \left(\frac{K_4}{\delta_8^2} + 4K_5 \right) \int_Q \alpha_2^2(t) [D_t^2 u]^2 dxdt. \quad (21)$$

Оценивая далее первое слагаемое в правой части (20) с помощью (21), придем к неравенству

$$\begin{aligned} \int_Q \alpha_2^2(t) [D_t^2 u]^2 dxdt &\leq \delta_6^2 \left[\delta_8^2 \int_Q \alpha_0^2(t) [D_t^4 u]^2 dxdt \right. \\ &\quad + \left(\frac{K_4}{\delta_8^2} + 4K_5 \right) \int_Q \alpha_2^2(t) [D_t^2 u]^2 dxdt \Big] + \left(\frac{K_2}{\delta_6^2} + K_3 \right) K_1 \delta_4^2 \int_Q \alpha_2^2(t) [D_t^2 u]^2 dxdt \\ &\quad + C_1(\delta_4, \delta_6) = \delta_6^2 \delta_8^2 \int_Q \alpha_0^2(t) [D_t^4 u]^2 dxdt + \left[\left(\frac{K_4}{\delta_8^2} + 4K_5 \right) \delta_6^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{K_2}{\delta_6^2} + K_3 \right) K_1 \delta_4^2 \right] \int_Q \alpha_2^2(t) [D_t^2 u]^2 dxdt + C_1(\delta_4, \delta_6), \\ \left(1 - \frac{(K_4 + 4K_5 \delta_8^2) \delta_6^4 + (K_2 + K_3 \delta_6^2) K_1 \delta_4^2 \delta_8^2}{\delta_6^2 \delta_8^2} \right) &\int_Q \alpha_2^2(t) [D_t^2 u]^2 dxdt \\ &\leq \delta_6^2 \delta_8^2 \int_Q \alpha_0^2(t) [D_t^4 u]^2 dxdt + C_1(\delta_4, \delta_6), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_Q \alpha_2^2(t) [D_t^2 u]^2 dx dt \\
& \leq \left(\frac{\delta_6^4 \delta_8^4}{\delta_6^2 \delta_8^2 - (K_4 + 4K_5 \delta_8^2) \delta_6^4 - (K_2 + K_3 \delta_6^2) K_1 \delta_4^2 \delta_8^2} \right) \int_Q \alpha_0^2(t) [D_t^4 u]^2 dx dt \\
& \quad + C_2(\delta_4, \delta_6, \delta_8). \quad (22)
\end{aligned}$$

С помощью неравенства (22) оценим (21):

$$\begin{aligned}
& \int_Q \alpha_1^2(t) [D_t^3 u]^2 dx dt \leq \delta_8^2 \int_Q \alpha_0^2(t) [D_t^4 u]^2 dx dt + \left(\frac{K_4}{\delta_8^2} + 4K_5 \right) \\
& \quad \times \left[\left(\frac{\delta_6^4 \delta_8^4}{\delta_6^2 \delta_8^2 - (K_4 + 4K_5 \delta_8^2) \delta_6^4 - (K_2 + K_3 \delta_6^2) K_1 \delta_4^2 \delta_8^2} \right) \int_Q \alpha_0^2(t) [D_t^4 u]^2 dx dt \right. \\
& \quad \left. + C_2(\delta_4, \delta_6, \delta_8) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_Q \alpha_1^2(t) [D_t^3 u]^2 dx dt \\
& \leq \left(\delta_8^2 + \frac{(K_4 + 4K_5 \delta_8^2) \delta_6^4 \delta_8^2}{\delta_6^2 \delta_8^2 - (K_4 + 4K_5 \delta_8^2) \delta_6^4 - (K_2 + K_3 \delta_6^2) K_1 \delta_4^2 \delta_8^2} \right) \int_Q \alpha_0^2(t) [D_t^4 u]^2 dx dt \\
& \quad + C_3(\delta_4, \delta_6, \delta_8). \quad (23)
\end{aligned}$$

Далее с помощью (22) оценим (19):

$$\begin{aligned}
& \int_Q \alpha_3^2(t) [D_t u]^2 dx dt \\
& \leq \left(\frac{K_1 \delta_4^2 \delta_6^4 \delta_8^4}{\delta_6^2 \delta_8^2 - (K_4 + 4K_5 \delta_8^2) \delta_6^4 - (K_2 + K_3 \delta_6^2) K_1 \delta_4^2 \delta_8^2} \right) \int_Q \alpha_0^2(t) [D_t^4 u]^2 dx dt \\
& \quad + C_4(\delta_4, \delta_6, \delta_8). \quad (24)
\end{aligned}$$

Вернемся к (18) и воспользуемся неравенствами (22)–(24):

$$\begin{aligned}
& \int_Q \alpha_0^2(t) [D_t^4 u]^2 dx dt \leq \delta_0^2 \int_Q \alpha_0^2(t) [D_t^4 u]^2 dx dt \\
& \quad + \frac{1}{2\delta_0^2} \int_Q f^2(x, t) dx dt + \frac{1}{2\delta_0^2} \int_Q (Au)^2 dx dt + \frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}{2} \int_Q \alpha_0^2(t) [D_t^4 u]^2 dx dt \\
& \quad + \frac{1}{2\delta_1^2} \left[\left(\delta_8^2 + \frac{(K_4 + 4K_5 \delta_8^2) \delta_6^4 \delta_8^2}{\delta_6^2 \delta_8^2 - (K_4 + 4K_5 \delta_8^2) \delta_6^4 - (K_2 + K_3 \delta_6^2) K_1 \delta_4^2 \delta_8^2} \right) \int_Q \alpha_0^2(t) [D_t^4 u]^2 dx dt \right. \\
& \quad \left. + C_3(\delta_4, \delta_6, \delta_8) \right] + \frac{1}{2\delta_2^2} \left[\left(\frac{\delta_6^4 \delta_8^4}{\delta_6^2 \delta_8^2 - (K_4 + 4K_5 \delta_8^2) \delta_6^4 - (K_2 + K_3 \delta_6^2) K_1 \delta_4^2 \delta_8^2} \right) \right. \\
& \quad \left. \times \int_Q \alpha_0^2(t) [D_t^4 u]^2 dx dt + C_2(\delta_4, \delta_6, \delta_8) \right]
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2\delta_3^2} \left[\left(\frac{K_1\delta_4^2\delta_6^4\delta_8^4}{\delta_6^2\delta_8^2 - (K_4 + 4K_5\delta_8^2)\delta_6^4 - (K_2 + K_3\delta_6^2)K_1\delta_4^2\delta_8^2} \right) \int_Q \alpha_0^2(t) [D_t^4 u]^2 dxdt \right. \\ \left. + C_4(\delta_4, \delta_6, \delta_8) \right].$$

Пусть $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3$, $\delta_6 = \delta_8^2$ и $\delta_4 = \delta_8^4$. Тогда

$$\int_Q \alpha_0^2(t) [D_t^4 u]^2 dxdt \leq \delta_0^2 \int_Q \alpha_0^2(t) [D_t^4 u]^2 dxdt + \frac{3\delta_1^2}{2} \int_Q \alpha_0^2(t) [D_t^4 u]^2 dxdt \\ + \frac{1}{2\delta_1^2} \left[\delta_8^2 + \frac{(K_4 + 4K_5\delta_8^2)\delta_8^{10} + \delta_8^{12} + K_1\delta_8^{20}}{\delta_8^6 - (K_4 + 4K_5\delta_8^2)\delta_8^8 - (K_2 + K_3\delta_8^4)K_1\delta_8^{10}} \right] \int_Q \alpha_0^2(t) [D_t^4 u]^2 dxdt \\ + \frac{1}{2\delta_1^2} [C_2(\delta_8) + C_3(\delta_8) + C_4(\delta_8)] + \frac{1}{2\delta_0^2} \int_Q f^2(x, t) dxdt + \frac{1}{2\delta_0^2} \int_Q (Au)^2 dxdt. \quad (25)$$

Положим δ_8 настолько малым, что выполняется неравенство

$$1 - (K_1K_2 + K_4)\delta_8^2 > \frac{1}{2}. \quad (26)$$

Имеем

$$\frac{1}{\delta_8^6(1 - (K_4 + 4K_5\delta_8^2)\delta_8^2 - (K_2 + K_3\delta_8^4)K_1\delta_8^4)} < \frac{2}{\delta_8^6}.$$

Таким образом,

$$\delta_8^2 + \frac{(K_4 + 4K_5\delta_8^2)\delta_8^{10} + \delta_8^{12} + K_1\delta_8^{20}}{\delta_8^6 - (K_4 + 4K_5\delta_8^2)\delta_8^8 - (K_2 + K_3\delta_8^4)K_1\delta_8^{10}} < \delta_8^2 + \frac{2(\delta_8^{10} + \delta_8^{12} + \delta_8^{20})}{\delta_8^6} < 7\delta_8^2.$$

Фиксируем $\delta_0^2 = \frac{1}{6}$ и $\delta_1^2 = \frac{1}{9}$. Из неравенств (25) и (26) получим

$$\delta_8 = \min \left\{ \frac{1}{3\sqrt{21}}; \frac{1}{\sqrt{2(K_1K_2 + K_4)}} \right\}.$$

Обозначим $C_0(\delta_8) = (\frac{1}{3} + \frac{63}{2}\delta_8^2)$. Тогда

$$\int_Q \alpha_0^2(t) [D_t^4 u]^2 dxdt \leq C_0(\delta_8) \int_Q \alpha_0^2(t) [D_t^4 u]^2 dxdt + \frac{9}{2} [C_2(\delta_8) + C_3(\delta_8) + C_4(\delta_8)] \\ + 3 \int_Q f^2(x, t) dxdt + 3 \int_Q (Au)^2 dxdt.$$

Поскольку $C_0(\delta_8) < 1$, в силу (15) получим искомую оценку (17).

Лемма доказана.

Следствие. При выполнении условий леммы 2 для решения $u(x, t)$ из пространства V задачи I имеют место оценки

$$\int_Q [\alpha_1^2(t)(D_t^3 u)^2 + \alpha_2^2(t)(D_t^2 u)^2 + \alpha_3^2(t)(D_t u)^2] dxdt \leq M_4, \quad (27)$$

$$\sum_{i,j=1}^n \int_Q u_{x_i x_j}^2 dxdt \leq M_5, \quad (28)$$

где постоянные M_4, M_5 определяются функцией $f(x, t)$ и числами K_1-K_5 .

Определим пространство Соболева

$$V_0 = \{v(x, t) : v(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega)), |\alpha_k(t)|D_t^{4-k}v \in L_2(Q), k = \overline{1, 3}\}.$$

Теорема 1. Пусть выполняются все условия леммы 2. Тогда существует решение $u(x, t)$ задачи I, принадлежащее пространству V_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ε — положительное число, $L_\varepsilon u$ — оператор вида

$$L_\varepsilon u = (\alpha_0(t) - \varepsilon)D_t^4 u + \alpha_1(t)D_t^3 u + \alpha_2(t)D_t^2 u + \alpha_3(t)D_t u - Au - \varepsilon Au_t.$$

Рассмотрим семейство задач: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся решением уравнения

$$L_\varepsilon u = f(x, t)$$

и такую, что для нее выполняются условия (3), (4), а также условие

$$D_t u|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega.$$

Из [1–3] следует, что эта задача имеет решение $u^\varepsilon(x, t)$, принадлежащее пространству V . Для семейства функций $\{u^\varepsilon(x, t)\}$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} \int_Q \left(\tilde{h}_1(t) + \frac{3}{2}\varepsilon \right) (D_t^2 u)^2 dx dt + \int_Q \tilde{h}_2(t) (D_t u)^2 dx dt + \int_Q u^2 dx dt \\ + (1 + \varepsilon) \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i}^2 dx dt \leq M_6, \end{aligned} \quad (14_\varepsilon)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_Q \left[\left(\tilde{h}_1(t) + \frac{3}{2}\varepsilon \right) (D_t^2 u_{x_i})^2 + \tilde{h}_2(t) (D_t u_{x_i})^2 \right] dx dt + \int_Q (Au)^2 dx dt \\ + \varepsilon \int_Q (\lambda - t) (Au_t)^2 dx dt \leq M_7, \end{aligned} \quad (15_\varepsilon)$$

$$\int_Q \alpha_0^2(t) (D_t^4 u)^2 dx dt + \varepsilon \int_Q \alpha_0(t) (D_t^4 u)^2 dx dt + \varepsilon^2 \int_Q (Au_t)^2 dx dt \leq M_8, \quad (16_\varepsilon)$$

$$\int_Q [\alpha_1^2(t) (D_t^3 u)^2 + \alpha_2^2(t) (D_t^2 u)^2 + \alpha_3^2(t) (D_t u)^2] dx dt \leq M_9, \quad (27_\varepsilon)$$

$$\sum_{i,j=1}^n \int_Q u_{x_i x_j}^2 dx dt \leq M_{10}. \quad (28_\varepsilon)$$

Доказательство справедливости этих оценок проводится так же, как доказывались леммы 1 и 2 (а также следствие к лемме 2). Из полученных оценок и свойств рефлексивности гильбертова пространства [4] следует, что существуют последовательность $\{m_l\}$ натуральных чисел и функция $u(x, t)$ такие, что $u(x, t) \in V_0$ и при $l \rightarrow \infty$ имеют место сходимости:

$$m_l \rightarrow \infty,$$

$$u^{\varepsilon_{m_l}}(x, t) \rightarrow u(x, t), \quad u_{x_i}^{\varepsilon_{m_l}}(x, t) \rightarrow u_{x_i}(x, t), \quad u_{x_i x_j}^{\varepsilon_{m_l}}(x, t) \rightarrow u_{x_i x_j}(x, t), \quad i, j = \overline{1, n},$$

$$|\alpha_k(t)| D_t^{4-k} u_t^{\varepsilon_{m_l}}(x, t) \rightarrow |\alpha_k(t)| D_t^{4-k} u_t(x, t), \quad k = \overline{1, 3},$$

$$\varepsilon_{m_l} D_t^4 u^{m_l}(x, t) \rightarrow 0, \quad \varepsilon_{m_l} A u_t^{m_l}(x, t) \rightarrow 0$$

слабо в пространстве $L_2(Q)$. Из этих сходимостей вытекает, что функция $u(x, t)$ будет решением задачи (2)–(4) из пространства V_0 .

Теорема доказана.

Пусть $\alpha_k(t)$, $k = \overline{0, 3}$, — функции $(T - t)^{p_k}$, $p_k \geq 0$ — целые. Нетрудно подобрать числа p_k так, чтобы выполнялись все условия леммы 2, но при этом не выполнялось условие из [1–3].

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= (\alpha_0(t)\alpha_1(t))' + 2\alpha_0(t)\alpha_2(t), \quad \varphi_2(t) = (\alpha_0(t)\alpha_2(t))'' + 3(\alpha_0(t)\alpha_3(t))', \\ \varphi_3(t) &= (\alpha_0(t)\alpha_3(t))'''. \end{aligned}$$

Лемма 3. Пусть $u(x, t)$ — решение из пространства V задачи I, и пусть выполняются условия леммы 1, а также условия

$$\varphi_1(t) \leq 0, \quad \varphi_2(t) \geq 0, \quad \varphi_3(t) \leq 0, \quad \alpha_1(0) \geq 0, \quad \alpha_0''(T)\alpha_3(T) \geq 0. \quad (29)$$

Тогда имеет место оценка

$$\begin{aligned} \int_Q \alpha_0^2(t)(D_t^4 u)^2 dxdt + \int_Q |\varphi_1(t)|(D_t^3 u)^2 dxdt + \\ + \int_Q \varphi_2(t)(D_t^2 u)^2 dxdt + \int_Q |\varphi_3(t)|(D_t u)^2 dxdt \leq M_{11}, \end{aligned} \quad (30)$$

где постоянная M_{11} определяется функциями $f(x, t)$, $\alpha_0(t)$ – $\alpha_3(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножив уравнение (2) на $\alpha_0(t)D_t^4 u$, получим равенство

$$\begin{aligned} \int_Q \alpha_0^2(t)(D_t^4 u)^2 dxdt + \int_Q \alpha_0(t)\alpha_1(t)D_t^3 u D_t^4 u dxdt + \int_Q \alpha_0(t)\alpha_2(t)D_t^2 u D_t^4 u dxdt \\ + \int_Q \alpha_0(t)\alpha_3(t)D_t u D_t^4 u dxdt - \int_Q \alpha_0(t)Au D_t^4 u dxdt = \int_Q f(x, t)\alpha_0(t)D_t^4 u dxdt. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, в силу неравенства Юнга и условий леммы 1 придем к неравенству

$$\begin{aligned} \int_Q \alpha_0^2(t)(D_t^4 u)^2 dxdt - \frac{1}{2} \int_Q [(\alpha_0(t)\alpha_1(t))' + 2\alpha_0(t)\alpha_2(t)](D_t^3 u)^2 dxdt \\ + \frac{1}{2} \int_Q [(\alpha_0(t)\alpha_2(t))'' + 3(\alpha_0(t)\alpha_3(t))'](D_t^2 u)^2 dxdt - \frac{1}{2} \int_Q (\alpha_0(t)\alpha_3(t))'''(D_t u)^2 dxdt \\ - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha_0(0)\alpha_1(0)(D_t^3 u(x, 0))^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha_0''(T)\alpha_3(T)(D_t u(x, T))^2 dx \\ \leq \frac{\delta_0^2}{2} \int_Q \alpha_0^2(t)(D_t^4 u)^2 dxdt + \frac{1}{2\delta_0^2} \int_Q (Au)^2 dxdt \\ + \frac{\delta_1^2}{2} \int_Q \alpha_0^2(t)(D_t^4 u)^2 dxdt + \frac{1}{2\delta_1^2} \int_Q f^2(x, t) dxdt, \end{aligned}$$

где δ_0, δ_1 — произвольные положительные числа. Подбирая эти числа малыми и учитывая (15), получим искомую оценку (30). Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть выполняются все условия леммы 3. Тогда существует решение $u(x, t)$ задачи I, принадлежащее пространству V_0 .

Доказательство теоремы проводится методом ε -регуляризации аналогично доказательству теоремы 1.

Перейдем к анализу разрешимости краевой задачи II. Пусть теперь выполняется условие

$$\alpha_0(t) \leq 0 \quad \text{при } t \in (0, T), \quad \alpha_0(0) < 0, \quad \alpha_0(T) < 0. \quad (31)$$

Лемма 4. Пусть $u(x, t)$ — решение из пространства V задачи II, и пусть выполняются условия (6)–(10), (13) и (31). Тогда имеют место оценки (14) и (15).

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.

Лемма 5. Пусть $u(x, t)$ — решение из пространства V задачи II, и пусть выполняются условия леммы 4, а также условия

$$\begin{aligned} |\varphi_1(t)| &\leq C_1 \alpha_1^2(t), \quad \varphi_2(t) \leq C_2 \alpha_2^2(t), \quad |\varphi_3(t)| \leq C_3 \alpha_3^2(t), \quad C_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3}, \\ \alpha_0(T) \alpha_1(T) \xi^2 - 2 \alpha_0(T) \alpha_2(T) \xi \eta - [(\alpha_0(T) \alpha_2(T))' + \alpha_0(T) \alpha_3(T)] \eta^2 &\geq 0, \\ \alpha_0(0) &\geq 0, \quad (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (32)$$

Тогда имеет место оценка

$$\begin{aligned} \int_Q \alpha_0^2(t) (D_t^4 u)^2 dx dt + \int_Q \alpha_1^2(t) (D_t^3 u)^2 dx dt \\ + \int_Q \alpha_2^2(t) (D_t^2 u)^2 dx dt + \int_Q \alpha_3^2(t) (D_t u)^2 dx dt \leq M_{12}, \end{aligned} \quad (33)$$

где M_{12} определяется функциями $f(x, t)$, $\alpha_0(t)$ – $\alpha_3(t)$ и числами C_1 – C_3 .

Доказательство. Умножим уравнение (2) на $\alpha_0(t) D_t^4 u$. Интегрируя по частям и используя неравенство Юнга, придем к неравенству

$$\begin{aligned} \int_Q \alpha_0^2(t) (D_t^4 u)^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_Q [(\alpha_0(t) \alpha_1(t))' + 2 \alpha_0(t) \alpha_2(t)] (D_t^3 u)^2 dx dt \\ + \frac{1}{2} \int_Q [(\alpha_0(t) \alpha_2(t))'' + 3(\alpha_0(t) \alpha_3(t))'] (D_t^2 u)^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_Q (\alpha_0(t) \alpha_3(t))''' (D_t u)^2 dx dt \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha_0(T) \alpha_1(T) (D_t^3 u(x, T))^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha_0(0) \alpha_1(0) (D_t^3 u(x, 0))^2 dx \\ - \int_{\Omega} \alpha_0(T) \alpha_2(T) D_t^2 u(x, T) D_t^3 u(x, T) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\alpha_0(T) \alpha_2(T))' (D_t^2 u(x, T))^2 dx \\ - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha_0(T) \alpha_3(T) (D_t^2 u(x, T))^2 dx \leq \frac{\delta_0^2}{2} \int_Q \alpha_0^2(t) (D_t^4 u)^2 dx dt \\ + \frac{1}{2\delta_0^2} \int_Q (Au)^2 dx dt + \frac{\delta_1^2}{2} \int_Q \alpha_0^2(t) (D_t^4 u)^2 dx dt + \frac{1}{2\delta_1^2} \int_Q f^2(x, t) dx dt, \end{aligned}$$

где δ_0, δ_1 — произвольные положительные числа. Подбирая эти числа малыми, с учетом оценки (15) и условия (32) получим искомую оценку (33).

Лемма доказана.

Теорема 3. Пусть выполняются все условия леммы 5. Тогда существует решение $u(x, t)$ задачи II, принадлежащее пространству V_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится аналогично доказательству теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Врагов В. Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 13, № 6. С. 1098–1105.
2. Врагов В. Н. О постановке и разрешимости краевых задач для уравнения смешанно-составного типа высокого порядка // Математический анализ и смежные вопросы математики. Тр. ин-та математики. Новосибирск: Наука, 1978. С. 5–13.
3. Егоров И. Е., Федоров В. Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995.
4. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

Статья поступила 14 февраля 2014 г.

Спиридонова Нарыйа Руслановна
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики
ул. Белинского, 58, Якутск 677000, Республика Саха (Якутия)
nariya@yandex.ru

О НЕКОТОРЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

А. Р. Хашимов, А. М. Тургинов

Аннотация. Рассматриваются две краевые задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками и нелокальным условием по времени. При доказательстве единственности решений используется метод интегралов энергии. Для доказательства разрешимости задачи методом потенциалов построена функция Грина. Далее, с помощью функции Грина доказывается однозначная разрешимость исследуемых задач. При этом изучается влияние граничных условий на класс гладкости решений.

Ключевые слова: уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, функция Грина, метод интегралов энергии, краевая задача, нелокальные условия, интегральное уравнение.

1. Введение

В работе [1] разработан метод построения фундаментальных решений уравнения с кратными характеристиками и построены фундаментальные решения уравнений

$$Lu \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$Lu \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

В начале 60-х гг. Каттабрига, развивая работу Дель Веккьо [1], построил теорию потенциалов для вышеуказанных уравнений [2, 3]. В дальнейшем исследователями был рассмотрен ряд краевых задач для уравнений (1), (2) с локальными и нелокальными граничными условиями [2–13].

В данной работе рассматриваются следующие задачи.

I. В области $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$ найти регулярное решение $u(x, t) \in K_u$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \mu u(x, T), \quad \mu = \text{const}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3)$$

$$u(0, t) = \varphi_1(t), \quad u_x(0, t) = \varphi_2(t), \quad u_x(1, t) = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4)$$

Здесь $K_u = \{u(x, t) : u(x, t) \in C_{x,t}^{3,1}(\Omega) \cap C_{x,t}^{2,0}(\overline{\Omega}), u_{xt} \in C(\Omega)\}$.

II. В области $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$ найти регулярное решение $u(x, t) \in K_u$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \mu u(x, T), \quad \mu = \text{const}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (5)$$

$$u_{xx}(0, t) = \varphi_1(t), \quad u_x(0, t) = \varphi_2(t), \quad u_x(1, t) = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (6)$$

Здесь $\tilde{K}_u = \{u(x, t) : u(x, t) \in C_{x,t}^{4,1}(\Omega) \cap C_{x,t}^{3,1}(\overline{\Omega}), u_{xt} \in C(\Omega)\}$.

Отметим, что нелокальная задача для уравнения

$$Lu \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma u = 0$$

исследована с другими граничными условиями в [14], где для доказательства разрешимости задачи использован метод параболической регуляризации и метод продолжения по параметру.

В данной работе разрешимость задачи доказывается методом потенциалов.

Фундаментальные решения уравнения (1) имеют вид (см. [3])

$$U(x - \xi; t - \tau) = (t - \tau)^{-\frac{1}{3}} f\left(\frac{x - \xi}{(t - \tau)^{\frac{1}{3}}}\right), \quad x \neq \xi, \quad t > \tau, \quad (7)$$

$$V(x - \xi; t - \tau) = (t - \tau)^{-\frac{1}{3}} \varphi\left(\frac{x - \xi}{(t - \tau)^{\frac{1}{3}}}\right), \quad x > \xi, \quad t > \tau. \quad (8)$$

Здесь

$$f(z) = \int_0^\infty \cos(\lambda^3 - \lambda z) d\lambda, \quad -\infty < z < \infty,$$

$$\varphi(z) = \int_0^\infty (\exp(-\lambda^3 - \lambda z) + \sin(\lambda^3 - \lambda z)) d\lambda, \quad z > 0,$$

$$z = (x - \xi)(t - \tau)^{-\frac{1}{3}}.$$

Для функций $U(x - \xi; t - \tau)$, $V(x - \xi; t - \tau)$, $f(z)$, $\varphi(z)$ справедливы следующие соотношения (см. [3]):

$$f''(z) + \frac{1}{3}zf(z) = 0, \quad \varphi''(z) + \frac{1}{3}z\varphi(z) = 0, \quad (9)$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(z) dz = \pi, \quad \int_{-\infty}^0 f(z) dz = \frac{\pi}{3}, \quad \int_0^\infty f(z) dz = \frac{2\pi}{3}, \quad \int_0^\infty \varphi(z) dz = 0, \quad (10)$$

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (a-0,t)} \int_\tau^t U_{\xi\xi}(x - a; t - \tau) \alpha(\xi, \tau) d\tau = \frac{\pi}{3} \alpha(t), \quad (11)$$

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (a+0,t)} \int_\tau^t U_{\xi\xi}(x - a; t - \tau) \alpha(\xi, \tau) d\tau = -\frac{2\pi}{3} \alpha(t), \quad (12)$$

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (a+0,t)} \int_\tau^t V_{\xi\xi}(x - a; t - \tau) \alpha(\xi, \tau) d\tau = 0, \quad (13)$$

$$f^n(z) \sim c_n^+ z^{\frac{2n-1}{4}} \sin\left(\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right), \quad z \rightarrow \infty, \quad (14)$$

$$\varphi^n(z) \sim c_n^+ z^{\frac{2n-1}{4}} \sin\left(\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right), \quad z \rightarrow \infty, \quad (15)$$

$$f^n(z) \sim c_n^- |z|^{\frac{2n-1}{4}} \exp\left(-\frac{2}{3}|z|^{\frac{3}{2}}\right), \quad z \rightarrow -\infty. \quad (16)$$

2. Основные результаты

Теорема 1. Пусть $0 \leq \mu^2 \leq \exp\{-T\}$. Тогда задачи I и II имеют не более одного решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что задача I имеет единственное решение. Пусть задача I имеет два решения $u_1(x, t), u_2(x, t)$. Тогда, полагая $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$, получим следующую задачу относительно функции $v(x, t)$:

$$Lv \equiv \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad (x, t) \in \Omega, \quad (17)$$

$$v(x, 0) = \mu v(x, T), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (18)$$

$$v(0, t) = 0, \quad v_x(0, t) = 0, \quad v_x(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (19)$$

Рассмотрим тождество

$$\int_0^1 \int_0^T Lv \, v_{xt} \exp\{-t\} \, dx dt = 0. \quad (20)$$

Интегрируя (20) по частям и учитывая однородные граничные условия (18), (19), получаем

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^T v_{xx}^2(x, t) \exp\{-t\} \, dx dt - \frac{1}{2} \int_0^T v_t^2(1, t) \exp\{-t\} \, dt \\ - \frac{1}{2} \int_0^1 v_{xx}^2(x, T) \{\exp\{-T\} - \mu^2\} \, dx = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Отсюда $v_{xx}(x, t) = 0$ в Ω , $v_t(1, t) = 0$ для $t \in [0, T]$.

Пусть $\mu^2 < \exp\{-T\}$. Тогда $v_{xx}(x, T) = 0$, стало быть, $v_x(x, T) = \text{const}$, $x \in [0, 1]$. Так как

$$v_x(0, t) = v_x(1, t) = 0, \quad t \in [0, T]$$

имеем

$$v_x(0, 0) = v_x(0, T) = 0.$$

Следовательно, $v_x(x, T) = \text{const} = 0$ при $x \in [0, 1]$.

Далее,

$$v_x(x, T) = 0 \Rightarrow v(x, T) = \text{const} \Rightarrow v(x, 0) = \text{const}, \quad x \in [0, 1].$$

Поскольку $v(0, t) = 0 \Rightarrow v(0, 0) = 0$, то $v(x, 0) = \text{const} = 0$ при $x \in [0, 1]$. В силу того, что $v_t(1, t) = 0$, $t \in [0, T] \Rightarrow v(1, t) = \text{const}$, $t \in [0, T]$, и $v(0, 0) = 0$, имеем $v(1, t) = 0$, $t \in [0, T]$.

Таким образом получаем хорошо известную первую краевую задачу относительно функции $v(x, t)$:

$$Lv \equiv \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad (x, t) \in \Omega,$$

$$v(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad v(0, t) = 0, \quad v_x(0, t) = 0, \quad v(1, t) = 0, \quad t \in [0, T].$$

В силу [3] эта задача имеет единственное решение.

Рассмотрим случай $\mu^2 = \exp\{-T\}$. Из (20) получаем $v_{xx}(x, t) = 0$, откуда $v_x(x, t) = \delta_1(t)$ при $t \in [0, T]$. Так как $v_x(0, t) = v_x(1, t) = 0$ при $t \in [0, T]$, то $\delta_1(t) = 0$ при $t \in [0, T]$.

Из $v_x(x, t) = 0$ вытекает, что $v(x, t) = \delta_2(t)$ при $t \in [0, T]$. Поскольку $v(0, t) = 0$ при $t \in [0, T]$, то $\delta_2(t) = 0$ при $t \in [0, T]$.

В силу непрерывности функции $v(x, t) = 0$ получаем, что $v(x, t) = 0$ в $\overline{\Omega}$.

Рассмотрим задачу II. Пусть задача II имеет два решения $u_1(x, t), u_2(x, t)$. Тогда, полагая $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$, получим однородную задачу типа II относительно функции $v(x, t)$. Введем обозначение $\omega(x, t) = v_x(x, t)$. Дифференцируя уравнение (1), имеем

$$L\omega \equiv \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} - \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0, \quad (x, t) \in \Omega,$$

$$\omega(x, 0) = \mu\omega(x, T), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$\omega(0, t) = 0, \quad \omega_x(0, t) = 0, \quad \omega(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Интегрируя тождество

$$\int_0^1 \int_0^T L\omega \exp\{-t\} dx dt = 0,$$

получаем $\omega(x, t) = 0$, $(x, t) \in \overline{\Omega}$, $\omega_x(1, t) = 0$ для всех $t \in [0, T]$, $\omega(x, T) = 0$ для всех $x \in [0, 1]$.

Интегрируя тождество

$$\int_0^1 \int_0^T L\omega \exp\{-x\} dx dt = 0,$$

имеем $\omega_x(x, t) = 0$ для всех $(x, t) \in \overline{\Omega}$. Тогда $v_x(x, t) = 0$, $v_{xx}(x, t) = 0$ для всех $(x, t) \in \overline{\Omega}$.

Рассмотрим тождество

$$\int_0^1 \int_0^T Lv \exp\{-t\} dx dt = 0.$$

Интегрируя это тождество, получаем $v(x, t) = 0$ для всех $(x, t) \in \overline{\Omega}$.

Теперь докажем теорему существования для задачи I.

Теорема 2. Пусть $0 \leq \mu^2 \leq \exp\{-T\}$, $\psi(t) \in C^1([0, T])$, $\varphi_2(t) \in C^1([0, T])$, $\varphi_1(t) \in C^2([0, T])$. Тогда существует решение задачи (1), (3), (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вспомогательную задачу.

Найти функцию $u(x, t) \in K_u$, которая является регулярным решением уравнения

$$Lu \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{22}$$

в области $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$ и удовлетворяет условиям

$$u(x, 0) = \tau(x), \tag{23}$$

$$u(0, t) = \varphi_1(t), \quad u_x(0, t) = \varphi_2(t), \quad u_x(1, t) = \psi(t). \tag{24}$$

В [4] разработан метод построения функции Грина для задачи (22)–(24). Если применить его к задаче (22)–(24), то с учетом (9)–(13) получим решение задачи в следующем виде:

$$\begin{aligned} \pi u(x, t) = & - \int_0^t G_\xi(x-1; t-\tau) \psi(\tau) d\tau - \int_0^t G_{\xi\xi}(x-0; t-\tau) \varphi_1(\tau) d\tau \\ & + \int_0^t G_\xi(x-0; t-\tau) \varphi_2(\tau) d\tau + \int_0^1 G(x-\xi; t-0) \tau(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (25)$$

где $G(x-\xi; t-\tau) = U(x-\xi; t-\tau) - W(x-\xi; t-\tau)$. Здесь $W(x-\xi; t-\tau)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} M(W) & \equiv -\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} - \frac{\partial W}{\partial t} = 0, \\ U|_{\xi=1} & = W|_{\xi=1}, \quad U_{\xi\xi}|_{\xi=1} = W_{\xi\xi}|_{\xi=1}, \quad U|_{\xi=0} = W|_{\xi=0}, \\ W|_{\tau=T} & = 0. \end{aligned}$$

Обозначим $u(x, T) = \alpha(x)$. Переходя к пределу при $t \rightarrow T$, из (25) имеем

$$\begin{aligned} \pi \alpha(x) = & - \int_0^T G_\xi(x-1; T-\tau) \psi(\tau) d\tau - \int_0^T G_{\xi\xi}(x-0; T-\tau) \varphi_1(\tau) d\tau \\ & + \int_0^T G_\xi(x-0; T-\tau) \varphi_2(\tau) d\tau + \mu \int_0^1 \{G(x-\xi; T-0) \alpha(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (26)$$

Итак, получено интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно функции $\alpha(x)$:

$$\alpha(x) = \int_0^1 K(x, \xi) \alpha(\xi) d\xi + F(x), \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} K(x, \xi) & \equiv \mu G(x-\xi; T-0), \\ F(x) & \equiv - \int_0^T G_\xi(x-1; T-\tau) \psi(\tau) d\tau - \int_0^T G_{\xi\xi}(x-0; T-\tau) \varphi_1(\tau) d\tau \\ & \quad + \int_0^T G_\xi(x-0; T-\tau) \varphi_2(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

С учетом (14)–(16) легко показать справедливость соотношений для функций $K(x, \xi)$, $F(x)$:

$$|K(x, \xi)| < \frac{C}{|x-\xi|^{\frac{1}{4}}}, \quad F(x) \in C^3([0, 1]).$$

В силу единственности решения задачи (1), (3), (4) интегральное уравнение (27) имеет единственное решение.

Аналогично можно доказать следующую теорему существования для задачи II.

Теорема 3. Пусть $0 \leq \mu^2 \leq \exp\{-T\}$, $\psi(t) \in C^1([0, T])$, $\varphi_2(t) \in C^2([0, T])$, $\varphi_1(t) \in C^2([0, T])$. Тогда существует решение задачи (1), (5), (6).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Del Vecchio E.* La soluzione fondamentale per $z_{xxx} - z_y = 0$ // Atti R. Ist. Veneto Sci. Lett. Arti. 1916. V. 65.
2. *Cattabriga L.* Un problema al per una equazione parabolica di ordine dispari // Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Mat. 1959. V. 13, N 2. P. 163–203.
3. *Cattabriga L.* Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabili a caratteristiche multiple // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. 1961. V. 3. P. 1–45.
4. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений третьего порядка смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1979.
5. *Джураев Т. Д., Иргашев Ю.* О краевой задаче Каттабрига для нелинейных уравнений третьего порядка с кратными характеристиками // Краевые задачи для дифференциальных уравнений и их приложения. Ташкент: Фан, 1976. С. 141–155.
6. *Абдиназаров С.* Общие краевые задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. С. 3–12.
7. *Абдиназаров С., Хашимов А.* Краевые задачи для уравнения с кратными характеристиками и разрывными коэффициентами // Уз. мат. журн. 1993. № 1. С. 3–12.
8. *Абдиназаров С.* Об одном уравнении третьего порядка // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. науки. 1989. № 6. С. 3–7.
9. *Елеев В. А.* Краевая задача для смешанного уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа // Укр. мат. журн. 1996. Т. 17, № 6. С. ???.
10. *Хашимов А.* Об одной задаче для уравнения смешанного типа с кратными характеристиками // Уз. мат. журн. 1995. № 2. С. 95–97.
11. *Mascarello M., Rodino L.* Partial differential equations with multiple characteristics. Berlin: Wiley, 1997.
12. *Mascarello M., Rodino L., Tri M.* Partial differential operators with multiple symplectic characteristics // Partial differential equations and spectral theory / Eds. M. Demuth, B.-W. Schulze. Basel: Birkhauser, 2001. P. 293–297.
13. *Rodino L., Oliaro A.* Solvability for semilinear PDE with multiple characteristics // Evolution equations / Eds. R. Picard, M. Reissig, W. Zajączkowski. Warsaw: Banach Center Publ., 2003. V. 60. P. 295–303.
14. *Кожанов А. И.* О разрешимости нелокальной по времени задачи для одного уравнения с кратными характеристиками // Мат. заметки ЯГУ. 2001. Т. 8, № 2. С. 27–40.

Статья поступила 15 января 2014 г.

Хашимов Абдукомил Рисбекович,
Ташкентский финансовый институт,
ул. Амира Тимура, 60А, Ташкент 100000
abdukamil@yandex.ru

Тургинов Азизджан Мамасолиевич
Кокандский гос. педагогический институт,
ул. Туран, 23, Коканд 113000
azizjon66@mail.ru

УДК 517.927.21

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Н. Н. Шадрина

Аннотация. Исследуется общая краевая задача нахождения решения для линейного эллиптического уравнения. Доказываются теоремы существования и единственности решения при выполнении соответствующих граничных условий и условий сопряжения на границе раздела двух сред.

Ключевые слова: краевая задача, условия сопряжения, уравнения эллиптического типа.

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты, бесконечно дифференцируемой) границей Γ , Q — цилиндр $\Omega \times (-1, 1)$, Q^- и Q^+ — цилиндры $Q^- = \Omega \times (-1, 0)$, $Q^+ = \Omega \times (0, 1)$. Далее, пусть $p(x, y)$, $c(x, y)$, $f(x, y)$, $\alpha_i(x)$, $\beta_i(x)$ ($i = \overline{1, 4}$) — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $y \in [-1, 1]$, при этом $p(x, y)$ строго положительна при $(x, y) \in \overline{Q}$ и может иметь разрыв первого рода при переходе через плоскость $y = 0$, $(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x), \alpha_4(x))$, $(\beta_1(x), \beta_2(x), \beta_3(x), \beta_4(x))$ — некоторые линейно независимые при каждом фиксированном $x \in \overline{\Omega}$ вектор-функции, B_1 и B_2 — линейные операторы, ставящие в соответствие функции $u(x, y)$ функцию $(B_i u)(x)$ (свойства которых будут описаны позже). Пусть L — дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x, y)$ определяется равенством

$$Lv \equiv \Delta_x v + \frac{\partial}{\partial y}(p(x, y)v_y) + c(x, y)v,$$

где $\Delta_x = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

Задача сопряжения. Найти функцию $u(x, y)$, являющуюся в цилиндрах Q^- и Q^+ решением уравнения

$$Lu = f(x, y) \quad (1)$$

и такую, что для нее выполняются граничные условия на боковой поверхности $S = \Gamma \times (-1, 1)$:

$$u(x, y)|_S = 0, \quad (2)$$

на основаниях:

$$u(x, -1) = 0, \quad u(x, 1) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

а также условия сопряжения на границе раздела областей Q^- и Q^+ :

$$\alpha_1(x)u(x, -0) + \alpha_2(x)u(x, +0) + \alpha_3(x)u_y(x, -0) + \alpha_4(x)u_y(x, +0) + B_1 u = 0, \quad (4)$$

$$\beta_1(x)u(x, -0) + \beta_2(x)u(x, +0) + \beta_3(x)u_y(x, -0) + \beta_4(x)u_y(x, +0) + B_2u = 0, \quad (5)$$

где $x \in \Omega$.

Задача (1)–(5) в частном случае совпадает с хорошо изученной классической задачей дифракции (см., например, [1–3]). В общем же виде, рассматриваемом в настоящей работе, ранее такие задачи не изучались. Заметим, что задачи сопряжения (дифракции) возникают при математическом моделировании многих процессов механики, физики, биологии и т. п. в ситуациях, когда те или иные процессы изучаются в двух и более соприкасающихся субстанциях с различными физическими характеристиками (из многочисленных работ последнего времени укажем лишь работы [4, 5]).

Условие линейной независимости векторов $(\alpha_i(x)), (\beta_i(x))$ ($i = \overline{1, 4}$) означает, что в каждой точке x из $\overline{\Omega}$ один из миноров второго порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha_1(x) & \alpha_2(x) & \alpha_3(x) & \alpha_4(x) \\ \beta_1(x) & \beta_2(x) & \beta_3(x) & \beta_4(x) \end{pmatrix}$$

отличен от нуля.

В дальнейшем будем рассматривать случай, когда отличным от нуля является один из миноров

$$\Delta_1(x) = \alpha_3(x)\beta_4(x) - \alpha_4(x)\beta_3(x), \quad \Delta_2(x) = \alpha_1(x)\beta_2(x) - \alpha_2(x)\beta_1(x),$$

$$\Delta_3(x) = \alpha_1(x)\beta_4(x) - \alpha_4(x)\beta_1(x), \quad \Delta_4(x) = \alpha_2(x)\beta_3(x) - \alpha_3(x)\beta_2(x).$$

Более того, будем считать, что выполняется следующее

Условие А. Если существует точка x_0 из Ω такая, что $\Delta_i(x_0) \neq 0$ для одного из чисел $i = 1, 2, 3, 4$, то $\Delta_i(x) \neq 0$ для всех x из $\overline{\Omega}$ и того же числа i .

При выполнении условия А задача сопряжения (1)–(5) может быть переформулирована как одна из следующих задач.

Задача I. Найти функцию $u(x, y)$, являющуюся решением уравнения (1) в цилиндрах Q^- и Q^+ и такую, что выполняются условия (2), (3), а также условия

$$u_y(x, -0) = a_1(x)u(x, -0) + a_2(x)u(x, +0) + a_3(x)B_1u + a_4(x)B_2u, \quad x \in \Omega,$$

$$u_y(x, +0) = b_1(x)u(x, -0) + b_2(x)u(x, +0) + b_3(x)B_1u + b_4(x)B_2u, \quad x \in \Omega.$$

Задача II. Найти функцию $u(x, y)$, являющуюся решением уравнения (1) в цилиндрах Q^- и Q^+ и такую, что выполняются условия (2), (3), а также условия

$$u(x, -0) = a_1(x)u_y(x, -0) + a_2(x)u_y(x, +0) + a_3(x)B_1u + a_4(x)B_2u, \quad x \in \Omega,$$

$$u(x, +0) = b_1(x)u_y(x, -0) + b_2(x)u_y(x, +0) + b_3(x)B_1u + b_4(x)B_2u, \quad x \in \Omega.$$

Задача III. Найти функцию $u(x, y)$, являющуюся решением уравнения (1) в цилиндрах Q^- и Q^+ и такую, что выполняются условия (2), (3), а также условия

$$u(x, -0) = a_1(x)u(x, +0) + a_2(x)u_y(x, -0) + a_3(x)B_1u + a_4(x)B_2u, \quad x \in \Omega,$$

$$u_y(x, +0) = b_1(x)u(x, +0) + b_2(x)u_y(x, -0) + b_3(x)B_1u + b_4(x)B_2u, \quad x \in \Omega.$$

Задача IV. Найти функцию $u(x, y)$, являющуюся решением уравнения (1) в цилиндрах Q^- и Q^+ и такую, что выполняются условия (2), (3), а также условия

$$u(x, +0) = a_1(x)u(x, -0) + a_2(x)u_y(x, +0) + a_3(x)B_1u + a_4(x)B_2u, \quad x \in \Omega,$$

$$u_y(x, -0) = b_1(x)u(x, -0) + b_2(x)u_y(x, +0) + b_3(x)B_1u + b_4(x)B_2u, \quad x \in \Omega.$$

Уточним, что здесь функции $a_1(x)$, $a_2(x)$, $a_3(x)$, $a_4(x)$, $b_1(x)$, $b_2(x)$, $b_3(x)$, $b_4(x)$ для каждой из задач вполне определенно вычисляются через исходные функции $\alpha_i(x)$, $\beta_i(x)$, $i = \overline{1, 4}$. Очевидно, что задачи III и IV однотипные. Далее будет рассмотрена только одна из них, а именно задача III. Кроме того, в данных задачах предполагается, что функция $a_1(x)b_2(x) - a_2(x)b_1(x)$ может обращаться в нуль, в том числе и тождественно, при $x \in \overline{\Omega}$.

В заключение постановки задачи определим требуемое пространство. Именно, обозначим через V следующее множество функций:

$$V = \{v(x, y) : v(x, y) \in W_2^2(Q^-) \cup W_2^2(Q^+)\}.$$

Прежде чем сформулировать теорему 1, введем некоторые дополнительные обозначения. Пусть

$$\bar{a}_3 = \max_{\overline{\Omega}}(p(x, +0)|a_3(x)|), \quad \bar{a}_4 = \max_{\overline{\Omega}}(p(x, -0)|a_4(x)|),$$

$$\bar{b}_3 = \max_{\overline{\Omega}}(p(x, +0)|b_3(x)|), \quad \bar{b}_4 = \max_{\overline{\Omega}}(p(x, -0)|b_4(x)|),$$

$$A_1 = \frac{\gamma_0(m_{11}\bar{b}_3 + m_{12}\bar{b}_4) + m_{11}\bar{a}_3 + m_{12}\bar{a}_4}{2\delta_0^2} + \frac{\delta_0^2\gamma_0(\bar{b}_3 + \bar{b}_4)}{2},$$

$$A_2 = \frac{\gamma_0(m_{21}\bar{b}_3 + m_{22}\bar{b}_4) + m_{21}\bar{a}_3 + m_{22}\bar{a}_4}{2\delta_0^2} + \frac{\delta_0^2(\bar{a}_3 + \bar{a}_4)}{2},$$

$$A_3 = \frac{\gamma_0(m_{31}\bar{b}_3 + m_{32}\bar{b}_4) + m_{31}\bar{a}_3 + m_{32}\bar{a}_4}{2},$$

$$A_4 = \frac{\gamma_0(m_{41}\bar{b}_3 + m_{42}\bar{b}_4) + m_{41}\bar{a}_3 + m_{42}\bar{a}_4}{2},$$

$$\Phi(\xi, \eta) = [\gamma_0 b_2(x)p(x, +0) - A_1]\xi^2 + [\gamma_0 b_1(x)p(x, +0) - a_2(x)p(x, -0)]\xi\eta - [a_1(x)p(x, -0) + A_2]\eta^2$$

(здесь γ_0 и δ_0 — положительные постоянные, точное значение которых будет указано ниже).

Обсудим вначале вопрос единственности решений задач сопряжения I–III.

Теорема 1. Пусть выполняются условия:

$$p(x, y) \in C^1(\overline{Q^-}), \quad p(x, y) \geq p_1 > 0, \quad (x, y) \in \overline{Q^-}, \quad (6)$$

$$p(x, y) \in C^1(\overline{Q^+}), \quad p(x, y) \geq p_2 > 0, \quad (x, y) \in \overline{Q^+}, \quad (7)$$

$$\|B_i v\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq m_{1i}\|v(x, +0)\|_{L_2(\Omega)}^2 + m_{2i}\|v(x, -0)\|_{L_2(\Omega)}^2 + m_{3i}\|v\|_{L_2(Q^-)}^2 + m_{4i}\|v\|_{L_2(Q^+)}^2, \quad v(x, y) \in V, \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

$$c(x, y) \leq -c_0 \leq 0, \quad (x, y) \in \overline{Q}^\pm, \quad (9)$$

$$\exists \gamma_0 > 0 \exists \delta_0 > 0 : \Phi(\xi, \eta) \geq 0, \quad (\eta, \xi) \in \mathbb{R}^2,$$

$$c(x, y) + A_3/\delta_0^2 \leq 0, \quad c(x, y) + A_4/\delta_0^2 \leq 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad y \in [-1, 1]. \quad (10)$$

Тогда задача I в пространстве V не может иметь более одного решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что если правая часть исходного уравнения (1) тождественно равна нулю, то $u(x, y) \equiv 0$.

Рассмотрим равенство

$$-\int_{Q^-} uLu \, dx dy - \gamma_0 \int_{Q^+} uLu \, dx dy = 0$$

и выделим в нем неотрицательно определенные слагаемые.

Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} & -\int_{Q^-} uLu \, dx dy - \gamma_0 \int_{Q^+} uLu \, dx dy \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{Q^-} u_{x_i}^2 \, dx dy + \gamma_0 \sum_{i=1}^n \int_{Q^+} u_{x_i}^2 \, dx dy - \int_{Q^-} c(x, y) u^2 \, dx dy \\ & - \gamma_0 \int_{Q^+} c(x, y) u^2 \, dx dy + \int_{Q^-} p(x, y) u_y^2 \, dx dy + \gamma_0 \int_{Q^+} p(x, y) u_y^2 \, dx dy \\ & + \int_{\partial Q^-} p(x, y) u \cdot u_y \nu_y \, dS + \gamma_0 \int_{\partial Q^+} p(x, y) u \cdot u_y \nu_y \, dS. \quad (11) \end{aligned}$$

Используя условия сопряжения, преобразуем два последних слагаемых равенства (11):

$$\begin{aligned} & \int_{\partial Q^-} p(x, y) u \cdot u_y \nu_y \, dS + \gamma_0 \int_{\partial Q^+} p(x, y) u \cdot u_y \nu_y \, dS \\ &= - \int_{\Omega} p(x, -0) u(x, -0) u_y(x, -0) \, dx + \gamma_0 \int_{\Omega} p(x, +0) u(x, +0) u_y(x, +0) \, dx \\ &= \int_{\Omega} \gamma_0 b_2(x) p(x, +0) u^2(x, +0) \, dx \\ & + \int_{\Omega} [\gamma_0 b_1(x) p(x, +0) - a_2(x) p(x, -0)] u(x, +0) u(x, -0) \, dx \\ & - \int_{\Omega} p(x, -0) a_1(x) u^2(x, -0) \, dx \\ & + \int_{\Omega} [\gamma_0 b_3(x) p(x, +0) u(x, +0) - a_3(x) p(x, -0) u(x, -0)] B_1 u \, dx \\ & + \int_{\Omega} [\gamma_0 b_4(x) p(x, +0) u(x, +0) - a_4(x) p(x, -0) u(x, -0)] B_2 u \, dx. \end{aligned}$$

Применяя введенные ранее обозначения, а также учитывая условие (8), получим

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \int_{Q^-} u_{x_i}^2 dx dy + \gamma_0 \sum_{i=1}^n \int_{Q^+} u_{x_i}^2 dx dy \\
& + \int_{Q^-} p(x, y) u_y^2 dx dy + \gamma_0 \int_{Q^+} p(x, y) u_y^2 dx dy + \int_{\Omega} [\gamma_0 b_2(x) p(x, +0) + A_1] u^2(x, +0) dx \\
& + \int_{\Omega} [\gamma_0 b_1(x) p(x, +0) - a_2(x) p(x, -0)] u(x, +0) u(x, -0) dx \\
& - \int_{\Omega} [p(x, -0) a_1(x) - A_2] u^2(x, -0) dx - \int_{Q^-} [c(x, y) - A_3/\delta_0^2] u^2(x, y) dx dy \\
& - \gamma_0 \int_{Q^+} [c(x, y) - A_4/\delta_0^2] u^2(x, y) dx dy \leq 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, выполняется неравенство

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \int_{Q^-} u_{x_i}^2 dx dy + \gamma_0 \sum_{i=1}^n \int_{Q^+} u_{x_i}^2 dx dy \\
& + \int_{Q^-} p(x, y) u_y^2 dx dy + \gamma_0 \int_{Q^+} p(x, y) u_y^2 dx dy \\
& - \int_{Q^-} c(x, y) u^2 dx dy - \gamma_0 \int_{Q^+} c(x, y) u^2 dx dy \leq 0. \quad (12)
\end{aligned}$$

Отсюда очевидным образом получаем $u(x, y) \equiv 0$ в Q . Теорема доказана.

Для формулировки теоремы 2 введем дополнительные обозначения:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \frac{\gamma_0(\bar{b}_3 + \bar{b}_4)}{2}, \quad A_{21} = \frac{\bar{a}_3 + \bar{a}_4}{2}, \\
A_5 &= \frac{\gamma_0(m_{11}\bar{b}_3 + m_{12}\bar{b}_4) + m_{11}\bar{a}_3 + m_{12}\bar{a}_4}{2}, \\
A_6 &= \frac{\gamma_0(m_{21}\bar{b}_3 + m_{22}\bar{b}_4) + m_{21}\bar{a}_3 + m_{22}\bar{a}_4}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_1(\xi, \eta) &= [\gamma_0 b_2(x) p(x, +0) - A_{11} \delta_1^2] \xi^2 + [\gamma_0 b_1(x) p(x, +0) - a_2(x) p(x, -0)] \xi \eta \\
&\quad - [a_1(x) p(x, -0) + A_{21} \delta_1^2] \eta^2.
\end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия (6)–(9), а также условия

$$\exists \gamma_0 > 0 \exists \delta_1 > 0 : \Phi_1(\eta, \xi) \geq 0, \quad (\eta, \xi) \in \mathbb{R}^2,$$

$$p_1 - A_5/\delta_1^2 > 0, \quad p_2 - A_6/\delta_1^2 > 0,$$

$$c(x, y) + A_3/\delta_1^2 \leq 0, \quad c(x, y) + A_4/\delta_1^2 \leq 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad y \in [-1, 1].$$

Тогда задача II в пространстве V не может иметь более одного решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве теоремы 1, в данном случае достаточно показать, что если правая часть исходного уравнения (1) тождественно равна нулю, то $u(x, y) \equiv 0$. Используя условия сопряжения, учитывая условие (8) и применяя очевидные неравенства

$$\int_{\Omega} u^2(x, -0) dx \leq \int_{Q^-} u_y^2(x, y) dx dy, \quad \int_{\Omega} u^2(x, +0) dx \leq \int_{Q^+} u_y^2(x, y) dx dy, \quad (13)$$

получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \int_{Q^-} u_{x_i}^2 dx dy + \gamma_0 \sum_{i=1}^n \int_{Q^+} u_{x_i}^2 dx dy \\ & + \int_{Q^-} [p(x, y) + A_5/\delta_1^2] u_y^2 dx dy + \gamma_0 \int_{Q^+} [p(x, y) + A_6/\delta_1^2] u_y^2 dx dy \\ & + \int_{\Omega} [\gamma_0 b_2(x) p(x, +0) + A_{11} \delta_1^2] u_y^2(x, +0) dx - \int_{\Omega} [p(x, -0) a_1(x) + A_{21} \delta_1^2] u_y^2(x, -0) dx \\ & - \int_{\Omega} [\gamma_0 b_1(x) p(x, +0) - a_2(x) p(x, -0)] u(x, +0) u_y(x, -0) dx \\ & - \int_{Q^-} [c(x, y) + A_3/\delta_1^2] u^2(x, y) dx dy - \gamma_0 \int_{Q^+} [c(x, y) + A_4/\delta_1^2] u^2(x, y) dx dy \leq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, выполняется неравенство (12). Отсюда очевидным образом получаем $u(x, y) \equiv 0$ в Q . Теорема доказана.

Введем обозначение

$$\begin{aligned} \Phi_2(\xi, \eta) = & [\gamma_0 b_2(x) p(x, +0) - A_{11} \delta_2^2] \xi^2 + [\gamma_0 b_1(x) p(x, +0) - a_2(x) p(x, -0)] \xi \eta \\ & - [a_1(x) p(x, -0) + A_{21} \delta_2^2] \eta^2. \end{aligned}$$

Теорема 3. Пусть выполняются условия (6)–(9), а также условия

$$\exists \gamma_0 > 0 \exists \delta_2 > 0 : \Phi_2(\eta, \xi) \geq 0, \quad (\eta, \xi) \in \mathbb{R}^2,$$

$$p_1 - A_5/\delta_2^2 > 0, \quad p_2 - A_6/\delta_2^2 > 0,$$

$$c(x, y) + A_3/\delta_2^2 \leq 0, \quad c(x, y) + A_4/\delta_2^2 \leq 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad y \in [-1, 1].$$

Тогда задача III в пространстве V не может иметь более одного решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству теоремы 1 с учетом условия (8) получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \int_{Q^-} u_{x_i}^2 dx dy + \gamma_0 \sum_{i=1}^n \int_{Q^+} u_{x_i}^2 dx dy \\ & + \int_{Q^-} [p(x, y) + A_5/\delta_2^2] u_y^2 dx dy + \gamma_0 \int_{Q^+} [p(x, y) + A_6/\delta_2^2] u_y^2 dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega} [\gamma_0 b_2(x) p(x, +0) + A_{11} \delta_2^2] u_y^2(x, +0) dx - \int_{\Omega} [p(x, -0) a_1(x) + A_{21} \delta_2^2] u_y^2(x, -0) dx \\
& - \int_{\Omega} [\gamma_0 b_1(x) p(x, +0) - a_2(x) p(x, -0)] u(x, +0) u_y(x, -0) dx \\
& - \int_{Q^-} [c(x, y) + A_3 / \delta_2^2] u^2(x, y) dx dy - \gamma_0 \int_{Q^+} [c(x, y) + A_4 / \delta_2^2] u^2(x, y) dx dy \leq 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, выполняется неравенство (12). Отсюда очевидным образом получаем $u(x, y) \equiv 0$ в Q . Теорема доказана.

Прежде чем сформулировать следующую теорему, введем дополнительные обозначения:

$$\tilde{a}_3 = \max_{\Omega} (|a_3(x)|), \quad \tilde{a}_4 = \max_{\Omega} (|a_4(x)|), \quad \tilde{b}_3 = \max_{\Omega} (|b_3(x)|), \quad \tilde{b}_4 = \max_{\Omega} (|b_4(x)|).$$

Теорема 4 (теорема существования). Пусть выполняются условия (6)–(10), а также следующие условия:

$$c(x, y) \in (\overline{Q}), \quad a_i(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad i = 1, 2, \quad (14)$$

существуют операторы $\tilde{B}_i$ такие, что для всех $v(x, y) \in V$ выполняется

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (B_i v) = B_i v_{x_j} + \tilde{B}_i v,$$

$$\begin{aligned}
\|\tilde{B}_i v\|_{L_2(\Omega)}^2 & \leq \tilde{m}_{1i} \|v(x, +0)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \tilde{m}_{2i} \|v(x, -0)\|_{L_2(\Omega)}^2 \\
& + \tilde{m}_{3i} \|v\|_{L_2(Q^-)}^2 + \tilde{m}_{4i} \|v\|_{L_2(Q^+)}^2, \quad v(x, y) \in V, \quad i = 1, 2, \quad (15)
\end{aligned}$$

существуют положительные числа $\delta_{01} - \delta_{04}$ такие, что верны неравенства

$$\begin{aligned}
2 - (1 + \tilde{a}_3^2) \delta_{01}^2 - (1 + \tilde{a}_4^2) \delta_{02}^2 - \tilde{m}_{21} \left(\frac{\tilde{a}_3^2}{\delta_{01}^2} + \frac{\gamma_0 \tilde{b}_3^2}{\delta_{03}^2} \right) - \tilde{m}_{32} \left(\frac{\tilde{a}_4^2}{\delta_{02}^2} + \frac{\gamma_0 \tilde{b}_4^2}{\delta_{04}^2} \right) & > 0, \\
2 - (1 + \tilde{b}_3^2) \delta_{03}^2 - (1 + \tilde{b}_4^2) \delta_{04}^2 - \tilde{m}_{12} \left(\frac{\tilde{a}_4^2}{\delta_{02}^2} + \frac{\gamma_0 \tilde{b}_4^2}{\delta_{04}^2} \right) - \tilde{m}_{11} \left(\frac{\tilde{a}_3^2}{\delta_{01}^2} + \frac{\gamma_0 \tilde{b}_3^2}{\delta_{01}^2} \right) & > 0.
\end{aligned} \quad (16)$$

Тогда для любой функции $f(x, y)$ из пространства $L_2(Q)$ существует функция $u(x, y)$, принадлежащая пространству V и являющаяся решением задачи I.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся методом продолжения по параметру. Пусть λ — число из отрезка $[0, 1]$. Рассмотрим семейство краевых задач.

Задача I $_{\lambda}$. Найти функцию $u(x, y)$, являющуюся решением уравнения (1) в цилиндрах Q^- и Q^+ и такую, что выполняются условия (2), (3), а также условия

$$\begin{aligned}
u_y(x, -0) &= \lambda [a_1(x) u(x, -0) + a_2(x) u(x, +0) + a_3(x) B_1 u + a_4(x) B_2 u], \\
u_y(x, +0) &= \lambda [b_1(x) u(x, -0) + b_2(x) u(x, +0) + b_3(x) B_1 u + b_4(x) B_2 u].
\end{aligned} \quad (17)$$

Обозначим через Λ множество тех чисел λ из отрезка $[0, 1]$, для которых задача I $_{\lambda}$ разрешима в пространстве V . Согласно теореме о методе продолжения по параметру [6] множество Λ совпадает со всем отрезком $[0, 1]$, если оно непустое, открытое и замкнутое (в топологии метрического пространства

$X = [0, 1]$). Совпадение множества Λ с отрезком $[0, 1]$ будет означать, что задача I_1 , т. е. исходная задача I , разрешима в пространстве V .

Непустота Λ очевидна, так как число 0 принадлежит ему [7].

Открытость и замкнутость множества Λ имеет место, если для всевозможных решений задачи I_λ из пространства V выполняется априорная оценка

$$\|u\|_V \leq R_0$$

с постоянной K , не зависящей от функции $u(x, y)$ и от λ . Покажем, что требуемая оценка имеет место.

Рассмотрим равенство

$$-\int_{Q^-} uLu \, dx dy - \gamma_0 \int_{Q^+} uLu \, dx dy = -\int_{Q^-} uf(x, y) \, dx dy - \gamma_0 \int_{Q^+} uf(x, y) \, dx dy. \quad (18)$$

Интегрируя по частям, имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n \int_{Q^-} u_{x_i}^2 \, dx dy + \gamma_0 \sum_{i=0}^n \int_{Q^+} u_{x_i}^2 \, dx dy - \int_{Q^-} c(x, y)u^2 \, dx dy - \gamma_0 \int_{Q^+} c(x, y)u^2 \, dx dy \\ & + \int_{Q^-} p(x, y)u_y^2 \, dx dy + \gamma_0 \int_{Q^+} p(x, y)u_y^2 \, dx dy + \int_{\partial Q^-} p(x, y)u \cdot u_y v_y \, dS \\ & + \gamma_0 \int_{\partial Q^+} p(x, y)u \cdot u_y v_y \, dS = -\int_{Q^-} uf(x, y) \, dx dy - \gamma_0 \int_{Q^+} uf(x, y) \, dx dy. \end{aligned}$$

С учетом неравенств

$$\int_{Q^-} u^2(x, y) \, dx dy \leq \int_{Q^-} u_y^2(x, y) \, dx dy, \quad \int_{Q^+} u^2(x, y) \, dx dy \leq \int_{Q^+} u_y^2(x, y) \, dx dy,$$

применяя к правой части неравенство Юнга и используя условия (16) задачи I_λ и условия теоремы, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \int_{Q^-} u_{x_i}^2 \, dx dy + \gamma_0 \sum_{i=1}^n \int_{Q^+} u_{x_i}^2 \, dx dy + \int_{Q^-} p(x, y)u_y^2 \, dx dy \\ & + \gamma_0 \int_{Q^+} p(x, y)u_y^2 \, dx dy + \lambda \int_{\Omega} [\gamma_0 b_2(x)p(x, +0) + A_1]u^2(x, +0) \, dx \\ & + \lambda \int_{\Omega} [\gamma_0 b_1(x)p(x, +0) - a_2(x)p(x, -0)]u(x, +0)u(x, -0) \, dx \\ & - \lambda \int_{\Omega} [p(x, -0)a_1(x) - A_2]u^2(x, -0) \, dx \\ & - \int_{Q^-} [c(x, y) + A_3/\delta_0^2]u^2(x, y) \, dx dy - \gamma_0 \int_{Q^+} [c(x, y) + A_4/\delta_0^2]u^2(x, y) \, dx dy \\ & \leq \frac{1}{2\delta^2} \int_{Q^-} f^2 \, dx dy + \frac{\gamma_0}{2\delta^2} \int_{Q^+} f^2 \, dx dy + \frac{\delta^2}{2} \int_{Q^-} u_y^2 \, dx dy + \frac{\gamma_0 \delta^2}{2} \int_{Q^+} u_y^2 \, dx dy. \end{aligned}$$

Ввиду условий (6)–(9) имеем

$$\begin{aligned} k \left\{ \sum_{i=1}^n \int_{Q^-} u_{x_i}^2 dx dy + \int_{Q^-} u_y^2 dx dy + \sum_{i=1}^n \int_{Q^+} u_{x_i}^2 dx dy + \int_{Q^+} u_y^2 dx dy \right\} \\ \leq K \left(\int_{Q^-} f^2(x, y) dx dy + \int_{Q^+} f^2(x, y) dx dy \right), \end{aligned}$$

в котором $k = \min(1, \frac{p_0}{2}, \gamma, \frac{\gamma_0 p_0}{2}) > 0$, $K = \max(\frac{1}{2p_0}, \frac{\gamma_0}{2p_0})$.

Тем самым первая оценка имеет вид

$$\|u\|_{W_2^1(Q^-)}^2 + \|u\|_{W_2^1(Q^+)}^2 \leq K_1 \left(\int_{Q^-} f^2(x, y) dx dy + \int_{Q^+} f^2(x, y) dx dy \right). \quad (19)$$

Для получения второй априорной оценки рассмотрим равенство

$$\int_{Q^-} u_{yy} Lu dx dy + \gamma_0 \int_{Q^+} u_{yy} Lu dx dy = \int_{Q^-} u_{yy} f(x, y) dx dy + \gamma_0 \int_{Q^+} u_{yy} f(x, y) dx dy. \quad (20)$$

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{Q^-} u_{x_i y}^2 dx dy + \gamma_0 \sum_{i=1}^n \int_{Q^+} u_{x_i y}^2 dx dy - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i y}(x, -0) u_{x_i}(x, -0) dx \\ + \gamma_0 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i y}(x, +0) u_{x_i}(x, +0) dx + \int_{Q^-} p u_{yy}^2 dx dy + \gamma_0 \int_{Q^+} p u_{yy}^2 dx dy \\ = \int_{Q^-} f(x, y) u_{yy} dx dy + \gamma_0 \int_{Q^+} f(x, y) u_{yy} dx dy - \int_{Q^-} p_y u_y u_{yy} dx dy \\ - \gamma_0 \int_{Q^+} p_y u_y u_{yy} dx dy - \int_{Q^-} c(x, y) u u_{yy} dx dy - \gamma_0 \int_{Q^+} c(x, y) u u_{yy} dx dy. \quad (21) \end{aligned}$$

Преобразуем отдельно третье и четвертое слагаемые левой части (21), используя условия сопряжения (17):

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} u_{x_i y}(x, -0) u_{x_i}(x, -0) dx + \gamma_0 \int_{\Omega} u_{x_i y}(x, +0) u_{x_i}(x, +0) dx \\ = \lambda \int_{\Omega} [\gamma_0 b_2(x) u_{x_i}^2(x, +0) + [\gamma_0 b_1(x) - a_2(x)] u_{x_i}(x, -0) u_{x_i}(x, +0) \\ - a_1(x) u_{x_i}^2(x, -0) - (u_{x_i}(x, -0) u(x, -0) a_{1x_i}(x) - u_{x_i}(x, -0) u(x, +0) a_{2x_i}(x))] dx \\ - \lambda \int_{\Omega} \left(u_{x_i}(x, -0) \frac{\partial}{\partial x_i} (B_1 u) a_3(x) - u_{x_i}(x, -0) B_1 u a_{3x_i}(x) \right. \\ \left. - u_{x_i}(x, -0) \frac{\partial}{\partial x_i} (B_2 u) a_4(x) - u_{x_i}(x, -0) B_2 u a_{4x_i}(x) \right. \\ \left. + \gamma_0 \left(u_{x_i}(x, +0) u(x, -0) b_{1x_i}(x) + u_{x_i}(x, +0) u(x, +0) b_{2x_i}(x) \right) \right) \end{aligned}$$

$$+ u_{x_i}(x, +0) \frac{\partial}{\partial x_i} (B_1 u) b_3(x) + u_{x_i}(x, +0) B_1 u b_{3x_i}(x) \\ + u_{x_i}(x, +0) \frac{\partial}{\partial x_i} (B_2 u) b_4(x) + u_{x_i}(x, +0) B_2 u b_{4x_i}(x) \Big) dx.$$

Все слагаемые правой части данного равенства, кроме первого, оцениваются с помощью неравенства Юнга, неравенств (13), примененных для производных $u_{x_i}(x, -0)$, $u_{x_i}(x, +0)$, и условий (8), (15) на операторы B_1, B_2 . Далее, слагаемые в правой части (20) оцениваются сверху с помощью неравенства Юнга и первой оценки. В результате получим

$$\int_{\Omega} (\gamma_0 u_{x_i}^2(x, +0) b_2(x) + u_{x_i}(x, -0) u_{x_i}(x, +0) [\gamma_0 b_1(x) - a_2(x)] - u_{x_i}^2(x, -0) a_1(x)) dx \\ + \frac{p_1}{2} \int_{Q^-} u_{yy}^2 dx dy + \frac{\gamma_0 p_2}{2} \int_{Q^+} u_{yy}^2 dx dy + \sum_{i=1}^n \int_{Q^-} u_{x_i y}^2 \left(1 - \frac{(1 + \tilde{a}_3^2) \delta_{01}^2}{2} - \frac{(1 + \tilde{a}_4^2) \delta_{02}^2}{2} \right. \\ \left. - \tilde{m}_{21} \left[\frac{\tilde{a}_3^2}{\delta_{01}^2} + \frac{\gamma_0 \tilde{b}_3^2}{\delta_{03}^2} \right] - \tilde{m}_{32} \left[\frac{\tilde{a}_4^2}{\delta_{02}^2} + \frac{\gamma_0 \tilde{b}_4^2}{\delta_{04}^2} \right] \right) dx dy + \sum_{i=1}^n \int_{Q^+} u_{x_i y}^2 \left(1 - \frac{(1 + \tilde{b}_3^2) \delta_{03}^2}{2} \right. \\ \left. - \frac{(1 + \tilde{b}_4^2) \delta_{04}^2}{2} - \tilde{m}_{12} \left[\frac{\tilde{a}_4^2}{\delta_{02}^2} + \frac{\gamma_0 \tilde{b}_4^2}{\delta_{04}^2} \right] - \tilde{m}_{11} \left[\frac{\tilde{a}_3^2}{\delta_{01}^2} + \frac{\gamma_0 - \tilde{b}_3^2}{\delta_{01}} \right] \right) dx dy \\ \leq \delta \left[\int_{Q^-} u_{yy}^2 dx dy + \gamma_0 \int_{Q^+} u_{yy}^2 dx dy \right] + M.$$

Отсюда и из условий (16) следует, что

$$\int_{Q^-} u_{yy}^2 dx dy + \sum_{i=1}^n \int_{Q^-} u_{x_i y}^2 dx dy + \gamma_0 \int_{Q^+} u_{yy}^2 dx dy + \gamma_0 \sum_{i=1}^n \int_{Q^+} u_{x_i y}^2 dx dy \leq M_1.$$

Третья априорная оценка

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{Q^-} u_{x_i x_j}^2 dx dy + \gamma_0 \sum_{i,j=1}^n \int_{Q^+} u_{x_i x_j}^2 dx dy \leq M_2$$

очевидным образом вытекает из первых двух и второго основного неравенства для эллиптических операторов [7]. Из полученных трех оценок следует искомая оценка

$$\|u\|_V \leq R_0. \quad (22)$$

Оценка (22) означает, что задача I_λ разрешима в пространстве V для всех λ из отрезка $[0, 1]$, т. е. и для $\lambda = 1$. Но тогда и искомая задача I разрешима в пространстве V . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для решения $u(x, y)$ задачи I имеют место включения $u_{x_i y}(x, -0) \in L_2(\Omega)$, $u_{x_i y}(x, +0) \in L_2(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$. Это следует из выполнения условий сопряжения и того, что в условиях сопряжения каждое слагаемое в правой части имеет обобщенную производную по переменной x_i .

Для x из $\bar{\Omega}$ и переменных ξ и η определим квадратичную по (ξ, η) форму

$$\Phi_3(x, \xi, \eta) = -a_1(x) \xi^2 + [\gamma_1 b_1(x) - a_2(x)] \xi \eta + \gamma_1 b_2(x) \eta^2,$$

где γ_1 — положительное число, роль которого будет пояснена ниже.

Теорема 5 (теорема существования). Пусть выполняются условия (6)–(9), (14), (15), а также следующие условия:

$$a_1(x) \leq 0, \quad b_2(x) \geq 0, \quad a_1(x)b_2(x) - a_2(x)b_1(x) \leq 0, \quad x \in \overline{\Omega},$$

$$\exists \gamma_1 > 0 : \Phi_3(x, \xi, \eta) \geq \varphi_1(x)\xi^2 + \varphi_2(x)\eta^2, \quad \varphi_1(x) \geq 0, \quad \varphi_2(x) \geq 0, \quad x \in \overline{\Omega},$$

$$|a_{2x_i}(x)| \leq C\sqrt{\varphi_1(x)}, \quad |b_{1x_i}(x)| \leq C\sqrt{\varphi_2(x)}, \quad C = \text{const}, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad i = 1, \dots, n,$$

а также существуют положительные числа δ_{01} – δ_{04} такие, что верны неравенства

$$2 - (1 + \tilde{a}_3^2)\delta_{01}^2 - (1 + \tilde{a}_4^2)\delta_{02}^2 - \tilde{m}_{21}\left(\frac{\tilde{a}_3^2}{\delta_{01}^2} + \frac{\gamma_1\tilde{b}_3^2}{\delta_{03}^2}\right) - \tilde{m}_{32}\left(\frac{\tilde{a}_4^2}{\delta_{02}^2} + \frac{\gamma_1\tilde{b}_4^2}{\delta_{04}^2}\right) > 0,$$

$$2 - (1 + \tilde{b}_3^2)\delta_{03}^2 - (1 + \tilde{b}_4^2)\delta_{04}^2 - \tilde{m}_{12}\left(\frac{\tilde{a}_3^2}{\delta_{02}^2} + \frac{\gamma_1\tilde{b}_4^2}{\delta_{04}^2}\right) - \tilde{m}_{11}\left(\frac{\tilde{a}_3^2}{\delta_{01}^2} + \frac{\gamma_1\tilde{b}_3^2}{\delta_{01}^2}\right) > 0.$$

Тогда для любой функции $f(x, y)$ из пространства $L_2(Q)$ существует функция $u(x, y)$, принадлежащая пространству V и являющаяся решением задачи II.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вначале случай $a_j(x) \equiv 0$, $b_j(x) \equiv 0$, $j = 3, 4$. Пусть ε — положительное число. Обозначим

$$a_{1\varepsilon}(x) = a_1(x) - \varepsilon, \quad b_{2\varepsilon}(x) = b_2(x) + \varepsilon.$$

Рассмотрим задачу: найти функцию $u(x, y)$, являющуюся в цилиндрах Q^- и Q^+ решением уравнения (1) и такую, что выполняются условия (2), (3), а также условия

$$\begin{aligned} u(x, -0) &= a_{1\varepsilon}(x)u_y(x, -0) + a_2(x)u_y(x, +0), \quad x \in \Omega, \\ u(x, +0) &= b_1(x)u_y(x, -0) + b_{2\varepsilon}(x)u_y(x, +0), \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (23)$$

Поскольку функция $a_{1\varepsilon}(x)b_{2\varepsilon}(x) - a_2(x)b_1(x)$ строго отрицательна в $\overline{\Omega}$, от (22), (23) можно перейти к соотношениям

$$\begin{aligned} u_y(x, -0) &= \tilde{a}_{1\varepsilon}(x)u(x, -0) + \tilde{a}_{2\varepsilon}(x)u(x, +0), \quad x \in \Omega, \\ u_y(x, +0) &= \tilde{b}_{2\varepsilon}(x)u(x, -0) + \tilde{b}_{2\varepsilon}(x)u(x, +0), \quad x \in \Omega, \end{aligned} \quad (24)$$

т. е. к условиям задачи I. Согласно теореме 4 рассматриваемая задача имеет решение $u^\varepsilon(x, y)$, принадлежащее пространству V . Покажем, что для семейства $\{u^\varepsilon(x, y)\}$ имеют место оценки, которые позволяют перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. При получении оценок индекс ε у решения опустим.

Для решений задачи (1)–(3), (23) имеет место оценка (19) (что показывается дословным повторением доказательства той же оценки в теореме 4). Далее, преобразовав равенство (20) к виду (21), рассмотрим отдельно его третье и четвертое слагаемые. Используя условия сопряжения (23), получим

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i y}(x, -0) u_{x_i}(x, -0) dx + \gamma_1 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i y}(x, +0) u_{x_i}(x, +0) dx \\ & = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} [\gamma_1 b_2(x) u_{x_i, y}^2(x, +0) + [\gamma_1 b_1(x) - a_2(x)] u_{x_i, y}(x, -0) u_{x_i, y}(x, +0) \\ & \quad - a_1(x) u_{x_i, y}^2(x, -0)] dx + \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \Delta a_1(x) u_y^2(x, -0) - \frac{1}{2} \gamma_1 \Delta b_2(x) u_y^2(x, +0) \right] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^n a_{2x_i}(x) u_y(x, +0) u_{x_i y}(x, -0) + \gamma_1 \sum_{i=1}^n b_{1x_i}(x) u_y(x, -0) u_{x_i y}(x, +0) \\
& + \varepsilon \sum_{i=1}^n (u_{x_i y}^2(x, -0) + \gamma_1 u_{x_i y}^2(x, +0)) \Big] dx.
\end{aligned}$$

В результате придем к равенству

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} [b_2(x) \gamma_1 u_{x_i y}^2(x, +0) + [\gamma_1 b_1(x) - a_2(x)] u_{x_i y}(x, -0) u_{x_i y}(x, +0) \\
& - a_1(x) u_{x_i y}^2(x, -0)] dx + \frac{p_1}{2} \int_{Q^-} u_{yy}^2 dx dy + \frac{\gamma_1 p_2}{2} \int_{Q^+} u_{yy}^2 dx dy \\
& + \sum_{i=1}^n \int_{Q^-} u_{x_i y}^2 dx dy + \gamma_1 \sum_{i=1}^n \int_{Q^+} u_{x_i y}^2 dx dy + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} [u_{x_i y}^2(x, -0) + \gamma_1 u_{x_i y}^2(x, +0)] dx \\
& = \int_{\Omega} \left[-\frac{1}{2} \Delta_x a_1(x) u_y^2(x, -0) + \frac{1}{2} \Delta_x b_1(x) u_y^2(x, +0) \right] dx \\
& + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} [a_{2x_i} u_y(x, +0) u_{x_i y}(x, -0) + \gamma_1 b_{1x_i} u_y(x, +0) u_{x_i y}(x, -0)] dx \\
& + \int_{Q^-} c(x, y) u_{yy} u dx dy - \gamma_1 \int_{Q^+} c(x, y) u_{yy} u dx dy.
\end{aligned}$$

Применяя неравенство Юнга и используя условия теоремы и интегральные неравенства типа (13), получим оценку

$$\begin{aligned}
& \int_{Q^-} u_{yy}^2 dx dy + \sum_{i=1}^n \int_{Q^-} u_{x_i y}^2 dx dy + \int_{Q^+} u_{yy}^2 dx dy + \sum_{i=1}^n \int_{Q^+} u_{x_i y}^2 dx dy \\
& + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (u_{x_i y}^2(x, -0) + u_{x_i y}^2(x, +0)) dx \leq M_3. \quad (25)
\end{aligned}$$

Третья априорная оценка

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{Q^-} u_{x_i x_j}^2 dx dy + \sum_{i,j=1}^n \int_{Q^+} u_{x_i x_j}^2 dx dy \leq M_4 \quad (26)$$

очевидным образом вытекает из первых двух и второго основного неравенства для эллиптических операторов [7].

Из оценок (19), (25) и (26), свойств рефлексивности гильбертова пространства и теорем вложения (см. [7, 8]) следует, что существуют числовая последовательность $\{\varepsilon_m\}$, функциональная последовательность $\{u_m(x, y)\}$ ($u_m(x, y) = u^{\varepsilon_m}(x, y)$) функций из семейства $\{u^{\varepsilon}(x, y)\}$ и функция $u(x, y)$ такие, что при $m \rightarrow \infty$ имеют место сходимости $\varepsilon_m \rightarrow 0$, $u_m(x, y) \rightarrow u(x, y)$ слабо в пространствах $W_2^2(Q^-)$ и $W_2^2(Q^+)$,

$$u_m(x, -0) \rightarrow u(x, -0), \quad u_m(x, +0) \rightarrow u(x, +0), \quad u_{my}(x, -0) \rightarrow u_y(x, -0),$$

$$u_{my}(x, +0) \rightarrow u_y(x, +0), \quad \varepsilon_m u_{my}(x, -0) \rightarrow 0, \\ \varepsilon_m u_{my}(x, +0) \rightarrow 0 \text{ почти всюду в } \Omega.$$

Из этих сходимостей вытекает, что для предельной функции $u(x, y)$ в областях Q^- и Q^+ будут выполняться уравнение (1), условия (2), (3), а также требуемые условия сопряжения задачи II.

В случае ненулевых функций $a_3(x)$, $b_3(x)$, $a_4(x)$ и $b_4(x)$ доказательство проводится вполне аналогично вышеприведенному (лишь с более громоздкими выкладками). Теорема доказана.

Для $x \in \bar{\Omega}$ и переменных ξ , η определим квадратичную по (ξ, η) форму $\Phi_4(x, \xi, \eta)$:

$$\Phi_4(x, \xi, \eta) = -a_2(x)\xi^2 + [\gamma_2 b_2(x) - a_1(x)]\xi\eta + \gamma_2 b_1(x)\eta^2,$$

где γ_2 — положительное число, роль которого будет пояснена ниже.

Теорема 6 (теорема существования). Пусть выполняются условия (6)–(9), (14), (17), а также следующие условия:

$$a_2(x) \leq 0, \quad x \in \bar{\Omega},$$

$$\exists \gamma_2 > 0 : \Phi_4(x, \xi, \eta) \geq \psi_1(x)\xi^2 + \psi_2(x)\eta^2, \quad \psi_1(x) \geq 0, \quad \psi_2(x) \geq 0, \quad x \in \bar{\Omega},$$

$$|a_{1x_i}(x)| \leq C\sqrt{\psi_1(x)}, \quad |b_{1x_i}(x)| \leq C\sqrt{\psi_2(x)}, \quad C = \text{const}, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad i = 1, \dots, n,$$

существуют положительные числа δ_{01} – δ_{04} такие, что верны неравенства

$$2 - (1 + \tilde{a}_3^2)\delta_{01}^2 - (1 + \tilde{a}_4^2)\delta_{02}^2 - \tilde{m}_{21}\left(\frac{\tilde{a}_3^2}{\delta_{01}^2} + \frac{\gamma_2 \tilde{b}_3^2}{\delta_{03}^2}\right) - \tilde{m}_{32}\left(\frac{\tilde{a}_4^2}{\delta_{02}^2} + \frac{\gamma_2 \tilde{b}_4^2}{\delta_{04}^2}\right) > 0,$$

$$2 - (1 + \tilde{b}_3^2)\delta_{03}^2 - (1 + \tilde{b}_4^2)\delta_{04}^2 - \tilde{m}_{12}\left(\frac{\tilde{a}_4^2}{\delta_{02}^2} + \frac{\gamma_2 \tilde{b}_4^2}{\delta_{04}^2}\right) - \tilde{m}_{11}\left(\frac{\tilde{a}_3^2}{\delta_{01}^2} + \frac{\gamma_2 \tilde{b}_3^2}{\delta_{01}^2}\right) > 0.$$

Тогда для любой функции $f(x, y)$ из пространства $L_2(Q)$ существует функция $u(x, y)$, принадлежащая пространству V и являющаяся решением задачи III.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как при доказательстве теоремы 5, сначала изучим случай $a_j(x) \equiv 0$, $b_j(x) \equiv 0$, $j = 3, 4$. Обозначим

$$a_{2\varepsilon}(x) = a_2(x) - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Рассматривая задачу нахождения решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2), (3), а также условиям

$$u(x, -0) = a_1(x)u_y(x, +0) + a_{2\varepsilon}(x)u_y(x, -0), \quad x \in \Omega, \\ u_y(x, +0) = b_1(x)u_y(x, +0) + b_2(x)u_y(x, -0), \quad x \in \Omega, \quad (27)$$

переходим к соотношениям вида (24), выражающим условия задачи I. Данная задача имеет решение $u^\varepsilon(x, y)$, принадлежащее пространству V , и для функций $u^\varepsilon(x, y)$ имеет место первая априорная оценка (19).

Для получения следующих оценок рассмотрим соотношение (21). Используя условия сопряжения (27), получим

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} [\gamma_2 b_1(x) u_{x_i}^2(x, +0) + [\gamma_2 b_2(x) - a_1(x)] u_{x_i y}(x, -0) u_{x_i}(x, +0)]$$

$$\begin{aligned}
& -a_2(x)u_{x_i y}^2(x, -0)] dx + \frac{p_1}{2} \int_{Q^-} u_{yy}^2 dx dy + \frac{\gamma_2 p_2}{2} \int_{Q^+} u_{yy}^2 dx dy \\
& + \sum_{i=1}^n \int_{Q^-} u_{x_i y}^2 dx dy + \sum_{i=1}^n \int_{Q^+} u_{x_i y}^2 dx dy + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i y}^2(x, -0) dx \\
& = \int_{\Omega} \left[-\frac{1}{2} \Delta_x a_2(x) u_y^2(x, -0) + \frac{1}{2} \Delta_x b_1(x) u_y^2(x, +0) \right] dx \\
& + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} [a_{1x_i} u(x, +0) u_{x_i y}(x, -0) + \gamma_2 b_{2x_i} u_y(x, -0) u_{x_i y}(x, +0)] dx \\
& + \int_{Q^-} c(x, y) u_{yy} u dx dy - \gamma_2 \int_{Q^+} c(x, y) u_{yy} u dx dy.
\end{aligned}$$

Применяя неравенство Юнга и используя условия теоремы и интегральные неравенства типа (13), приходим к оценке

$$\begin{aligned}
& \int_{Q^-} u_{yy}^2 dx dy + \sum_{i=1}^n \int_{Q^-} u_{x_i y}^2 dx dy + \int_{Q^+} u_{yy}^2 dx dy + \sum_{i=1}^n \int_{Q^+} u_{x_i y}^2 dx dy \\
& + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i y}^2(x, -0) dx \leq M_5. \quad (28)
\end{aligned}$$

Третья априорная оценка

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{Q^-} u_{x_i x_j}^2 dx dy + \sum_{i,j=1}^n \int_{Q^+} u_{x_i x_j}^2 dx dy \leq M_6 \quad (29)$$

очевидным образом вытекает из первых двух и второго основного неравенства для эллиптических операторов [7].

Из оценок (19), (28), (29) следует, что вновь можно осуществить всю схему выбора сходящихся последовательностей $\{\varepsilon_m\}$ и $\{u_m(x, y)\}$ и что существует функция $u(x, y)$, которая является решением уравнения (1) и удовлетворяет условиям (2), (3) и условиям сопряжения задачи III. Теорема доказана.

Примерами операторов B_1 и B_2 , обладающих нужными свойствами, являются интегральные операторы, действия которых на функции $v(x, y)$ определяются равенствами

$$\begin{aligned}
(B_i v)(x) = & \int_{\Omega} K_{1i}(x, \xi) v(\xi, +0) d\xi + \int_{\Omega} K_{2i}(x, \xi) v(\xi, -0) d\xi \\
& + \int_{Q^-} N_{1i}(x, \xi, \eta) v(\xi, \eta) d\xi d\eta + \int_{Q^+} N_{2i}(x, \xi, \eta) v(\xi, \eta) d\xi d\eta
\end{aligned}$$

с заданными ядрами $K_{1i}(x, \xi)$, $K_{2i}(x, \xi)$, $N_{1i}(x, \xi, \eta)$, $N_{2i}(x, \xi, \eta)$, $i = 1, 2$.

Условия на эти ядра, достаточные для выполнения условий теорем 1–6, нетрудно найти с помощью неравенств Гёльдера.

ЗАМЕЧАНИЕ. Оператор Δ_x , участвующий в рассматриваемой задаче, можно заменить общим эллиптическим оператором порядка $2m$ ($m > 0$ целое), действующим по переменным $x_1, \dots, x_n$ (с соответствующим дополнением граничных условий на S).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ладыженская О. А. О решении общей задачи дифракции // Докл. АН СССР. 1954. Т. 96, № 3. С. 433–436.
2. Олейник О. А. Об одном методе решения общей задачи Стефана // Докл. АН СССР. 1960. Т. 135, № 5. С. 1054–1057.
3. Ильин В. А. О разрешимости задачи Дирихле и Неймана для линейного эллиптического оператора с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137, № 1. С. 28–30.
4. Никольский Д. Н. Эволюция раздела различных жидкостей в неоднородных слоях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2010. Т. 50, № 7. С. 1269.
5. Никольский Д. Н. Трехмерная эволюция границы загрязнения в ограниченной кусочно-однородной пористой среде // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2011. Т. 51, № 5. С. 913–919.
6. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
7. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
8. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

Статья поступила 5 марта 2014 г.

Шадрина Наталья Николаевна
Бурятский гос. университет,
ул. Смолина, 24а, Улан-Удэ 675000
shadrinann8@yandex.ru

УДК 539.37

МОДЕЛИРОВАНИЕ КРАЕВОГО ЭФФЕКТА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Ю. М. Волчков

Аннотация. Исследуется распределение скоростей деформаций и напряжений в окрестности торцов оболочки (краевой эффект). Используется двухслойная модель оболочки Ю. Н. Работнова. Для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений применяется итерационная процедура. Проведено сравнение решений для оболочки конечной длины и полубесконечной оболочки.

Ключевые слова: краевой эффект, цилиндрическая оболочка, ползучесть, итерационная процедура.

Введение

В работе [1] Ю. Н. Работновым для решения задач упругопластического деформирования предложена двухслойная модель оболочки. В [2, 3] модель обобщена на случай деформирования оболочек в условиях ползучести. В [3] указан также класс оболочек, для которых применение двухслойной модели не может вносить больших погрешностей при решении конкретных задач. Этот класс оболочек описывается так называемой технической теорией оболочек, которая включает теорию осесимметричной деформации круговой цилиндрической оболочки, теорию длинных цилиндрических оболочек и теорию чистого изгиба криволинейной трубы. Применение двухслойной модели оболочки позволило разработать эффективный численный метод решения задач о напряженно-деформированном состоянии оболочек в условиях ползучести. Под ползучестью материала в механике деформируемого твердого тела понимается его свойство, заключающееся в том, что в таком материале деформации могут увеличиваться со временем даже при постоянных напряжениях. Обобщение двухслойной модели на случай подкрепленных ребрами оболочек дано в [4, 5]. В данной работе исследуется распределение скоростей деформаций и напряжений в окрестности торцов оболочки (краевой эффект). Информация о распределении скоростей деформаций и напряжений в зоне краевого эффекта позволяет выбирать подходящим образом пробные функции при решении задач о критическом времени с использованием вариационного принципа [6].

1. Двухслойная модель оболочки Работнова

При построении упрощенной теории оболочек реальная оболочка толщиной $2H$ заменяется двухслойной моделью — оболочкой, состоящей из двух слоев толщиной δ каждый, расстояние между серединами которых равно $2h$ (рис. 1). Слои считаются связанными между собой таким образом, что связь передает

сдвигающее усилие, но не воспринимает растягивающих усилий и изгибающих моментов. Таким образом, деформация слоев происходит в соответствии с гипотезой Кирхгофа — Лява. За отсчетную поверхность принимается поверхность, находящаяся посередине между слоями. В силу малости толщины несущих слоев изменением деформаций в пределах их толщин можно пренебречь. Выполнение условия $\delta \ll h$ можно обеспечить соответствующим выбором констант в законах ползучести для реальной оболочки и двухслойной модели [3].

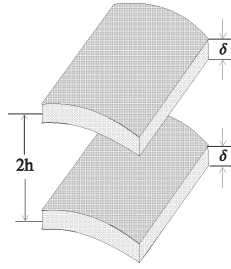


Рис. 1. Двухслойная модель оболочки

Зависимость между параметрами модели δ , h и толщиной реальной оболочки $2H$ устанавливается на основании требования, чтобы поведение модели и реальной оболочки совпадало в двух случаях: при безмоментном напряженном состоянии и при цилиндрическом изгибе. Так, для случая степенного закона ползучести с показателем, равным n , эти зависимости следующие [2]:

$$h = H, \quad \delta = \left(\frac{n}{1+2n} \right)^{\frac{n}{n+1}} H. \quad (1)$$

При изменении n от 1 до ∞ величина h изменяется в интервале $1 \leq h \leq H/\sqrt{3}$. Значение $n = \infty$ соответствует случаю идеальной пластичности.

В случае осесимметричного выпучивания круговой цилиндрической оболочки под действием внутреннего давления и сжимающей осевой силы задача сводится к решению следующей системы дифференциальных уравнений, записанной в безразмерных переменных:

$$m'' - u \left(\frac{1}{\omega^+} + \frac{1}{\omega^-} \right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \tau + 2p = 0, \quad (2)$$

$$u'' + (m + \tau)\omega^+ - (m + \tau)\omega^- = 0, \quad (3)$$

$$(\omega^\pm)^{\frac{2n}{n-1}} = u^2 + m^2(\omega^\pm)^2, \quad (4)$$

где

$$\omega^\pm = \frac{\sigma_* v^\pm}{\varepsilon_* s^\pm}, \quad u = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_*}, \quad m = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{M_{11}}{h \delta \sigma_*}, \quad p = -\frac{q_n R}{2 \delta \sigma_*}, \quad \tau = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{T_{11}}{\delta \sigma_*},$$

ε_2 — скорость окружной деформации ползучести, M_{11} — продольный изгибающий момент, q_n — внутреннее давление, T_{11} — продольная сжимающая сила, v^+ , s^+ и v^- , s^- — интенсивности скоростей ползучести и напряжений в верхнем и нижнем несущих слоях соответственно, ε_* , σ_* — характерные величины, имеющие размерности скорости ползучести и напряжения соответственно;

штрихи обозначают дифференцирование по безразмерной продольной координате $\xi = x/b$, $b^2 = 4/(\sqrt{3}Rh)$, R — радиус цилиндрической оболочки.

Соотношение (4) определяет величины $\omega^\pm$ как функции u и m .

При независимом варьировании величин u и m уравнения (2)–(4) являются уравнениями Эйлера для функционала

$$N = \int_0^l \left[u'm' + \frac{1}{2}\psi(\omega^+) + \frac{1}{2}\psi(\omega^-) - (m+\tau)^2\omega^+ - (m-\tau)^2\omega^- + 2\left(\frac{\tau}{\sqrt{3}} - p\right)u \right] d\xi, \quad (5)$$

где

$$\psi(\omega) = \frac{1}{\varepsilon_*^2} \int \frac{d(v^2)}{\omega},$$

$l = L/b$ — безразмерная длина оболочки (для упругой оболочки b — величина зоны краевого эффекта).

2. Итерационная процедура решения краевой задачи о деформировании цилиндрической оболочки при ползучести

Уравнения (2)–(4) должны быть дополнены краевыми условиями, вид которых зависит от способа закрепления торцов оболочки. Если оба торца оболочки имеют жесткую заделку, то краевые условия имеют следующий вид:

$$u(0) = u'(0) = u(l) = u'(l) = 0. \quad (6)$$

Если оба торца оболочки имеют шарнирное закрепление, то краевые условия соответствуют равенству на них нулю смещения и момента:

$$u(0) = m(0) = u(l) = m(l) = 0. \quad (7)$$

Возможны и другие виды краевых условий. Запишем еще условия для полубесконечной оболочки. На левом краю оболочки можно поставить условия (6) или (7). На бесконечности оболочка находится в безмоментном состоянии. Следовательно, $m(\infty) = 0$, $u(\infty) = u_\infty$. Введем обозначения $\omega^+(\infty) = \omega^-(\infty) = \omega_\infty$. Из уравнения (4) имеем

$$\frac{2u_\infty}{\omega_\infty} = 2\left(p - \frac{\tau}{\sqrt{3}}\right), \quad (\omega_\infty)^{2n/(n-1)} = u_\infty^2 + (\tau\omega_\infty)^2.$$

Следовательно,

$$u_\infty = \left(p - \frac{\tau}{\sqrt{3}}\right)\omega_\infty = \left[\left(p - \frac{\tau}{\sqrt{3}}\right) + \tau^2\right]^{2n/(n-1)}. \quad (8)$$

Перепишем уравнения системы (2) и (3) в следующем виде:

$$m'' - 2\frac{u}{\omega_\infty} = \frac{\omega_\infty - \omega^+}{\omega^+\omega_\infty}u + \frac{\omega_\infty - \omega^-}{\omega^-\omega_\infty}u + 2\left(\frac{\tau}{\sqrt{3}} - p\right), \quad (9)$$

$$u'' + 2m\omega_\infty = m(\omega_\infty - \omega^+) + m(\omega_\infty - \omega^-) - \tau(\omega^+ - \omega^-). \quad (10)$$

Считая правые части уравнений (9) и (10) известными функциями переменной ξ и интегрируя систему при соответствующих краевых условиях, получим

$$u = [A - J_1(\xi)]\delta(\xi) + [J_2(\xi) - B]\gamma(\xi) + [C - J_3(\xi)]\beta(\xi) + [D + J_4(\xi)]\alpha(\xi) - \frac{\tau}{\sqrt{3}}\omega_\infty + p\omega_\infty, \quad (11)$$

$$m = \frac{1}{\omega_\infty} \{ [A - J_1(\xi)]\gamma(\xi) - [J_2(\xi) - B]\delta(\xi) - [C - J_3(\xi)]\alpha(\xi) + [D + J_4(\xi)]\beta(\xi) \}, \quad (12)$$

где

$$J_1(\xi) = \int_0^\xi [F^+ \alpha(\xi) + F^- \beta(\xi)] d\xi, \quad J_2(\xi) = \int_0^\xi [F^+ \beta(\xi) - F^- \alpha(\xi)] d\xi,$$

$$J_3(\xi) = \int_0^\xi [F^+ \gamma(\xi) - F^- \delta(\xi)] d\xi, \quad J_4(\xi) = \int_0^\xi [F^+ \delta(\xi) + F^- \gamma(\xi)] d\xi,$$

$$F^\pm = \frac{1}{4} \left\{ \left[\frac{\omega_\infty - \omega^+}{\omega^+} + \frac{\omega_\infty - \omega^-}{\omega^-} \right] u \pm (\omega^+ - \omega_\infty)(m + \tau) \pm (\omega^- - \omega_\infty)(m - \tau) \right\},$$

$$\alpha(\xi) = \exp(-\xi) \sin \xi, \quad \beta(\xi) = \exp(-\xi) \cos \xi, \quad \gamma(\xi) = \exp(\xi) \sin \xi, \quad \delta(\xi) = \exp(\xi) \cos \xi.$$

Константы A, B, C, D зависят от вида краевых условий. Для краевых условий (6) константы определяются следующим образом:

$$B = -D, \quad A = -r - c, \quad C = \frac{(\beta(\xi) - \delta(\xi))\Omega_1(\xi) - (\alpha(\xi) - \gamma(\xi))\Omega_2(\xi)}{\delta(\xi)},$$

$$D = \frac{(\beta(\xi) - \delta(\xi))\Omega_2(\xi) + (\alpha(\xi) + \gamma(\xi))\Omega_1(\xi)}{\delta(\xi)},$$

$$\delta(\xi) = (\beta(\xi) - \delta(\xi))^2 + (\alpha(\xi) + \gamma(\xi))^2,$$

$$\Omega_1(\xi) = r(\delta - 1) + J_1(l)\delta - J_2(l)\gamma + J_3(l)\beta - J_4(l)\alpha,$$

$$\Omega_2(\xi) = r\gamma + J_1(l)\gamma + J_2(l)\delta - J_3(l)\alpha - J_4(l)\beta, \quad r = \left(p - \frac{\tau}{\sqrt{3}} \right) \omega_\infty.$$

Для полубесконечной оболочки с шарнирно закрепленным левым торцом имеем следующие выражения для констант:

$$A = J_1(\infty), \quad B = J_2(\infty), \quad C = -J_1(\infty) - r, \quad D = -J_2(\infty).$$

Для полубесконечной оболочки интегралы $J_1(\infty)$ и $J_2(\infty)$ имеют смысл, если $|u - u_\infty| \rightarrow 0$ и $|m| \rightarrow 0$ не медленнее, чем $\exp(-\xi)$ при $\xi \rightarrow \infty$.

Решение уравнений (11), (12) находится методом итераций. В качестве нулевого приближения для функций u и m берем выражения, которые получаются из (11), (12), если в правых частях положить $\omega^\pm = \omega_\infty$, $u = u_\infty$, $m = 0$. Затем из уравнения (4) находится нулевое приближение для функций $\omega^\pm$. Для нахождения корня уравнения (4) используется метод последовательных приближений Ньютона. Подставляя нулевое приближение для функций u и m в правые части уравнений (11), (12), находим первое приближение. Далее процесс повторяется.

3. Краевой эффект в полубесконечной цилиндрической оболочке, нагруженной внутренним давлением

Пусть круглая цилиндрическая оболочка нагружена внутренним давлением p , $\tau = 0$. Края оболочки при $\xi = 0$ считаем заземленными. Поскольку $\tau = 0$, из (4) следует, что

$$\omega^+ = \omega^- = \omega \quad (13)$$

и функция ω определяется из уравнения

$$\omega^{2n/(n-1)} = u^2 + m^2 \omega^2. \quad (14)$$

Уравнения (9) и (10) принимают следующий вид:

$$m'' - 2 \frac{u}{\omega_\infty} = 2 \frac{\omega_\infty - \omega}{\omega \omega_\infty} u - 2p, \quad (15)$$

$$u'' + 2m\omega_\infty = 2m(\omega_\infty - \omega), \quad (16)$$

где $\omega_\infty = p^{n-1}$.

После замены переменных

$$u = p^n \bar{u}, \quad m = p \bar{m}, \quad \omega = p^{n-1} \bar{\omega}$$

уравнения (14)–(16) приводятся к виду

$$\bar{\omega}^{2n/(n-1)} = \bar{u}^2 + \bar{m}^2 \bar{\omega}^2, \quad (18)$$

$$\bar{m}'' - 2 \frac{\bar{u}}{\bar{\omega}_\infty} = 2 \frac{\bar{\omega}_\infty - \bar{\omega}}{\bar{\omega} \bar{\omega}_\infty} \bar{u} - 2, \quad (19)$$

$$\bar{u}'' + 2\bar{m}\bar{\omega}_\infty = 2\bar{m}(\bar{\omega}_\infty - \bar{\omega}), \quad (20)$$

В новых переменных $\bar{\omega}_\infty = \bar{u}_\infty = 1$ и единственным параметром задачи остается показатель ползучести n .

Уравнения (19), (20) заменим интегральными уравнениями (11), (12), в которых нужно провести упрощение согласно (13) и вместо $p\omega_\infty$ подставить единицу. Функции $F^\pm$ будут иметь вид

$$F^\pm = \frac{\bar{\omega}_\infty - \bar{\omega}}{2} \left(\frac{\bar{u}}{\bar{\omega}} \pm m \right).$$

Для функций в нулевом приближении получаем следующие выражения:

$$\bar{u}_0 = 1 - \exp(-\xi)(\cos \xi - \sin \xi), \quad \bar{m}_0 = -\exp(-\xi)(\cos \xi - \sin \xi).$$

Для определения величины $\bar{\omega}$ используется метод последовательных приближений Ньютона:

$$\bar{\omega}_{k+1} = \bar{\omega}_k + \frac{(1/4)\bar{u}_k^2 + \bar{m}_k^2 \bar{\omega}_k^2 - \bar{\omega}_k^{2n/(n-1)}}{(2n/(n-1))\bar{\omega}_k^{(n+1)/(n-1)} - 2\bar{m}_k^2 \bar{\omega}_k^2}.$$

Эти формулы используются для определения $\bar{\omega}$ в точках рассматриваемого интервала по заданным значениям $\bar{u}$ и $\bar{m}$. При $\xi = 0$ из (14) можно найти значение $\bar{\omega}$ через $\bar{m}$:

$$\bar{\omega}(0) = (\bar{m}(0))^{n-1}.$$

В последующих точках интервала в качестве нулевых приближений для $\bar{\omega}$ берем решение уравнения (14) в предыдущей точке. Процесс последовательных приближений продолжается до тех пор, пока не выполнится неравенство $|\bar{\omega}_{k+1} - \bar{\omega}_k| \leq 0,00001$. Поскольку нулевое приближение в каждой точке мало отличается от точного значения, для выполнения последнего неравенства оказывается достаточным трех-четырёх приближений. При вычислении интегралов $J_1(\infty)$ и $J_2(\infty)$ полубесконечный интервал заменяется интервалом $\xi \in [0, 7]$. При этом значения величин $\bar{u}$, $\bar{m}$, $\bar{\omega}$ отличаются от их значений на бесконечности не более, чем на 0,0001. Интервал интегрирования разбивается на промежутки $\Delta\xi = 0,05$. Интегралы вычисляются по формуле трапеций. Различие значений искомых функций в четвертом и пятом приближениях заключается в третьем знаке после запятой, между значениями в шестом и седьмом приближениях — в пятом, между значениями в одиннадцатом и двенадцатом приближениях — в восьмом.

4. Результаты численного моделирования

На рис. 2 представлены зависимости безразмерного момента $\bar{m}$ и безразмерной скорости окружной деформации $\bar{u}$ от координаты ξ для показателей ползучести $n = 1, 3, 5$. Из приведенных графиков следует, что с ростом показателя ползучести n зона краевого эффекта несколько увеличивается и одновременно наблюдается более плавный характер изменения момента в зоне краевого эффекта. Из проведенных расчетов следует, что момент $\bar{m}$ в заделке не меняется с изменением показателя ползучести n и фактически равен единице. Такой же результат получен в монографии [3] с использованием вариационного принципа (функционал (5)). Этот факт естествен. Например, если используется критерий текучести Мизеса, то в предельном состоянии оболочки при $n = \infty$ момент также равен единице. Действительно, при $\xi = 0$ скорость окружной деформации равна нулю. Поэтому $\sigma_2 = (1/2)\sigma_1$, и из критерия Мизеса

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = s_\infty^2$$

следует, что $\sigma_1 = (2/\sqrt{3})s_\infty$. Таким образом, $M_1(0) = (4/\sqrt{3})\delta h s_\infty$ или $\bar{m} = 1$, так как предельное состояние достигается при $p = 1$.

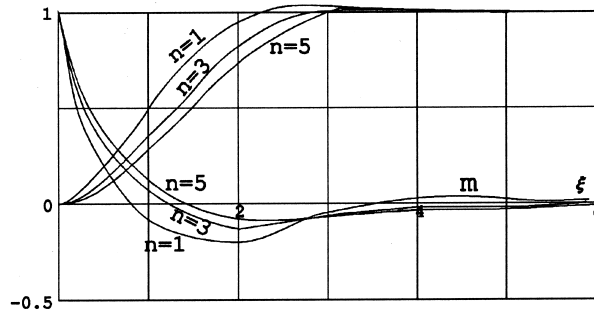


Рис. 2. Распределение прогиба и момента в полубесконечной цилиндрической оболочке

Для исходной оболочки толщиной H получаем следующее выражение для изгибающего момента:

$$\frac{3M_1}{2qHa} = -\left(\frac{n}{1+2n}\right)^{n/(n+1)} \sqrt{3}\bar{m}.$$

Последняя формула получается, если воспользоваться определением величины $\bar{m}$ и формулами (1), дающими зависимость параметров модели от толщины моделируемой и показателя ползучести.

На рис. 3 представлено сравнение зависимостей поперечной скорости деформации от координаты ξ для конечной и бесконечной оболочек.

Продольные и окружные напряжения выражаются через величины $\bar{m}$ и $\bar{u}$ по следующим формулам [3]:

$$\frac{1}{p} \frac{\sigma_1^\pm}{\sigma_*} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{m}, \quad \frac{1}{p} \frac{\sigma_2^\pm}{\sigma_*} = \frac{\bar{u}}{\bar{\omega}} \pm \frac{\bar{m}}{\sqrt{3}}.$$

Из этих формул следует, что p — значение окружного напряжения на бесконечности $(\sigma_2(\infty)/\sigma_*) = p$.

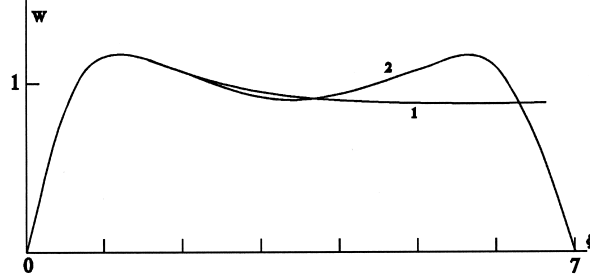


Рис. 3. Распределение прогиба
в конечной и бесконечной цилиндрических оболочках

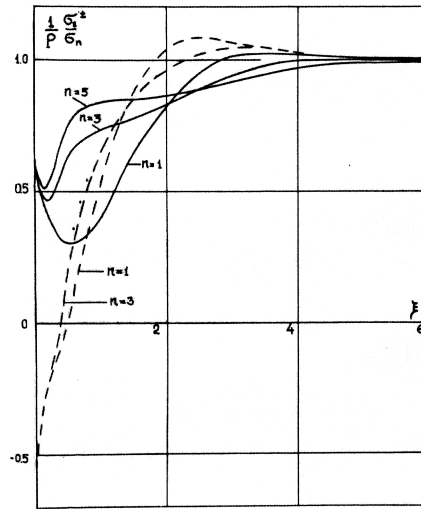


Рис. 4. Распределение напряжений в зоне краевого эффекта

На рис. 4 представлена зависимость окружных напряжений от безразмерной координаты ξ . Напряжению $(1/p)(\sigma_2^+/\sigma_*)$ соответствуют пунктирные линии, напряжению в нижнем слое $(1/p)(\sigma_2^-/\sigma_*)$ — сплошные.

Особый интерес представляет оценка максимального растягивающего напряжения, поскольку большие растягивающие напряжения могут привести к образованию трещин в конструкции. Максимальным растягивающим напряжением является продольное напряжение на внутренней стороне оболочки. Максимальное растягивающее напряжение в моделируемой оболочке будет отличаться от максимального напряжения в модели и может быть найдено через величину изгибающего момента в заделке:

$$(\sigma_1)_{\max} = \frac{M_1(0)}{W_n}, \quad W_n = \frac{I_n}{h^\nu}, \quad I_n = \frac{h}{1 + 1/\nu}, \quad \nu = \frac{1}{n}.$$

Назовем коэффициентом концентрации отношение максимального растягивающего напряжения к величине окружного напряжения на бесконечности. Из последнего равенства получаем

$$\frac{(\sigma_1)_{\max}}{\sigma_2(\infty)} = (\nu + 2)^{\nu/(1+\nu)} \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{m}(0).$$

При $n = 1$ максимальное растягивающее напряжение в заделке в два раза превышает окружное растягивающее напряжение на бесконечности. Из результатов вычислений следует, что коэффициент концентрации уменьшается с ростом показателя ползучести. Однако его величина остается еще достаточно большой для показателей ползучести для материалов, широко используемых в технике. Вследствие этого необходим учет краевого эффекта при расчете конструкций.

Закключение. С использованием двухслойной модели оболочки выполнено моделирование распределения напряжений и скоростей деформаций в зоне краевого эффекта в цилиндрической оболочке конечной длины и полубесконечной оболочке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Приближенная техническая теория упругопластических оболочек // Прикл. математика и механика. 1951. № 2. С. 167–174.
2. Работнов Ю. Н. О вариационном уравнении установившейся ползучести оболочек // Докл. АН СССР. 1966. № 2. С. 300–303.
3. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1965.
4. Волчков Ю. М., Немировский Ю. В. Несимметричное выпучивание цилиндрических оболочек в условиях ползучести // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1967. № 4. С. 36–138.
5. Волчков Ю. М., Немировский Ю. В. Выпучивание трехслойных цилиндрических оболочек в условиях ползучести // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1969. № 5. С. 150–158.
6. Волчков Ю. М. Двухслойная модель оболочки Работнова и критическое время выпучивания оболочек при ползучести // Прикл. механика и техн. физика. 2010. № 4. С. 198–206.

Статья поступила 24 апреля 2014 г.

Волчков Юрий Матвеевич
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
volk@hydro.nsc.ru

УДК 51.73

РАЗЛИЧНЫЕ ПОДХОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ НАВЕДЕННЫХ ТОКОВ В ЛИНИИ ПЕРЕДАЧ

Ю. М. Григорьев, М. Н. Борисова

Аннотация. Сравниваются расчеты токов и напряжений, наведенных в воздушной линии передачи при близком разряде молнии, по двум различным математическим моделям. Первая модель описывает электростатическую компоненту наведенных токов, вторая — электромагнитную компоненту. Показано, что пиковые значения обоих компонент по величине сравнимы между собой. Показано, что в условиях многолетней мерзлоты пиковые значения электростатической компоненты наведенных токов и напряжений могут быть на порядки больше, а значит, и опаснее, чем в регионах без мерзлоты.

Ключевые слова: молния, линия передачи, многолетняя мерзлота, индуцированное напряжение, наведенные токи.

Проблема электромагнитной совместимости технических сооружений с атмосферным электричеством в условиях многолетней мерзлоты имеет особую актуальность в силу плохой проводимости грунта. Одним из аспектов этой проблемы являются вопросы повышения эффективности электрозащиты магистральных линий передач. Магистральные линии передач включают в себя трубопроводы, линии электропередачи и проводные линии связи. С физической точки зрения магистральные линии представляют собой длинные проводящие линии, находящиеся в слоистой среде (воздух, проводящая земля и многолетняя мерзлота) и подверженные электрическим наводкам как во время гроз, так и во время интенсивных геомагнитных возмущений. На магистральных линиях передач токи и напряжения возникают и в отсутствие, и прямого попадания молнии. Такие токи и напряжения называются индуцированными (наведенными). Имеется два вида индуцированных токов и напряжений. Во-первых, электромагнитной природы, т. е. возникающие вследствие влияния электромагнитного поля от внешних возмущений. Во-вторых, электростатической природы, когда под действием электростатического поля грозового облака на проводниках магистральных линий индуцируются электрические заряды. При быстром разряде грозового облака эти заряды «высвобождаются» и, растекаясь по линии передач, образуют волну тока и напряжения (ВТН). Многолетняя практика эксплуатации магистральных линий электропередачи и проводных линий связи на территории РС(Я) показывает, что многие аварийные явления на них вызваны наведенными токами и напряжениями. Некоторые эксплуатационные параметры электрозащиты таких линий зачастую не отвечают нормативным показателям.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта ДВ № 12–05–98528–а) и Государственного задания МОиН РФ (проект № 1626).

© 2014 Григорьев Ю. М., Борисова М. Н.

Для выработки рекомендаций по защите линий передач от воздействия атмосферного электричества необходимо, в первую очередь, провести анализ возникающих при этом процессов, в частности, оценить величины наведенных токов и напряжений. Общепринятые методы приближенного расчета индуцированных перенапряжений в воздушных линиях основаны на вычислении электромагнитного поля, излучаемого каналом молнии. Практически во всех опубликованных работах при расчете наведенных токов и напряжений учитывают только электромагнитную наводку, а электростатическую часть не учитывают. Однако, по нашему мнению, в регионах с высоким удельным электрическим сопротивлением грунта, к которым относятся и регионы с многолетней мерзлотой, необходимо учитывать электростатическую компоненту (т. е. ВТН) при вычислениях наведенных токов и напряжений. Авторам известно небольшое количество работ по расчетам ВТН.

Приведем некоторые основные положения, используемые в дальнейшем. В результате основных процессов при электризации грозовых облаков в большинстве случаев (до 90 %) молнии бывают отрицательными, т. е. переносят на землю отрицательный заряд. В средних широтах землю поражают 30–40 % общего числа молний, остальные 60–70 % составляют разряды между облаками или между разноименно заряженными частями облаков. В большинстве случаев молния состоит из нескольких отдельных последовательных разрядов (до 14). Такая многокомпонентная молния может длиться до 1 с. Чаще всего длительность удара молнии не превышает 0,1 с. Аварии в магистральных линиях происходят в основном от близко расположенного к линиям разряда молнии.

В работах [1–7] рассматриваются математические модели электромагнитного влияния на магистральную линию разрядов молний на землю или между облаками. Попытка построения математической модели ВТН в линии электропередач представлена в работе Е. Ф. Цапенко [8]. В его работе при моделировании начального потенциала облака без обоснования была использована квадратичная функция. Наиболее адекватные модели ВТН в коаксиальном кабеле в условиях многолетней мерзлоты представлены в [9–12]. В наших работах [13–20] построены, аналитически и численно решены математические модели ВТН, индуцированных в линиях передач грозовыми разрядами в условиях многолетней мерзлоты.

В этой статье сравниваются расчеты токов и напряжений, наведенных в ЛЭП, по нашей модели, описанной в [13–20], и по модели, описанной в [3].

Приведем краткое описание нашей модели ВТН. Эта модель построена при предположении о мгновенном характере разряда молнии. Для простоты рассмотрим линию передач с одним бесконечно тонким проводником (рис. 1), которая характеризуется распределенными параметрами R , C , L , G — сопротивлением, емкостью, индуктивностью и коэффициентом утечки, рассчитанными на единицу длины.

Введем декартову систему координат x, y, z . Пусть область $z < l$ занята проводящей землей, параметр l характеризует толщину многолетнемерзлого слоя. Линия передачи направлена по оси x . Грозное облако моделируем точечным зарядом Q , расположенным в точке с координатами $(x_{об}, y_{об}, z_{об})$. Следовательно, линия находится в поле заряда Q и его электростатического изображения $-Q$. Проводник считаем заземленным в бесконечно удаленной точке, а потенциал Земли v — равным 0, т. е. индуцированные на линии заря-

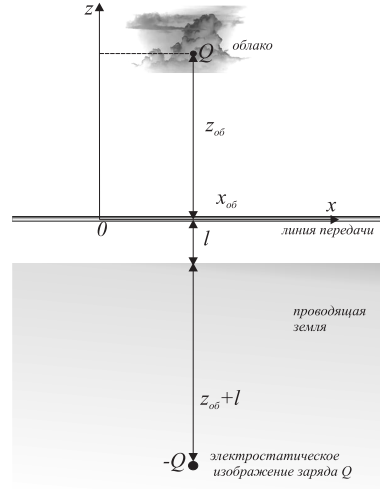


Рис. 1. Разряд молнии вблизи линии передачи

ды создают потенциал, который компенсирует потенциал, создаваемый двумя точечными зарядами Q и $-Q$.

В момент времени $t = 0$ заряд Q мгновенно исчезает (облако разряжается), тогда вдоль линии при $t > 0$ пойдет волна тока («разбегание» индуцированных зарядов), которая описывается системой телеграфных уравнений. Таким образом, для определения силы тока $i(x, t)$ и напряжения $u(x, t)$ в линии после разряда грозового облака получаем следующую задачу:

$$\begin{cases} u_x + Li_t + Ri = 0, \\ i_t + Cu_t + Gu = 0, \\ i(x, 0) = 0, \\ u(x, 0) = f(x), \end{cases} \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0. \quad (1)$$

Начальная функция $f(x)$ получается из предыдущих рассуждений:

$$f(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{\sqrt{z_{об}^2 + (x - x_{об})^2 + y_{об}^2}} - \frac{Q}{\sqrt{(2l + z_{об})^2 + (x - x_{об})^2 + y_{об}^2}} \right)$$

— потенциал, который до момента $t = 0$ компенсировал потенциал зарядов Q и $-Q$. Второе начальное условие $i(x, 0) = 0$ очевидно.

Решением нашей задачи являются напряжение

$$u(x, t) = \frac{1}{2} e^{\lambda t} (f(x + at) + f(x - at)) + \frac{1}{2} e^{\lambda t} \int_{x-at}^{x+at} \left(\frac{\mu}{a} I_0(k\sqrt{a^2 t^2 - (x-y)^2}) + kta \frac{I_1(k\sqrt{a^2 t^2 - (x-y)^2})}{\sqrt{a^2 t^2 - (x-y)^2}} \right) f(y) dy \quad (2)$$

и сила тока

$$i(x, t) = -\sqrt{\frac{C}{L}} \frac{e^{\lambda t}}{2} \int_{x-at}^{x+at} I_0(k\sqrt{a^2 t^2 - (x-y)^2}) f_y(y) dy, \quad (3)$$

где $I_0(z)$ и $I_1(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

В случае выполнения условия отсутствия искажения

$$RC = LG \quad (4)$$

решение задачи упрощается и принимает вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{R}{L}t} (f(x - at) + f(x + at)), \quad (5)$$

$$i(x, t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\frac{R}{L}t} (f(x - at) - f(x + at)). \quad (6)$$

В расчетно-экспериментальной работе [3] изучено влияние конечной проводимости грунта на наведенные токи в ЛЭП, причем учитывается только электромагнитная компонента наведенных токов. Вначале рассчитывается электромагнитное поле канала молнии несколькими способами. Определяется горизонтальная компонента электрического поля близи ЛЭП, граничные условия на проводах ЛЭП не ставятся. Затем напряженность этого поля подставляется в правую часть телеграфных уравнений в качестве сторонней э.д.с. и решается соответствующая начально-краевая задача для системы телеграфных уравнений. В [3] рассмотрена ЛЭП в виде одного провода с радиусом $b = 0.005$ м, подвешенного на высоте $l = 10$ м, при этом $C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(\frac{2l}{b})} = 6.7 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — погонная емкость проводника, $R = \rho \frac{l}{\pi b^2} = 3.4 \cdot 10^{-4}$ Ом/м — погонное сопротивление проводника, $L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(\frac{2l}{b}) = 1.6 \cdot 10^{-6}$ Гн/м — погонная индуктивность проводника.

Коэффициент утечки G вычисляется по формуле

$$G = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} C,$$

где σ_0 — проводимость воздуха. Обоснование этой формулы можно получить при электродинамическом выводе системы телеграфных уравнений [21].

Вертикальная молния ударяет вблизи ЛЭП на расстоянии $r = 50$ м от ее центра (рис. 2).

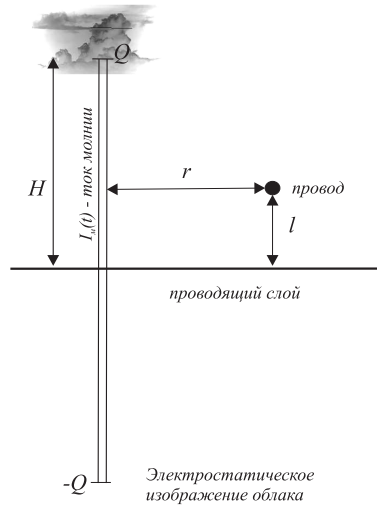


Рис. 2. Расчетная геометрия молнии в [13]

При расчете горизонтальной компоненты электрического поля вблизи ЛЭП считается, что ток молнии на основании канала молнии выражается следующей зависимостью:

$$I(t) = I_0(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}), \quad (7)$$

где $I_0 = 12$ кА, $\alpha = 3 \cdot 10^4$ с⁻¹, $\beta = 10^7$ с⁻¹. График такого импульса приведен на рис. 3. Скорость распространения тока молнии принимается равной $v = 1.3 \cdot 10^8$ м/с.

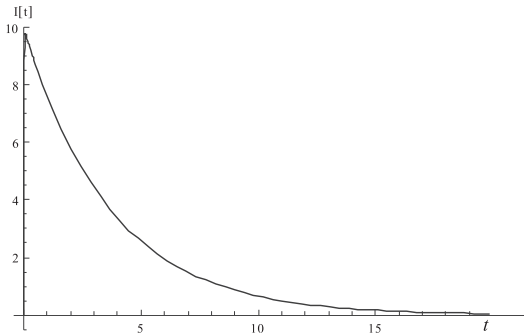


Рис. 3. Импульс тока молнии

Результаты расчетов в [3] показывают, что пиковые значения напряжения в ЛЭП достигают величины 60 кВ. Вид импульса индуцированного перенапряжения в ЛЭП приведен на рис. 4.

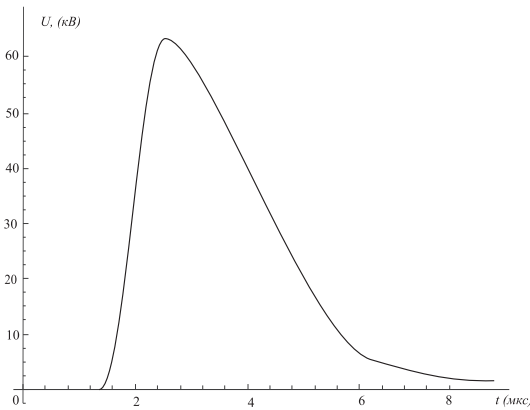


Рис. 4. Напряжение в ЛЭП, индуцированное электромагнитным полем тока молнии

Теперь найдем расчетные параметры для нашей модели ВТН с мгновенным характером разряда молнии по исходным данным схемы работы [3]. Суммарный заряд, переносимый током молнии вида (7), будет для нашей модели зарядом Q облака:

$$Q = \int_0^{\infty} I(t) dt = 0.33 \text{ Кл.}$$

Для длительности импульса тока молнии около 11,5 мкс, при заданной скорости тока получаем для высоты молнии величину порядка $H = 1500$ м. Таким образом, выражение для начального потенциала в нашей модели найдено:

$$f(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{\sqrt{(H-l)^2 + x^2}} - \frac{Q}{\sqrt{(H+l)^2 + x^2}} \right).$$

Результаты расчетов ВТН для длинной ЛЭП с вышеприведенными параметрами, когда молния ударяет в землю на расстоянии 50 м от ЛЭП, показаны на рис. 5.

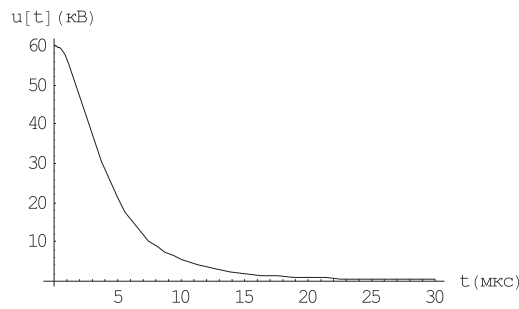


Рис. 5. Волна напряжения в ЛЭП по нашей модели с мгновенным характером разряда молнии

Расчеты показывают, что пиковое значение величин ВТН — напряжение 60 кВ по порядку совпадает с результатами из [3].

В предыдущих работах авторов построены математические модели ВТН в линии передач в условиях многолетней мерзлоты [13–20]. Если в данную задачу добавим слой многолетней мерзлоты $l_p = 250$ м, то получим расчетные результаты, приведенные на рис. 6. Начальный потенциал с учетом многолетней мерзлоты имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{\sqrt{(H-l_p)^2 + x^2}} - \frac{Q}{\sqrt{(H+l_p)^2 + x^2}} \right).$$

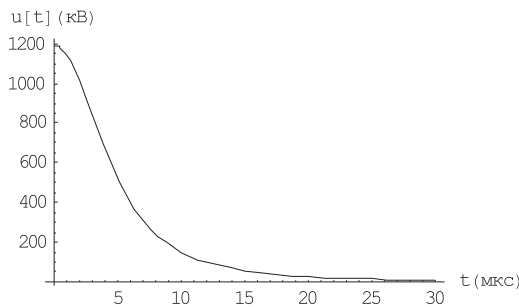


Рис. 6. Волна напряжения в ЛЭП в условиях многолетней мерзлоты с учетом мгновенного характера разряда молнии

Как видно, в условиях многолетней мерзлоты индуцированные напряжения могут быть в десятки раз опаснее.

Выводы

- Пиковые значения электростатической компоненты наведенных напряжений (ВТН) сравнимы со значениями электромагнитной компоненты.
- В условиях многолетней мерзлоты пиковые значения электростатической компоненты наведенных напряжений (ВТН) могут быть на порядки больше, а значит, и опаснее, чем в регионах без мерзлоты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Радевиц Д. В. Атмосферные перенапряжения на линиях электропередачи. Л.: Госэнергоиздат, 1959.
2. Ефимов Б. В. Теория распространения волн атмосферных перенапряжений в многопроводных коронирующих линиях // Электрофизические проблемы надежности эксплуатации высоковольтных сетей и цепей управления. Апатиты, 1999. С. 20–41.
3. Rachidi F., Ianoz M., Nucci C. A., Mazzetti C. Calculation methods of the horizontal component of lightning return stroke electric fields // XI Int. Wroclaw Symp. Exhibition Electromagn. Compatibility (September 2–4, 1992) Wroclaw, 1992. P. 452–456.
4. Rachidi F., Ianoz M., Nucci C. A., Mazzetti C. Influence of a lossy ground on lightning-induced voltages on overhead lines // IEEE Trans. Electromagn. Compatibility. 1996. V. 38, N 3. P. 250–264.
5. Petrache E., Paolone M., Rachidi F., Nucci C. A., Rakov V., Uman M., Jordan D., Rambo K., Jerauld J., Nyffeler M., Schoene J. Lightning-induced currents in buried coaxial cables: A frequency domain approach and its validation using rocket-triggered lightning // J. Electrostat. 2007. V. 65. P. 322–328.
6. Andreotti A., Assante D., Mottola F., Verolino L. An exact closed-form solution for lightning-induced overvoltages calculations // IEEE Trans. Power Delivery. 2009. V. 24, N 3. P. 1328–1343.
7. Lahtinen M., Elovaara J. GIC occurrences and GIC test for 400 kV system transformer // IEEE Trans. Electromagn. Compatibility. 1996. V. 38, N 3. P. 250–264.
8. Цапенко Е. Ф. Перенапряжения в системах электроснабжения. М.: Изд-во МГТУ, 2002.
9. Grigoriev Yu. M., Ereemeev S. N., Naumov V. V., Semenov A. A. On the thunderstorm overvoltages in coaxial cables // XI Int. Symp. Electromagn. Compatibility. Wroclaw, 1992. P. 424–428.
10. Grigoriev Yu. M., Ereemeev S. N., Naumov V. V., Sharin E. P. On the thunderstorm overvoltages in 3-wire transmission lines // XII Int. Symp. Exhibition Electromagn. Compatibility (June 28–July 1, 1994). Wroclaw, 1994. P. 137–141.
11. Grigoriev Yu. M. On a nondistorting transmission line // Int. Symp. Electromagn. Compatibility (Sendai, May 16–20, 1994). Sendai, Japan, 1994. P. 29–31.
12. Козлов В. И., Муллаяров В. А., Васильев А. Е., Ромашенко Ю. А., Григорьев Ю. М., Еремеев С. Н., Наумов В. В., Степанов В. Е., Орлова М. Н. Грозы в Якутии и их влияние на магистральные трубопроводы // Наука и образование. 2005. Т. 37, № 1. С. 61–66.
13. Григорьев Ю. М., Орлова М. Н. Математическая модель грозового перенапряжения в линии передачи при разряде молнии между двумя облаками // Динамика сплошной среды. 2004. Вып. 122. С. 53–56.
14. Григорьев Ю. М., Орлова М. Н. Численная реализация математической модели грозовых перенапряжений в линии передачи в условиях многолетней мерзлоты // IX Лаврентьевские чт., посв. Междунар. году физики. Научн. конф. Секция «Математика, механика и физика» / Сб. статей. Якутск: ГУ РОНПО, 2006. V. 1. P. 41–44.
15. Григорьев Ю. М., Орлова М. Н. Математическая модель грозовых перенапряжений в линии передач с учетом зависимости тока молнии от времени // Вестн. ЯГУ. 2007. Т. 4, № 2. С. 45–53.
16. Григорьев Ю. М., Орлова М. Н. Влияние ближнего разряда молнии на линию передачи // Вестн. СибГАУ. 2009. Т. 22. Ч. 1, № 1. С. 23–26.
17. Григорьев Ю. М., Орлова М. Н. Индуцированные перенапряжения в линии передач при разряде молнии между облаками // Мат. заметки ЯГУ. 2009. Т. 16, № 1. С. 128–141.

18. Григорьев Ю. М., Орлова М. Н. Математическая модель волны тока и напряжения в линии передачи // Вестн. Поморск. ун-та. Сер. Естеств. науки. 2010. Т. 1. С. 81–87.
19. Григорьев Ю. М., Борисова М. Н. Обработанные результаты натурных измерений электрических токов в действующем нефтепроводе, наведенных разрядами молний // Наука и образование. 2013. Т. 3. С. 106–111.
20. Орлова М. Н., Григорьев Ю. М. Индуцированные напряжения и токи в линиях передач [Электрон. ресурс] / Св-во о регистрации в ОФЭРНиО № 15359. 11 февраля 2010 г.
21. Clayton R. P. Analysis of multiconductor transmission lines. Wiley & Sons, Inc. 2008.

Статья поступила 25 сентября 2013 г.

Григорьев Юрий Михайлович, Борисова Марфа Николаевна
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
НИИ математики
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)
grigyum@yandex.ru, omarfa@mail.ru

УДК 51:550.34.013.4

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОТСАДКИ

Л. В. Никифорова, А. И. Матвеев,
Е. С. Слепцова, Б. В. Яковлев

Аннотация. Представлена математическая модель процесса отсадки. Используются статистический подход для описания процесса и теория броуновского движения. Получено уравнение типа Фоккера — Планка для фракций, помещенных в отсадочной машине. Рассчитаны распределения исследуемых зерен в различных случаях.

Ключевые слова: отсадка, распределение, уравнение Фоккера — Планка, диффузия, вероятность, модель.

Метод гравитационного обогащения полезных ископаемых, основанный на расслоении зернистых фракций породы по плотности и крупности, которое происходит под воздействием вибрирующей среды в гравитационном поле Земли, называется *отсадкой*. В данной работе рассматривается разработка математической модели процесса отсадки.

Для описания процесса отсадки используется статистический подход, в котором рассматриваются не только детерминированные механические процессы, но и стохастические. В известных работах [1–4] должным образом не показано, какими предпосылками и допущениями получается уравнение Фоккера — Планка и как оно решается. В работе предлагается физическая модель процесса отсадки, на основе которой получено соотношение типа уравнения Фоккера — Планка. При решении этого уравнения используется модель движения броуновской частицы в поле Земли [5]. Полученное решение можно распространить на случай, когда имеется множество невзаимодействующих частиц. Уравнение имеет неизвестные параметры, которые могут быть определены из физической модели и уточнены в результате проведения физического моделирования.

Рассмотрим следующую задачу.

В отсадочную постель помещены N одинаковых шаров с плотностью ρ_1 радиуса r_0 . Шары находятся в некоторой среде с плотностью ρ_v и вязкостью η_v . На определенной высоте h находится шар такого же размера, но с большей плотностью $\rho_0 > \rho_1$ (рис. 1). Емкость (отсадочная постель) приводится в колебательное движение с определенной частотой ω_0 и амплитудой a_0 . При этом пробная частица должна диффундировать вниз из-за действия силы тяжести. Требуется найти вероятность местонахождения частицы в произвольный момент времени.

Будем считать, что задача одномерная.

Сначала рассмотрим случай когда отсутствуют сила тяготения и границы, т. е. неограниченную систему. В начальный момент времени частица покоится,

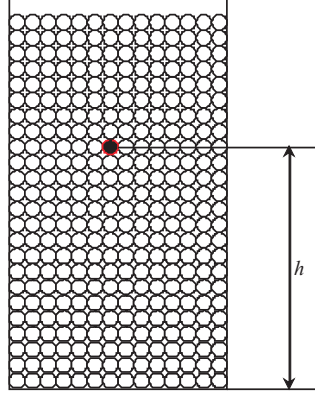


Рис. 1.

с началом колебательных движений системы она будет двигаться согласно марковским процессам. Броуновская частица движется хаотическим образом под действием тепловых движений молекул окружающей среды. При этом бомбардирующие частицу молекулы имеют определенные среднеквадратичные скорости в соответствии с температурой. В нашем случае роль этих молекул играют окружающие рассматриваемый пробный шар и движущиеся под действием внешних периодических сил шары с плотностью ρ_1 . Шары окружающей среды будут иметь кинетическую энергию в соответствии с колебательными движениями среды, а именно $\frac{m\langle v \rangle^2}{2} = \frac{ma_0^2\omega_0^2}{2}$, где a_0 и ω_0 — амплитуда и частота колебательных движений среды. На частицу будет действовать два вида сил: градиентные (так как каждый момент времени рассматриваем как статистический ансамбль) F_{gr} и силы сопротивления. Силы сопротивления обусловлены соударением рассматриваемой частицы с окружающими ее шарами F_1 и вязкостью F_2 , если процесс происходит, например, в воде. При этом сила сопротивления F_s равна $F_1 + F_2$.

Силу сопротивления, возникающую вследствие соударений, можно определить следующим образом. Усредненная тормозящая сила равна потере импульса. При каждом столкновении она полностью теряет направленную скорость. Приблизительно эта сила равна

$$F_1 = -\frac{dp}{dt} = -m\frac{dv}{dt} \approx -m\frac{\bar{v}}{\tau}, \quad (1)$$

где $\bar{v}$ — средняя скорость частиц, τ — среднее время пробега частицы между столкновениями.

Среднее значение времени свободного пробега можно найти из колебательных характеристик системы. Средняя квадратичная скорость частиц при колебательных движениях отсадочной машины равна

$$\langle v \rangle = a_0 \cdot \omega_0. \quad (2)$$

Средняя длина пробега равна амплитуде колебаний, тогда среднее время пробега равно периоду колебаний

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (3)$$

Таким образом,

$$\vec{F}_1 \approx -\frac{m\omega_0}{2\pi} \vec{v}. \quad (4)$$

Силу сопротивления среды будем считать равной силе Стокса

$$\vec{F}_2 = -6\pi\eta r_0 \vec{v}, \quad (5)$$

где η — коэффициент вязкости среды.

Для определения градиентной силы рассмотрим неоднородную одномерную систему, т. е. одномерную задачу, где $n(x)$ зависит только от одной переменной x — емкости с неоднородным распределением частиц (рис. 2). Допустим, что в левой части от некоторой границы, концентрация частиц больше, чем в правой: $n_1 > n_2$.

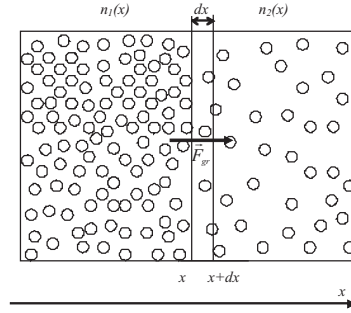


Рис. 2.

На левую границу области dx действует сила, пропорциональная концентрации и равная $kn_1\Delta S$, на правую границу — $kn_2\Delta S$, $k = \frac{m\langle v \rangle^2}{3} = \frac{ma_0^2\omega_0^2}{3}$. Сила, действующая на одну частицу внутри области, равна

$$F_{gr} = \frac{k(n_2 - n_1)\Delta S}{n(t, x)\Delta V} = \frac{k(n(t, x) - n(t, x + dx))\Delta S}{n(t, x)\Delta S dx} = -\frac{k}{n(t, x)} \frac{dn(t, x)}{dx}, \quad (6)$$

или в векторной записи

$$\vec{F}_{gr} = -\frac{k}{n(t, \vec{r})} \nabla n(t, \vec{r}). \quad (7)$$

Математическим выражением закона сохранения количества вещества является уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial n(t, \vec{r})}{\partial t} + \nabla \cdot (n(t, \vec{r}) \cdot \vec{v}) = 0. \quad (8)$$

Баланс сил, действующих на данную частицу:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{gr} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0, \quad (9)$$

дает соотношение

$$-\frac{k}{n(t, \vec{r})} \nabla n(t, \vec{r}) - \frac{m\omega_0}{2\pi} \vec{v} - 6\pi\eta r_0 \vec{v} = -\frac{k}{n(t, \vec{r})} \nabla n(t, \vec{r}) - \alpha \vec{v} = 0, \quad (10)$$

где $\alpha = \frac{m\omega_0}{2\pi} + 6\pi\eta r_0$

Из (8) и (10) имеем

$$\frac{\partial n(t, \vec{r})}{\partial t} = \frac{k}{\alpha} \Delta n(t, \vec{r}) = D \Delta n(t, \vec{r}), \quad (11)$$

где $D = \frac{k}{\alpha}$ — коэффициент макродиффузии.

Полученное выражение является уравнением Фоккера — Планка для свободной частицы. Решения этого классического уравнения известны, в частности, фундаментальным решением этого уравнения для одномерного случая является

$$n(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right). \quad (12)$$

На рис. 3 представлены зависимости (12) при различных значениях времени.

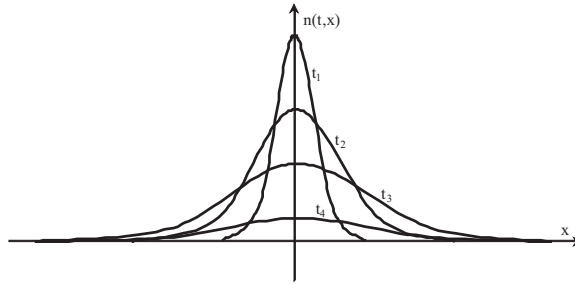


Рис. 3.

Вернемся к нашей задаче. Рассмотрим движение частицы в поле тяжести земли. Частица находится в емкости, ограниченной снизу непроницаемой стенкой, в окружении других частиц меньшей плотности. При колебательных движениях частица диффундирует вниз. На нее действует сила тяжести

$$\vec{F}_3 = m\vec{g}, \quad (13)$$

где $m = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho_0$ — масса исследуемой частицы. Тогда уравнение Фоккера — Планка имеет вид

$$\frac{\partial n(t, x)}{\partial t} - \frac{mg}{\alpha} \frac{\partial n(t, x)}{\partial x} - D \Delta n(t, x) = 0. \quad (14)$$

с начальными и граничными условиями

$$n(0, x) = \delta(x - h), \quad (15)$$

$$\int_0^\infty n(t, x) dx = 1, \quad (16)$$

$$n(t, x)|_{x \rightarrow +\infty} = 0, \quad (17)$$

$$\left. \frac{\partial n(t, x)}{\partial x} \right|_{x \rightarrow +\infty} = 0, \quad (18)$$

$$\left(\frac{mg}{k} n(t, x) + \frac{\partial n(t, x)}{\partial x} \right)_{x=0} = 0. \quad (19)$$

Последнее соотношение (19) является условием отсутствия потока через нижнюю поверхность.

При решении этой задачи используем решение подобной задачи для броуновской частицы [5] и получаем следующее аналитическое выражение:

$$n(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \left(\exp\left(-\frac{(x-h)^2}{4Dt}\right) + \exp\left(-\frac{(x+h)^2}{4Dt}\right) \right) \times \exp\left(-\frac{(mg)^2 t}{4k\alpha} - \frac{mg(x-h)}{2k}\right) + \frac{mg}{k} \exp\left(-\frac{mgx}{k}\right) \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\frac{mgt}{\alpha} - x - h} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4Dt}\right) d\eta. \quad (20)$$

На рис. 4 представлены графики зависимостей согласно (20) в различные моменты времени, по горизонтальной оси отчается высота емкости с шарами.

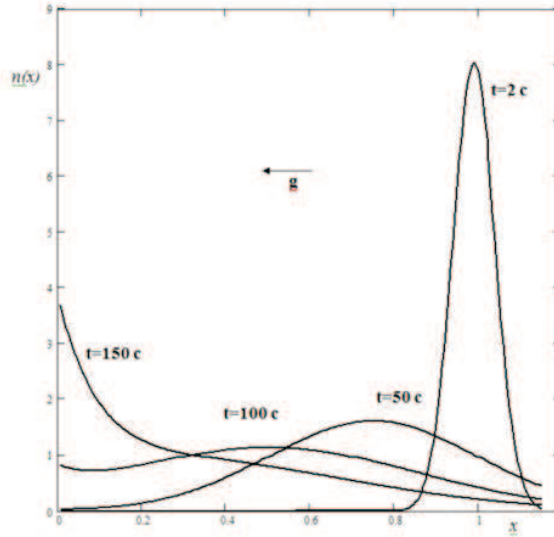


Рис. 4.

Как видно из рис. 4, распределение вероятностей местонахождения частицы сначала расплывается, двигаясь вниз, и, в конце концов, преобразуется в распределение Больцмана.

Изложенная задача эквивалентна задаче, когда множество N частиц с плотностью ρ_0 распределено на одной плоскости на некоторой высоте h (рис. 5). Тогда распределение количества частиц описывается кривой (20), при этом количество частиц будет пропорционально площади фигуры, заключенной внутри области, граничащей с горизонтальной осью и кривой на рис. 4.

В реальности добываемые куски золота находятся в объеме отсадочной постели случайным образом. При моделировании этого распределения можно воспользоваться генератором случайных чисел. Если имеется достаточно много зерен исследуемого материала, то первоначальное распределение будет приблизительно равномерным. Поэтому рассмотрим некоторую равномерно распределенную систему (рис. 6).

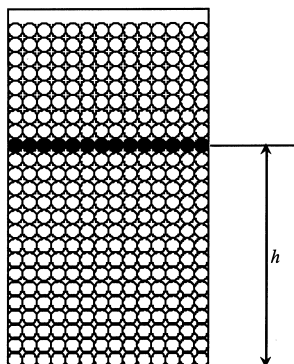


Рис. 5.

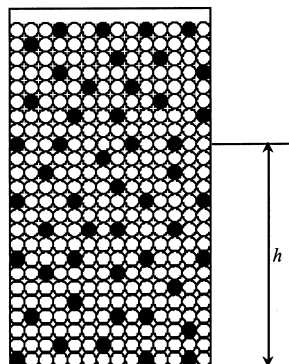


Рис. 6.

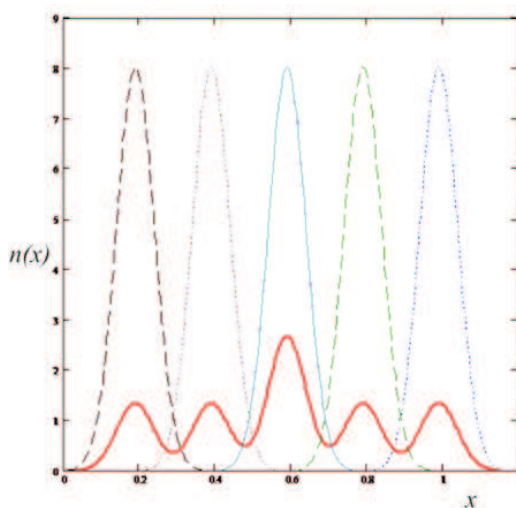


Рис. 7.

На рис. 7 представлены зависимости при равномерном распределении.

Темная сплошная кривая иллюстрирует суммарное распределение согласно формуле

$$n(t, x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i(t, x). \quad (21)$$

На рис. 8 показаны графики зависимостей суммарного распределения, когда начальное состояние имело равномерное распределение исследуемых зерен, в различные моменты времени.

Полученные распределения позволяют при заданных значениях добываемых фракций (например, в процентах от общего объема) с равномерным начальным распределением вычислить вероятное время, за которое образуется некоторый заданный слой материала на дне емкости отсадочной постели с определенной концентрацией полезной фракции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кизевальтер Б. В. Теоретические основы гравитационных процессов обогащения. М.:

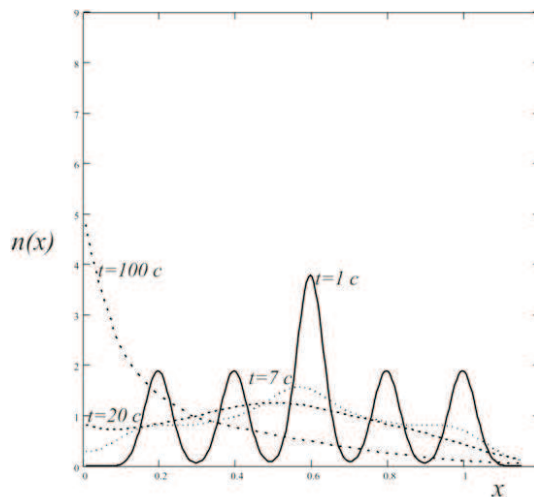


Рис. 8.

Недра, 1979.

2. Виноградов Н. Н. Вопросы теории и интенсификации процесса отсадки: Дис. ... д-ра техн. наук. М.: ИГИ, 1965.
3. Рафалес-Ламарка Э. Э. Применение методов теории вероятностных процессов при исследовании расслоения постели отсадочных машин // Тр. Укр. НИИ углеобогащения. М. 1964. Т. 3. С. 50–68.
4. Огурцов В. А., Огурцов А. В., Галиева А. Ф. Исследование распределения частиц мелкой фракции в слое сыпучего материала на поверхности сита виброгрохота // Вестн. ИГЭУ. 2008. Т. 3. С. 1–3.
5. Квасников И. А. Термодинамика и статистическая физика. Т. 3. Неравновесная термодинамика. М.: УРСС, 2003.

Статья поступила 29 октября 2013 г.

Никифорова Людмила Владимировна
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
Физико-технический институт
ул. Кулаковского 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)
nliudmilav@mail.ru

Матвеев Андрей Иннокентьевич
Институт горного дела Севера им. Н. В. Черского СО РАН,
пр. Ленина 43, Якутск 678980, Республика Саха (Якутия)
andrei.mati@yandex.ru

Слепцова Екатерина Семеновна
Институт горного дела Севера им. Н. В. Черского СО РАН,
пр. Ленина 43, Якутск 678980, Республика Саха (Якутия)
slept@mail.ru

Яковлев Борис Васильевич
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
Физико-технический институт
ул. Кулаковского 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)
b-yakovlev@mail.ru

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

К публикации в «Математических заметках ЯГУ» принимаются оригинальные статьи, содержащие новые результаты в области математики и ее приложений. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются.

В редакцию представляется рукопись в двух экземплярах объемом не более 1 авторского листа, оформленная согласно стандартным требованиям к авторским оригиналам. К рукописи должны быть приложены два экземпляра аннотации и список ключевых слов на двух языках (русский и английский), шифр УДК. Депонирование рукописи редакцией не осуществляется. Авторы обязаны указать место работы, должность и контактную информацию на двух языках. В случае возвращения статьи для переработки указываются две даты поступления — первоначальная дата и дата получения редакцией окончательного текста.

Основные требования к оформлению рукописи:

1. Текст статьи должен быть напечатан через 2 интервала на одной стороне листа белой писчей бумаги форматом 210×300 мм.
2. Рисунки и сложные диаграммы выполняются на отдельных листах с указанием на обороте фамилии автора, название статьи и номера рисунка; их место в тексте указывается на полях статьи.
3. Номер формулы ставится у правого края листа.
4. Рукописи желательно подготовить с использованием наборных систем типа TEX.
5. В рукописях, подготовленных с помощью текстовых редакторов типа Word, должны быть размечены греческие, готические, латинские рукописные буквы, указано использование букв прямого начертания, а также проведена разметка индексов.
6. В авторских оригиналах, подготовленных с использованием наборных систем типа TEX и выданных на лазерном принтере, разметка формул не проводится, однако на полях поясняются буквы готического алфавита.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Список литературы на двух языках печатается в конце текста на отдельном листе. Ссылки на литературу в тексте нумеруются в порядке их появления и даются в квадратных скобках. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Оформление литературы должно соответствовать требованиям стандартов (примеры библиографических описаний см. в последних номерах журнала).

Рукописи, оформленные не по стандартам или превышающие указанный выше объем, возвращаются.