



СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. К. АММОСОВА

ISSN 2411-9326

# Математические заметки СВФУ

Том 30  
№ 1. 2023

## **Редакционный совет**

**Главный редактор:** Егоров И. Е., д.ф.-м.н., профессор, СВФУ

**Зам. главного редактора:** Кожанов А. И., д.ф.-м.н., профессор, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

**Зам. главного редактора:** Попов С. В., д.ф.-м.н., профессор, СВФУ

**Ответственный секретарь:** Евсеев З. И., СВФУ

### **Члены редакционного совета:**

**Бородин О. В.**, д.ф.-м.н., профессор, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

**Вабищевич П. Н.**, д.ф.-м.н., профессор, Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН

**Васильев В. И.**, д.ф.-м.н., профессор, СВФУ

**Григорьев Ю. М.**, д.ф.-м.н., СВФУ

**Зикиров О. С.**, д.ф.-м.н., профессор, Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Узбекистан

**Морозов А. С.**, д.ф.-м.н., профессор, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

**Пятков С. Г.**, д.ф.-м.н., профессор, Югорский государственный университет

**Хлуднев А. М.**, д.ф.-м.н., профессор, Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

**Itou H.**, Ph.D., Professor, Tokyo University of Science, Japan

**Ruzhansky M.**, Professor, Ghent University, Belgium

**Tani A.**, Professor, Keio University, Japan

**Xin-Lin Gao**, Professor, Southern Methodist University, USA

СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени М. К. АММОСОВА

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ СВФУ

ОСНОВАН В 1994 ГОДУ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ВЫХОДИТ 4 РАЗА В ГОД

Том 30, № 1 (117)

Январь—март, 2023

## СОДЕРЖАНИЕ

### Математика

<b>Бубякин И. В.</b> <i>К проективно-дифференциальной геометрии комплексов <math>m</math>-мерных плоскостей проективного пространства <math>P^n</math>, содержащих конечное число торсов</i> .....	<b>3</b>
<b>I. V. Bubyakin</b> <i>To projective differential geometry of complexes of <math>m</math>-dimensional planes in projective space <math>P^n</math> containing a finite number of developable surfaces</i> .....	<b>18</b>
<b>Петрушко И. М., Капицына Т. В., Петрушко М. И.</b> <i>О первой смешанной задаче для вырождающихся параболических уравнений в звездных областях с ляпуновской границей в банаховых пространствах</i> .....	<b>21</b>
<b>I. M. Petrushko, T. V. Kapitsyna, M. I. Petrushko</b> <i>On the first mixed problem for degenerate parabolic equations in stellar domains with Lyapunov boundary in Banach spaces</i> .....	<b>38</b>
<b>Ройтенберг В. III.</b> <i>О полиномиальных дифференциальных уравнениях второго порядка на окружности, имеющих первую степень негрубости</i> .....	<b>40</b>
<b>V. Sh. Roitenberg</b> <i>On second-order differential equations on the circle with the first degree of structural instability</i> .....	<b>49</b>
<b>K. S. Fayazov and Y. K. Khudayberganov</b> <i>An ill-posed boundary value problem for a mixed type second-order differential equation with two degenerate lines</i> .....	<b>51</b>
<b>L. I. Kononenko</b> <i>An inverse problem of chemical kinetics in a nondegenerate case</i> .....	<b>63</b>

## Математическое моделирование

<b>Иванов В. А., Рожин И. И.</b> Численное исследование диссоциации гидрата природного газа в лабораторном образце песчаника при депрессионном режиме .....	<b>72</b>
<b>V. A. Ivanov, I. I. Rozhin</b> Numerical study of natural gas hydrate dissociation in a laboratory sandstone sample under a depression regime .....	87
<b>Имомназаров Х. Х., Михайлов А. А., Омонов А. Т., Тордье С.</b> Численное моделирование распространения в пористой среде сейсмических волн от сингулярных источников .....	89
<b>Kh. Kh. Imomnazarov, A. A. Mikhailov, A. T. Omonov, S. Tordeux</b> Numerical modeling of the seismic waves propagation in a porous medium from singular sources .....	98
<b>Муратов М. В., Конов Д. С., Петров Д. И., Петров И. Б.</b> Применение сверточных нейронных сетей для поиска и определения физических характеристик неоднородностей в геологической среде по сейсмическим данным .....	101
<b>M. V. Muratov, D. S. Konov, D. I. Petrov, I. B. Petrov</b> Application of convolutional neural networks for search and determination of physical characteristics of inhomogeneities in geological media from seismic data .....	112

## Математическая жизнь

<b>Межгородской научно-исследовательский семинар «Неклассические задачи математической физики»</b> .....	<b>114</b>
--	------------

АДРЕС ИЗДАТЕЛЯ:  
СВФУ, ул. Белинского, 58, Якутск, 677000

АДРЕС РЕДАКЦИИ:  
СВФУ, ул. Кулаковского, 48, каб. 543, Якутск, 677000  
Телефон: 8(4112)32-14-99, Факс: 8(4112)36-43-47;  
<http://mzsvfu.ru>  
e-mail: prokopevav85@gmail.com; yktmatzam@gmail.com;  
ivanegorov51@mail.ru

© Северо-Восточный федеральный университет  
имени М. К. Аммосова, 2023

К ПРОЕКТИВНО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ  
ГЕОМЕТРИИ КОМПЛЕКСОВ  $m$ –МЕРНЫХ  
ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА  
 $P^n$ , СОДЕРЖАЩИХ КОНЕЧНОЕ ЧИСЛО ТОРСОВ

И. В. Бубякин

**Аннотация.** Предметом исследования настоящей статьи является дифференциальная геометрия  $\rho$ -мерных комплексов  $C^\rho$   $m$ -мерных плоскостей в проективном пространстве  $P^n$ , содержащих конечное число торсов. Настоящая работа относится к исследованиям в области проективной дифференциальной геометрии на основе метода подвижного репера Э. Картана и метода внешних дифференциальных форм. Эти методы позволяют с единой точки зрения изучать дифференциальную геометрию подмногообразий различных размерностей грависманова многообразия, а также обобщить полученные результаты на более широкие классы многообразий многомерных плоскостей. Для изучения таких подмногообразий применяется грависманово отображение многообразия  $G(m, n)$  на  $(m+1)(n-m)$ -мерное алгебраическое многообразие  $\Omega(m, n)$  пространства  $P^N$ , где  $N = \binom{n+1}{m+1} - 1$ .

Основная задача дифференциальной геометрии подмногообразий грависмановых многообразий заключается в проведении единой классификации различных классов таких подмногообразий, выяснения их строения и связанная с этим задача определения произвола их существования, а также изучение свойств подмногообразий различных классов. Пересечение алгебраического многообразия  $\Omega(m, n)$  с его касательным пространством  $T_l\Omega(m, n)$  представляет собой конус Серге  $C_l(m+1, n-m)$ . Этот конус имеет размерность  $n$  и несет плоские образующие размерностей  $m+1$  и  $n-m$ , пересекающиеся по прямым. Проективизация  $PB_l(2)$  этого конуса есть многообразие Серге  $S_l(m, n-m-1)$ . Многообразие Серге  $S_l(m, n-m-1)$  инвариантно при проективных преобразованиях пространства  $P^{(m+1)(n-m)-1} = PT_l\Omega(m, n)$ , являющегося проективизацией с центром в точке  $l$  касательного пространства  $T_l\Omega(m, n)$  к алгебраическому многообразию  $\Omega(m, n)$ . Многообразие Серге  $S_l(m, n-m-1)$  используется для классификации рассматриваемых подмногообразий грависманова многообразия  $G(m, n)$ , а также для интерпретации их свойств в терминах проективных алгебраических многообразий. Классификация подмногообразий грависманова многообразия  $G(m, n)$  основана на различных конфигурациях плоскости  $PT_l\Omega(m, n)$  и многообразия Серге  $S_l(m, n-m-1)$ . Целью настоящей статьи является геометрическое доказательство теоремы об определении порядка многообразия Серге  $S_l(m, n-m-1)$ .

DOI: 10.25587/SVFU.2023.10.59.001

**Ключевые слова:** грависманово многообразие, комплексы многомерных плоскостей, многообразие Серге.

## 1. Введение

В монографии [1] М. А. Акивисом и В. В. Гольдбергом исследуется теория подмногообразий в многомерном проективном пространстве. В частности рассматриваются подмногообразия грассмановых многообразий. Те же авторы в работе [2] изучают многообразия с вырожденным гауссовым отображением. Эти многообразия являются многомерными аналогами торсов или развертывающихся поверхностей трехмерного евклидова пространства. В последнее время многообразия с вырожденным гауссовым отображением изучаются как с проективной точки зрения, так и с евклидовой. М. А. Акивис и В. В. Гольдберг по проективной дифференциальной геометрии написали монографию [3], в которой получены фундаментальные результаты. Например, что многообразия с вырожденным гауссовым отображением включают в себя не только конусы и торсы, но и достаточно широкий класс гиперповерхностей, которые не являются конусами или торсами. В своих рассуждениях авторы систематически используют фокальные образы: фокальные гиперповерхности и фокальные конусы, ассоциированные с многообразием с вырожденным гауссовым отображением. Это позволяет авторам глубоко изучить дифференциальную геометрию исследуемых многообразий и провести полную их классификацию.

М. А. Акивисом и В. В. Гольдбергом написана фундаментальная монография [4], в которой наряду с глубоким изучением дифференциальной геометрии конформного и псевдоконформного пространств произвольной размерности и подмногообразий в этих пространствах основательно исследуется дифференциальная геометрия грассмановых многообразий, многообразий с грассмановой структурой и многообразий с почти грассмановой структурой. Почти грассманову структуру М. А. Акивис рассматривает как расслоение конусов Серре на многообразии. Результаты, полученные в этой монографии, имеют фундаментальный характер по проективной и конформной дифференциальным геометриям. Эти результаты являются классическими — настолько они глубоки как по содержанию, так и по форме и полноте изложения.

Указанное определение почти грассмановой структуры использовали в дальнейшем в интегральной геометрии Радона — Хелгасона И. М. Гельфанд и С. П. Гиндикин в монографии [5], а также в других своих работах, решая основную задачу интегральной геометрии для  $n$ -мерных допустимых комплексов прямых и  $n$ -мерных допустимых комплексов  $m$ -мерных плоскостей в проективном пространстве  $P^n$ . Полученные И. М. Гельфандом и С. П. Гиндикиным формулы обращения лежат в основе компьютерной томографии. Такие задачи были положены в основу послойного изображения внутренней структуры исследуемого объекта. В том числе в этих исследованиях были получены новейшие научные достижения: в 2003 г. за изобретение метода магнитно-резонансной томографии — способа получения томографических — послойных изображений для исследования внутренних органов и тканей человека Нобелевскую премию по физиологии и медицине получили Мэнсфилд и Лотербур. В 2010 г. была

создана четырехмерная электронная томография — техника визуализирования динамики трехмерных объектов во времени. Эта техника позволяет наблюдать за пространственно-временными характеристиками микрообъектов.

Таким образом, М. А. Акивис и В. В. Гольдберг открывают новое поле исследований в проективной дифференциальной геометрии, в частности, дифференциальную геометрию подмногообразий грассманова многообразия, которое успешно развивается и применяется в настоящее время. Актуальность таких исследований заключается в том, что дифференциальная геометрия подмногообразий грассмановых многообразий расширяет теорию грассмановых многообразий [6–9], связана с исследованиями лагранжевых и квантовых грассмановых многообразий [10, 11], а также применяется в теоретической физике [12, 13].

Предметом исследований автора является геометрия комплексов  $m$ -мерных плоскостей в проективном пространстве  $P^n$ , содержащих конечное число торсов. Отметим, что некоторые классы таких комплексов [5] из изучаемых комплексов двумерных плоскостей исследовались в [14]. Настоящая работа относится к исследованиям в области проективной дифференциальной геометрии на основе метода подвижного репера Э. Картана и метода внешних дифференциальных форм [1]. Эти методы позволяют с единой точки зрения изучать дифференциальную геометрию подмногообразий различных размерностей грассманова многообразия, а также обобщить полученные результаты для конкретных многообразий на более широкие классы многообразий многомерных плоскостей. Основная задача дифференциальной геометрии подмногообразий грассмановых многообразий заключается в проведении единой классификации различных классов таких подмногообразий, выяснения их строения и связанная с этим задача определения произвола их существования, а также изучение свойств подмногообразий различных классов. Данные исследования являются продолжением работ [15–23]. Для изучения таких подмногообразий применяется грассманово отображение многообразия  $G(m, n)$  на  $(m + 1)(n - m)$ -мерное алгебраическое многообразие  $\Omega(m, n)$  пространства  $P^N$ , где  $N = \binom{n+1}{m+1} - 1$ .

Заметим, что в дифференциальной геометрии подмногообразий грассманова многообразия операцию суммирования будем производить по правилу Эйнштейна, как это принято в тензорном анализе, в частности, в его приложениях к общей теории относительности.

В работах [24, 25] М. А. Акивис отмечает, что пересечение алгебраического многообразия  $\Omega(m, n)$  с его касательным пространством  $T_l\Omega(m, n)$  представляет собой конус Сегре  $C_l(m + 1, n - m)$ . Этот конус имеет размерность  $n$  и несет плоские образующие размерностей  $m + 1$  и  $n - m$ , пересекающиеся по прямым. Проективизация  $PB_l(2)$  этого конуса есть многообразие Сегре  $S_l(m, n - m - 1)$ . Многообразие Сегре  $S_l(m, n - m - 1)$  инвариантно при проективных преобразованиях пространства  $P^{(m+1)(n-m)-1} = PT_l\Omega(m, n)$ , являющемся проективизацией с центром в точке  $l$  касательного пространства  $T_l\Omega(m, n)$  к алгебраическому многообразию  $\Omega(m, n)$ , и его будем использовать для классификации

рассматриваемых подмногообразий грассманова многообразия  $G(m, n)$ , а также для интерпретации их свойств в терминах проективных алгебраических многообразий. Классификация подмногообразий грассманова многообразия  $G(m, n)$  основана на различных конфигурациях плоскости  $PT_l\Omega(m, n)$  и многообразия Серре  $S_l(m, n - m - 1)$ . Целью настоящей статьи является геометрическое доказательство теоремы об определении порядка многообразия Серре  $S_l(m, n - m - 1)$ .

Дифференциальная геометрия грассмановых многообразий представляет самостоятельный интерес для дифференциальной геометрии, а также одновременно является одним из важных средств построения и изучения других многообразий в проективных пространствах. Одной из наиболее красивых областей дифференциальной геометрии, где во всей полноте проявляются преимущества инвариантных бескоординатных методов исследования, является теория комплексов многомерных плоскостей проективного пространства [14].

## 2. Отображение и многообразие Серре $S(m, n)$

Отображение Серре [26–28] определяется как отображение

$$\varphi : P^m \times P^n \rightarrow P^{(m+1)(n+1)-1},$$

которое переводит упорядоченную пару точек  $X$  и  $Y$  проективных пространств  $P^m$  и  $P^n$  в точку  $Z$ , однородные координаты которой — попарные произведения однородных координат точек  $X$  и  $Y$ , записанные в лексикографическом порядке:

$$\varphi : (x_0 : x_1 : \dots : x_m), (y^0 : y^1 : \dots : y^n) \rightarrow (x_0 y^0 : x_0 y^1 : \dots : x_i y^p : \dots : x_m y^n).$$

Образ этого отображения является проективным алгебраическим многообразием, называемым многообразием Серре, и обозначается  $S(m, n)$ . Размерность многообразия  $S(m, n)$  равна  $m + n$ . Если координаты точки  $Z$  в пространстве  $P^{(m+1)(n+1)-1}$  обозначить через  $z_u^a$ , то многообразие  $S(m, n)$  представляет собой пересечение квадрик:

$$z_u^a z_v^b - z_u^b z_v^a = 0,$$

где  $u, v = 0, 1, \dots, m$ ;  $a, b = 0, 1, \dots, n$ . Запишем однородные координаты точки  $Z$  проективного пространства  $P^{(m+1)(n+1)-1}$  в виде прямоугольной матрицы  $(z_u^a)$  размеров  $(m+1) \times (n+1)$ . Тогда последняя система уравнений эквивалентна условию вида

$$\text{rang}(z_u^a) = 1.$$

Многообразие Серре  $S(m, n)$  [24, 25] можно определить параметрическими уравнениями в виде

$$z_u^a = x_u y^a,$$

в котором  $z_u^a$  — однородные координаты точки  $Z$  проективного пространства  $P^{(m+1)(n+1)-1}$ . Из этих параметрических уравнений вытекает, что многообразие

$S(m, n)$  является образом прямого произведения двух проективных пространств  $P^m$  и  $P^n$  размерностей соответственно  $m$  и  $n$ .

Отметим одно важное свойство многообразий Серге  $S(m, n)$ , а именно эти многообразия остаются инвариантными при проективных преобразованиях пространства  $P^{(m+1)(n+1)-1}$ , определяемых уравнениями

$$z_u^{*a} = \lambda_b^a \mu_u^v z_v^b.$$

Многообразие  $S(m, n)$  несет  $n$ -параметрическое семейство  $m$ -мерных плоских образующих:  $\alpha$ -образующих, для получения параметрических уравнений которых необходимо зафиксировать в уравнениях (1) однородные координаты  $y^a$  точки проективного пространства  $P^n$ , а также  $m$ -параметрическое семейство  $n$ -мерных плоских образующих:  $\beta$ -образующих, для получения параметрических уравнений которых необходимо зафиксировать в последних уравнениях однородные координаты  $x_u$  точки проективного пространства  $P^m$ . При этом через каждую точку многообразия Серге  $S(m, n)$  проходит одна плоская образующая одного семейства и одна плоская образующая другого семейства. Любые две плоские образующие различных семейств пересекаются в одной точке, а плоские образующие одного семейства не имеют общих точек.

Многообразие  $S(m, n)$  можно представить как семейство  $(m+n-1)$ -мерных алгебраических многообразий Серге  $S(m-1, n)$  для всех гиперплоскостей  $p$  проективного пространства  $P^m$  или как семейство  $(m+n-1)$ -мерных алгебраических многообразий Серге  $S(m, n-1)$  для всех гиперплоскостей  $p^*$  проективного пространства  $P^n$ . Замечая, что пересечение алгебраических многообразий  $S(m, n-1)$  и  $S(m-1, n)$  для двух фиксированных гиперплоскостей  $p$  и  $p^*$  проективных пространств  $P^n$  и  $P^m$  представляет собой  $(m+n-2)$ -мерное алгебраическое многообразие Серге  $S(m-1, n-1)$ , можно многообразие  $S(m, n)$  представить как семейство  $(m+n-2)$ -мерных алгебраических многообразий Серге  $S(m-1, n-1)$  для всех гиперплоскостей  $p$  и  $p^*$  проективных пространств  $P^m$  и  $P^n$ .

Рассмотрим в качестве примера двумерное многообразие Серге  $S(1, 1)$ . Многообразие  $S(1, 1)$  представляет собой невырожденную линейчатую квадрику трехмерного проективного пространства, несущую однопараметрическое семейство прямолинейных  $\alpha$ -образующих и однопараметрическое семейство прямолинейных  $\beta$ -образующих. Через каждую точку этой квадрики проходит одна  $\alpha$ -образующая и одна  $\beta$ -образующая. При этом две прямолинейные образующие, принадлежащие различным семействам, пересекаются, а две прямолинейные образующие, принадлежащие одному семейству, не имеют общих точек. Квадрика  $S(1, 1)$  определяется уравнением

$$z_0^0 z_1^1 - z_0^1 z_1^0 = 0.$$

Многообразие  $S(1, 1)$  можно представить как одномерное многообразие  $\alpha$ -образующих и как одномерное многообразие  $\beta$ -образующих. С другой стороны

ны, это многообразие Сегре  $S(1, 1)$  образуют прямые, пересекающие три фиксированные прямые общего положения трехмерного проективного пространства. Здесь следует заметить, что в аффинных координатах двумерному многообразию Сегре  $S(1, 1)$  соответствуют однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид.

**3. Характеристические  $(m - 1)$ - и  $(m + 1)$ -мерные  
плоскости торсов, принадлежащих комплексам  
 $m$ -мерных плоскостей  $n$ -мерного проективного  
пространства, содержащих конечное число торсов**

Рассмотрим в проективном пространстве  $P^n$   $\rho$ -мерные ( $\rho = m(n-m-1)+1$ ) комплексы  $C^\rho$   $m$ -мерных плоскостей, содержащих конечное число торсов — развертывающихся поверхностей. Условие, при котором комплексы  $C^\rho$ , содержащие конечное число торсов, определяется из следующих рассуждений. Рассмотрим проективизацию касательной плоскости  $T_l\Omega(m, n)$  с центром в точке  $l$ . Эта проективизация представляет собой проективное пространство  $P^{(n-m)(m+1)-1} = PT_l\Omega(m, n)$ . В этом проективном пространстве должно выполняться следующее равенство:

$$\begin{aligned} \dim PT_lV^\rho + \dim S_l(m, n-m-1) \\ = \dim P^{(m+1)(n-m)-1} + \dim(PT_lV^\rho \cap S_l(m, n-m-1)). \end{aligned}$$

Если размерность пересечения плоскости  $PT_lV^\rho$  и многообразия Сегре  $S_l(m, n-m-1)$  равна  $r$ , то получим

$$(\rho - 1) + (m + (n - m - 1)) = (m + 1)(n - m) - 1 + r.$$

Отсюда следует, что

$$\rho - 1 = m(n - m - 1) + r.$$

Утверждение, что комплекс  $C^\rho$   $m$ -мерных плоскостей в проективном пространстве  $P^n$  содержит конечное число торсов, означает равенство нулю размерности пересечения плоскости  $PT_lV^\rho$  и многообразия Сегре  $S_l(m, n-m-1)$ , т. е.  $r = 0$ . Если  $r = 0$ , то искомую зависимость размерности комплекса  $C^\rho$ , его  $m$ -мерной образующей и проективного пространства  $P^n$  получаем в виде

$$\rho - 1 = m(n - m - 1).$$

Таким образом, комплекс  $C^\rho$   $m$ -мерных плоскостей в проективном пространстве  $P^n$  содержит конечное число торсов тогда и только тогда, когда размерность комплекса  $C^\rho$ , его  $m$ -мерной образующей и проективного пространства  $P^n$  связаны полученным соотношением.

Комплексу  $C^\rho$  при грассмановом отображении [24, 25] соответствует  $\rho$ -мерное многообразие  $V^\rho$ , лежащее на алгебраическом многообразии  $\Omega(m, n)$ , являющимся образом многообразия  $G(m, n)$   $m$ -мерных плоскостей проективного

пространства  $P^n$ . В каждой своей точке  $l$ , соответствующей  $m$ -мерной плоскости  $L$  проективного пространства  $P^n$ , многообразие  $V^\rho$  имеет  $\rho$ -мерную касательную плоскость  $T_l V^\rho$ .

Проективизация касательной плоскости  $T_l V^\rho$  с центром в точке  $l$  представляет собой  $(\rho - 1)$ -мерную проективную плоскость  $PT_l V^\rho$ . Различным видам взаимного расположения плоскости  $PT_l V^\rho$  и инвариантного многообразия Сегре  $S_l(m, n - m - 1) = P^m \times P^{n-m-1}$ , являющимся проективизацией асимптотического конуса  $B_l(2)$  асимптотических направлений второго порядка, соответствуют различные классы комплексов  $C^\rho \subset G(m, n)$ . При этом конус  $B_l(2)$  есть конус Сегре  $C_l(m+1, n-m)$  и представляет собой пересечение алгебраического многообразия  $\Omega(m, n)$  и его касательного пространства  $T_l \Omega(m, n)$ , т. е.

$$B_l(2) = \Omega(m, n) \cap T_l \Omega(m, n).$$

В проективном пространстве  $P^n$  рассмотрим семейство точечных реперов  $A_I$  ( $I, J, K = 0, 1, \dots, n$ ) и семейство реперов, образованных гиперплоскостями

$$\alpha^I = (-1)^I A_0 \wedge \dots \wedge A_{I-1} \wedge A_{I+1} \wedge \dots \wedge A_n.$$

Уравнения перемещения этих реперов имеют вид

$$dA_I = \omega_I^J A_J, \quad d\alpha^I = -\omega_J^I \alpha^J,$$

где  $\omega_I^J$  — линейные дифференциальные формы, удовлетворяющие структурным уравнениям проективного пространства  $P^n$ :

$$d\omega_I^J = \omega_I^K \wedge \omega_K^J, \quad \Sigma \omega_I^I = 0.$$

Пусть  $L$  —  $m$ -мерная плоскость пространства  $P^n$ . Связем с этой плоскостью семейство точечных реперов так, чтобы точки  $A_i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ) принадлежали плоскости  $L$ . Тогда

$$dA_i = \omega_i^j A_j + \omega_i^p A_p, \quad dA_p = \omega_p^i A_i + \omega_p^q A_q,$$

где  $i, j = 0, 1, \dots, m$  и  $p, q = m+1, m+2, \dots, n$ . Отсюда видно, что  $m$ -мерная плоскость  $L$  в пространстве  $P^n$  зависит от  $(m+1)(n-m)$  параметров, линейными комбинациями дифференциалов которых являются формы  $\omega_i^p$ . На многообразии  $\Omega(m, n)$  асимптотические направления второго порядка, выходящие из точки  $l$ , определяются условием

$$d^2 l = 0 \pmod{T_l \Omega(m, n)}.$$

Отсюда следует, что уравнения конуса  $B_l(2)$  асимптотических направлений второго порядка имеют вид

$$\omega_i^p \omega_j^q - \omega_i^q \omega_j^p = 0. \quad (1)$$

Из этих уравнений видно, что координаты  $\omega_i^p$  точки конуса  $B_l(2)$  допускают параметрическое представление

$$\omega_i^p = a_i x^p. \quad (2)$$

Поэтому конус  $B_l(2)$  асимптотических направлений второго порядка совпадает с конусом Серге  $C_l(m+1, n-m)$ .

Рассмотрим теперь проективизацию касательной плоскости  $T_l\Omega(m, n)$  с центром в точке  $l$ . Эта проективизация представляет собой проективное пространство  $P^{(n-m)(m+1)-1} = PT_l\Omega(m, n)$ , в котором формы  $\omega_i^p$  являются однородными координатами произвольной точки. При проективизации асимптотическому конусу  $B_l(2)$  соответствует многообразие Серге  $S_l(m, n-m-1)$  проективного пространства  $P^{(n-m)(m+1)-1}$ , определяемого теми же уравнениями (1), что и конус  $B_l(2)$  в касательном пространстве  $T_l\Omega(m, n)$ . Многообразие Серге  $S_l(m, n-m-1)$  представляет собой  $((m+1)(n-m)-1) - m(n-m-1) = (n-1)$ -мерную алгебраическую поверхность, несущую два семейства плоских образующих размерностей  $m$  и  $n-m-1$ , зависящих соответственно от  $n-m-1$  и  $m$  параметров. При этом две образующие, принадлежащие различным семействам, имеют общую точку, а две образующие, принадлежащие одному семейству, не пересекаются. Через каждую его точку проходит по одной образующей из каждого семейства. В пространстве  $P^n$  многообразию Серге  $S_l(m, n-m-1)$  соответствует совокупность  $m$ -мерных плоскостей, пересекающих  $m$ -мерную плоскость  $L$  по  $(m-1)$ -мерной плоскости. Каждая из этих  $m$ -мерных плоскостей лежит в одной  $(m+1)$ -мерной плоскости с  $m$ -мерной плоскостью  $L$ . Многообразие Серге  $S_l(m, n-m-1)$  остается инвариантным при проективных преобразованиях пространства  $P^{(n-m)(m+1)-1}$ .

Плоскость  $PT_lV^\rho$  в пространстве  $P^{(n-m)(m+1)-1} = PT_l\Omega(m, n)$  определяется теми же уравнениями, что и касательная плоскость  $T_lV^\rho$  в касательном пространстве  $T_l\Omega(m, n)$ .

Поскольку на комплексе  $C^\rho$   $m$ -мерная плоскость  $L$  зависит от  $\rho$  параметров, среди форм  $\omega_i^p$  лишь  $\rho$  линейно независимых. Следовательно, комплекс  $C^\rho$  задается  $n-1$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, n-1$ ) дифференциальными уравнениями:

$$\Lambda_p^{\alpha i} \omega_i^p = 0, \quad (3)$$

где  $\omega_i^p$  — линейные дифференциальные формы, определяющие перемещение  $m$ -мерной плоскости  $L$  в пространстве  $P^n$ .

Рассмотрим однопараметрическое семейство  $m$ -мерных плоскостей  $L$  в пространстве  $P^n$ . Такое семейство представляет собой  $(m+1)$ -мерную поверхность с  $m$ -мерными плоскими образующими. Эта поверхность называется *торсом* [1, 4], если она является тангенциально вырожденной поверхностью ранга один. Торсу на алгебраическом многообразии  $\Omega(m, n)$  соответствует кривая, касательные к которой служат прямолинейными образующими этого многообразия. Данная кривая является асимптотической линией многообразия  $\Omega(m, n)$ , поэтому в произвольной точке этой линии выполняются уравнения (1). Следовательно, дифференциальные уравнения торсов в пространстве  $P^n$  можно записать в виде

$$\omega_i^p = a_i x^p dt. \quad (4)$$

Каждый торс, проходящий через  $m$ -мерную плоскость  $L$ , определяет на ней характеристическую  $(m - 1)$ -мерную плоскость, которая является пересечением двух бесконечно близких образующих, и характеристическую  $(m + 1)$ -мерную плоскость — касательную плоскость к торсу. Найдем уравнения характеристических образов торсов. Пусть  $M = x^i A_i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ) — произвольная точка  $m$ -мерной плоскости  $L$ . Дифференциал этой точки в силу (4) вычисляется так:

$$dM = (dx^i + x^j \omega_j^i) A_i + (a_i x^i)(x^p A_p) dt,$$

где  $p = m + 1, m + 2, \dots, n$ . Отсюда видно, что характеристическая  $(m - 1)$ -мерная плоскость в  $m$ -мерной плоской образующей  $L$  комплекса  $C^\rho$  определяется уравнением

$$a_i x^i = 0,$$

а характеристическая  $(m + 1)$ -мерная плоскость, содержащая  $m$ -мерную плоскую образующую  $L$  комплекса  $C^\rho$  определяется  $m$ -мерной плоскостью  $L$  и точкой:

$$S = x^p A_p.$$

Из системы (3) ввиду (4) получим следующую систему уравнений:

$$\Lambda_p^{\alpha i} a_i x^p = 0, \quad (5)$$

где  $\alpha = 1, 2, \dots, n - 1$ . Эта система определяет характеристическую  $(m - 1)$ -мерную плоскость торса, принадлежащего комплексу  $C^\rho$ , если выполняется условие

$$\text{rang}(\Lambda_p^{\alpha i} a_i) = n - m - 1. \quad (6)$$

Из этого соотношения определяются характеристические  $(m - 1)$ -мерные плоскости в  $m$ -мерной образующей  $L$  комплекса  $C^\rho$ . Условие

$$\text{rang}(\Lambda_p^{\alpha i} x^p) = m \quad (7)$$

определяет точки  $S$  пересечения характеристических  $(m + 1)$ -мерных плоскостей с аффинно двойственной к  $m$ -мерной плоскости  $L$  в пространстве  $P^n$  ( $n - m - 1$ )-мерной плоскостью. Эти точки вместе с  $m$ -мерной плоскостью  $L$  определяют  $(m + 1)$ -мерные характеристические плоскости торса —  $(m + 1)$ -мерные касательные плоскости торса.

#### 4. К геометрии инвариантного многообразия Сергея $S_l(m, n - m - 1)$

В проективном пространстве  $P^n$  рассмотрим  $\rho$ -мерный комплекс  $C^\rho$  ( $\rho = m(n - m - 1) + 1$ )  $m$ -мерных плоскостей  $L$ , обладающий конечным числом торсов, принадлежащих этому комплексу. Комплекс  $C^\rho$  задается дифференциальными уравнениями (3).

**Теорема.** Многообразие Серре  $S_l(m, n - m - 1)$  представляет собой  $(n - 1)$ -мерную алгебраическую поверхность порядка  $\binom{n-1}{m} = \binom{n-1}{n-m-1}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Определим порядок алгебраического многообразия Серре  $S_l(m, n - m - 1)$  как число точек этого многообразия, принадлежащих одной  $(\rho - 1)$ -мерной плоскости, пересекающей многообразие  $S_l(m, n - m - 1)$  в конечном числе точек.

Заметим, что для нахождения порядка многообразия Серре  $S_l(m, n - m - 1)$  необходимо определение пересечения  $m(n - m - 1)$  квадрик:

$$\omega_i^p \omega_j^q - \omega_i^q \omega_j^p = 0, \quad (8)$$

тогда как условие, из которого находятся  $(m - 1)$ -мерные характеристические плоскости  $m$ -мерной образующей  $L$  комплекса  $C^\rho$ :

$$\text{rang}(\Lambda_p^{\alpha i} a_i) = n - m - 1, \quad (9)$$

приводит к определению пересечения  $m$  тангенциальных гиперповерхностей класса  $n - m$ , лежащих в  $m$ -мерной плоскости  $L \subset C^\rho$ , а условие, на основе которого находятся  $(m + 1)$ -мерные характеристические плоскости, проходящие через  $m$ -мерную образующую  $L$  комплекса  $C^\rho$ :

$$\text{rang}(\Lambda_p^{\alpha i} x^p) = m, \quad (10)$$

приводит к определению пересечения  $n - m - 1$  гиперконусов с  $m$ -мерной вершиной  $L \subset C^\rho$  порядка  $m + 1$ .

На основании этого для решения поставленной задачи будем использовать геометрию грассмановых многообразий, а также метод математической индукции. При этом решение поставленной задачи методом математической индукции состоит в том, что этот метод применяется в доказательстве утверждений для многообразий  $V^\rho$ , лежащих на грассмановых многообразиях  $G(1, n), G(2, n), \dots, G(m, n)$ , а также для многообразий  $V^\rho$ , принадлежащих грассманову многообразию  $G(m, n)$ , где на первом шаге проверяется справедливость утверждения для многообразия  $G(1, n)$ , на втором шаге — для многообразия  $G(2, n)$ , и, наконец, на третьем шаге в предположении, что утверждение справедливо для многообразия  $G(m, k - 1)$  ( $k = 1, \dots, n$ ), доказывается справедливость утверждения для многообразия  $G(m, k)$ .

Итак, рассмотрим многообразие  $V_1^2 \subset P^3$ , лежащее на грассмановом многообразии  $G(1, 3)$ . Условие (9), определяющее характеристические точки на прямолинейной образующей  $A_0 \wedge A_1$  многообразия  $V_1^2 \subset G(1, 3)$ , представляет собой квадратичное уравнение вида

$$\det(\wedge_{p_1}^{\alpha_1 i_1} a_{i_1}) = 0. \quad (11)$$

где  $i_1 = 0, 1$ ;  $p_1 = 2, 3$ ;  $\alpha_1 = 1, 2$ . Это квадратичное уравнение определяет две характеристические точки на прямолинейной образующей  $A_0 \wedge A_1$  многообразия

$V_1^2$ . Поэтому плоскость  $PT_l V_1^2$  пересекает многообразие Серре  $S_l(1, 1)$  в двух точках и, следовательно,

$$\deg S_l(1, 1) = 2. \quad (12)$$

Это говорит о том, что

$$\deg S_l(1, 1) = \binom{3-1}{1} = \binom{3-1}{3-1-1} = 2. \quad (13)$$

Далее рассмотрим многообразие  $V_1^3 \subset P^4$ , лежащее на грассмановом многообразии  $G(1, 4)$ . Условие (9), из которого находятся характеристические точки на образующей  $A_0 \wedge A_1$  многообразия  $V_1^3 \subset G(1, 4)$ , представляет собой кубическое уравнение вида

$$\det(\wedge_{p_2}^{\alpha_2 i_2} a_{i_2}) = 0. \quad (14)$$

где  $i_2 = 0, 1$ ;  $p_2 = 2, 3, 4$ ;  $\alpha_2 = 1, 2, 3$ . Это кубическое уравнение определяет три характеристические точки на прямолинейной образующей  $A_0 \wedge A_1$  многообразия  $V_1^3$ . Поэтому плоскость  $PT_l V_1^3$  пересекает многообразие Серре  $S_l(1, 2)$  в трех точках и, следовательно,

$$\deg S_l(1, 2) = 3. \quad (15)$$

Это свидетельствует о том, что

$$\deg S_l(1, 2) = \binom{4-1}{1} = \binom{4-1}{4-1-1} = 3. \quad (16)$$

Теперь предположим, что утверждение теоремы верно для некоторого многообразия  $V_1^{k-1} \subset P^k$ , лежащего на грассмановом многообразии  $G(1, k)$ , т. е.

$$\deg S_l(1, k-2) = \binom{k-1}{1} = \binom{k-1}{k-1-1}. \quad (17)$$

Докажем, что утверждение теоремы справедливо для многообразия  $V_1^k \subset P^{k+1}$ , лежащего на грассмановом многообразии  $G(1, k+1)$ :

$$\deg S_l(1, k-1) = \binom{(k+1)-1}{1} = \binom{(k+1)-1}{(k+1)-1-1}. \quad (18)$$

Обозначим разность порядков многообразий Серре  $S_l(m, n-m)$  и  $S_l(m, n-m-1)$  через  $\mu_m$ :

$$\mu_m = \deg S_l(m, n-m) - \deg S_l(m, n-m-1). \quad (19)$$

Поскольку  $m = 1$ , получим

$$\mu_1 = \deg S_l(1, k-1) - \deg S_l(1, k-2) = 1 = \binom{k-1}{0}. \quad (20)$$

Поэтому по предположению имеем

$$\begin{aligned} \deg S_l(1, k-1) &= \deg S_l(1, k-2) + \mu_1 = \deg S_l(1, k-2) + 1 \\ &= \deg S_l(1, k-2) + \binom{k-1}{0} = \binom{k-1}{1} + \binom{k-1}{0} = \binom{k}{1}. \end{aligned} \quad (21)$$

Это доказывает утверждение теоремы для многообразия  $V_1^k \subset G(1, k+1)$ .

Рассмотрим многообразие  $V_2^3$  пространства  $P^4$ , лежащее на грассмановом многообразии  $G(2, 4)$ . Условие (10) определяет характеристические трехмерные характеристические плоскости, проходящие через двумерную образующую  $A_0 \wedge A_1 \wedge A_2$  соответствующего торса, лежащего на многообразии  $V_2^3$ . Оно представляет собой кубическое уравнение вида

$$\det(\wedge_{p_3}^{\alpha_3 i_3} x^{p_3}) = 0. \quad (22)$$

где  $i_3 = 0, 1, 2$ ;  $p_3 = 3, 4$ ;  $\alpha_3 = 1, 2, 3$ . Это кубическое уравнение определяет три трехмерные характеристические плоскости. Поэтому плоскость  $PT_l V_2^3$  пересекает многообразие Серге  $S_l(2, 1)$  в трех точках и, следовательно,

$$\deg S_l(2, 1) = 3. \quad (23)$$

Это говорит о том, что

$$\deg S_l(2, 1) = \binom{4-1}{2} = \binom{4-1}{4-2-1} = 3. \quad (24)$$

Для многообразия  $V_2^5 \subset P^5$ , лежащего на грассмановом многообразии  $G(2, 5)$ , доказательство утверждения теоремы приведено в работе [29], а именно плоскость  $PT_l V_2^5$  пересекает многообразие Серге  $S_l(2, 2)$  в шести точках, т. е.

$$\deg S_l(2, 2) = \binom{4}{2} = \binom{4}{5-2-1} = 6. \quad (25)$$

Теперь предположим, что утверждение теоремы верно для некоторого многообразия  $V_2^{2k-5} \subset P^k$ , лежащего на грассмановом многообразии  $G(2, k)$ , т. е.

$$\deg S_l(2, k-3) = \binom{k-1}{1} = \binom{k-1}{k-2-1}. \quad (26)$$

Докажем, что утверждение теоремы справедливо для многообразия  $V_2^{2k-3} \subset P^{k+1}$ , лежащего на грассмановом многообразии  $G(2, k+1)$ :

$$\deg S_l(2, k-2) = \binom{k}{2} = \binom{k}{(k+1)-2-1}. \quad (27)$$

Поскольку  $m = 2$ , получим

$$\mu_2 = \deg S_l(2, k-2) - \deg S_l(2, k-3) = k-1 = \binom{k-1}{1}. \quad (28)$$

Поэтому по предположению имеем

$$\begin{aligned} \deg S_l(2, k-2) &= \deg S_l(2, k-3) + \mu_2 = \deg S_l(2, k-3) + (k-1) = \\ &= \deg S_l(2, k-3) + \binom{k-1}{1} = \binom{k-1}{2} + \binom{k-1}{1} = \binom{k}{2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Это доказывает утверждение теоремы для многообразия  $V_2^{2k-3} \subset G(2, k+1)$ .

Рассмотрим многообразие  $V_m^{m+1}$  пространства  $P^{m+2}$ , лежащее на грассмановом многообразии  $G(m, m+2)$ . Справедливость утверждения теоремы следует из двойственности данного многообразия многообразию  $V_1^{m+1} \subset P^{m+2}$ , принадлежащему грассманову многообразию  $G(1, m+2)$ :

$$\deg S_l(m, 1) = \deg S_l(1, m) = \binom{m+1}{1} = \binom{m+1}{m}. \quad (30)$$

Теперь рассмотрим многообразие  $V_m^{2m+1}$  пространства  $P^{m+3}$ , лежащее на грассмановом многообразии  $G(m, m+3)$ . Справедливость утверждения теоремы следует из двойственности данного многообразия многообразию  $V_2^{2m+1} \subset P^{m+3}$ , принадлежащему грассманову многообразию  $G(2, m+3)$ :

$$\deg S_l(m, 2) = \deg S_l(2, m) = \binom{m+2}{2} = \binom{m+2}{m}. \quad (31)$$

Предположим, что утверждение теоремы верно для некоторого многообразия  $V_m^{m(k-m-1)+1} \subset P^k$ , лежащего на грассмановом многообразии  $G(m, k)$ , т. е.

$$\deg S_l(m, k-m-1) = \binom{k-1}{m} = \binom{k-1}{k-m-1}. \quad (32)$$

Докажем, что утверждение теоремы справедливо для многообразия  $V_m^{m(k-m)+1} \subset P^{k+1}$ , лежащего на грассмановом многообразии  $G(m, k+1)$ :

$$\deg S_l(m, k-m) = \binom{k}{m} = \binom{k}{(k+1)-m-1}. \quad (33)$$

При произвольном значении  $m$  получим

$$\begin{aligned} \mu_m &= \deg S_l(m, k-m) - \deg S_l(m, k-m-1) = \\ &= (k-1)!/((m-1)!(k-m)!) = \binom{k-1}{m-1}. \end{aligned} \quad (34)$$

Поэтому по предположению имеем

$$\begin{aligned} \deg S_l(m, k-m) &= \deg S_l(m, k-m-1) + \mu_m = \\ &= \deg S_l(m, k-m-1) + (k-1)!/((m-1)!(k-m)!) = \\ &= \deg S_l(m, k-m-1) + \binom{k-1}{m-1} = \binom{k-1}{m} + \binom{k-1}{m-1} = \binom{k}{m}. \end{aligned} \quad (35)$$

Это доказывает утверждение, что многообразие Серге  $S_l(m, n-m-1)$  представляет собой  $(n-1)$ -мерную алгебраическую поверхность указанного в теореме порядка.

Таким образом, имеем

$$\deg S_l(m, n-m-1) = \binom{n-1}{m} = \binom{n-1}{n-m-1}. \quad (36)$$

Теорема полностью доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Akivis M. A., Goldberg V. V. Projective differential geometry of submanifolds. Amsterdam: North-Holland, 1993.
2. Акивис М. А., Гольдберг В. В. Многообразия с вырожденным гауссовым отображением с кратными фокусами и скрученные конусы // Изв. вузов. Математика. 2003. № 11. С. 3–14.
3. Akivis M. A., Goldberg V. V. Differential geometry of varieties with degenerate Gauss map. New York: Springer-Verl., 2004.
4. Akivis M. A., Goldberg V. V. Conformal differential geometry and its generalizations. New York: John Wiley & Sons, 2011.

5. Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г., Граев М. И. Избранные задачи интегральной геометрии. М.: Добросвет, 2007.
6. Нерсесян В. А. Допустимые комплексы трехмерных плоскостей проективного пространства  $P^6$ . II // Уч. зап. ЕГУ. Сер. Физика и математика. 2002. Вып. 1. С. 34–38.
7. Нерсесян В. А. Допустимые комплексы трехмерных плоскостей проективного пространства  $P^6$ . I // Уч. зап. ЕГУ. Сер. Физика и математика. 2001. Вып. 3. С. 35–39.
8. Макоха А. Н. Геометрическая конструкция линейного комплекса плоскостей  $B_3$  // Изв. вузов. Математика. 2018. № 11. С. 15–26.
9. Стеганцева П. Г., Гречнева М. А. Грассманов образ неизотропной поверхности псевдоевклидова пространства // Изв. вузов. Математика. 2017. № 2. С. 65–75.
10. Арнольд В. И. Комплексный лагранжев грассманиан // Функцион. анализ и его прил. 2000. Т. 34, вып. 3. С. 63–65.
11. Арнольд В. И. Лагранжев грассманиан кватернионного гиперсимплектического пространства // Функцион. анализ и его прил. 2001. Т. 35, вып. 1. С. 74–77.
12. Arkani-Hamed N., Bourjaily J. L., Cachazo F., Goncharov A. B., Postnikov A., Trnka J. Scattering amplitudes and the positive Grassmannian. arXiv:1212.5605v2. 2012.
13. Arkani-Hamed N., Trnka J. The amplituhedron // J. High Energy Phys. 2014. V. 2014, N 10.
14. Бубякин И. В. Геометрия пятимерных комплексов двумерных плоскостей. Новосибирск: Наука, 2001.
15. Бубякин И. В. О строении пятимерных комплексов двумерных плоскостей проективного пространства  $P^5$  с единственным торсом // Мат. заметки СВФУ. 2017. Т. 24, № 2. С. 3–12.
16. Бубякин И. В. О строении комплексов  $m$ -мерных плоскостей проективного пространства, содержащих конечное число торсов // Мат. заметки СВФУ. 2017. Т. 24, № 4. С. 3–16.
17. Бубякин И. В. О строении некоторых комплексов  $m$ -мерных плоскостей проективного пространства, содержащих конечное число торсов. I // Мат. заметки СВФУ. 2019. Т. 26, № 2. С. 3–16.
18. Bubyakin I. V. To geometry of complexes of  $m$ -dimensional planes in projective space  $P^n$ , containing a finite number of developable surfaces // Классическая и современная геометрия: мат. Междунар. конф., посв. 100-летию В. Т. Базылева (Москва, 22–25 апреля 2019 г.) (под ред. А. В. Царева). М.: МГПУ, 2019. С. 17–18.
19. Бубякин И. В. О строении некоторых комплексов  $m$ -мерных плоскостей проективного пространства, содержащих конечное число торсов. II // Мат. заметки СВФУ. 2019. Т. 26, № 4. С. 14–24.
20. Бубякин И. В. О строении некоторых комплексов  $m$ -мерных плоскостей проективного пространства, содержащих конечное число торсов // Итоги науки и техники. Соврем. математика и ее прил. Тем. обзоры. 2020. Т. 180. С. 9–16.
21. Бубякин И. В., Гоголева И. В. К дифференциальной геометрии  $\rho$ -мерных комплексов  $C^\rho(1, 1)$   $m$ -мерных плоскостей проективного пространства  $P^n$  // Мат. заметки СВФУ. 2021. Т. 28, № 4. С. 3–16.
22. Бубякин И. В. О комплексах двумерных плоскостей проективного пространства  $P^n$ , содержащих конечное число торсов и характеризующихся конфигурацией их характеристических прямых // Классическая и современная геометрия: мат. Междунар. конф., посв. 100-летию Л. С. Атанасяна (Москва, 1–4 ноября 2021 г.) (под ред. А. В. Царева). М.: МГПУ, 2021. С. 52–53.
23. Бубякин И. В. К дифференциальной геометрии  $\rho$ -мерных комплексов  $C^\rho(1, 1)$   $m$ -мерных плоскостей проективного пространства  $P^n$  // Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 60 / Мат. Междунар. конф. по алгебре, анализу и геометрии (Казань, 22–28 августа 2021 г.). Казань: Изд-во Акад. наук Республики Татарстан, 2021. Т. 60. С. 372–373.
24. Akivis M. A. On the differential geometry of a Grassmann manifold // Tensor. 1982. V. 38. P. 273–282.
25. Акивис М. А. Ткани и почти грассмановы структуры // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23, № 6. С. 6–15.
26. Room T. G. The geometry of determinantal loci. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1938.
27. Landsberg J. M. Algebraic geometry and projective differential geometry. Seoul: Seoul Nat. Univ., 1997 (Lect. Notes Ser., Seoul; V. 45).
28. Харрис Дж. Алгебраическая геометрия. Начальный курс. М.: МЦНМО, 2006.

29. Бубякин И. В. К проективно-дифференциальной геометрии пятимерных комплексов двумерных плоскостей проективного пространства  $P^5$  // Мат. заметки СВФУ. 2022. Т. 29, № 3. С. 3–21.

*Поступила в редакцию 2 февраля 2023 г.г.*

*После доработки 9 февраля 2023 г.г.*

*Принята к публикации 28 февраля 2023 г.г.*

Бубякин Игорь Витальевич

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,

Институт математики и информатики,

ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891

bubyakiniv@mail.ru

TO PROJECTIVE DIFFERENTIAL GEOMETRY OF  
COMPLEXES OF  $m$ -DIMENSIONAL PLANES IN  
PROJECTIVE SPACE  $P^n$  CONTAINING A FINITE  
NUMBER OF DEVELOPABLE SURFACES

I. V. Bubyakin

**Abstract:** The article focuses on differential geometry of  $\rho$ -dimensional complexes  $C^\rho$  of  $m$ -dimensional planes in the projective space  $P^n$  containing a finite number of developable surfaces.

This article relates to researches on projective differential geometry based on the moving frame method by E. Cartan and method of exterior differential forms. These methods make it possible to study from a single viewpoint differential geometry of submanifolds of different dimensions of a Grassmann manifold and also generalize the results to wider classes of manifolds of multidimensional planes.

In order to study such submanifolds we apply the Grassmann mapping of the manifold  $G(m, n)$  onto the  $(m+1)(n-m)$ -dimensional algebraic manifold  $\Omega(m, n)$  of the space  $P^N$ , where  $N = \binom{n+1}{m+1} - 1$ .

Primary task of differential geometry of submanifolds of Grassmann manifolds is to carry out uniform classifications of various classes of such submanifolds, to determine their structure and—a related task—to define the degree of freedom of their existence, and also to research the properties of submanifolds of various classes.

The intersection of an algebraic manifold  $\Omega(m, n)$  with its tangent space  $T_l\Omega(m, n)$  represents the Segre cone  $C_l(m+1, n-m)$ . This cone is of dimension  $n$  and carries plane generatrices with dimensions  $m+1$  and  $n-m$  intersecting in straight lines. The projectivization  $PT_l(2)$  of this cone is the Segre manifold  $S_l(m, n-m-1)$ .

The Segre manifold  $S_l(m, n-m-1)$  is invariant under projective transformations of the space  $P^{(m+1)(n-m)-1} = PT_l\Omega(m, n)$ , which is the projectivization with the center at point  $l$  of the tangent space  $T_l\Omega(m, n)$  to the algebraic manifold  $\Omega(m, n)$ . The Segre manifold  $S_l(m, n-m-1)$  is used for classification of the considered submanifolds of the Grassmann manifold  $G(m, n)$ , and also for interpretation of their properties in projective algebraic manifold terms. Classification of submanifolds of the Grassmann manifold  $G(m, n)$  is based on various configurations of plane  $PT_l\Omega(m, n)$  and on the Segre manifold  $S_l(m, n-m-1)$ . The purpose of this article is to prove geometrically a theorem for determining the order of the Segre manifold  $S_l(m, n-m-1)$ .

DOI: 10.25587/SVFU.2023.10.59.001

**Keywords:** Grassmann manifold, complexes of multidimensional planes, Segre manifold.

REFERENCES

1. Akivis M. A. and Goldberg V. V., Projective Differential Geometry of Submanifolds, North-Holland, Amsterdam (1993).

2. Akivis M. A. and Goldberg V. V., "Varieties with a degenerate Gauss map with multiple foci, and twisted cones," *Russ. Math.*, **47**, No. 11, 1–11 (2003).
3. Akivis M. A. and Goldberg V. V., *Differential Geometry of Manifolds with Degenerate Gauss Map*, Springer-Verl., New York (2004).
4. Akivis M. A. and Goldberg V. V., *Conformal Differential Geometry and Its Generalizations*, John Wiley & Sons, New York (2011).
5. Gelfand I. M., Gindikin S. G., and Graev M. I., *Selected Problems of Integral Geometry* [in Russian], Dobrosvet, Moscow (2007).
6. Nersesyan V. A., "Permissible complexes of three-dimensional planes of projective space  $P^6$ , II [in Russian]," *Uch. Zap. Erevan. Gos. Univ., Fiz. Mat.*, **1**, 34–38 (2002).
7. Nersesyan V. A., "Permissible complexes of three-dimensional planes of projective space  $P^6$ , I [in Russian]," *Uch. Zap. Erevan. Gos. Univ., Fiz. Mat.*, **3**, 35–39 (2002).
8. Makokha A. N., "The geometric construction of linear complex of the planes  $B_3$ ," *Russ. Math.*, No. 11, 15–26 (2018).
9. Stegantseva P. G. and Grechneva M. A., "Grassmann image of non-isotropic surface of pseudo-Euclidean space," *Russ. Math.*, No. 2, 65–75 (2017).
10. Arnold V. I., "The complex Lagrangian Grassmannian," *Funct. Anal. Appl.*, **34**, No. 3, 63–65 (2000).
11. Arnold V. I., "Lagrangian Grassmannian of quaternion hypersymplectic space," *Funct. Anal. Appl.*, **35**, No. 1, 74–77 (2001).
12. Arkani-Hamed N., Bourjaily J. L., Cachazo F., Goncharov A. B., Postnikov A., and Trnka J., "Scattering amplitudes and the positive Grassmannian," arXiv:1212.5605v2 (2012).
13. Arkani-Hamed N. and Trnka J., "The amplituhedron," *J. High Energy Phys.*, No. 10 (2014).
14. Bubyakin I. V., *Geometry of Five-Dimensional Complexes of Two-Dimensional Planes* [in Russian], Nauka, Novosibirsk (2001).
15. Bubyakin I. V., "About the structure of five-dimensional complexes of two-dimensional planes of the projective space  $P^5$  with a single developable surface [in Russian]," *Mat. Zamet. SVFU*, **24**, No. 2, 3–12 (2017).
16. Bubyakin I. V., "About the structure of complexes of  $m$ -dimensional planes in projective space  $P^n$  containing a finite number of developable surfaces [in Russian]," *Mat. Zamet. SVFU*, **24**, No. 4, 3–16 (2017).
17. Bubyakin I. V., "On the structure of some complexes of  $m$ -dimensional planes of in the projective space  $P^n$  containing a finite number of developable surfaces, I [in Russian]," *Mat. Zamet. SVFU*, **26**, No. 2, 3–16 (2019).
18. Bubyakin I. V., "To geometry of complexes of  $m$ -dimensional planes in the projective space  $P^n$  containing a finite number of developable surfaces [in Russian]," in: Int. Conf. Mat. "Classical and modern geometry" in honor of V. T. Bazylev's 100th anniv. (Moscow, Apr. 22–25, 2019) (A. V. Tsarev, ed.), pp. 17–18, Mosk. Gos. Pedagog. Univ., Moscow (2019).
19. Bubyakin I. V., "On the structure of some complexes of  $m$ -dimensional planes of in the projective space  $P^n$  containing a finite number of developable surfaces, II [in Russian]," *Mat. Zamet. SVFU*, **26**, No. 4, 14–24 (2019).
20. Bubyakin I. V., "On the structure of some complexes of  $m$ -dimensional planes of projective space containing a finite number of developable surfaces [in Russian]," *Itogi Nauki i Tekhniki, Sovrem. Mat. Prilozh., Tem. Prilozh.*, **180**, 9–16 (2020).
21. Bubyakin I. V. and Gogoleva I. V., "On differential geometry of  $\rho$ -dimensional complexes  $C^\rho(1, 1)$  of  $m$ -dimensional planes of the projective space  $P^n$  [in Russian]," *Mat. Zamet. SVFU*, **28**, No. 4, 3–16 (2021).
22. Bubyakin I. V., "On complexes of 2-dimensional planes in the projective space  $P^n$  containing a finite number of developable surfaces characterized by the configuration of their characteristic lines [in Russian]," in: Int. Conf. Mat. "Classical and modern geometry" in honor of L. S. Atanasyan's 100th anniv. (Moscow, Nov. 1–4, 2021) (A. V. Tsarev, ed.), pp. 52–53, Mosk. Gos. Pedagog. Univ., Moscow (2021).
23. Bubyakin I. V., "On differential geometry of  $\rho$ -dimensional complexes  $C^\rho(1, 1)$  of  $m$ -dimensional planes of the projective space  $P^n$  [in Russian]," in: *Tr. Mat. Tsentr. im. N. I. Lobachevskogo*, **60**, Mat. Mezhdunar. Konf. po Algebre, Analizu i Geometrii (Kazan, Aug. 22–28, 2021), pp. 372–373, Izdat. Akad. Nauk Resp. Tatarstan, Kazan (2021).

- 
- 24. Akivis M. A., “On the differential geometry of a Grassmann manifold,” *Tensor*, **38**, 273–282 (1982).
  - 25. Akivis M. A., “Tissues and almost Grassmann structures,” *Sib. Math. J.*, **23**, No. 6, 6–15 (1982).
  - 26. Room T. G., *The Geometry of Determinantal Loci*, Camb. Univ. Press, Cambridge (1938).
  - 27. Landsberg J. M., *Algebraic Geometry and Projective Differential Geometry*, Lect. Notes Ser., Seoul, **45**, Seoul Nat. Univ., Seoul (1999).
  - 28. Harris J., *Algebraic Geometry: A First Course*, Springer, New York (1992) (Grad. Texts Math.; vol. 133).
  - 29. Bubyakin I. V., “To projective differential geometry of 5-dimensional complexes 2-dimensional planes in projective space  $P^5$  [in Russian],” *Mat. Zamet. SVFU*, **29**, No. 3, 3–21 (2021).

*Submitted February 2, 2023*

*Revised February 9, 2023*

*Accepted February 28, 2023*

Igor V. Bubyakin  
Ammosov North-Eastern Federal University,  
Institute of Mathematics and Informatics,  
48 Kulakovskiy Street, Yakutsk 677891, Russia  
[bubyakiniv@mail.ru](mailto:bubyakiniv@mail.ru)

О ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ  
ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ  
УРАВНЕНИЙ В ЗВЕЗДНЫХ ОБЛАСТЯХ  
С ЛЯПУНОВСКОЙ ГРАНИЦЕЙ  
В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

И. М. Петрушко,  
Т. В. Капицина, М. И. Петрушко

**Аннотация.** Статья посвящена исследованию поведения решения параболического уравнения второго порядка с вырождением Трикоми на боковой границе цилиндрической области  $Q^T$ , где  $Q$  — звездная область, граница которой  $\partial Q$  —  $(n - 1)$ -мерная замкнутая поверхность без края класса  $C^{1+\lambda}$ ,  $0 < \lambda < 1$ . Рассматривается вопрос об однозначной разрешимости первой смешанной задачи для уравнения, когда граничная и начальная функции принадлежат пространствам типа  $L_p$ ,  $p > 1$ . Данная тематика восходит к классическим работам Литтлвуда — Пэли и Ф. Рисса, посвященных граничным значениям аналитических функций. Все направления принятия граничных значений для равномерно эллиптических уравнений оказываются равноправными, и решение обладает свойством, аналогичным свойству непрерывности по отношению к набору переменных. В случае вырождения уравнения на границе области, когда направления не равны, ситуация усложняется. В этом случае постановка первой краевой задачи определяется типом вырождения.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.56.84.002

**Ключевые слова:** вырождающиеся параболические уравнения, вырождение типа Трикоми, функциональные пространства, первая смешанная задача, разрешимость, граничные и начальные значения решений, априорные оценки.

Рассмотрим поведение решения параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}u_{x_j})_{x_i} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} + a_0 u = f(x, t),$$

коэффициенты которого  $a_{ij}$ ,  $a_i \in C^1(\overline{Q^T})$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ,  $a \in (\overline{Q^T})$ , с вырождением типа Трикоми на боковой границе цилиндрической области  $Q^T$ , где  $Q$  — звездная область, граница которой  $\partial Q$  —  $(n - 1)$ -мерная замкнутая поверхность без края класса  $C^{1+\lambda}$ ,  $0 < \lambda < 1$ . Также изучим вопрос об однозначной разрешимости первой смешанной задачи для уравнения, когда граничная и начальная функции принадлежат пространствам типа  $L_p$ ,  $p > 1$ .

Данной тематике положено начало в классических работах Ф. Рисса [1] и Литтлвуда — Пэли [2–4], посвященных граничным значениям аналитических

функций. Дальнейшее развитие этой тематики для равномерно эллиптических уравнений получило в работах В. П. Михайлова [5, 6], А. К. Гущина [7, 8]. В более ранних работах И. М. Петрушко [9, 10] было доказано, что условие на гладкость границы ( $\partial Q \in C^2$ ) можно ослабить. Для этого в определении принятия граничного значения при отображении границы  $\partial Q$  нужно брать сдвиг не по нормали в каждой точке  $x \in \partial Q$ , а взять достаточно мелкое покрытие границы и каждый кусок этого покрытия «параллельно» сдвигать по нормали в одной фиксированной точке этого куска. Для областей с ляпуновской границей было доказано, что приведенные выше утверждения о разрешимости и свойствах решения первой смешанной задачи остаются справедливыми и при таком определении принятия решением граничного и начального значений. При этом разрешимость задачи и соответствующие оценки решения не зависят от выбора покрытия границы.

В работах А. К. Гущина была предложена постановка задачи Дирихле, не требующая для придания смысла входящим в нее объектам условия гладкости границы. Для эллиптического уравнения без младших членов в этих работах были доказаны однозначная разрешимость и справедливость оценки решения рассматриваемой задачи Дирихле при существенно более слабых условиях на гладкость границы области и коэффициентов уравнения. При этом было доказано, что решение задачи Дирихле обладает свойством  $(n - 1)$ -мерной непрерывности, обобщающим непрерывность функции по совокупности переменных. Свойство  $(n - 1)$ -мерной непрерывности решения показывает, что в определении принятия решением граничного значения можно сравнять не только значения решения на «параллельных» к границе или близких к ним поверхностях, но и на образах  $\partial Q$  при отображениях из довольно широкого класса. В частности, поверхность  $\partial Q$  можно разбить на достаточно мелкие части и каждую из них подвинуть и повернуть (не выходя из  $Q$ ) так, чтобы точки переместились «не очень далеко», при этом разные точки границы могут перейти в одну точку, но нельзя допустить, чтобы таких точек было «слишком много».

Введенное А. К. Гущиным понятие  $(n - 1)$ -мерной непрерывности получило широкое применение в серии работ А. К. Гущина и В. П. Михайлова, посвященных исследованию разрешимости широкого класса нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка без младших членов. При наиболее слабых ограничениях на гладкость границы (и на коэффициенты уравнения) критерий существования граничного значения установлен в [11–15]. При этом, как показано в [11], все направления принятия граничных значений для равномерно эллиптических уравнений оказываются равноправными, решение обладает свойством, аналогичным свойству непрерывности по совокупности переменных. В работе В. Ж. Думаняна [16] исследовалась разрешимость задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения второго порядка (с негладкими коэффициентами) и были установлены свойства  $(n - 1)$ -мерной непрерывности решения.

Разрешимости краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений

ний, начиная с работ Ф. Трикоми [17] и М. В. Келдыша [18], посвящено большое число работ (см. [19, 20]). Однако практически мало исследовался вопрос о поведении вблизи границы решений эллиптических и параболических уравнений, вырождающихся на границе области. Отметим, например, работы И. М. Петрушко [21], Т. В. Капицыной [22, 23].

Пусть область  $Q$ , граница которой принадлежит классу  $C^{1+\lambda}$ ,  $0 < \lambda < 1$ , является строго звездной относительно некоторой точки. Не умаляя общности, можно считать, что начало координат содержится в  $Q$  и область  $Q$  строго звездная относительно начала координат. Для краткости такую область будем называть просто звездной. В этом случае границу  $\partial Q$  области  $Q$  можно задать уравнением

$$|x| = F(x),$$

где  $F(x)$  — положительная однородная функция нулевой степени:

$$\partial Q = \{|x| = F(x)\}.$$

Область  $Q$  при этом задается неравенством

$$Q = \{|x| < F(x)\}.$$

Обозначим через  $Q_*^\delta$  подобласть области  $Q$ :

$$Q_*^\delta = \{|x| < (1 - \delta)F(x)\}$$

с границами  $\partial Q_*^\delta = \{|x| = (1 - \delta)F(x)\}$ , и наряду с расстоянием  $r(x) = \lim_{y \in \partial Q} |x - y|$  будем рассматривать расстояние

$$r_1 = 1 - \frac{|x|}{F(x)},$$

удовлетворяющее для всех  $x \in Q$  неравенствам

$$\gamma_2 r(x) \leq r_1(x) \leq \gamma_2^{-1} r(x)$$

с постоянной  $\gamma_2 > 0$ .

Решение задачи  $\Delta u = -1$ ,  $x \in Q$ ,  $u|_{x \in \partial Q} = 0$  будем обозначать через  $\rho(x)$ . Как известно,  $\rho(x) \in C^{1+\lambda}(Q)$  и существует такая постоянная  $\gamma_1 > 0$ , что для всех  $x \in Q$  выполняются неравенства:

$$\gamma_1 r_1(x) \leq \rho(x) \leq \gamma_1^{-1} r_1(x).$$

Кроме того, существует такая постоянная  $C(\cdot)$ , зависящая от  $\lambda'$ , что

$$|\rho_{x_i x_j}| \leq \frac{C(\lambda')}{[r_1(x)]^{1-\lambda'}} \quad \forall i, j = 1, \dots, n, \quad \forall \lambda', \quad 0 < \lambda' \leq \lambda.$$

Обозначим через  $Q^T$  цилиндр  $Q \times (0, T)$ . Рассмотрим в  $Q^T$  уравнение

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{x_j})_{x_i} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} + a_0 u = f(x, t), \quad (1)$$

с вещественными коэффициентами  $a_{ij}$ ,  $a_i$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , принадлежащими  $C^1(\overline{Q^T})$ ,  $a \in C(\overline{Q^T})$ .

Уравнение (1) будем предполагать параболическим в  $Q^T$ , т. е. для любой точки  $x \in Q_*^\delta$ ,  $\delta \in (0, \delta_0]$ , и для любых  $t \in [0, T]$  существует  $\gamma_\delta > 0$ ,  $\gamma_\delta \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ , такое, что для всех  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R_n$

$$\Phi(x, \xi, t) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \gamma_\delta |\xi|^2.$$

Для  $(x_0, t) \in \partial Q \times (0, T)$  квадратичная форма вырождается, т. е.

$$\Phi(x_0, \xi, t) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0, t) \xi_i \xi_j \geq 0.$$

Однако будем предполагать, что существует такая постоянная  $\gamma^0 > 0$ , что для всех  $(x_0, t) \in \partial Q \times (0, T)$

$$\gamma^0 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0, t) \nu_i \nu_j \leq (\gamma^0)^{-1},$$

где  $\vec{\nu}(x_0)$  — вектор внешней по отношению к  $Q$  единичной нормали к поверхности  $\partial Q$  в точке  $x_0$ .

Будем предполагать, что правая часть уравнения (1)  $f(x, t)$  принадлежит  $L_p(Q^T)$ ,  $p > 1$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Функцию  $u(x, t) \in W_{p,\text{loc}}^{1,0}(Q^T)$  называют *обобщенным решением* уравнения (1), если для всех финитных в  $Q^T$  функций  $\eta(x, t) \in W_q^{1,1}(Q^T)$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,

$$\int_{Q^T} \left[ -u\eta_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} \eta_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} \eta + au\eta \right] dxdt = \int_{Q^T} f\eta dxdt. \quad (2)$$

Будем говорить, что функция  $\omega(x, t)$  *финитна по  $x$  в  $Q^T$* , если существует область  $Q'$ , строго лежащая в  $Q$ , такая, что  $\omega(x, t) = 0$  вне  $Q'^T$ . Предположим, что функция  $u(x, t)$ , определенная в  $Q^T$ , является обобщенным решением уравнения (1) из  $W_{p,\text{loc}}^{1,0}(Q^T)$ . Тогда в силу ограничений на коэффициенты уравнения (1) для любой функции  $\omega(x, t) \in W_q^{1,1}(Q^T)$  и финитной по  $x$  в  $Q^T$  для любых  $\beta \in (0, \delta_0)$  и  $T' \in (\frac{T}{2}, T)$  имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \int_Q u(x, T') \eta(x, T') dx - \int_Q u(x, \beta) \eta(x, \beta) dx \\ & + \int_{\beta}^{T'} \int_Q \left[ -u\eta_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} \eta_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} \eta + au\eta \right] dxdt = \int_{\beta}^{T'} \int_Q f\eta dxdt. \end{aligned}$$

Так как уравнение (1) параболическое в  $Q^T$ , справедлива следующая

**Лемма 1.** Пусть  $u(x, t)$  — обобщенное из  $W_{2,\text{loc}}^{1,0}(Q^T)$  решение уравнения (1), правая часть которого  $f(x, t) \in L_p(Q^T)$ . Тогда для любых  $\delta \in (0, \delta_0)$  и для любого  $T' \in (\frac{T}{2}, T)$  справедливо равенство

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{p} \int_{Q_*^\delta} |u(x, T')|^p \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) dx - \frac{1}{p} \int_{Q_*^\delta} |u(x, \delta)|^p \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) dx \\
& + (p-1) \int_{\delta}^{T'} \int_{Q_*^\delta} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} |u|^{p-2} \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) dx dt \\
& - \int_{\delta}^{T'} \int_{Q_*^\delta} \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} |u|^{p-1} \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) dx dt \\
& - \frac{1}{p} \int_{\delta}^{T'} \int_{\partial Q_*^\delta} \sum_{i,j=1}^n \left( a_{ij} \frac{\rho_{x_i} \rho_{x_j}}{|\nabla \rho|} \right) |u|^p ds dt - \frac{1}{p} \int_{\delta}^{T'} \int_{Q_*^\delta} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} \rho_{x_i})_{x_j} |u|^p dx dt \\
& - \frac{1}{p} \int_{\delta}^{T'} \int_{Q_*^\delta} \sum_{i=1}^n \left( a_i \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) \right)_{x_i} |u|^p dx dt + \int_{\delta}^{T'} \int_{Q_*^\delta} a |u|^p \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) dx dt \\
& = \int_{\delta}^{T'} \int_{Q_*^\delta} f |u|^{p-1} \operatorname{sign} u \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) dx dt. \quad (3)
\end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
M_\delta & \equiv M_\delta(u) = \max_{\delta \leq \mu \leq \delta_0} \left[ \int_{\mu}^{T'} \int_{\partial Q_*^\mu} |u|^p dS_\mu dt + \int_{Q_*^\mu} |u(x, \mu)|^p \rho \left( \frac{x}{1-\mu} \right) dx \right], \\
N_\delta & = \int_{\delta}^{T'} \int_{Q_*^\delta} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} |u|^{p-2} \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) dx dt + \int_{Q_*^\delta} |u(x, T')|^p \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) dx.
\end{aligned}$$

Прежде всего отметим, что совершенно аналогично тому, как доказывается лемма 2 работы [21], доказывается следующая

**Лемма 2.** Пусть  $u(x, t)$  — обобщенное из  $W_{p,\text{loc}}^{1,0}(Q^T)$  решение уравнения (1). Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует постоянная  $C(\varepsilon)$  такая, что для произвольного  $\delta \in (0, \frac{\delta_0}{2}]$

$$\begin{aligned}
& \int_{\delta}^{T'} \int_{Q_*^\delta} \frac{|u|^p}{\rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right)^{1-\lambda'}} dx dt \leq C(\varepsilon) \int_{\delta}^{T'} \int_{Q_*^\delta} |u|^p \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) dx dt \\
& + \varepsilon \int_{\delta}^{T'} \int_{Q_*^\delta} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} |u|^{p-2} \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) dx dt.
\end{aligned}$$

Из леммы 2 путем несложных рассуждений вытекают следующие леммы.

**Лемма 3.** Пусть  $u(x, t)$  — обобщенное из  $W_{p, \text{loc}}^{1,0}(Q^T)$  решение уравнения

(1). Тогда для всех  $\delta \in (0, \frac{\delta_0}{2}]$ , справедлива оценка

$$M(\delta) + \int\limits_{\delta}^{T'} \int\limits_{Q_*^\delta} |u|^p \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) dx dt \leq C_1 [\|f\|_{L_p(Q^T)}^p + N_\delta]$$

с постоянной  $C_1$ , не зависящей ни от  $\delta$ , ни от  $T' \in [\frac{T}{2}, T]$ .

**Лемма 4.** Пусть  $u(x, t)$  — обобщенное из  $W_{p, \text{loc}}^{1,0}(Q^T)$  решение уравнения

(1). Тогда для всех  $\delta \in (0, \frac{\delta_0}{2}]$  справедлива оценка

$$N_\delta + \int\limits_{\delta}^{T'} \int\limits_{Q_*^\delta} |u|^p \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) dx dt \leq C_2 [\|f\|_{L_p(Q^T)}^p + M(\delta)]$$

с постоянной  $C_2$ , не зависящей ни от  $\delta$ , ни от  $T' \in [\frac{T}{2}, T]$ .

Для любой функции  $u(x, t) \in W_{p, \text{loc}}^{1,0}(Q^T)$  функция

$$M(\delta) = \int\limits_{\delta}^{T'} \int\limits_{\partial Q_*^\delta} |u|^p \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) ds dt + \int\limits_{Q_*^\delta} |u(x, \delta)|^p \rho(x) dx$$

непрерывна по  $\delta \in (0, \frac{\delta_0}{2}]$ . Будем говорить, что функция  $u(x, t)$  принадлежит классу  $H_p^*$ , если функция  $M(\delta)$  ограничена на  $(0, \frac{\delta_0}{2}]$ , т. е. если

$$\sup_{\delta \in (0, \frac{\delta_0}{2}]} M(\delta) < \infty.$$

**Теорема 1.** Для того чтобы обобщенное из  $W_{p, \text{loc}}^{1,0}(Q^T)$  решение уравнения (1) с  $f(x, t) \in L_p(Q^T)$ ,  $p > 1$ , принадлежало классу  $H_p^*$ , необходимо и достаточно, чтобы для любого  $T'$ ,  $\frac{T}{2} < T' < T$ , выполнялось неравенство

$$\int\limits_Q |u(x, T')|^p \rho(x) dx + \int\limits_0^{T'} \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} |u|^{p-2} r(x) dx dt < \infty.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. НЕОБХОДИМОСТЬ.** Пусть  $u(x, t) \in H_p^*$ . Возьмем произвольное  $T' \in [\frac{T}{2}, T]$ . На основании леммы 4 имеем

$$\begin{aligned} & \int\limits_{\delta}^{T'} \int\limits_{Q_*^\delta} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} |u|^{p-2} \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) dx dt + \int\limits_{Q_*^\delta} |u(x, T')|^p \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) dx \\ & \leq C_3 [M(\delta) + \|f\|_{L_p(Q^T)}^p]. \end{aligned}$$

Следовательно, для всех  $\delta \in (0, \frac{\delta_0}{2}]$

$$\int_{\delta}^{T'} \int_{Q_*^\delta} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} |u|^{p-2} \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) dx dt < \text{const.}$$

А так как

$$\int_{\delta}^{T'} \int_{Q_*^\delta} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} |u|^{p-2} \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) dx dt$$

есть интеграл по  $Q^{T'}$  от функции, равной

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} |u|^{p-2} \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right)$$

при  $(x, t) \in Q_*^\delta \times (\delta, T')$  и нулю при  $(x, t) \in Q^{T'} \setminus \{Q_*^\delta \times (\delta, T')\}$ , по теореме Леви функция  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} |u|^{p-2} \rho(x)$  и функция  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} |u|^{p-2} r(x)$  интегрируются по  $Q^{T'}$ .

**ДОСТАТОЧНОСТЬ.** Пусть для произвольного числа  $T' \in (\frac{T}{2}, T)$  функция  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} |u|^{p-2} r(x)$ , а вместе с ней и функция  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} |u|^{p-2} \rho(x)$  интегрируемы по  $Q^{T'}$ , т. е.

$$\int_0^{T'} \int_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} |u|^{p-2} \rho(x) dx dt < \infty. \quad (4)$$

Как и выше, доказывается, что

$$\int_Q |u(x, T')|^p \rho(x) dx < \infty.$$

Покажем, что функция  $u(x, t)$  принадлежит  $H_p^*$ . Возьмем произвольное  $T' \in (\frac{T}{2}, T)$  и такое  $T_1$ , чтобы  $T' < T_1 < T$ . Несложно доказать, что для всех  $\delta \in (0, \frac{\delta_0}{2}]$

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{T}{2}}^{T_1} \int_{Q_*^\delta \setminus Q_*^{\delta_0}} |u|^p \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) dx dt \\ & \leq C_4 \left[ \int_0^{T_1} \int_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} |u|^{p-2} \rho(x) dx dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T_1} \int_{\partial Q_*^{\delta_0}} |u|^p ds dt \right]. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу того, что  $u(x, t) \in W_{p,\text{loc}}^{1,0}(Q^T)$ , и неравенства (4) имеем

$$\int_{\frac{T}{2}}^{T_1} \int_Q |u|^p \rho(x) dx dt < \infty, \quad (5)$$

и функция  $\int_Q |u(x, t)|^p \rho(x) dx$  для п.в.  $t \in (\frac{T}{2}, T_1)$  ограничена, т. е. найдется такое  $T'', T' < T'' < T_1$ , что

$$\int_Q |u(x, T'')|^p \rho(x) dx < \infty. \quad (6)$$

Но тогда в силу леммы 2 и неравенств (5) и (6) имеем

$$\int_{Q_*^\delta} |u(x, \delta)|^p \rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right) dx + \int_{\delta}^{T''} \int_{\partial Q_*^\delta} |u|^p ds dt \leq C_5.$$

Так как  $T' < T''$ , то

$$\sup_{0 < \delta < \delta_0/2} \left[ \int_{Q_*^\delta} |u(x, \delta)|^p \rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right) dx + \int_{\delta}^{T'} \int_{\partial Q_*^\delta} |u|^p ds dt \right] \leq C_5,$$

т. е.  $u(x, t) \in H_p^*$ . Теорема доказана.

Будем говорить, что функция  $u(x, t) \in W_{p, \text{loc}}^{1,0}(Q^T)$  принимает граничное значение

$$u|_{\partial Q \times (0, T)} = \varphi, \quad \varphi \in L_p(\partial Q \times (0, T)), \quad p > 1, \quad (7)$$

в смысле  $L_p$ , если

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\delta}^{T'} \int_{\partial Q} |[u((1-\delta)x, t) - \varphi(x, t)]|^p dx dt = 0. \quad (8)$$

Будем говорить, что принадлежащая  $W_{p, \text{loc}}^{1,0}(Q^T)$  функция  $u(x, t)$  удовлетворяет начальному условию

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_0(x) \in L_p(Q, r), \quad p > 1, \quad (9)$$

в смысле  $L_p$  с весом  $r(x)$ , если

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{Q_*^\delta} |[u(x, \delta) - u_0(x)]|^p r(x) dx dt = 0. \quad (10)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Принадлежащая  $W_{p, \text{loc}}^{1,0}(Q^T)$  функция  $u(x, t)$  называется обобщенным из  $W_{p, \text{loc}}^{1,0}(Q^T)$  решением первой смешанной задачи (1), (7), (5) с  $f(x, t) \in L_p(Q^T)$ ,  $p > 1$ , если она удовлетворяет интегральному тождеству (2) для всех финитных в  $Q^T$  функций  $\eta(x, t) \in W_q^{1,1}(Q^T)$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , удовлетворяет граничному и начальному условиям (7), (9) в смысле равенств (8), (10).

**Теорема 2.** При любых функциях  $\varphi \in L_p(\partial Q \times (0, T))$ ,  $p > 1$ ,  $u_0(x) \in L_p(Q, r)$ ,  $p > 1$ , и любой функции  $f(x, t) \in L_p(Q^T)$ ,  $p > 1$ , первая смешанная задача (1), (7), (5) имеет обобщенное решение  $u(x, t) \in W_{p, \text{loc}}^{1,0}(Q^T)$ . Это решение единственно и для него справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \int_Q |u(x, T')|^p r(x) dx + \int_0^{T'} \int_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} |u|^{p-2} r(x) dx dt + \int_{Q^{T'}} |u|^p dx dt \\ & + \max_{0 \leq \delta \leq \delta_0} \left[ \int_{\delta}^{T'} \int_{\partial Q_*^\delta} |u|^p ds dt + \int_{Q_*^\delta} |u(x, \delta)|^p \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) dx \right] \\ & \leq C_6 [\|f\|_{L_p}^p(Q^{T'}) + \|\varphi\|_{L_p(\partial Q \times (0, T'))}^p + \|u_0\|_{L_p(Q, r)}^p]. \quad (11) \end{aligned}$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $u(x, t)$  — обобщенное из  $W_{p, \text{loc}}^{1,0}(Q^T)$  решение задачи (1), (7), (5). В силу (8) и (10) функция  $u(x, t)$  принадлежит классу  $H_p^*$ . Следовательно, по теореме 1 для любого  $T' \in (\frac{T}{2}, T)$  функция

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} |u|^{p-2} \rho(x)$$

интегрируема по  $Q^{T'}$  и на основании теоремы Лебега при  $\delta \rightarrow +0$

$$\int_{\delta}^{T'} \int_{Q_*^\delta} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} |u|^{p-2} \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) dx dt \rightarrow \int_0^{T'} \int_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} |u|^{p-2} \rho dx dt.$$

Так как из принадлежности  $u(x, t)$  классу  $H_p^*$  вытекает, что

$$\int_0^{T'} \int_Q |u|^p dx dt < \infty,$$

аналогично

$$\int_{\delta}^{T'} \int_{Q_*^\delta} |u|^p \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) dx dt \rightarrow \int_0^{T'} \int_Q |u|^p \rho dx dt$$

при  $\delta \rightarrow +0$ .

Следовательно, в неравенствах лемм 3 и 4 можно перейти к пределу при  $\delta \rightarrow +0$ , в результате получим неравенство

$$\begin{aligned} & \int_0^{T'} \int_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} |u|^{p-2} \rho(x) dx dt + \int_0^{T'} \int_Q |u|^p dx dt + \lim_{\delta \rightarrow +0} M(\delta) \\ & \leq C_7 [\|f\|_{L_p}^p(Q^T) + \|\varphi\|_{L_p(\partial Q \times (0, T))}^p + \|u_0\|_{L_p(Q, r)}^p], \end{aligned}$$

из которого следует оценка (11).

Перейдем к доказательству существования решения.

Возьмем произвольные функции  $\varphi \in L_p(\partial Q \times (0, T))$ ,  $u_0(x) \in L_p(Q, r)$  и произвольную функцию  $f(x, t) \in L_p(Q^T)$ .

Пусть  $\{\varphi_m\}$  — последовательность функций из  $C^2(\partial Q \times [0, T])$ , сходящаяся в  $L_p(\partial Q \times (0, T))$  к функции  $\varphi$ :

$$\|\varphi_m - \varphi\|_{L_p(\partial Q \times (0, T))} \rightarrow 0 \quad (12)$$

при  $m \rightarrow \infty$ , а  $\{u_{0m}\}$  — последовательность функций из  $C^2(\overline{Q})$ , сходящаяся в  $L_p(Q, r)$  к функции  $u_0(x)$ :

$$\|u_{0m} - u_0\|_{L_p(Q, r)} \rightarrow 0 \quad (13)$$

при  $m \rightarrow \infty$ .

Пусть  $\{f_m\}$  — некоторая последовательность функций из  $C^2(\overline{Q^T})$ , сходящаяся в  $L_p(Q^T)$  к функции  $f(x, t)$ :

$$\|f_m - f\|_{L_p(Q^T)} \rightarrow 0 \quad (14)$$

при  $m \rightarrow \infty$ .

Обозначим через  $u_m(x, t)$  решение первой смешанной задачи для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{m} \Delta u - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} + au = f_m(x, t) \quad (15)$$

с граничной функцией  $\varphi_m(x, t)$  и начальной функцией  $u_{0m}(x)$ . Так как решение из  $W_p^{2,1}(Q^T)$  является решением из  $W_{p,\text{loc}}^{1,0}(Q^T)$ , для  $u_m(x, t)$  справедлива оценка (11). Стало быть, последовательность  $\{u_m\}$  сходится к некоторой функции  $u(x, t)$  в некотором банаховом пространстве  $B$  с нормой

$$\|u\|_B^p = \int_0^{T'} \int_Q |u|^p dx dt + \max_{0 \leq \delta \leq \delta_0} \left[ \int_{\delta}^{T'} \int_{\partial Q_*^\delta} |u|^p ds dt + \int_{Q_*^\delta} |u(x, \delta)|^p \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) dx \right],$$

т. е.

$$\|u_m - u\|_B \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Покажем, что функция  $u(x, t)$  является обобщенным решением из пространства  $W_{p,\text{loc}}^{1,0}(Q^T)$  задачи (1), (7), (9). Поскольку  $\|v\|_{L_p} \leq \|v\|_B$  для всех  $v \in B$ , то  $u \in L_p(Q^T)$  и  $\|u_m - u\|_{L_p(Q^T)} \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ . Учитывая, что функция  $u_m(x, t)$  — обобщенное решение из  $W_p^{1,0}(Q^T)$  уравнения (1), при любой финитной в  $Q^T$  функции  $\eta \in W_q^{2,1}(Q^T)$  ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ )

$$\iint_{Q^T} \left[ -\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{1}{m} \Delta \eta - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} \eta_{x_i})_{x_j} - \sum_{i=1}^n (a_i \eta)_{x_i} + a \eta \right] u_m dx dt = \iint_{Q^T} f_m \eta dx dt.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при  $m \rightarrow \infty$  ( $\text{supp } \eta \Subset Q^T$  и учитывая, что  $\|f_m - f\|_{L_p(Q^T)} \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ ), получим, что для любой финитной в  $Q^T$  функции  $\eta \in W_q^{2,1}(Q^T)$  ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ) функция  $u(x, t)$  удовлетворяет равенству

$$\iint_{Q^T} \left[ -\frac{\partial \eta}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}\eta_{x_i})_{x_j} - \sum_{i=1}^n (a_i\eta)_{x_i} + a\eta \right] u \, dxdt = \iint_{Q^T} f\eta \, dxdt.$$

Но тогда функция  $u(x, t)$  принадлежит  $W_{p,\text{loc}}^{1,0}(Q^T)$  и является решением из  $W_{p,\text{loc}}^{1,0}(Q^T)$  уравнения (1).

Покажем справедливость равенства (8). Прежде всего отметим, что

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_0^{T'} \int_{\partial Q} |u_m((1-\delta)x, t) - \varphi_m(x, t)|^p \, dsdt = 0. \quad (17)$$

Так как при любом  $\delta \in (0, \delta_0]$

$$\begin{aligned} & \int_0^{T'} \int_{\partial Q} |u((1-\delta)x, t) - \varphi(x, t)|^p \, dsdt \\ & \leq \int_0^{T'} \int_{\partial Q} |u((1-\delta)x, t) - u_m((1-\delta)x, t)|^p \, dsdt + \int_0^{T'} \int_{\partial Q} |\varphi_m - \varphi|^p \, dsdt, \end{aligned}$$

в силу (12), (16), (17) получаем, что

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_0^{T'} \int_{\partial Q} |u((1-\delta)x, t) - \varphi(x, t)|^p \, dsdt = 0,$$

т. е. функция  $u(x, t)$  стремится к граничной функции  $\varphi(x, t)$  в смысле равенства (8).

Аналогично показывается, что функция  $u(x, t)$  стремится к начальной функции  $u_0(x)$  в смысле равенства (10). Теорема доказана.

**Теорема 3.** Пусть функция  $u(x, t)$  в области  $Q^T$  является решением из  $W_{p,\text{loc}}^{1,0}(Q^T)$  уравнения (1) ( $f \in L_p(Q^T)$ ) с коэффициентами, удовлетворяющими дополнительному условию: существует такое число  $\gamma_2 > 0$ , что для всех  $(x, t) \in Q^T$  и  $\xi \in R_n$  выполняется неравенство

$$\gamma_2 r(x)^m \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j$$

с показателем  $0 < m < 2$ . Если  $u(x, t)$  принадлежит классу Харди  $H_p$ , то существуют такие функции  $\varphi \in L_p(\partial Q \times (0, T))$  и  $u_0 \in L_p(Q, r)$ , что имеют место равенства (8) и (10).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Утверждение теоремы достаточно установить для однородного уравнения

$$Lu = 0. \quad (1^0)$$

Действительно, если  $u(x, t)$  — решение из  $W_{p, \text{loc}}^{1,0}(Q^T)$  уравнения (1), принадлежащее классу  $H_p^*$ , то, обозначив через  $u_1(x, t)$  решение задачи (1), (5), (7) с равными нулю граничным и начальным значениями (такое решение существует в силу теоремы 2), получим, что разность  $u_2(x, t) = u(x, t) - u_1(x, t)$  принадлежит классу  $H_p^*$  и является обобщенным из  $W_{p, \text{loc}}^{1,0}(Q^T)$  решением однородного уравнения (1<sup>0</sup>).

Итак, пусть  $u(x, t)$  — обобщенное из  $W_{p, \text{loc}}^{1,0}(Q^T)$  решение уравнения (1<sup>0</sup>), принадлежащее классу  $H_p^*$ . Пусть  $p > 2$ . Тогда из ограниченности функции  $M(\delta)$  следует ограниченность функции

$$\int_{\delta}^{T'} \int_{\partial Q_*^\delta} |u|^p ds dt + \int_{Q_*^\delta} |u(x, \delta)|^p \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) dx, \quad \delta \in (0, \delta_0],$$

и тем самым ограниченность функции

$$\int_{\delta}^{T'} \int_{\partial Q_*^\delta} |u|^2 ds dt + \int_{Q_*^\delta} |u(x, \delta)|^2 \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) dx, \quad \delta \in (0, \delta_0].$$

По доказанному утверждению теоремы 3 работы [22] имеем: существует такая функция  $\varphi(x, t) \in L_2(\partial Q \times (0, T'))$ , что выполняется равенство

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\delta}^{T'} \int_{\partial Q} |u((1-\delta)x, t) - \varphi(x, t)|^2 ds dt = 0, \quad (18)$$

и существует такая функция  $u_0(x) \in L_2(Q, r)$ , что

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{Q_*^\delta} |[u(x, \delta) - u_0(x)]|^2 r(x) dx dt = 0. \quad (19)$$

Поскольку из принадлежности функции  $u(x, t)$  классу  $H_p^*$ , следует ограниченность множества

$$M_1(\delta) = \int_{\delta}^{T'} \int_{\partial Q} |u(1-\delta)x, t|^p ds dt$$

с постоянной, не зависящей от  $\delta \in (0, \delta_0]$ , то, введя в рассмотрение функцию

$$\mu(t) = \begin{cases} 1, & t \in (\delta, T'), \\ 0, & t \in (0, \delta), \end{cases}$$

получим, что множество

$$M_1(\delta) = \int_0^{T'} \int_{\partial Q} |u(1-\delta)x, t|^p \mu(t) ds dt$$

также ограничено постоянной, не зависящей от  $\delta \in (0, \delta_0]$ . Таким образом, множество  $\{u((1 - \delta)x, t)(\mu(t))^{1/p}, 0 < \delta \leq \delta_0\}$  ограничено в  $L_p(\partial Q \times (0, T))$  и тем самым слабо компактно, а из слабой компактности вытекает слабая сходимость в  $L_p(\partial Q \times (0, T))$  и тем самым слабая сходимость в  $L_2(\partial Q \times (0, T))$ , стало быть,  $\varphi(x, t) \in L_p(\partial Q \times (0, T))$  и функция  $u(x, t)$  слабо стремится в  $L_p(\partial Q \times (0, T))$  к функции  $\varphi(x, t)$ .

Так как для любого  $q \in (2, p)$

$$\begin{aligned} & \int_{\delta}^{T'} \int_{\partial Q} |u((1 - \delta)x, t) - \varphi(x, t)|^q ds dt \\ & \leq \left\{ \int_{\delta}^{T'} \int_{\partial Q} |u((1 - \delta)x, t) - \varphi(x, t)|^2 ds dt \right\}^{\frac{p-q}{p-2}} \\ & \quad \times \left\{ \int_{\delta}^{T'} \int_{\partial Q} |u((1 - \delta)x, t) - \varphi(x, t)|^p ds dt \right\}^{\frac{q-2}{p-2}}, \end{aligned}$$

при любом  $q \in (2, p)$  и тем самым при любом  $q \in (1, p)$

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\delta}^{T'} \int_{\partial Q} |u((1 - \delta)x, t) - \varphi(x, t)|^q ds dt = 0.$$

Аналогично доказывается, что для любого  $q \in (1, p)$

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{Q_*^\delta} |u(x, \delta) - u_0(x)|^q \rho \left( \frac{x}{1 - \delta} \right) dx = 0.$$

**Лемма 5.** Пусть обобщенное из  $W_{p, \text{loc}}^{1,0}(Q^T)$  решение  $u(x, t)$  уравнения  $(1^0)$  принадлежит классу  $H_p^*$  и для любого  $q \in (1, p)$

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\delta}^{T'} \int_{\partial Q} |u((1 - \delta)x, t) - \varphi(x, t)|^q ds dt = 0,$$

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{Q_*^\delta} |u(x, \delta) - u_0(x)|^q \rho \left( \frac{x}{1 - \delta} \right) dx = 0,$$

тогда

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\delta}^{T'} \int_{\partial Q} |u((1 - \delta)x, t) - \varphi(x, t)|^p ds dt = 0, \quad (20)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{Q_*^\delta} |u(x, \delta) - u_0(x)|^p \rho \left( \frac{x}{1 - \delta} \right) dx = 0. \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через  $u_3(x, t)$  решение из  $W_{p,\text{loc}}^{1,0}(Q^T)$  задачи (1<sup>0</sup>), (5), (7). Для функции  $u_4(x, t) = u(x, t) - u_3(x, t)$  выполнены все условия леммы 5 с  $\varphi(x, t) \equiv 0$ ,  $u_0(x) \equiv 0$ . Докажем, что

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\delta}^{T'} \int_{\partial Q} |u_4((1-\delta)x, t)|^p dsdt = 0, \quad (22)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{Q_*^\delta} |u_4(x, \delta)|^p \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) dx = 0. \quad (23)$$

Записывая равенство (3) для функции  $u_4(x, t)$  и полагая  $\beta = \delta$ , получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \int_{Q_*^\delta} |u_4(x, T')|^p \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) dx - \frac{1}{p} \int_{Q_*^\delta} |u_4(x, \delta)|^p \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) dx \\ & + (p-1) \int_{\delta}^{T'} \int_{Q_*^\delta} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{4x_i} u_{4x_j} |u_4|^{p-2} \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) dxdt \\ & - \int_{\delta}^{T'} \int_{Q_*^\delta} \sum_{i=1}^n a_i u_{4x_i} |u_4|^{p-1} \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) dxdt \\ & - \frac{1}{p} \int_{\delta}^{T'} \int_{\partial Q_*^\delta} \sum_{i,j=1}^n \left( a_{ij} \frac{\rho_{x_i} \rho_{x_j}}{|\nabla \rho|} \right) |u_4|^p dsdt - \frac{1}{p} \int_{\delta}^{T'} \int_{Q_*^\delta} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} \rho_{x_i})_{x_j} |u_4|^p dxdt \\ & - \frac{1}{p} \int_{\delta}^{T'} \int_{Q_*^\delta} \sum_{i=1}^n \left( a_i \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) \right)_{x_i} |u_4|^p dxdt + \int_{\delta}^{T'} \int_{Q_*^\delta} a |u_4|^p \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) dxdt = 0. \quad (24) \end{aligned}$$

Так как  $W_{p,\text{loc}}^{1,0}(Q^T) \subset W_{q,\text{loc}}^{1,0}(Q^T)$  при  $1 < q < p$ , принадлежащая  $W_{p,\text{loc}}^{1,0}(Q^T)$  функция  $u_4(x, t)$  является также обобщенным из  $W_{q,\text{loc}}^{1,0}(Q^T)$  решением уравнения (1<sub>0</sub>) и, следовательно, в силу леммы 1 можно записать равенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{q} \int_{Q_*^\delta} |u_4(x, T')|^q \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) dx - \frac{1}{q} \int_{Q_*^\delta} |u_4(x, \delta)|^q \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) dx \\ & + (q-1) \int_{\delta}^{T'} \int_{Q_*^\delta} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{4x_i} u_{4x_j} |u_4|^{q-2} \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) dxdt \\ & - \int_{\delta}^{T'} \int_{Q_*^\delta} \sum_{i=1}^n a_i u_{4x_i} |u_4|^{q-1} \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) dxdt \\ & - \frac{1}{q} \int_{\delta}^{T'} \int_{\partial Q} \sum_{i,j=1}^n \left( a_{ij} \frac{\rho_{x_i} \rho_{x_j}}{|\nabla \rho|} \right) |u_4|^q dsdt - \frac{1}{q} \int_{\delta}^{T'} \int_{Q_*^\delta} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} \rho_{x_i})_{x_j} |u_4|^q dxdt \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{q} \int_0^{T'} \int_{Q_*^\delta} \sum_{i=1}^n \left( a_i \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) \right)_{x_i} |u_4|^q dx dt + \int_0^{T'} \int_{Q_*^\delta} a |u_4|^q \rho \left( \frac{x}{1-\delta} \right) dx dt = 0.$$

Поскольку  $u_4(x, t)$  принадлежит классу  $H_q^*$ , то  $u_4(x, t) \in L_q(Q^{T'})$  и по теореме 1 функция

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{4x_i} u_{4x_j} |u_4|^{q-2} \rho(x)$$

интегрируема по  $Q^{T'}$ ,  $|u_4(x, T')|^q \rho(x)$  интегрируема по  $Q$ . Поэтому в последнем равенстве можно перейти к пределу при  $\delta \rightarrow +0$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{q} \int_Q |u_4(x, T')|^q \rho(x) dx - \int_0^{T'} \int_Q \sum_{i=1}^n a_i u_{4x_i} |u_4|^{q-1} \rho(x) dx dt \\ & + (q-1) \int_0^{T'} \int_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{4x_i} u_{4x_j} |u_4|^{q-2} \rho(x) dx dt \\ & - \frac{1}{q} \int_0^{T'} \int_Q \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} \rho_{x_i})_{x_j} |u_4|^q dx dt + \int_{Q^{T'}} a |u_4|^q \rho(x) dx dt \\ & - \frac{1}{q} \int_0^{T'} \int_Q \sum_{i=1}^n (a_i \rho(x))_{x_i} |u_4|^q dx dt = 0. \quad (25) \end{aligned}$$

Аналогично, переходя к пределу в равенстве (24) при  $\delta \rightarrow +0$ , получим

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{p} M(\delta) = \frac{1}{p} \int_Q |u_4(x, T')|^p \rho(x) dx \\ & + (p-1) \int_0^{T'} \int_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{4x_i} u_{4x_j} |u_4|^{p-2} \rho(x) dx dt \\ & - \int_0^{T'} \int_Q \sum_{i=1}^n a_i u_{4x_i} |u_4|^{p-1} \rho(x) dx dt - \frac{1}{p} \int_0^{T'} \int_Q \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} \rho_{x_i})_{x_j} |u_4|^p dx dt \\ & - \frac{1}{p} \int_0^{T'} \int_Q \sum_{i=1}^n (a_i \rho(x))_{x_i} |u_4|^p dx dt + \int_0^{T'} \int_Q a |u_4|^p \rho(x) dx dt. \quad (26) \end{aligned}$$

Переходя в равенстве (25) к пределу при  $q \rightarrow p-0$  (что можно сделать в силу свойств функции  $u_4(x, t)$  на основании теоремы Лебега), на основании (26) получаем равенство

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} M(\delta) = 0,$$

из которого немедленно следуют равенства (22) и (23). Лемма 5 доказана.

Из леммы 5 вытекает утверждение теоремы 3 при  $p \geq 2$ .

Доказательство теоремы 3 при  $1 < p < 2$  будет приведено в следующей части статьи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Riesz F. Über die Randwerte einer analytischen Funktion // Math. Z. 1923. Bd 18. S. 87–95.
2. Littlewood J. E., Paley R. E. A. C. Theorem on Fourier series and power series // J. Lond. Math. Soc. 1931. V. 6. P. 230–233.
3. Littlewood J. E., Paley R. E. A. C. Theorem on Fourier series and power II // Proc. Lond. Math. Soc. Ser. 2. 1936. V. 42. P. 52–89.
4. Littlewood J. E., Paley R. E. A. C. Theorem on Fourier series and power II // Proc. Lond. Math. Soc. Ser. 2. 1937. V. 43. P. 105–126.
5. Михайлов В. П. О граничных свойствах решений эллиптических уравнений // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226. С. 1264–1266.
6. Михайлов В. П. О граничном значении решений эллиптических уравнений в областях с гладкой границей // Мат. сб. 1976. Т. 30, № 2. С. 143–166.
7. Гущин А. К., Михайлов В. П. О граничных значениях в  $L_p$ ,  $p > 1$ , решений эллиптических уравнений // Мат. сб. 1979. Т. 108, № 1. С. 3–21.
8. Гущин А. К., Михайлов В. П. О существовании граничных значений решений эллиптического уравнения // Мат. сб. 1991. Т. 182, № 6. С. 787–810.
9. Петрушко И. М. О граничных и начальных условиях в  $L_p$ ,  $p > 1$ , решений параболических уравнений // Мат. сб. 1984. Т. 125, № 4. С. 489–521.
10. Петрушко И. М. О граничных значениях в  $L_p$ ,  $p > 1$ , решений эллиптических уравнений в областях с ляпуновской границей // Мат. сб. 1983. Т. 120, № 4. С. 569–588.
11. Гущин А. К. О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка // Мат. сб. 1988. Т. 137, № 1. С. 19–64.
12. Гущин А. К. О внутренней гладкости решений эллиптического уравнения второго порядка // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 4. С. 826–840.
13. Гущин А. К. Некоторое усиление свойства внутренней непрерывности по Гельдеру решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка // Теор. мат. физика. 2008. Т. 157, № 3. С. 345–363.
14. Гущин А. К. О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с граничной функцией из  $L_p$  // Мат. сб. 2012. Т. 203, № 1. С. 1–27.
15. Гущин А. К. Критерий существования граничных значений в  $L_p$  решений эллиптического уравнения // Комплексный анализ, математическая физика и приложения. Тр. МИАН. 2018. Т. 301. С. 53–73.
16. Думанян В. Ж. Разрешимость задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения второго порядка // Мат. сб. 2011. Т. 202, № 7. С. 1001–1020.
17. Tricomi F. G. Ancora sull'equazione  $yu_{xx} + u_{yy} = 0$  // Rend. Acc. Lincei, Ser. VI. 1927. V. 6.
18. Келдыш М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // Докл. АН СССР. Т. 77, № 2. С. 181–183.
19. Фикера Г. К единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений второго порядка // Математика. 1963. Т. 7, № 6. С. 99–122.
20. Олейник О. А., Радкевич Е. В. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Итоги науки. Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1971. С. 7–252.
21. Петрушко И. М. О граничных и начальных условиях в  $L_p$ ,  $p > 1$ , решений параболических уравнений // Мат. сб. 1994. Т. 125, № 4. С. 489–521.
22. Капицьна Т. В. О существовании граничных и начальных значений для вырождающихся параболических уравнений в звездных областях // Мат. заметки СВФУ. 2018. Т. 25, № 4. С. 15–33.

23. Капицына Т. В. О существовании граничных и начальных значений для вырождающихся параболических уравнений в звездных областях. Ч. II // Мат. заметки СВФУ. 2020. Т. 27, № 2. С. 21–38.

*Поступила в редакцию 8 августа 2021 г.*

*После доработки 2 февраля 2023 г.*

*Принята к публикации 28 февраля 2023 г.*

Петрушко Игорь Мелетиевич,

Капицына Татьяна Владимировна, Петрушко Максим Игоревич

Национальный исследовательский университет «МЭИ»,

Красноказарменная, 14, Москва 111250

[kapitsynatv@mpei.ru](mailto:kapitsynatv@mpei.ru), [petrushkomi@mpei.ru](mailto:petrushkomi@mpei.ru)

ON THE FIRST MIXED PROBLEM  
FOR DEGENERATE PARABOLIC EQUATIONS  
IN STELLAR DOMAINS WITH LYAPUNOV  
BOUNDARY IN BANACH SPACES

I. M. Petrushko, T. V. Kapitsyna,  
and M. I. Petrushko

**Abstract:** The article is devoted to the study of behavior of the solution to a second-order parabolic equation with Tricomi degeneration on the lateral boundary of a cylindrical domain  $Q^T$ , where  $Q$  is a stellar region whose boundary  $\partial Q$  is an  $(n-1)$ -dimensional closed surface without boundary of class  $C^{1+\lambda}$ ,  $0 < \lambda < 1$ . We study the question of unique solvability of the first mixed problem for the equation with the boundary and initial functions belonging to spaces of type  $L_p$ ,  $p > 1$ . This topic goes back to the classical works of Littlewood–Paley and F. Riesz devoted to the boundary values of analytic functions. All directions of taking boundary values for uniformly elliptic equations turn out to be equal, and the solution has a property similar to the continuity with respect to a set of variables. In the case of degeneracy of the equation on the boundary of the domain when the directions are not equal, the situation becomes more complicated. In this case, the statement of the first boundary value problem is determined by the type of degeneracy.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.56.84.002

**Keywords:** degenerate parabolic equations, degeneration of Tricomi type, function spaces, first mixed problem, solvability, boundary and initial values of solutions, a priori estimates.

REFERENCES

1. Riesz F., “Über die Randwerte einer analytischen Funktion,” *Math. Z.*, **18**, 87–95 (1923).
2. Littlewood J. E. and Paley R. E. A. C., “Theorem on Fourier series and power series,” *J. Lond. Math. Soc.*, **6**, 230–233 (1931).
3. Littlewood J. E. and Paley R. E. A. C., “Theorem on Fourier series and power. II,” *Proc. Lond. Math. Soc.*, Ser. 2, **42**, 52–89 (1936).
4. Littlewood J. E. and Paley R. E. A. C., “Theorem on Fourier series and power. II,” *Proc. Lond. Math. Soc.*, Ser. 2, **43**, 105–126 (1937).
5. Mikhailov V. P., “On boundary properties of solution of elliptic equations,” *Sov. Math. Dokl.*, **17**, 274–277 (1976).
6. Mikhailov V. P., “On the boundary value of solutions of elliptic equations in domains with a smooth boundary,” *Math. USSR, Sb.*, **30**, No. 2, 143–166 (1976).
7. Gushchin A. K. and Mikhailov V. P., “On boundary values in  $L_p$ ,  $p > 1$ , of solutions of elliptic equations,” *Math. USSR, Sb.*, **36**, No. 1, 1–19 (1980).
8. Gushchin A. K. and Mikhailov V. P., “On the existence of boundary values of solutions of elliptic equation,” *Math. USSR, Sb.*, **73**, No. 1, 171–194 (1992).

9. Petrushko I. M., "On boundary and initial conditions in  $L_p$ ,  $p > 1$ , of solutions of parabolic equations," Math. USSR, Sb., **53**, No. 2, 489–522 (1986).
10. Petrushko I. M., "On the boundary value in  $L_p$ ,  $p > 1$ , of solutions of elliptic equations in domains with Lyapunov boundary," Math. USSR, Sb., **48**, No. 2, 565–585 (1984).
11. Gushchin A. K., "On the Dirichlet problem for a second-order elliptic equation," Math. USSR, Sb., **65**, No. 1, 19–66 (1990).
12. Gushchin A. K., "On the interior smoothness of solutions to second-order elliptic equation," Sib. Math. J., **46**, 826–840 (2005).
13. Gushchin A. K., "A strengthening of the interior Hölder continuity property for solutions for Dirichlet problem for a second-order elliptic equation," Theor. Math. Phys., **157**, No. 3, 1655–1670 (2008).
14. Gushchin A. K., "The Dirichlet problem for a second-order elliptic equation with an  $L_p$  boundary function," Sb. Math., **203**, No. 1, 1–27 (2012).
15. Gushchin A. K., "A criterion for existence of  $L_p$  boundary value of solutions to an elliptic equation," Proc. Steklov Inst. Math., **301**, 44–64 (2018).
16. Dumanyan V. Zh., "Solvability of the Dirichlet problem for a general second-order elliptic equation," Sb. Math., **202**, No. 7, 1001–1020 (2011).
17. Tricomi F. G., "Ancora sull'equazione  $yu_{xx} + u_{yy} = 0$ ," Rend. Acc. Lincei, Ser. VI, **6** (1927).
18. Keldysh M. V., "Same cases of the degeneracy of equations of elliptic type at the boundary of a domain," Dokl. Akad. Nauk SSSR, **77**, No. 2, 181–183 (1951).
19. Fichera G., "On a unified theory of boundary value problems for elliptic-parabolic equations of second order," Magyar Tud. Akad., Mat. Fiz. Tud. Oszt. Közl., **13**, 375–393 (1963).
20. Oleinik O. A. and Radkevich E. V., "Second order equations with nonnegative characteristic form," in: Itogi Nauki, Mat. Analiz, pp. 7–252, VINITI, Moscow (1971).
21. Petrushko I. M., "Boundary and initial conditions in  $L_p$ ,  $p > 1$ , for solutions of parabolic equations," Math USSR, Sb., **125**, No. 4, 489–521 (1984).
22. Kapitsyna T. V., "On the existence of boundary and initial values for the degenerating parabolic equations in the stellar domains," Mat. Zamet. SVFU, **25**, No. 4, 15–33 (2018).
23. Kapitsyna T. V., "On the existence of boundary and initial values for the degenerating parabolic equations in the stellar domains. Part II," Mat. Zamet. SVFU, **27**, No. 2, 21–38 (2020).

*Submitted August 8, 2021*

*Revised February 2, 2023*

*Accepted February 28, 2023*

Igor M. Petrushko,  
 Tatyana V. Kapitsyna Maksim I. Petrushko  
 National Research University "MPEI",  
 14 Kracnokazarmennaya, 111250 Moscow, Russia  
 kapitsynatv@mpei.ru, petrushkomi@mpei.ru

О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА  
НА ОКРУЖНОСТИ, ИМЕЮЩИХ  
ПЕРВУЮ СТЕПЕНЬ НЕГРУБОСТИ

В. III. Ройтенберг

**Аннотация.** Рассматриваются автономные дифференциальные уравнения второго порядка, правые части которых являются полиномами степени  $n$  относительно первой производной с периодическими непрерывными коэффициентами, причем старший коэффициент и свободный член не обращаются в нуль. Такие уравнения задают на цилиндрическом фазовом пространстве динамическую систему без особых точек и замкнутых траекторий, гомотопных нулю. Грубыми называются уравнения, для которых структура фазового портрета соответствующей динамической системы не меняется при малых возмущениях в классе таких уравнений. Уравнение является грубым тогда и только тогда, когда все его замкнутые траектории являются гиперболическими. Грубые уравнения образуют открытое всюду плотное множество в пространстве рассматриваемых уравнений. В работе изучаются уравнения первой степени негрубости — негрубые уравнения, для которых топологическая структура фазового портрета не меняется при переходе к достаточно близкому негрубому уравнению. Множество уравнений первой степени негрубости является вложенным гладким подмногообразием коразмерности один в пространстве всех рассматриваемых уравнений, открыто и всюду плотно в множестве негрубых уравнений и состоит из уравнений, имеющих единственную негиперболическую замкнутую траекторию — двойной цикл.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.30.21.003

**Ключевые слова:** дифференциальное уравнение второго порядка, полиномиальная правая часть, цилиндрическое фазовое пространство, грубость, бифуркационное многообразие, двойной цикл.

## Введение

Грубые динамические системы, задаваемые  $C^r$ -векторными полями ( $r \geq 1$ ) на замкнутых двумерных ориентируемых многообразиях типичны — образуют открытое и всюду плотное множество  $\Sigma$  в пространстве  $\mathfrak{X}^r$  всех таких систем с  $C^r$ -нормой [1]. Простейшие негрубые системы — системы первой степени негрубости — образуют вложенное  $C^{r-1}$ -подмногообразие  $\Sigma^1$  коразмерности один в  $\mathfrak{X}^r$  [2]. Для динамических систем на двумерной сфере множество  $\Sigma^1$  открыто и всюду плотно в  $\mathfrak{X}^r \setminus \Sigma$ . Несомненный интерес представляет получение аналогичных результатов для более «узких» пространств двумерных динамических

систем. В некоторых случаях это — сложная проблема. В частности, классическая задача нахождения необходимых и достаточных условий грубости относительно пространства полиномиальных векторных полей на плоскости степени  $\leq n$  при  $n \geq 2$  до сих пор не решена. Не доказано, что у грубого векторного поля могут быть только гиперболические замкнутые траектории. Для динамических систем в цилиндрическом фазовом пространстве без особых точек, заданных автономными дифференциальными уравнениями второго порядка, правые части которых являются полиномами степени  $n$  относительно производной с непрерывными периодическими коэффициентами, определение грубости было введено в работе [3], получены необходимые и достаточные условия грубости и доказана типичность грубых систем. В настоящей работе описываются системы первой степени негрубости, заданные такими уравнениями.

## 1. Формулировка результатов

Пусть  $A_\omega^n$  — множество дифференциальных уравнений второго порядка вида

$$a : \quad \ddot{x} = a_n(x)\dot{x}^n + \cdots + a_1(x)\dot{x} + a_0(x) \quad (1)$$

степени  $n \geq 3$  с  $\omega$ -периодическими непрерывными коэффициентами  $a_k(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ . Можно считать, что такие уравнения заданы на окружности  $\mathbb{S}^1 := \mathbb{R}/\omega\mathbb{Z}$ . Введем на множестве  $A_\omega^n$  структуру банахова пространства, отождествив уравнение (1) с вектор-функцией  $a = (a_0, a_1, \dots, a_n) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , с нормой  $\|a\| := \max_{0 \leq i \leq n} \max_{x \in \mathbb{R}} |a_i(x)|$ .

Уравнение  $a \in A_\omega^n$  определяет на цилиндрическом фазовом пространстве  $\Phi := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  векторное поле

$$\vec{a}(x, y) = y \frac{\partial}{\partial x} + (a_n(x)y^n + \cdots + a_1(x)y + a_0(x)) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Его траектории называются *траекториями уравнения*  $a$  в фазовом пространстве  $\Phi$ .

Обозначим через  $\overline{A}_\omega^n$  открытое подмножество в  $A_\omega^n$ , состоящее из уравнений, для которых выполняется условие

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a_n(x) \neq 0, \quad (2)$$

а через  $\overline{\overline{A}}_\omega^n$  — открытое подмножество в  $\overline{A}_\omega^n$ , состоящее из уравнений, удовлетворяющих условию

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a_0(x) \neq 0. \quad (3)$$

Условия (2) и (3) означают, что у векторного поля  $\vec{a}$  нет соответственно бесконечно удаленных особых точек и особых точек в  $\Phi$  [3, 4]. Вследствие (3) уравнение  $a \in \overline{\overline{A}}_\omega^n$  не имеет замкнутых траекторий, гомотопных нулю на  $\Phi$ .

Траектории уравнения (1) на множестве  $\{(x, y) \in \Phi : y \neq 0\}$  являются интегральными кривыми дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = a_n(x)y^{n-1} + \dots + a_2(x)y + a_1(x) + \frac{a_0(x)}{y}. \quad (4)$$

Пусть  $Y(x, u)$  — решение уравнения (4), удовлетворяющее начальному условию  $Y(0, u) = u$ . Множество  $J_+$  ( $J_-$ ) тех  $u \in (0, +\infty)$  ( $u \in (-\infty, 0)$ ), при которых функция  $Y(\cdot, u)$  определена в точках отрезка  $[0, \omega]$ , открыто и связно. Функции  $u \mapsto Y(\omega, u)$ ,  $u \in J_+$ , и  $u \mapsto Y(\omega, u)$ ,  $u \in J_-$ , являются функциями последования по траекториям соответственно векторных полей  $\vec{a}$  и  $-\vec{a}$ . Определим также *функцию расхождения*  $d(u) := Y(\omega, u) - u$ ,  $u \in J_+ \cup J_-$ . Так как правая часть уравнения (4) — аналитическая функция от  $y$ , то и функция расхождения аналитическая [5]. Траектория уравнения (1) является замкнутой тогда и только тогда, когда она задается уравнением  $y = Y(y_0, x)$ , где функция  $Y(y_0, \cdot)$  определена в точках отрезка  $[0, \omega]$ , а  $y_0$  — нуль функции расхождения. Кратность нуля  $y_0$  называется *кратностью замкнутой траектории*. Если  $d'(y_0) \neq 0$ , то замкнутая траектория *гиперболическая* — устойчивый (неустойчивый) гиперболический предельный цикл при  $y_0 d'(y_0) < 0$  ( $y_0 d'(y_0) > 0$ ). Замкнутая траектория кратности 2 называется *двойным циклом*.

Уравнения  $a$  и  $\tilde{a}$  из  $A_\omega^n$  называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм  $h : \Phi \rightarrow \Phi$ , переводящий траектории уравнения  $a$  в траектории уравнения  $\tilde{a}$  с сохранением ориентации на них.

Пусть  $\Lambda \subset A_\omega^n$ . Уравнение  $a \in \Lambda$  называется *грубым относительно*  $\Lambda$ , если существует такая его окрестность  $V(a)$  в  $\Lambda$ , что  $a$  и любое уравнение  $\tilde{a} \in V(a)$  топологически эквивалентны. Уравнение  $a \in \overline{\overline{A}}_\omega^n$ , грубо относительно  $\overline{\overline{A}}_\omega^n$ , будем называть просто *грубым*.

Уравнение  $a \in \overline{\overline{A}}_\omega^n$  называется *уравнением первой степени негрубости*, если оно является грубым относительно множества всех негрубых уравнений из  $\overline{\overline{A}}_\omega^n$ , т. е. если оно негрубое и существует такая его окрестность  $U(a)$  в  $\overline{\overline{A}}_\omega^n$ , что  $a$  и любое негрубое уравнение  $a_* \in U(a)$  топологически эквивалентны.

Обозначим через  $\Sigma^0$  множество уравнений из  $\overline{\overline{A}}_\omega^n$ , у которых все замкнутые траектории являются гиперболическими,  $\Sigma^1$  — множество уравнений из  $\overline{\overline{A}}_\omega^n$ , имеющих только одну негиперболическую замкнутую траекторию — *двойной цикл*.

Из условия (2) следует, что уравнения из  $\Sigma^0$  и  $\Sigma^1$  имеют конечное число замкнутых траекторий.

В статье [3] доказано, что множество  $\Sigma^0$  открыто и всюду плотно в  $\overline{\overline{A}}_\omega^n$ , а уравнение  $a \in \overline{\overline{A}}_\omega^n$  является грубым тогда и только тогда, когда принадлежит  $\Sigma^0$ .

Заметим, что необходимые и достаточные условия грубости относительно множества  $\overline{\overline{A}}_\omega^n$  не получены, но в работе [4] установлено, что уравнения, грубые относительно  $\overline{\overline{A}}_\omega^n$ , всюду плотны в  $\overline{\overline{A}}_\omega^n$ .

Результатом настоящей работы являются следующие утверждения.

**Теорема 1.** Множество  $\Sigma^1$  — вложенное  $C^\infty$ -подмногообразие  $\overline{\overline{A}}_\omega^n$  коразмерности один.

**Теорема 2.** Множество  $\Sigma^1$  открыто и всюду плотно в  $\overline{\overline{A}}_\omega^n \setminus \Sigma^0$ .

**Теорема 3.** Уравнение  $a \in \overline{\overline{A}}_\omega^n$  является уравнением первой степени негрубости тогда и только тогда, когда оно принадлежит  $\Sigma^1$ .

## 2. Доказательство теоремы 1

Будем следовать схеме из [2]. Достаточно доказать, что для любого уравнения  $a^0 \in \Sigma^1$  найдутся такие его окрестность  $U(a^0)$  в  $\overline{\overline{A}}_\omega^n$  и невырожденная  $C^\infty$ -функция  $f : U(a^0) \rightarrow \mathbb{R}$ , что  $\Sigma^1 \cap U(a^0) = \{a \in \overline{\overline{A}}_\omega^n : f(a) = 0\}$ . Функция  $A : S^1 \times \mathbb{R} \times \overline{\overline{A}}_\omega^n \rightarrow \mathbb{R}$ , заданная равенством  $A(x, y, a) := a(x, y)$ , непрерывна. Кроме того, она бесконечно дифференцируема по переменным  $y, a$ . Поэтому решение  $y = Y(x, u, a)$  уравнения (4), соответствующего уравнению  $a \in \overline{\overline{A}}_\omega^n$ , удовлетворяющее начальному условию  $Y(0, u, a) = u$ , является  $C^1$ -функцией от  $(x, u, a)$  и  $C^\infty$ -функцией от  $(u, a)$ .

Пусть уравнение  $a^0 \in \Sigma^1$ . Из условия (2) следует, что существуют такие число  $r > 0$  и окрестность  $U_1(a^0)$  уравнения  $a^0$  в  $\overline{\overline{A}}_\omega^n$ , что для любого уравнения  $a \in U_1(a^0)$  соответствующее векторное поле  $\vec{d}$  трансверсально окружностям  $S^1 \times \{y_0\}$ ,  $|y_0| \geq r$ . Поэтому все замкнутые траектории уравнений  $a \in U_1(a^0)$  находятся в кольце  $S^1 \times (-r, r)$ . Пусть для уравнения  $a^0$  траектория  $\Gamma : y = Y(x, u_0, a^0)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  — двойной цикл, а  $\Gamma_k : y = Y(x, u_k, a^0)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $k = 1, \dots, N$ , — гиперболические предельные циклы. Мы можем выбрать окрестность  $U_1(a^0)$  и число  $\varepsilon_1 > 0$  так, чтобы интервалы  $(u_k - \varepsilon_1, u_k + \varepsilon_1)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ , между собой не пересекались, а для  $a \in U_1(a^0)$  и  $u \in (u_k - \varepsilon_1, u_k + \varepsilon_1)$  была определена функция расхождения  $d(u, a) := Y(x, u, a) - u$ .

Так как  $d'_u(u_0, a^0) = 0$ ,  $d''_{uu}(u_0, a^0) \neq 0$ , а  $d(u_k, a^0) = 0$ ,  $d'_u(u_k, a^0) \neq 0$ ,  $k = 1, \dots, N$ , по теореме о неявной функции существуют число  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$  и окрестность  $U(a^0)$  ( $U(a^0) \subset U_1(a^0)$ ) уравнения  $a^0$  такие, что для любого  $a \in U(a^0)$  уравнение  $d'_u(u, a) = 0$  имеет в интервале  $(u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon)$  единственное решение  $u = \widehat{u}_0(a)$ , при этом  $\widehat{u}_0(\cdot) \in C^\infty$ ,  $\widehat{u}_0(a^0) = u_0$ ,

$$\forall u \in (u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon) \forall a \in U_1(a^0) \quad d''_{uu}(u, a) \neq 0; \quad (5)$$

уравнение  $d(u, a) = 0$  имеет в интервале  $(u_k - \varepsilon, u_k + \varepsilon)$ ,  $k = 1, \dots, N$ , единственное решение  $u = \widehat{u}_k(a)$ , при этом  $d'_u(\widehat{u}_k(a), a) \neq 0$ , т. е. уравнение  $y = Y(x, \widehat{u}_k(a), a)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , задает гиперболический цикл. Можно также считать окрестность  $U(a^0)$  столь малой, что для любого  $a \in U(a^0)$  решения  $y = Y(x, u, a)$  уравнения (4) при  $u \notin \bigcup_{k=0}^N (u_k - \varepsilon, u_k + \varepsilon)$  задают незамкнутые траектории.

Определим  $C^\infty$ -функцию  $f : U(a^0) \rightarrow \mathbb{R}$ , положив  $f(a) := d(\hat{u}_0(a), a)$ . Обозначим через  $h$  уравнение  $\ddot{x} = \dot{x}$ . Тогда функция

$$\eta(x) := \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} Y(x, u_0, a^0 + \tau h)$$

удовлетворяет уравнению  $\eta'(x) = c(x)\eta(x) + 1$ , где

$$c(x) = \frac{A'_y(x, p_0(x), a^0)}{p_0(x)} - \frac{A(x, p_0(x), a^0)}{p_0^2(x)},$$

и начальному условию  $\eta(0) = 0$ . Поэтому

$$\frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} d(u_0, a^0 + \tau h) = \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} Y(\omega, u_0, a^0 + \tau h) = \int_0^\omega \exp \int_x^\omega c(s) ds dx > 0.$$

Так как  $d'_u(u_0, a^0) = 0$ , то

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} f(a^0 + \tau h) &= d'_u(u_0, a^0) \cdot \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \hat{u}_0(a^0 + \tau h) + \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} d(u_0, a^0 + \tau h) \\ &= \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} d(u_0, a^0 + \tau h). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$f'(a_0)h = \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} f(a^0 + \tau h) > 0$$

и  $f'(a_0) \neq 0$ . Считая окрестность  $U(a^0)$  достаточно малой, будем иметь  $f'(a) \neq 0$  для любого  $a \in U(a^0)$ .

Пусть  $f(a) = 0$ . Учитывая (5), получаем, что функция  $d(\cdot, a)$  имеет на интервале  $(u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon)$  единственный, причем двукратный, нуль  $\hat{u}_0(a)$ . Уравнение  $y = Y(x, \hat{u}_0(a), a)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , задает двойной цикл. Поскольку все остальные замкнутые траектории уравнения  $a$  являются гиперболическими, то  $a \in \Sigma^1$ . Аналогично [6] получаем, что уравнения  $a$  и  $a^0$  топологически эквивалентны.

При  $d''_{uu}(u_0, a^0) \cdot f(a) > 0$  (соответственно при  $d''_{uu}(u_0, a^0) \cdot f(a) < 0$ ), учитывая (5), получаем, что на интервале  $(u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon)$  функция  $d(\cdot, a)$  не имеет нулей (соответственно имеет два простых нуля  $u_-(a)$  и  $u_+(a)$ ,  $d'_u(u_-(a), a) \cdot d'_u(u_+(a), a) < 0$ ,  $u_\pm(a) \rightarrow u_0$  при  $a \rightarrow a^0$ ). Поэтому уравнение  $a$  имеет только гиперболические замкнутые траектории, т. е.  $a \in \Sigma^0$ . Таким образом,  $\Sigma^1 \cap U(a^0) = \{a \in \bar{\mathbf{A}}_\omega^n : f(a) = 0\}$ , что и требовалось установить.

Кроме того, мы показали, что бифуркация при переходе уравнения через  $\Sigma^1$  аналогична бифуркации двойного цикла гладкого векторного поля на плоскости [2, с. 10; 6, с. 382]: устойчивый и неустойчивый предельные циклы «сливаются» в двойной цикл и исчезают.

### 3. Доказательство теоремы 2

Открытость  $\Sigma^1$  в  $\overline{\mathbb{A}}_\omega^n \setminus \Sigma^0$  следует из того, что, как показано выше, окрестности  $U(a^0)$  уравнения  $a^0 \in \Sigma^1$  принадлежат только уравнения из  $\Sigma^0$  и  $\Sigma^1$ .

Докажем плотность  $\Sigma^1$  в  $\overline{\mathbb{A}}_\omega^n \setminus \Sigma^0$ . Предположим, что уравнение  $a \in \overline{\mathbb{A}}_\omega^n \setminus \Sigma^0$ . Зададим окрестность  $V(a)$  уравнения  $a$  в  $\overline{\mathbb{A}}_\omega^n$ . Пусть  $\Gamma : y = p(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , — негиперболическая замкнутая траектория уравнения  $a$ . Сделаем в уравнении (5) замену  $z = y - p(x)$ . Получим уравнение

$$\frac{dz}{dx} = B(x, z), \quad (6)$$

где

$$B(x, z) = a_n(x)z^{n-1} + b_{n-2}(x)z^{n-2} + \dots + b_2(x)z^2 + b_1(x)z - \frac{a_0(x)z}{p(x)(p(x) + z)},$$

а  $b_1(x), \dots, b_{n-2}(x)$  — некоторые непрерывные  $\omega$ -периодические функции. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dz}{dx} = B(x, z) + \mu z^2. \quad (7)$$

Замена  $y = z + p(x)$  преобразует уравнение (7) в уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \tilde{a}_n(x, \mu)y^{n-1} + \tilde{a}_{n-1}(x, \mu)y^{n-2} + \dots + \tilde{a}_2(x, \mu)y + \tilde{a}_1(x, \mu) + a_0(x)/y,$$

где  $\tilde{a}_i(x, \mu)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , — непрерывные функции,  $\omega$ -периодические по  $x$ ,  $\tilde{a}_i(x, 0) = a_i(x)$ . При достаточно малом  $\bar{\mu} > 0$  для любого  $\mu \in (0, \bar{\mu})$  уравнение

$$a^\mu : \quad \ddot{x} = \tilde{a}_n(x, \mu)\dot{x}^n + \tilde{a}_{n-1}(x, \mu)\dot{x}^{n-1} + \dots + \tilde{a}_1(x, \mu)\dot{x} + a_0(x)$$

принадлежит окрестности  $V(a)$  и имеет  $\Gamma$  своей замкнутой траекторией.

Из условия (2) получаем, что найдутся такие числа  $r > 0$  и  $\bar{\mu} > 0$ , что  $B(x, z) + \mu z^2 \neq 0$  при всех  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|z| \geq r$ ,  $|\mu| < \bar{\mu}$ . Поэтому все замкнутые траектории уравнения (7) при  $|\mu| < \bar{\mu}$  принадлежат кольцу  $\mathbb{S}^1 \times (-r, r)$ . Их конечное число и они имеют конечную кратность, так как  $B(x, z) + \mu z^2$  аналитически зависит от  $z$ . При  $v$  и  $\mu$ , достаточно близких к нулю, определено решение  $Z(x, v, \mu)$ ,  $x \in [0, \omega]$ , уравнения (7) с начальным условием  $Z(0, v, \mu) = v$ . Производная  $Z'_v(x, 0, \mu)$  удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\frac{d}{dx} Z'_v(x, 0, \mu) = \left( b_1(x) - \frac{a_0(x)}{p^2(x)} \right) Z'_v(x, 0, \mu)$$

и начальному условию  $Z'_v(0, 0, \mu) = 1$ . Поэтому

$$Z'_v(x, 0, \mu) = \exp \int_0^x \left( b_1(s) - \frac{a_0(s)}{p^2(s)} \right) ds$$

и для функции расхождения  $d(v, \mu) := Z(\omega, v, \mu) - v$  производная  $d'_v(0, \mu)$  не зависит от  $\mu$ . Поскольку  $d'_v(0, 0) = 0$ , то и  $d'_v(0, \mu) = 0$  при всех  $\mu$ , достаточно близких к нулю.

Вторая производная  $Z''_{vv}(x, 0, \mu)$  удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\frac{d}{dx} Z''_{vv}(x, 0, \mu) = \left( b_1(x) - \frac{a_0(x)}{p^2(x)} \right) Z''_{vv}(x, 0, \mu) + 2(b_2(x) + \mu)[Z'_v(x, 0, \mu)]^2$$

и начальному условию  $Z''_{vv}(0, 0, \mu) = 0$ . Следовательно,

$$d''_{vv}(0, \mu) = Z''_{vv}(\omega, 0, \mu) = \int_0^\omega 2b_2(x)Z'_v(x, 0, \mu) dx + 2\mu \int_0^\omega Z'_v(x, 0, \mu) dx. \quad (8)$$

Поскольку второе слагаемое в (8) положительное при  $\mu > 0$ , выбрав достаточно малое  $\mu_0 \in (0, \bar{\mu})$ , будем иметь  $d''_{vv}(0, \mu) \neq 0$ , если  $\mu \in (0, \mu_0)$ . Поэтому для любого  $\mu \in (0, \mu_0)$  кривая  $\tilde{\Gamma} : z = 0$  — двойной цикл уравнения (7), а потому и двойной цикл уравнения  $a^\mu$ .

Выберем  $\mu_1 \in (0, \mu_0)$ . Пусть  $\tilde{\Gamma}_k : z = \zeta_k(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $k = 1, \dots, m$ , — замкнутые траектории уравнения (7) при  $\mu = \mu_1$ , отличные от двойного цикла  $\tilde{\Gamma}$ . При значениях  $v$ , достаточно близких к  $\zeta_k(0)$ , и  $\mu$ , достаточно близких к  $\mu_1$ , определено решение  $Z(x, v, \mu)$ ,  $x \in [0, \omega]$ , уравнения (7), удовлетворяющее начальному условию  $Z(0, v, \mu) = v$  и аналитически зависящее от  $v$ ,  $\mu$ , а также определена функция  $d(v, \mu) := Z(\omega, v, \mu) - v$ . Производная  $Z'_\mu(x, \zeta_k(0), \mu_1)$  удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\frac{d}{dx} Z'_\mu(x, \zeta_k(x), \mu_1) = K(x)Z'_\mu(x, \zeta_k(x), \mu_1) + \zeta_k^2(x),$$

где  $K(x) = B'_z(x, \zeta_k(x)) + 2\mu_1\zeta_k(x)$ , и начальному условию  $Z'_\mu(0, \zeta_k(x), \mu_1) = 0$ . Следовательно,

$$Z'_\mu(\omega, \zeta_k(0), \mu_1) = \int_0^\omega \zeta_k^2(x) \exp \int_x^\omega K(s) ds dx$$

и потому  $d'_\mu(\zeta_k(0), \mu_1) > 0$  для всех  $k = 1, \dots, m$ . Из этого неравенства согласно [6, с. 404, леммы 2 и 3] следует, что при  $\mu \in (\mu_1, \bar{\mu})$ , достаточно близком к  $\mu_1$ , в малой окрестности каждого цикла  $\tilde{\Gamma}_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , имеется не более двух замкнутых траекторий уравнения (7), причем эти траектории являются гиперболическими предельными циклами. Аналогично [6, с. 182] доказывается, что при  $\mu \in (\mu_1, \bar{\mu})$ , достаточно близком к  $\mu_1$ , замкнутых траекторий, отличных от  $\tilde{\Gamma}$  и  $\tilde{\Gamma}_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , уравнение (7) не имеет. Соответственно уравнение  $a^\mu$  имеет только одну негиперболическую замкнутую траекторию — двойной цикл  $\Gamma$ . Тем самым  $a^\mu \in V(a) \cap \Sigma^1$  и плотность  $\Sigma^1$  в  $\overline{\mathbb{A}}_\omega^n \setminus \Sigma^0$  доказана.

#### 4. Доказательство теоремы 3

Согласно п. 2 все уравнения  $a \in \Sigma^1 \cap U(a^0)$  топологически эквивалентны уравнению  $a^0$ . Поскольку уравнения из  $U(a^0) \setminus \Sigma^1$  грубые, то  $a^0$  имеет первую степень негрубости.

Пусть уравнение  $a \in \overline{\mathbb{A}}_\omega^n \setminus \Sigma^0$  имеет первую степень негрубости. Тогда существует такая его окрестность  $V(a)$ , что уравнение  $a$  и любое негрубое уравнение из  $V(a)$  топологически эквивалентны. Так как  $\Sigma^1$  всюду плотно в  $\overline{\mathbb{A}}_\omega^n \setminus \Sigma^0$ , то  $a$  топологически эквивалентно уравнению из  $\Sigma^1$  и потому имеет одну замкнутую траекторию четной кратности  $2m$ , а другие замкнутые траектории, если они существуют, имеют нечетную кратность. Докажем, что  $a \in \Sigma^1$ . Пусть это не так, т. е.  $a \in \overline{\mathbb{A}}_\omega^n \setminus \Sigma^0 \setminus \Sigma^1$ . Тогда или 1)  $m \geq 2$  или 2)  $m = 1$ , а одна из замкнутых траекторий имеет кратность  $2l + 1 \geq 3$ .

В случае 1 пусть замкнутая траектория четной кратности задается уравнением  $y = p(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Как и в п. 3, рассмотрим уравнения (6), (7) и  $a^\mu$ , а также функцию расхождения  $d(v, \mu)$ . По предположению

$$d(0, 0) = \frac{\partial d(0, 0)}{\partial v} = \dots = \frac{\partial^{2m-1} d(0, 0)}{\partial v^{2m-1}} = 0, \quad \frac{\partial^{2m} d(0, 0)}{\partial v^{2m}} \neq 0.$$

Из (8) следует, что  $\operatorname{sgn} \partial^2 d(0, \mu) / \partial v^2 = \operatorname{sgn} \mu$ . Пусть  $v_0 = 0$ ,  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , — все нули функции  $d(\cdot, 0)$ . Выберем число  $\varepsilon > 0$  так, чтобы интервалы  $(v_k - \varepsilon, v_k + \varepsilon)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ , попарно не пересекались. Взяв  $\mu$ , достаточно близким к нулю и удовлетворяющим условию  $\mu \partial^{2m} d(0, 0) / \partial v^{2m} < 0$ , получим, что функция  $d(\cdot, \mu)$  имеет на интервале  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  не менее трех нулей, в том числе двукратный нуль  $v = 0$ , а на каждом интервале  $(v_i - \varepsilon, v_i + \varepsilon)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , по крайней мере один нуль. Поскольку общее число нулей у  $d(\cdot, \mu)$  больше, чем у  $d(\cdot, 0)$ , уравнение  $a^\mu$  имеет больше замкнутых траекторий, чем уравнение  $a$ . Но это противоречит тому, что уравнение  $a^\mu$  негрубое и при  $\mu$ , достаточно близких к нулю, принадлежит окрестности  $V(a)$ , а потому уравнения  $a^\mu$  и  $a$  топологически эквивалентны. Следовательно, случай 1 невозможен.

В случае 2 пусть замкнутая траектория кратности  $2l + 1 \geq 3$  задается уравнением  $y = p(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Как и в случае 1, рассмотрим уравнения (6), (7) и  $a^\mu$ , функцию расхождения  $d(v, \mu)$ . Пронумеруем нули  $v_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ , функции  $d(\cdot, 0)$  так, чтобы  $v_0 = 0$ , нуль  $v_1$  имел кратность два, и выберем их попарно не пересекающиеся окрестности  $(v_k - \varepsilon, v_k + \varepsilon)$ . При  $\mu \neq 0$ , достаточно близким к нулю,  $d(\cdot, \mu)$  имеет в интервале  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  не менее двух нулей, в том числе двукратный нуль  $v = 0$ , а на интервалах  $(v_k - \varepsilon, v_k + \varepsilon)$ ,  $k = 2, \dots, N$ , хотя бы один нуль. Как и в п. 2,  $d'_\mu(v_1, 0) > 0$ . Поэтому при  $\mu$ , достаточно близких к нулю и удовлетворяющих условию  $\mu \partial^2 d(v_1, 0) / \partial v^2 < 0$ , функция  $d(\cdot, \mu)$  имеет на интервале  $(v_1 - \varepsilon, v_1 + \varepsilon)$  по крайней мере два нуля. Таким образом, существует  $\mu$ , при котором уравнение  $a^\mu$  негрубое, принадлежит окрестности  $V(a)$  и имеет больше замкнутых траекторий, чем уравнение  $a$ . Как и в случае 1, получаем противоречие. Следовательно, и случай 2 невозможен. Итак, предположение, что уравнение первой степени негрубости  $a \in \overline{\mathbb{A}}_\omega^n \setminus \Sigma^0 \setminus \Sigma^1$ , неверно, т. е.  $a \in \Sigma^1$ .

Теорема 3 доказана.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Палис Ж., ди Мелу В. Геометрическая теория динамических систем. Введение. М.: Мир, 1986.
2. Sotomayor J. Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds // Publ. Math. IHES. 1974. V. 43. P. 5–46.
3. Ройтенберг B. III. О полиномиальных дифференциальных уравнениях второго порядка на окружности, не имеющих особых точек // Вестн. Южно-Уральск. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Физика. 2020. Т. 12, № 4. С. 33–40.
4. Ройтенберг B. III. О типичных полиномиальных дифференциальных уравнениях второго порядка на окружности // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 2122–2130.
5. Бибиков Ю. Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981.
6. Андронов А. А., Леонович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967.

*Поступила в редакцию 16 февраля 2023 г.*

*После доработки 17 февраля 2023 г.*

*Принята к публикации 28 февраля 2023 г.*

Ройтенберг Владимир Шлеймович  
Ярославский государственный технический университет,  
Московский пр., 88, Ярославль 150023  
[vroitenberg@mail.ru](mailto:vroitenberg@mail.ru)

ON SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS  
ON THE CIRCLE WITH THE FIRST  
DEGREE OF STRUCTURAL INSTABILITY  
**V. Sh. Roitenberg**

**Abstract:** We consider autonomous differential equations of the second order the right-hand sides of which are polynomials of degree  $n$  with respect to the first derivative with periodic continuous coefficients. In addition, it is assumed that the leading coefficient and the free term do not vanish. Such equation define on the cylindrical phase space a dynamical system without singular points and closed trajectories homotopic to zero. Structurally stable are equations for which the topological structure of the phase portrait of the corresponding dynamical system does not change under small perturbations in the class of such equations. An equation is structurally stable if and only if all of its closed trajectories are hyperbolic. Structurally stable equations form an open and everywhere dense set in the space of the equations under consideration. The paper investigates equations of the first degree of structural instability – structurally unstable equations for which the topological structure of the phase portrait does not change when passing to a sufficiently close structurally unstable equation. The set of equations of the first degree of structural instability is an embedded smooth submanifold of codimension one in the space of all equations under consideration; it is open and everywhere dense in the set of structurally unstable equations and consists of equations that have a single nonhyperbolic closed trajectory – a double cycle.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.30.21.003

**Keywords:** second-order differential equation, polynomial right-hand side, cylindrical phase space, structural instability, bifurcation manifold, double cycle.

*REFERENCES*

1. Palis J. and Melo W., Geometric Theory of Dynamical Systems, An Introduction, Springer, New York; Heldelberg; Berlin (1982).
2. Sotomayor J., “Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds,” Publ. Math. IHES, **43**, 5–46 (1974).
3. Roitenberg V. Sh., “On polynomial differential equations of second order on the circle without singular points [in Russian],” Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Univ., Ser. Mat., Mekh., Fiz., **12**, No. 4, 33–40 (2020).
4. Roitenberg V. Sh., “On generic polynomial differential equations of second order on the circle [in Russian],” Sib. Elektron. Mat. Izv., **17**, 2122–2130 (2020).
5. Bibikov Yu. N., Generic Course of Ordinary Differential Equations [in Russian], Izdat. Leningrad. Univ., Leningrad (1981).
6. Andronov A. A., Leontovich E. A., Gordon I. I., and Maier A. G., The Theory of Bifurcations

of Dynamical Systems on a Plane [in Russian], Moscow, Nauka (1967).

*Submitted February 16, 2023*

*Revised February 17, 2023*

*Accepted February 28, 2023*

Vladimir Sh. Roitenberg  
Yaroslavl State Technical University,  
88 Moscow Avenue, Yaroslavl 150023, Russia  
[vroitenberg@mail.ru](mailto:vroitenberg@mail.ru)

AN ILL-POSED BOUNDARY VALUE  
PROBLEM FOR A MIXED TYPE  
SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION  
WITH TWO DEGENERATE LINES

**K. S. Fayazov and Y. K. Khudayberganov**

**Abstract:** This work is devoted to the study of ill-posed boundary value problem for a second-order mixed type differential equation with two degenerate lines. Boundary value problems for mixed type equations are applicable in various fields of the natural sciences: in problems of laser physics, in plasma modelling, and in mathematical biology. In this paper, based on the idea of A. N. Tikhonov, the conditional correctness of the problem, namely, uniqueness and conditional stability theorems are proved, as well as approximate solutions that are stable on the set of correctness are constructed. In obtaining an a priori estimate for the solution to the equation, we used the logarithmic convexity method and results for the spectral problem considered by S. G. Pyatkov. The regularization parameter is determined by the minimum value estimate for the norm of the difference between exact and approximate solutions.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.31.16.004

**Keywords:** mixed type equation with two degenerate lines, ill-posed problem, a priori estimate, conditional stability, uniqueness of solution, set of correctness, approximate solution.

## 1. Introduction

The theory of boundary value problems for mixed type equations is one of the most important field of the theory of partial differential equations of mathematical physics.

As a rule, boundary value problems for mixed type equations are well-posed problems and their study began with the works of Tricomi [1] and Gellerstedt. They proposed to study boundary value problems for a mixed type equation with one degenerate line.

F. I. Frankl [2] investigated important applications of this problem. In recent years, O. S. Ryzhov, L. D. Pilia and V. P. Fedorov, E. G. Shifrin, G. G. Cherny, A. G. Kuzmin [3] studied different problems for the mixed type equations.

We should note that the works of F. I. Frankl, A. V. Bitsadze, and K. I. Babenko laid a foundation for the modern theory of mixed type equations, with the research of new boundary problems for the mixed type equations. Afterwards, these types of boundary value problems have been studied by many authors, in particular by V. F. Volkodavov, V. N. Vragov [4], V. I. Zhegalov, T. D. Juraev, T. Sh. Kalmenov,

A. I. Kozhanov, Y. M. Krikunov, O. A. Ladyzhenskaya, M. E. Lerper, V. P. Mikhaiлов, E. I. Moiseev, A. M. Nakhushev [5], S. M. Ponomarev, S. P. Pulkin, K. B. Sabitov, M. S. Salakhitdinov, M. M. Smirnov, A. P. Soldatov, L. I. Chibrikova, R. S. Khairullin, B. N. Burnmistrov, S. Agmon, L. Nirenberg, M. N. Protter, C. S. Morawetz, P. Germain, R. Bader, P. O. Lax, R. P. Phillips, M. Schneider, G. D. Karatoprakliev, N. I. Polivanov, G. D. Dachev and others.

Boundary value problems for the mixed type equations with two degenerate lines can be found in the works of M. M. Zainulabidov, V. F. Volkodavov, V. V. Azovsky, O. I. Marichev, A. M. Ezhov, N. I. Popivanov, T. B. Lomonosov, Khe Kan Cher, S. I. Makarov, S. S. Ismukhamedov, J. Oramov, M. S. Salakhitdinov, K. B. Sabitov [6], B. Islomov and other authors.

Well-posed and ill-posed boundary value problems for parabolic type equations were studied by many authors, including E. M. Landis, S. P. Shishatsky, and problems of elliptic type equations were investigated by M. M. Lavrent'ev [7], Landis, John, Hermander and others. We should cite the works of S. G. Krein [8], H. A. Levine [9], and others, where boundary value problems for abstract differential-operator equations were studied. A characteristic feature of these works is determined with the fact that the proof of the uniqueness of a solution and obtaining estimates characterizing the conditional stability of these problems were provided in these works. Correct boundary value problems for various non-classical equations were investigated in the works of A. V. Bitsadze, S. A. Tersenov, V. N. Vragov, A. M. Nakhushev [5] and other authors. The problems for these types of equations were the subject of researches conducted by N. Kislov, S. G. Pyatkov [10, 11], A. I. Kozhanov [12], K. B. Sabitov [6], A. A. Gimaltdinova [13] and others. Ill-posed boundary value problems were studied by a number of accomplished authors, including A. L. Bukhgeim [14], V. Isakov, M. Klibanov, K. S. Fayazov. The works of K. S. Fayazov [15], K. S. Fayazov and I. O. Khajiev [16, 17], I. O. Khajiev [18], K. S. Fayazov and Y. K. Khudayberganov [19], were dedicated to the construction of approximate solutions for non-classical equations.

This work is dedicated to the study of an ill-posed boundary-value problem for a second-order mixed hyperbolic-elliptic type partial differential equation with two degenerate lines.

Consider the equation

$$u_{tt}(x, y, t) + \text{sign}(x)u_{xx}(x, y, t) + \text{sign}(y)u_{yy}(x, y, t) = 0 \quad (1)$$

in the domain  $\Omega = \Omega_0 \times Q$ , where  $\Omega_0 = \{(x, y) : (-1; 1)^2, x \neq 0, y \neq 0\}$ ,  $Q = \{0 < t < T, T < \infty\}$ .

**Statement of the problem.** Find a solution of equation (1) in the domain  $\Omega$  so that the initial

$$\left. \frac{\partial^i u(x, y, t)}{\partial t^i} \right|_{t=0} = \varphi_i(x, y), \quad (x, y) \in [-1; 1]^2, \quad i = 0, 1, \quad (2)$$

boundary

$$\begin{aligned} u(x, y, t)|_{x=\pm 1} &= 0, \quad (y, t) \in [-1; 1] \times \overline{Q}, \\ u(x, y, t)|_{y=\pm 1} &= 0, \quad (x, t) \in [-1; 1] \times \overline{Q}, \end{aligned} \quad (3)$$

and gluing

$$\begin{aligned} \frac{\partial^i u(x, y, t)}{\partial x^i} \Big|_{x=-0} &= \frac{\partial^i u(x, y, t)}{\partial x^i} \Big|_{x=+0}, \quad (y, t) \in [-1; 1] \times \overline{Q}, \\ \frac{\partial^i u(x, y, t)}{\partial y^i} \Big|_{y=-0} &= \frac{\partial^i u(x, y, t)}{\partial y^i} \Big|_{y=+0}, \quad (x, t) \in [-1; 1] \times \overline{Q}, \end{aligned} \quad (4)$$

conditions are satisfied, where  $i = \overline{0, 1}$  and  $\varphi_i(x, y)$  are given sufficiently smooth functions and satisfied wherein  $\varphi_i(x, y)|_{\partial\Omega_0} = 0$ .

In this paper, problem (1)–(4) is investigated for conditional correctness, namely, uniqueness and conditional stability theorems are proved. Moreover, approximate solutions, which are stable on the correctness set, are constructed.

## 2. Spectral problem

Find such values of  $\lambda$  for which the following problem has a nontrivial solution:

$$\text{sign}(x)\vartheta_{xx}(x, y) + \text{sign}(y)\vartheta_{yy}(x, y) + \lambda\vartheta(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega_0, \quad (5)$$

$$\vartheta(x, y)|_{x=-1, x=+1} = 0, \quad y \in [-1; 1], \quad \vartheta(x, y)|_{y=-1, y=+1} = 0, \quad x \in [-1; 1],$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^i \vartheta(x, y)}{\partial x^i} \Big|_{x=-0} &= \frac{\partial^i \vartheta(x, y)}{\partial x^i} \Big|_{x=+0}, \quad y \in [-1; 1], \\ \frac{\partial^i \vartheta(x, y)}{\partial y^i} \Big|_{y=-0} &= \frac{\partial^i \vartheta(x, y)}{\partial y^i} \Big|_{y=+0}, \quad x \in [-1; 1], \quad i = \overline{0, 1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Using the methods of S. G. Pyatkov [11], we can prove that problem (5), (6) has a non-decreasing sequence  $\{\lambda_{k,l}^{(1)}\}_{k,l=1}^\infty$ ,  $\{-\lambda_{k,l}^{(2)}\}_{k,l=1}^\infty$ ,  $\{\lambda_{k,l}^{(3)}\}_{k,l=1}^\infty$ ,  $\{-\lambda_{k,l}^{(4)}\}_{k,l=1}^\infty$  of eigenvalues and the corresponding eigenfunctions  $\{\vartheta_{k,l}^{(j)}(x, y)\}_{k,l=1}^\infty$ ,  $j = \overline{1, 4}$ . The eigenvalues

$$\lambda_{k,l}^{(1)} = \mu_k^2 + \sigma_l^2, \quad \lambda_{k,l}^{(2)} = \mu_k^2 - \sigma_l^2,$$

$$\lambda_{k,l}^{(3)} = -\mu_k^2 + \sigma_l^2, \quad \lambda_{k,l}^{(4)} = -\mu_k^2 - \sigma_l^2,$$

thus correspond to the eigenfunctions

$$\begin{aligned} \vartheta_{k,l}^{(1)}(x, y) &= X_k^{(1)}(x) \times Y_l^{(1)}(y), \quad \vartheta_{k,l}^{(2)}(x, y) = X_k^{(1)}(x) \times Y_l^{(2)}(y), \\ \vartheta_{k,l}^{(3)}(x, y) &= X_k^{(2)}(x) \times Y_l^{(1)}(y), \quad \vartheta_{k,l}^{(4)}(x, y) = X_k^{(2)}(x) \times Y_l^{(2)}(y), \quad k, l \in N, \end{aligned}$$

where

$$X_k^{(1)}(x) = \begin{cases} \sin \mu_k(x-1)/\cos \mu_k, & 0 \leq x \leq 1, \\ \operatorname{sh} \mu_k(x+1)/\operatorname{ch} \mu_k, & -1 \leq x \leq 0, \end{cases} \quad k \in N,$$

$$Y_l^{(1)}(y) = \begin{cases} \sin \sigma_l(y-1)/\cos \sigma_l, & 0 \leq y \leq 1, \\ \operatorname{sh} \sigma_l(y+1)/\operatorname{ch} \sigma_l, & -1 \leq y \leq 0, \end{cases} \quad l \in N,$$

$$X_k^{(2)}(x) = \begin{cases} \operatorname{sh} \mu_k(x-1)/\operatorname{ch} \mu_k, & 0 \leq x \leq 1, \\ \sin \mu_k(x+1)/\cos \mu_k, & -1 \leq x \leq 0, \end{cases} \quad k \in N,$$

$$Y_l^{(2)}(y) = \begin{cases} \operatorname{sh} \sigma_l(y-1)/\operatorname{ch} \sigma_l, & 0 \leq y \leq 1, \\ \sin \sigma_l(y+1)/\cos \sigma_l, & -1 \leq y \leq 0, \end{cases} \quad l \in N,$$

$\mu_k^2, \sigma_l^2$  are eigenvalues corresponding to eigenfunctions  $X_k^{(i)}, Y_l^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ), respectively.

In both cases,  $\mu_k, \sigma_l, k, l \in N$ , are the positive roots of the transcendental equation  $\tan \alpha = -\tanh \alpha$ . Let  $\|u\|^2 = (u, u)$  where the inner product is

$$(u, v) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 uv \, dx \, dy.$$

Moreover,

$$(\operatorname{sign}(x) \operatorname{sign}(y) \vartheta_{k,l}^{(p)}(x, y), \vartheta_{i,j}^{(q)}(x, y)) = 0, \quad p \neq q, \quad p, q = \overline{1, 4}, \quad \forall k, l, i, j,$$

$$(\operatorname{sign}(x) \operatorname{sign}(y) \vartheta_{k,l}^{(m)}(x, y), \vartheta_{i,j}^{(m)}(x, y)) = \begin{cases} 1, & k = i \wedge l = j, \\ 0, & k \neq i \wedge l \neq j, \end{cases} \quad m = 1, 4,$$

$$(\operatorname{sign}(x) \operatorname{sign}(y) \vartheta_{k,l}^{(m)}(x, y), \vartheta_{i,j}^{(m)}(x, y)) = \begin{cases} -1, & k = i \wedge l = j \\ 0, & k \neq i \wedge l \neq j, \end{cases} \quad m = 2, 3,$$

where  $k, l, i, j \in N$ .

Then, according to S. G. Pyatkov [10],

$$\begin{aligned} \|u(x, y, t)\|_0^2 &= \sum_{k,l=1}^{\infty} \{ |(\operatorname{sign}(x) \operatorname{sign}(y) u(x, y, t), \vartheta_{k,l}^{(1)}(x, y))|^2 \\ &\quad + |(\operatorname{sign}(x) \operatorname{sign}(y) u(x, y, t), \vartheta_{k,l}^{(2)}(x, y))|^2 + |(\operatorname{sign}(x) \operatorname{sign}(y) u(x, y, t), \vartheta_{k,l}^{(3)}(x, y))|^2 \\ &\quad + |(\operatorname{sign}(x) \operatorname{sign}(y) u(x, y, t), \vartheta_{k,l}^{(4)}(x, y))|^2 \}. \end{aligned} \quad (7)$$

According to the results of S. G. Pyatkov [11], the eigenfunctions of problem (5), (6) form a Riesz basis in  $H_0$  and the norm in the space  $L_2(-1, 1)^2$ , which is defined by equality (5), (6), is equivalent to the original one.

### 3. A priori estimate

A generalized solution to problem (1)–(4) is such a function  $u(x, y, t) \in C(\overline{Q}; L_2(-1, 1)^2)$  that for any arbitrary function  $V(x, y, t) \in W_2^2(\Omega)$ ,  $V(x, y, T) = 0$ ,  $V_t(x, y, T) = 0$ ,  $V(-1, y, t) = 0$ ,  $V(+1, y, t) = 0$ ,  $V(x, -1, t) = 0$ ,  $V(x, +1, t) = 0$ ,

satisfies the following integral identity:

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u(x, y, t) (\operatorname{sign}(x) \operatorname{sign}(y) V_{tt} + \operatorname{sign}(y) V_{xx} + \operatorname{sign}(x) V_{yy}) dx dy dt \\
&= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \operatorname{sign}(x) \operatorname{sign}(y) V(x, y, 0) \varphi_1(x, y) dx dy \\
&\quad - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \operatorname{sign}(x) \operatorname{sign}(y) V_t(x, y, 0) \varphi_0(x, y) dx dy. \quad (8)
\end{aligned}$$

There the following lemma occurs:

**Lemma 1** (see [7, p. 825, 826]). *Let  $\nu(t)$  be a solution to the equation*

$$\nu''(t) - \lambda \nu(t) = 0$$

*and satisfy the conditions  $\nu(0) = p_1$  and  $\nu'(0) = p_2$ . Then the following inequality is valid:*

$$\nu^2(t) \leq e^{2t(T-t)} (\nu^2(0) + |\alpha|)^{1-\frac{t}{T}} (\nu^2(T) + |\alpha|)^{\frac{t}{T}} - |\alpha|, \quad t \in Q,$$

*where  $\lambda$  is a certain constant and  $\alpha = \frac{1}{2}(\lambda \nu^2(0) - \nu_t^2(0))$ .*

By  $M$  we denote

$$M = \{u(x, y, t) : \|u(x, y, T)\|_0 \leq m, m < \infty\}.$$

**Theorem 1.** *Let  $u(x, y, t)$  be a solution of the equation*

$$u_{tt}(x, y, t) + \operatorname{sign}(x) u_{xx}(x, y, t) + \operatorname{sign}(y) u_{yy}(x, y, t) = 0,$$

*and satisfy conditions (2)–(4). Then, for a solution to this equation for  $t \in Q$ , we obtain the inequality*

$$\|u(x, y, t)\|_0^2 \leq 4e^{2t(T-t)} (\|u(x, y, 0)\|_0^2 + \alpha)^{1-\frac{t}{T}} (\|u(x, y, T)\|_0^2 + \alpha)^{\frac{t}{T}} - \alpha, \quad (9)$$

*where  $\alpha = \frac{1}{2}(\|\varphi_0\|_0^2 + \|\varphi_1\|_0^2)$ .*

PROOF. If a solution exists and belongs to  $M$ , then it has the form

$$\begin{aligned}
u(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (u_{k,l}^{(1)}(t) \vartheta_{k,l}^{(1)}(x, y) + u_{k,l}^{(2)}(t) \vartheta_{k,l}^{(2)}(x, y)) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (u_{k,l}^{(3)}(t) \vartheta_{k,l}^{(3)}(x, y) + u_{k,l}^{(4)}(t) \vartheta_{k,l}^{(4)}(x, y)),
\end{aligned}$$

where  $\{\vartheta_{k,l}^{(j)}(x, y)\}_{k,l=1}^{\infty}$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , the eigenfunctions of the spectral problem (5), (6) and

$$u_{k,l}^{(j)}(t) = (\operatorname{sign}(x) \operatorname{sign}(y) u(x, y, t), \vartheta_{k,l}^{(j)}(x, y)), \quad j = 1, 4,$$

$$\begin{aligned} u_{k,l}^{(j)}(t) &= -(\text{sign}(x) \text{sign}(y) u(x, y, t), \vartheta_{k,l}^{(j)}(x, y)), \quad j = 2, 3, k, l \in N, \\ \varphi_{ik,l}^{(j)} &= (\text{sign}(x) \text{sign}(y) \varphi_i(x, y), \vartheta_{k,l}^{(j)}(x, y)), \quad j = 1, 4, \\ \varphi_{ik,l}^{(j)} &= -(\text{sign}(x) \text{sign}(y) \varphi_i(x, y), \vartheta_{k,l}^{(j)}(x, y)), \quad j = 2, 3, i = \overline{0, 1}, k, l \in N. \end{aligned}$$

In (8), let

$$V(x, y, t) = \omega_{k,l}(t) \vartheta_{k,l}^{(j)}(x, y), \quad j = \overline{1, 4},$$

where  $\omega_{k,l}(T) = \omega'_{k,l}(T) = 0$ ,  $\omega_{k,l}(t) \in W_2^2(Q)$ . Then

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u(x, y, t) (\text{sign}(x) \text{sign}(y) \omega''_{k,l}(t) \vartheta_{k,l}^{(j)}(x, y) \\ &\quad - \text{sign}(x) \text{sign}(y) \omega_{k,l}(t) \lambda_{k,l}^{(j)} \vartheta_{k,l}^{(j)}(x, y)) dx dy dt \\ &= \omega_{k,l}(0) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \text{sign}(x) \text{sign}(y) \vartheta_{k,l}^{(j)}(x, y) \varphi_1(x, y) dx dy \\ &\quad - \omega'_{k,l}(0) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \text{sign}(x) \text{sign}(y) \vartheta_{k,l}^{(j)}(x, y) \varphi_0(x, y) dx dy. \quad (10) \end{aligned}$$

From (10), we have

$$\int_0^T u_{k,l}^{(j)}(t) (\omega''_{k,l}(t) - \lambda_{k,l}^{(j)} \omega_{k,l}(t)) dt = \omega_{k,l}(0) \varphi_{1k,l}^{(j)} - \omega'_{k,l}(0) \varphi_{0k,l}^{(j)}, \quad k, l \in N.$$

Thus, for  $u_{k,l}^{(j)}(t) \in W_2^2(Q)$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , we have the following sequence of solutions:

$$(u_{k,l}^{(j)}(t))_{tt} = \lambda_{k,l}^{(j)} u_{k,l}^{(j)}(t), \quad (11)$$

$$u_{k,l}^{(j)}(0) = \varphi_{0k,l}^{(j)}, \quad (u_{k,l}^{(j)}(0))_t = \varphi_{1k,l}^{(j)}, \quad k, l \in N. \quad (12)$$

It is easy to see that

$$u_{k,l}^{(j)}(t) = \begin{cases} \varphi_{0k,l}^{(j)} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{k,l}^{(j)}} t + \frac{\varphi_{1k,l}^{(j)} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{k,l}^{(j)}} t}{\sqrt{\lambda_{k,l}^{(j)}}}, & \lambda_{k,l}^{(j)} > 0, j = \overline{1, 3}, \\ \varphi_{1k,l}^{(j)} t + \varphi_{0k,l}^{(j)}, & \lambda_{k,l}^{(j)} = 0, j = \overline{2, 3}, \\ \varphi_{0k,l}^{(j)} \cos \sqrt{-\lambda_{k,l}^{(j)}} t + \frac{\varphi_{1k,l}^{(j)} \sin \sqrt{-\lambda_{k,l}^{(j)}} t}{\sqrt{-\lambda_{k,l}^{(j)}}}, & \lambda_{k,l}^{(j)} < 0, k, l \in N, j = \overline{2, 4}. \end{cases}$$

According to (7), we have

$$\|u(x, y, t)\|_0^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} ((u_{k,l}^{(1)}(t))^2 + (u_{k,l}^{(2)}(t))^2) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} ((u_{k,l}^{(3)}(t))^2 + (u_{k,l}^{(4)}(t))^2),$$

where  $u_{k,l}^{(j)}(t)$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , are solutions (11), (12), respectively.

We introduce the norm

$$\|\varphi_0\|_1^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (\lambda_{k,l}^{(1)} (\varphi_{0k,l}^{(1)})^2 + |\lambda_{k,l}^{(2)}| (\varphi_{0k,l}^{(2)})^2 + |\lambda_{k,l}^{(3)}| (\varphi_{0k,l}^{(3)})^2 + |\lambda_{k,l}^{(4)}| (\varphi_{0k,l}^{(4)})^2).$$

According to Lemma 1, for solutions (11), (12), for each fixed  $k, l$ ,  $k, l \in N$ , the following inequality is valid

$$(u_{k,l}^{(j)}(t))^2 \leq e^{2t(T-t)} ((u_{k,l}^{(j)}(0))^2 + \alpha_{k,l}^{(j)})^{1-\frac{t}{T}} ((u_{k,l}^{(j)}(T))^2 + \alpha_{k,l}^{(j)})^{\frac{t}{T}} - \alpha_{k,l}^{(j)}, \quad (13)$$

$$t \in Q, \quad j = \overline{1,4},$$

where

$$\alpha_{k,l}^{(j)} = \frac{1}{2} (\lambda_{k,l}^{(j)} (u_{k,l}^{(j)}(0))^2 - (u_{tk,l}^{(j)}(0))^2), \quad j = \overline{1,4}. \quad (14)$$

After an elementary transformation from (14), we can write

$$\alpha_{k,l}^{(j)} \leq \frac{1}{2} (|\lambda_{k,l}^{(j)}| (u_{k,l}^{(j)}(0))^2 + (u_{tk,l}^{(j)}(0))^2), \quad j = \overline{1,4}.$$

We sum up inequalities (13) with respect to  $k, l$ ,  $k, l \in N$ , and, taking into account the Hölder inequality, we obtain

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} ((u_{k,l}^{(1)}(t))^2 + (u_{k,l}^{(2)}(t))^2 + (u_{k,l}^{(3)}(t))^2 + (u_{k,l}^{(4)}(t))^2) \\ & \leq 4e^{2t(T-t)} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} ((u_{k,l}^{(1)}(0))^2 + (u_{k,l}^{(2)}(0))^2 + (u_{k,l}^{(3)}(0))^2 + (u_{k,l}^{(4)}(0))^2) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (|\alpha_{k,l}^{(1)}| + |\alpha_{k,l}^{(2)}| + |\alpha_{k,l}^{(3)}| + |\alpha_{k,l}^{(4)}|) \right)^{1-\frac{t}{T}} \\ & \quad \times \left( \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} ((u_{k,l}^{(1)}(T))^2 + (u_{k,l}^{(2)}(T))^2 + (u_{k,l}^{(3)}(T))^2 + (u_{k,l}^{(4)}(T))^2) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (|\alpha_{k,l}^{(1)}| + |\alpha_{k,l}^{(2)}| + |\alpha_{k,l}^{(3)}| + |\alpha_{k,l}^{(4)}|) \right)^{\frac{t}{T}} \\ & \quad \left. - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (|\alpha_{k,l}^{(1)}| + |\alpha_{k,l}^{(2)}| + |\alpha_{k,l}^{(3)}| + |\alpha_{k,l}^{(4)}|) \right), \end{aligned}$$

and, summing up the above inequality, we finally get

$$\|u(x, y, t)\|_0^2 \leq 4e^{2t(T-t)} (\|u(x, y, 0)\|_0^2 + \alpha)^{1-\frac{t}{T}} (\|u(x, y, T)\|_0^2 + \alpha)^{\frac{t}{T}} - \alpha,$$

where  $\alpha = \frac{1}{2} (\|\varphi_0\|_1^2 + \|\varphi_1\|_0^2)$ . The theorem is proved.

#### 4. Uniqueness and conditional stability

**Theorem 2.** *If the solution of the problem (1)–(4) exists then it is unique.*

PROOF. Let  $u_1(x, y, t)$  and  $u_2(x, y, t)$  be solutions to problem (1)–(4). Then the difference  $u(x, y, t) = u_1(x, y, t) - u_2(x, y, t)$  becomes a solution to the homogeneous problem (1)–(4). Applying the estimates of Theorem 1, we find that  $\|u(x, y, t)\|_0 = 0$ , and it follows that  $u(x, y, t) = 0$  for any  $(x, y, t) \in \Omega$ , or for  $\forall (x, y, t) \in \Omega$ , we have  $u_1(x, y, t) = u_2(x, y, t)$ . The theorem is proved.

**Theorem 3.** *Let a solution  $u(x, y, t)$  of the problem (1)–(4) exist and  $u(x, y, t) \in M$ . Let  $\|\varphi_0 - \varphi_{0\varepsilon}\|_1 \leq \varepsilon$  and  $\|\varphi_1 - \varphi_{1\varepsilon}\|_0 \leq \varepsilon$ . Then for solutions of the problem (1)–(4) the estimate*

$$\|u(x, y, t)\|_0^2 \leq 4e^{2t(T-t)}(2\varepsilon^2)^{1-\frac{t}{T}}(2m^2 + \varepsilon^2)^{\frac{t}{T}} - \varepsilon^2,$$

is valid for  $t \in Q$ .

PROOF. Let  $u_1(x, y, t)$  be a solution to (1)–(4) with exact data and  $u_2(x, y, t)$  be a solution to that problem with approximate data. Then  $u(x, y, t) = u_1(x, y, t) - u_2(x, y, t)$  is a solution to equation (1) satisfying the boundary and the gluing conditions (3) and (4) with the initial data  $u(x, y, 0) = \varphi_0(x, y) - \varphi_{0\varepsilon}(x, y)$ ,  $u_t(x, y, 0) = \varphi_1(x, y) - \varphi_{1\varepsilon}(x, y)$ , and  $\|\varphi_0 - \varphi_{0\varepsilon}\|_1 \leq \varepsilon$ ,  $\|\varphi_1 - \varphi_{1\varepsilon}\|_0 < \varepsilon$ . Then using the estimates of Theorem 1 and elementary transformations for the norm of the function  $u(x, y, t)$  we have

$$\|u(x, y, t)\|_0^2 \leq 4e^{2t(T-t)}(2\varepsilon^2)^{1-\frac{t}{T}}(2m^2 + \varepsilon^2)^{\frac{t}{T}} - \varepsilon^2.$$

The theorem is proved.

#### 5. Approximate solution

Let  $\varphi_0(x, y) \neq 0$  and  $\varphi_1(x, y) = 0$  in (1)–(4). Then we can represent the solution  $u(x, y, t)$  in the form

$$\begin{aligned} u(x, y, t) = & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (\varphi_{0k,l}^{(1)} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{k,l}^{(1)}} t \vartheta_{k,l}^{(1)}(x, y) + \varphi_{0k,l}^{(4)} \cos \sqrt{-\lambda_{k,l}^{(4)}} t \vartheta_{k,l}^{(4)}(x, y)) \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^k \varphi_{0k,l}^{(2)} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{k,l}^{(2)}} t \vartheta_{k,l}^{(2)}(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=k+1}^{\infty} \varphi_{0k,l}^{(2)} \cos \sqrt{-\lambda_{k,l}^{(2)}} t \vartheta_{k,l}^{(2)}(x, y) \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=k+1}^{\infty} \varphi_{0k,l}^{(3)} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{k,l}^{(3)}} t \vartheta_{k,l}^{(3)}(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^k \varphi_{0k,l}^{(3)} \cos \sqrt{-\lambda_{k,l}^{(3)}} t \vartheta_{k,l}^{(3)}(x, y), \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \varphi_{0k,l}^{(j)} &= (\operatorname{sign}(x) \operatorname{sign}(y) \varphi_0(x, y), \vartheta_{k,l}^{(j)}(x, y)), \quad j = 1, 4, \\ \varphi_{0k,l}^{(j)} &= -(\operatorname{sign}(x) \operatorname{sign}(y) \varphi_0(x, y), \vartheta_{k,l}^{(j)}(x, y)), \quad j = 2, 3, \quad k, l \in N. \end{aligned}$$

Then an approximate solution of the problem with exact data has the form

$$u^N(x, y, t) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \varphi_{0k,l}^{(1)} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{k,l}^{(1)}} t \vartheta_{k,l}^{(1)}(x, y) + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \varphi_{0k,l}^{(4)} \cos \sqrt{-\lambda_{k,l}^{(4)}} t \vartheta_{k,l}^{(4)}(x, y)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^k \varphi_{0k,l}^{(2)} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{k,l}^{(2)}} t \vartheta_{k,l}^{(2)}(x, y) + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=k+1}^N \varphi_{0k,l}^{(2)} \cos \sqrt{-\lambda_{k,l}^{(2)}} t \vartheta_{k,l}^{(2)}(x, y) \\
& + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^k \varphi_{0k,l}^{(3)} \cos \sqrt{-\lambda_{k,l}^{(3)}} t \vartheta_{k,l}^{(3)}(x, y) + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=k+1}^N \varphi_{0k,l}^{(3)} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{k,l}^{(3)}} t \vartheta_{k,l}^{(3)}(x, y),
\end{aligned}$$

where  $N$  is ( $N$  integer number) regularization parameter.

The approximate solution with approximate data has the form

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon^N(x, y, t) = & \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N (\varphi_{0\varepsilon k,l}^{(1)} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{k,l}^{(1)}} t \vartheta_{k,l}^{(1)}(x, y) + \varphi_{0\varepsilon k,l}^{(4)} \cos \sqrt{-\lambda_{k,l}^{(4)}} t \vartheta_{k,l}^{(4)}(x, y)) \\
& + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^k \varphi_{0\varepsilon k,l}^{(2)} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{k,l}^{(2)}} t \vartheta_{k,l}^{(2)}(x, y) + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=k+1}^N \varphi_{0\varepsilon k,l}^{(2)} \cos \sqrt{-\lambda_{k,l}^{(2)}} t \vartheta_{k,l}^{(2)}(x, y) \\
& + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^k \varphi_{0\varepsilon k,l}^{(3)} \cos \sqrt{-\lambda_{k,l}^{(3)}} t \vartheta_{k,l}^{(3)}(x, y) + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=k+1}^N \varphi_{0\varepsilon k,l}^{(3)} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{k,l}^{(3)}} t \vartheta_{k,l}^{(3)}(x, y),
\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
\varphi_{0\varepsilon k,l}^{(j)} &= (\operatorname{sign}(x) \operatorname{sign}(y) \varphi_{0\varepsilon}(x, y), \vartheta_{k,l}^{(j)}(x, y)), \quad j = 1, 4, \\
\varphi_{0\varepsilon k,l}^{(j)} &= -(\operatorname{sign}(x) \operatorname{sign}(y) \varphi_{0\varepsilon}(x, y), \vartheta_{k,l}^{(j)}(x, y)), \quad j = 2, 3, \quad k, l \in N.
\end{aligned}$$

Let  $\|\varphi_0(x, y) - \varphi_{0\varepsilon}(x, y)\|_0 \leq \varepsilon$  and  $u(x, y, t) \in M$ . Then, for the norm of the difference between the exact and approximate solutions, the inequality is as follows:

$$\begin{aligned}
& \|u(x, y, t) - u_\varepsilon^N(x, y, t)\|_0 \\
& \leq \|u(x, y, t) - u^N(x, y, t)\|_0 + \|u^N(x, y, t) - u_\varepsilon^N(x, y, t)\|_0. \quad (15)
\end{aligned}$$

Let us estimate the second term on the right-hand side of (15), while we made some elementary transformations, and the conditions for estimating the norm of the difference between exact and approximate data are as follows:

$$\begin{aligned}
& \|u^N(x, y, t) - u_\varepsilon^N(x, y, t)\|_0^2 \\
& = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N ((\varphi_{0k,l}^{(1)} - \varphi_{0\varepsilon k,l}^{(1)})^2 \operatorname{ch}^2 \sqrt{\lambda_{k,l}^{(1)}} t + (\varphi_{0k,l}^{(4)} - \varphi_{0\varepsilon k,l}^{(4)})^2 \cos^2 \sqrt{-\lambda_{k,l}^{(4)}} t) \\
& + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^k ((\varphi_{0k,l}^{(2)} - \varphi_{0\varepsilon k,l}^{(2)})^2 \operatorname{ch}^2 \sqrt{\lambda_{k,l}^{(2)}} t + (\varphi_{0k,l}^{(3)} - \varphi_{0\varepsilon k,l}^{(3)})^2 \cos^2 \sqrt{-\lambda_{k,l}^{(3)}} t) \\
& + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=k+1}^N ((\varphi_{0k,l}^{(3)} - \varphi_{0\varepsilon k,l}^{(3)})^2 \operatorname{ch}^2 \sqrt{\lambda_{k,l}^{(3)}} t + (\varphi_{0k,l}^{(2)} - \varphi_{0\varepsilon k,l}^{(2)})^2 \cos^2 \sqrt{-\lambda_{k,l}^{(2)}} t) \\
& \leq \operatorname{ch}^2 \sqrt{\lambda_{N,N}^{(1)}} t \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N ((\varphi_{0k,l}^{(1)} - \varphi_{0\varepsilon k,l}^{(1)})^2 + (\varphi_{0k,l}^{(4)} - \varphi_{0\varepsilon k,l}^{(4)})^2) \\
& + \operatorname{ch}^2 \sqrt{\lambda_{N,1}^{(2)}} t \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^k ((\varphi_{0k,l}^{(2)} - \varphi_{0\varepsilon k,l}^{(2)})^2 + (\varphi_{0k,l}^{(3)} - \varphi_{0\varepsilon k,l}^{(3)})^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \operatorname{ch}^2 \sqrt{\lambda_{1,N}^{(3)}} t \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=k+1}^N ((\varphi_{0k,l}^{(3)} - \varphi_{0\varepsilon k,l}^{(3)})^2 + (\varphi_{0k,l}^{(2)} - \varphi_{0\varepsilon k,l}^{(2)})^2) \\
& \leq \operatorname{ch}^2 \sqrt{\lambda_{N,N}^{(1)}} t \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N ((\varphi_{0k,l}^{(1)} - \varphi_{0\varepsilon k,l}^{(1)})^2 + (\varphi_{0k,l}^{(2)} - \varphi_{0\varepsilon k,l}^{(2)})^2 \\
& \quad + (\varphi_{0k,l}^{(3)} - \varphi_{0\varepsilon k,l}^{(3)})^2 + (\varphi_{0k,l}^{(4)} - \varphi_{0\varepsilon k,l}^{(4)})^2) \leq C_0 \varepsilon^2 e^{2\sqrt{\lambda_{N,N}^{(1)}} t} \varepsilon^2,
\end{aligned}$$

or

$$\|u^N(x, y, t) - u_\varepsilon^N(x, y, t)\|_0^2 \leq C_0 e^{2\sqrt{\lambda_{N,N}^{(1)}} t} \varepsilon^2,$$

here  $C_0$  – is a positive constant.

Next, we estimate the first term on the right-hand side of inequality (15) provided that,  $u(x, y, t)$  and  $u^N(x, y, t) \in M$

$$\begin{aligned}
\|u(x, y, t) - u^N(x, y, t)\|_0^2 & = \sum_{k=1}^N \sum_{l=N+1}^\infty ((\varphi_{0k,l}^{(1)} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{k,l}^{(1)}} t)^2 + (\varphi_{0k,l}^{(4)} \cos \sqrt{-\lambda_{k,l}^{(4)}} t)^2) \\
& + \sum_{k=N+1}^\infty \sum_{l=1}^\infty ((\varphi_{0k,l}^{(1)} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{k,l}^{(1)}} t)^2 + (\varphi_{0k,l}^{(4)} \cos \sqrt{-\lambda_{k,l}^{(4)}} t)^2) \\
& + \sum_{k=N+1}^\infty \sum_{l=1}^{k-1} ((\varphi_{0k,l}^{(2)} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{k,l}^{(2)}} t)^2 + (\varphi_{0k,l}^{(3)} \cos \sqrt{-\lambda_{k,l}^{(3)}} t)^2) \\
& + \sum_{k=1}^N \sum_{l=N+1}^\infty ((\varphi_{0k,l}^{(3)} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{k,l}^{(3)}} t)^2 + (\varphi_{0k,l}^{(2)} \cos \sqrt{-\lambda_{k,l}^{(2)}} t)^2) \\
& + \sum_{k=N+1}^\infty \sum_{l=k}^\infty ((\varphi_{0k,l}^{(3)} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{k,l}^{(3)}} t)^2 + (\varphi_{0k,l}^{(2)} \cos \sqrt{-\lambda_{k,l}^{(2)}} t)^2).
\end{aligned}$$

We estimate the expression

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^N \sum_{l=N+1}^\infty (\varphi_{0k,l}^{(1)} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{k,l}^{(1)}} t)^2 + \sum_{k=N+1}^\infty \sum_{l=1}^\infty (\varphi_{0k,l}^{(1)} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{k,l}^{(1)}} t)^2 \\
& + \sum_{k=N+1}^\infty \sum_{l=1}^{k-1} (\varphi_{0k,l}^{(2)} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{k,l}^{(2)}} t)^2 + \sum_{k=1}^N \sum_{l=N+1}^\infty (\varphi_{0k,l}^{(3)} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{k,l}^{(3)}} t)^2 \\
& + \sum_{k=N+1}^\infty \sum_{l=k}^\infty (\varphi_{0k,l}^{(3)} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{k,l}^{(3)}} t)^2, \quad (16)
\end{aligned}$$

according to the condition

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^\infty \sum_{l=1}^\infty (\varphi_{0k,l}^{(1)} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{k,l}^{(1)}} T)^2 + \sum_{k=N+1}^\infty \sum_{l=1}^{k-1} (\varphi_{0k,l}^{(2)} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{k,l}^{(2)}} T)^2 \\
& + \sum_{k=1}^N \sum_{l=N+1}^\infty (\varphi_{0k,l}^{(3)} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{k,l}^{(3)}} T)^2 + \sum_{k=N+1}^\infty \sum_{l=k}^\infty (\varphi_{0k,l}^{(3)} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{k,l}^{(3)}} T)^2 \leq m^2. \quad (17)
\end{aligned}$$

We estimate (16) under the condition (17) by the method of Lagrange multipliers. As a result, we get

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \sum_{l=N+1}^{\infty} (\varphi_{0k,l}^{(1)} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{k,l}^{(1)}} t)^2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (\varphi_{0k,l}^{(1)} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{k,l}^{(1)}} t)^2 \\ & + \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{l=1}^{k-1} (\varphi_{0k,l}^{(2)} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{k,l}^{(2)}} t)^2 + \sum_{k=1}^N \sum_{l=N+1}^{\infty} (\varphi_{0k,l}^{(3)} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{k,l}^{(3)}} t)^2 \\ & + \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{l=k}^{\infty} (\varphi_{0k,l}^{(3)} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{k,l}^{(3)}} t)^2 \leq C_1 m^2 (2e^{2\sqrt{\lambda_{1,N+1}^{(1)}}(t-T)} + 2e^{2\sqrt{\lambda_{N+1,1}^{(2)}}(t-T)} + 1) \end{aligned}$$

where  $C_1$  is a positive constant.

Assume the series  $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} ((\varphi_{0k,l}^{(1)})^2 + (\varphi_{0k,l}^{(2)})^2 + (\varphi_{0k,l}^{(3)})^2 + (\varphi_{0k,l}^{(4)})^2)$  to be converging. Let

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \sum_{l=N+1}^{\infty} (\varphi_{0k,l}^{(4)})^2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (\varphi_{0k,l}^{(4)})^2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{l=1}^{k-1} (\varphi_{0k,l}^{(3)})^2 \\ & + \sum_{k=1}^N \sum_{l=N+1}^{\infty} (\varphi_{0k,l}^{(2)})^2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{l=k}^{\infty} (\varphi_{0k,l}^{(2)})^2 = \gamma(N), \end{aligned}$$

where  $\gamma(N) \rightarrow 0$  at  $N \rightarrow \infty$ . Thus,

$$\|u(x, y, t) - u^N(x, y, t)\|_0^2 \leq C_1 m^2 (2e^{2\sqrt{\lambda_{1,N+1}^{(1)}}(t-T)} + 2e^{2\sqrt{\lambda_{N+1,1}^{(2)}}(t-T)} + 1) + \gamma(N).$$

Summing up the estimates, we have

$$\begin{aligned} & 0.5 \|u(x, y, t) - u_{\varepsilon}^N(x, y, t)\|_0^2 \\ & \leq C_1 m^2 (2e^{2\sqrt{\lambda_{1,N+1}^{(1)}}(t-T)} + 2e^{2\sqrt{\lambda_{N+1,1}^{(2)}}(t-T)} + 1) + C_0 e^{2\sqrt{\lambda_{N,N}^{(1)}} t} \varepsilon^2 + \gamma(N). \end{aligned}$$

Minimizing evaluation at the right side of  $\varepsilon > 0$ , we obtain a formula for the regularization parameter  $N$ . Here  $m$  is chosen arbitrarily and usually it is determined depending on the specific model.

**Conclusion.** An ill-posed boundary-value problem for a second-order mixed hyperbolic-elliptic type partial differential equation was investigated for conditional correctness. The ill-posed boundary value is expressed in the absence of continuous dependence of the solution on the data. The main result of the paper is the proof of the conditional stability theorem for the solution of the problem. Using this, a sequence of approximate solutions which is stable on the defined set of correctness with respect to the accuracy of the initial data was constructed.

#### REFERENCES

1. Tricomi F. G., On Linear Equations of Mixed Type [in Russian], Gostekhizdat, Moscow; Leningrad (1947).

2. Frankl F. I., Selected Works on Gas Dynamics [in Russian], Nauka, Moscow (1973).
3. Kuzmin A. G., Non-classical Equations of Mixed Type and Their Applications in Gas Dynamics [in Russian], Izdat. Leningrad. Univ., Leningrad (1990).
4. Vragov V. N., “On the theory of boundary value problems for equations of mixed type in the space [in Russian],” Differ. Equ., **13**, No. 6, 1098–1105 (1977).
5. Nakhushev A. M., Equations of Mathematical Biology [in Russian], Vyssh. Shkola, Moscow (1995).
6. Sabitov K. B., “On the theory of the Frankl problem for equations of mixed type,” Izv. Math., **81**, No. 1, 99–136 (2017).
7. Lavrent’ev M. M. and Saveliev L. Ya., Theory of Operators and Ill-Posed Problems [in Russian], Inst. Mat., Novosibirsk (2010).
8. Krein S. G., Linear Differential Equations in Banach Spaces [in Russian], Nauka, Moscow (1967).
9. Levine H. A., “Logarithmic convexity, first order differential inequalities and some applications,” Trans. Amer. Math. Soc., **152**, 299–320 (1970).
10. Pyatkov S. G., “Solvability of boundary value problems for a second-order equation of mixed type [in Russian],” in: Nonclassical partial differential equations, Collect. Sci. Works, pp. 77–90, Novosibirsk (1988).
11. Pyatkov S. G., “On the solvability of a boundary value problem for a parabolic equation with a changing time direction [in Russian],” Dokl. Akad. Nauk SSSR, **285**, No. 6, 1322–1327 (1985).
12. Kozhanov A. I., Composite Type Equations and Inverse Problems, VSP, Utrecht (1999).
13. Gimaltdinova A. A., “Dirichlet problem for a mixed type equation with two perpendicular transition lines in a rectangular area [in Russian],” Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki, **19**, No. 4, 634–649 (2015).
14. Bukhgeim A. L., “Ill-posed problems, number theory and imaging,” Sib. Math. J., **33**, No. 3, 389–402 (1992).
15. Fayazov K. S., “An ill-posed boundary-value problem for a second order mixed type equation,” Uzb. Math. J., **2**, 89–93 (1995).
16. Fayazov K. S. and Khajiev I. O., “Stability estimates and approximate solutions to a boundary value problem for a fourth order partial differential equation [in Russian],” Mat. Zamet. SVFU, **22**, No. 1, 78–88 (2015).
17. Fayazov K. S. and Khajiev I. O., “Conditional correctness of boundary-value problem for a composite fourth-order differential equation,” Russ. Math., **59**, No. 4, 54–62 (2015).
18. Khajiev I. O., “Conditional correctness and approximate solution of boundary value problem for the system of second order mixed-type equations [in Russian],” Zh. Sib. Fed. Univ., Mat., Fiz., **11**, No. 2, 231–241 (2018).
19. Fayazov K. S. and Khudayberganov Y. K., “Ill-posed boundary-value problem for a system of partial differential equations with two degenerate lines [in Russian],” Zh. Sib. Fed. Univ., Mat., Fiz., **12**, No. 3, 392–401 (2019).

*Submitted January 20, 2023*

*Revised February 7, 2023*

*Accepted February 28, 2023*

Kudratillo S. Fayazov

Turin Polytechnic University in Tashkent,  
17 Kichik Khalka Yuli Street, 100195 Tashkent, Uzbekistan  
kudratillo52@mail.ru

Yashin K. Khudayberganov  
National University of Uzbekistan,  
4 Universitet Street, 100174 Tashkent, Uzbekistan  
komilyashin89@mail.ru

## AN INVERSE PROBLEM OF CHEMICAL KINETICS IN A NONDEGENERATE CASE

L. I. Kononenko

**Abstract:** The article contains a review of recent results on solving the direct and inverse problems related to a singularly perturbed system of ordinary differential equations which describe a process in chemical kinetics. We also extend the class of problems under study by considering polynomials of arbitrary degree as the right-hand parts of the differential equations in the case  $\varepsilon \neq 0$ . Moreover, an iteration algorithm is proposed of finding an approximate solution to the inverse problem in the nondegenerate case ( $\varepsilon \neq 0$ ) for arbitrary degree. The theorem is proven on the convergence of the algorithm suggested. The proof is based on the contraction mapping principle (the Banach fixed-point theorem).

DOI: 10.25587/SVFU.2023.33.27.005

**Keywords:** integral manifold, slow surface, singularly perturbed system, small parameter, inverse problem, ODE.

### Introduction

In Sections 1–4, we review the available results on the direct and inverse problems related to a singularly perturbed system of ordinary differential equations with small parameter which describe a process in chemical kinetics. In Sections 5 and 6, we continue the study started in [1] and [2] which is devoted to formalization of the notion of problem and solution of the inverse problem of chemical kinetics. In particular, we extend the class of problems under study by considering polynomials of arbitrary degree as the right-hand part of the differential equations in the case  $\varepsilon \neq 0$ .

In Section 1, the Goldstein—Sobolev theorem [3] is stated on the existence and uniqueness of a solution to the direct problem for system (1) with small parameter described below.

Section 2 is devoted to solution of the inverse problem for (1) in the case  $\varepsilon = 0$ ,  $p = 1$ , where  $p$  is the degree of the polynomial  $f$  in the right-hand part of (1); see [2, 4].

In Section 3, we present the theorem on the existence and uniqueness of a solution to the inverse problem in the case  $\varepsilon = 0$  for arbitrary polynomial degree; see [5].

---

The work was carried out in the framework of the State Task to the Sobolev Institute of Mathematics (Project FWNF–2022–0005).

In Section 4, an algorithm is considered that makes it possible to employ the Banach theorem for proving the existence and uniqueness of a solution of the inverse problem in the case  $\varepsilon \neq 0$ ,  $p = 1$ ; see [6].

Section 5 is devoted to the generalization of the previous result to the case of arbitrary degree  $p$  of the polynomial.

### 1. Direct problem

We start with the formal definitions of problem, solution, inverse problem, and composition of problems. By a *problem* we mean an arbitrary correspondence between the elements of two sets, i.e., a triple  $P = (A, B, C)$ , where  $A$  and  $B$  are any sets and  $C \subseteq A \times B$ . The sets  $A$ ,  $B$ , and  $C$  are denoted by  $\text{Dom } P$ ,  $\text{Im } P$ , and  $\text{Gr } P$  and called *the domain of data*, *the domain of unknowns*, and *the condition* of the problem  $P$ . The containment  $(a, b) \in \text{Gr } P$  is written as  $P(a, b)$ . A *solution* to a problem  $P$  for a data instance  $a \in \text{Dom } P$  is an arbitrary unknown  $b \in \text{Im } P$  which meets the condition  $P(a, b)$ . The set of solutions to  $P$  for  $a$  is denoted by  $P[a]$ . A problem  $P$  is *solvable* for  $a \in \text{Dom } P$  whenever  $P[a] \neq \emptyset$ , and *uniquely solvable* if  $P[a] = \{b\}$  for some  $b \in \text{Im } P$ , with the corresponding solution  $b$  denoted by  $P^s(a)$ . The *inverse problem* to  $P$  is the inverse correspondence  $P^{-1} := (\text{Im } P, \text{Dom } P, (\text{Gr } P)^{-1})$ , where  $(\text{Gr } P)^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in \text{Gr } P\}$ . The *composition* of problems  $P$  and  $Q$  is the composition of the correspondences, which is the problem  $Q \circ P := (\text{Dom } P, \text{Im } Q, \text{Gr } Q \circ \text{Gr } P)$  with condition  $\text{Gr } Q \circ \text{Gr } P = \{(a, c) \in \text{Dom } P \times \text{Im } Q : (\exists b \in \text{Im } P \cap \text{Dom } Q) P(a, b) \& Q(b, c)\}$ .

Suppose that  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $0 < \varepsilon_0 \in \mathbb{R}$ ,  $X := \mathbb{R}^m$ ,  $Y$  is a domain in  $\mathbb{R}^n$ ,  $T := \mathbb{R}$ ,  $E := \{\varepsilon \in \mathbb{R} : 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ ,  $F := C(X \times Y \times T \times E, \mathbb{R}^m)$ ,  $G := C(X \times Y \times T \times E, \mathbb{R}^n)$ . Consider the problem  $P$  with domain of data  $\text{Dom } P = F \times G \times E$ , domain of unknowns  $\text{Im } P = C^1(T, X) \times C^1(T, Y)$ , and the following condition  $P((f, g, \varepsilon), (x, y))$ :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), y(t), t, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{y}(t) &= g(x(t), y(t), t, \varepsilon) \end{cases} \quad (1)$$

for all  $t \in T$ , where  $f \in F$ ,  $g \in G$ ,  $\varepsilon \in E$ ,  $x \in C^1(T, X)$ ,  $y \in C^1(T, Y)$ ; see [1, 2]. The problem  $P$  is referred to as the *direct problem*: given expressions  $f$ ,  $g$  of the right-hand parts and a parameter  $\varepsilon$ , find  $x$  and  $y$  subject to the system.

Under certain conditions presented below, the problem  $P$  occurs to be uniquely solvable. The solution is based on the method of integral manifolds, a convenient tool for studying multidimensional singularly perturbed systems of differential equations which makes it possible to lower the dimension of the system under study (see [3, 7–10]). Solution of  $P$  in a sense reduces to solving the so called *degenerate system* which is obtained from (1) by putting the parameter  $\varepsilon$  equal to zero. This is justified by the results of A. N. Tikhonov (see, for instance, [11]) on passing to a solution to the degenerate problem as a small parameter tends to zero.

The method of integral manifolds employs the so called *slow surface* that is determined by the equation  $g(x, y, t, 0) = 0$ . Each sheet of the slow integral manifold is the exact form of the sheet of the slow surface, with account taken of the small

parameter  $\varepsilon$ , and is obtained by means of the asymptotic decomposition in powers of  $\varepsilon$ :

$$h(x, t, \varepsilon) = h_0(x, t) + \varepsilon h_1(x, t) + \cdots + \varepsilon^k h_k(x, t) + \cdots; \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(x, t, \varepsilon) = h_0(x, t),$$

where  $h_0(x, t)$  is the sheet of the slow surface.

Suppose that system (1) meets the following conditions:

- (a) The equation  $g(x, y, t, 0) = 0$  has an isolated solution  $y = h_0(x, t)$  for  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$ .
- (b) In the domain  $\{(x, y, t, \varepsilon) : x \in \mathbb{R}^m, \|y - h_0(x, t)\| < \rho, t \in \mathbb{R}, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ , the functions  $f$ ,  $g$ , and  $h_0$  are uniformly continuous and bounded together with the partial derivatives up to the order at least 2.
- (c) There is a number  $\gamma > 0$  such that the eigenvalues  $\lambda_i(x, t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) of the matrix  $\frac{\partial g}{\partial y}(x, h_0(x, t), t, 0)$  meet the inequality  $\operatorname{Re} \lambda_i(x, t) \leq -\gamma < 0$ .

**Theorem 1** [3]. Assume that conditions (a)–(c) are satisfied. Then there is an  $\varepsilon_1$  ( $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ ) such that, for every  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ , system (1) has an integral manifold of slow motions  $y = h(x, t, \varepsilon)$  along which the motion is described by the equation  $\dot{x} = f(x, h(x, t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ .

Two models in chemical kinetics were considered as examples of the direct problem: a mathematical model of ideal mixing reactor and a mathematical model of catalytic carbon monoxide oxidation over iridium; see [10].

## 2. Inverse problem ( $\varepsilon = 0, p = 1$ )

If a problem  $P$  models a real physical process, consideration of the inverse problem  $P^{-1}$  is motivated by the search of a relatively simple formal law which describes the process with adequate accuracy. The data of the inverse problem are experimentally measurable characteristics of the process, while the unknowns are, for instance, the coefficients of a differential equation describing the process under observation. Inverse problems for various systems of differential equations were considered, for instance, in [12–16].

The inverse problem to  $P$  consists in finding the unknown functions in the right-hand part of the system, given some data on the solution to the direct problem  $P$ . As soon as the direct problem  $P$  is based on a functional equation, the formal data of the inverse problem  $P^{-1}$  are functions of the corresponding class, while, in practice, the role of data of the inverse problem is not played by the functions themselves but rather by some of their characteristics which can be measured, i. e., by certain finite sets of numbers. The inverse problem can be suitably corrected by means of the composition of the problem  $P^{-1}$  and a simple auxiliary problem which represents the relation between functions and their characteristics being measured. An example of such a correction was considered in [1, 2] and is represented below.

Relying on the close connection of the initial problem with the degenerate system, we consider the case  $\varepsilon = 0$  and additionally assume that the slow surface defined by the equation  $g(x, y, t, 0) = 0$  consists of a single sheet (with respect to the

dependence of  $y$  on  $x$ ). Since the right-hand parts of equations in chemical kinetics often occur polynomial, the corresponding restriction on  $f$  seems to be natural.

For demonstration purposes, we consider the partial case of the problem  $P$  in which  $m = n = 1$ ,  $E = \{0\}$ , the functions  $f \in F$  are polynomials of degree one, and  $g \in G$  meet the condition of the implicit function theorem, which fact allows us to replace the equation  $g(x(t), y(t), t, 0) = 0$  by the equivalent equation of the form  $y(t) = h(x(t), t)$ . We also assume that the slow surface consists of a single sheet.

Let  $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ,  $a, b > 0$ . Consider the problem  $Q$  with domain of data  $\text{Dom } Q = \mathbb{R}^3$ ; domain of unknowns  $\text{Im } Q$  equal to the set

$$W := \{(x, y) \in C^1(\mathbb{R}) : 0 \leq x(t) \leq a, 0 \leq y(t) \leq b, x(t) + y(t) \leq 1 \text{ for all } t \in \mathbb{R}\}; \quad (2)$$

and condition

$$Q(f, (x, y)) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = f_1 + f_2 x(t) + f_3 y(t), \\ y(t) = h(x(t), t) \end{cases} \quad \text{for all } t \in \mathbb{R},$$

where  $f = (f_1, f_2, f_3) \in \mathbb{R}^3$ ,  $(x, y) \in W$ .

The formal inverse problem  $Q^{-1}$ , which has pairs of functions  $(x, y) \in C^1(\mathbb{R})^2$  as data, is very simple and impractical. Finite collections of values of functions or their derivatives as data are more adequate than everywhere defined functions. The corresponding correction of the inverse problem is realized by the composition of the problem  $Q^{-1}$  and the auxiliary problem  $R$  with domain of data  $\text{Dom } R = (\mathbb{R}^3)^3$ , domain of unknowns  $\text{Im } R = W$ , and condition

$$R((t, \alpha, \beta), (x, y)) \Leftrightarrow \begin{cases} x(t_1) = \alpha_1, x(t_2) = \alpha_2, x(t_3) = \alpha_3, \\ \dot{x}(t_1) = \beta_1, \dot{x}(t_2) = \beta_2, \dot{x}(t_3) = \beta_3, \end{cases}$$

where  $t, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$ ,  $(x, y) \in W$ .

As compared to the formal inverse  $Q^{-1}$ , the composition  $Q^{-1} \circ R$  is more practical and amounts to the following problem: Given  $\tau, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$ , find the coefficients  $f \in \mathbb{R}^3$  for which there exist  $(x, y) \in W$  subject to the condition

$$\begin{cases} x(t_1) = \alpha_1, x(t_2) = \alpha_2, x(t_3) = \alpha_3, \\ \dot{x}(t_1) = \beta_1, \dot{x}(t_2) = \beta_2, \dot{x}(t_3) = \beta_3, \\ \dot{x}(t) = f_1 + f_2 x(t) + f_3 y(t) \text{ for all } t \in \mathbb{R}, \\ y(t) = h(x(t), t) \text{ for all } t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

The following result was obtained in [1, 4].

**Theorem 2.** *If  $t, \alpha \in \mathbb{R}^3$  meet the condition*

$$\Delta := \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & h(\alpha_1, t_1) \\ 1 & \alpha_2 & h(\alpha_2, t_2) \\ 1 & \alpha_3 & h(\alpha_3, t_3) \end{vmatrix} \neq 0$$

*then, given arbitrary  $\beta \in \mathbb{R}^3$ , the problem  $Q^{-1} \circ R$  is uniquely solvable for the data  $(t, \alpha, \beta)$ , and its solution  $(f_1, f_2, f_3) = (Q^{-1} \circ R)^s(t, \alpha, \beta)$  is determined by the equalities  $f_i = \Delta_i / \Delta$ , with  $\Delta_i$  the determinant of the matrix formed from the above matrix by replacing the  $i$  th column by  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ .*

### 3. Inverse problem ( $\varepsilon = 0$ , $p$ is arbitrary)

We now consider the partial case of the problem  $P$  in which  $m = n = 1$ ,  $E = \{0\}$ , and the functions  $f \in F$  are polynomials in two variables of degree at most  $p \in \mathbb{N}$ :

$$f(x, y, t, \varepsilon) = \sum_{(i,j) \in K(p)} \gamma_{ij} x^i y^j,$$

where  $\gamma_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $(i, j) \in K(p)$ ,

$$K(p) := \{(i, j) : 0 \leq i, j \in \mathbb{Z}, i + j \leq p\}.$$

Introduce the notation

$$\kappa(p) := \frac{(p+1)(p+2)}{2}$$

for the number of elements of the set  $K(p)$  and fix an arbitrary enumeration

$$K(p) = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_{\kappa(p)}, j_{\kappa(p)})\}.$$

Therefore, the expression  $\sum_{k=1}^{\kappa(p)} \gamma_k x^{i_k} y^{j_k}$  is the general form of a polynomial in two variables  $x, y$  of degree at most  $p$ .

As a result of the above agreements, we arrive at the problem  $Q$  with domain of data  $\text{Dom } Q = \mathbb{R}^{\kappa(p)}$ , domain of unknowns  $\text{Im } Q = C^1(\mathbb{R})^2$ , and condition

$$Q(\gamma, (x, y)) \Leftrightarrow \dot{x}(t) = \sum_{k=1}^{\kappa(p)} \gamma_k x(t)^{i_k} y(t)^{j_k}, \quad y(t) = h(x(t), t) \text{ for all } t \in \mathbb{R},$$

where  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{\kappa(p)} \in \mathbb{R}$ ,  $x, y \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$ .

Proceeding in a similar way to the case of the previous section, we correct the inverse problem  $Q^{-1}$  by considering the composition of  $Q^{-1}$  and the auxiliary problem  $R$  with domain of data  $\text{Dom } R = (\mathbb{R}^{\kappa(p)})^3$ , domain of unknowns  $\text{Im } R = C^1(\mathbb{R})^2$ , and condition

$$R((\tau, \alpha, \beta), (x, y)) \Leftrightarrow \begin{cases} x(\tau_1) = \alpha_1, x(\tau_2) = \alpha_2, \dots, x(\tau_{\kappa(p)}) = \alpha_{\kappa(p)}, \\ \dot{x}(\tau_1) = \beta_1, \dot{x}(\tau_2) = \beta_2, \dots, \dot{x}(\tau_{\kappa(p)}) = \beta_{\kappa(p)}, \end{cases}$$

where  $\tau, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\kappa(p)}$ ,  $x, y \in C^1(\mathbb{R})$ .

The resultant problem  $Q^{-1} \circ R$  is as follows: Given  $\tau, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\kappa(p)}$ , find the coefficients  $\gamma \in \mathbb{R}^{\kappa(p)}$  for which there exist functions  $x, y \in C^1(\mathbb{R})$  subject to the condition

$$\begin{aligned} &x(\tau_1) = \alpha_1, x(\tau_2) = \alpha_2, \dots, x(\tau_{\kappa(p)}) = \alpha_{\kappa(p)}, \\ &\dot{x}(\tau_1) = \beta_1, \dot{x}(\tau_2) = \beta_2, \dots, \dot{x}(\tau_{\kappa(p)}) = \beta_{\kappa(p)}, \\ &\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^{\kappa(p)} \gamma_k x(t)^{i_k} y(t)^{j_k} \text{ for all } t \in \mathbb{R}, \\ &y(t) = h(x(t), t) \text{ for all } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

The following assertion can be proven for arbitrary  $p \in \mathbb{N}$  in the same way as the case  $p = 1$  which is considered in [5].

**Theorem 3.** If  $\tau, \alpha \in \mathbb{R}^{\kappa(p)}$  meet the condition

$$\Delta(\tau, \alpha) := \begin{vmatrix} \alpha_1^{i_1} h(\alpha_1, \tau_1)^{j_1} & \alpha_1^{i_2} h(\alpha_1, \tau_1)^{j_2} & \dots & \alpha_1^{i_{\kappa(p)}} h(\alpha_1, \tau_1)^{j_{\kappa(p)}} \\ \alpha_2^{i_1} h(\alpha_2, \tau_2)^{j_1} & \alpha_2^{i_2} h(\alpha_2, \tau_2)^{j_2} & \dots & \alpha_2^{i_{\kappa(p)}} h(\alpha_2, \tau_2)^{j_{\kappa(p)}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\kappa(p)}^{i_1} h(\alpha_{\kappa(p)}, \tau_{\kappa(p)})^{j_1} & \alpha_{\kappa(p)}^{i_2} h(\alpha_{\kappa(p)}, \tau_{\kappa(p)})^{j_2} & \dots & \alpha_{\kappa(p)}^{i_{\kappa(p)}} h(\alpha_{\kappa(p)}, \tau_{\kappa(p)})^{j_{\kappa(p)}} \end{vmatrix} \neq 0,$$

then, given arbitrary  $\beta \in \mathbb{R}^{\kappa(p)}$ , the problem  $Q^{-1} \circ R$  is uniquely solvable for the data  $(\tau, \alpha, \beta)$ , and its solution  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{\kappa(p)}) = (Q^{-1} \circ R)^s(\tau, \alpha, \beta)$ , where

$$\gamma_k = \frac{\Delta_k(\tau, \alpha, \beta)}{\Delta(\tau, \alpha)}, \quad k = 1, 2, \dots, \kappa(p),$$

$\Delta_k(\tau, \alpha, \beta)$  is the determinant of the matrix formed from the above matrix by replacing the  $k$ th column  $(\alpha_1^{i_k} h(\alpha_1, \tau_1)^{j_k}, \alpha_2^{i_k} h(\alpha_2, \tau_2)^{j_k}, \dots, \alpha_{\kappa(p)}^{i_k} h(\alpha_{\kappa(p)}, \tau_{\kappa(p)})^{j_k})$  with  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\kappa(p)})$ .

The following criterion clarifies the case in which there exist numbers  $\tau_1, \dots, \tau_{\kappa(p)}$  satisfying the hypothesis of Theorem 3.

**Theorem 4** [5]. Let  $n \in \mathbb{N}$ , let  $T$  be an arbitrary set, and let  $\varphi_i : T \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . The family of functions  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  is linearly independent in the vector space  $\mathbb{R}^T$  if and only if there are points  $t_1, \dots, t_n \in T$  satisfying the condition

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(t_1) & \varphi_2(t_1) & \dots & \varphi_n(t_1) \\ \varphi_1(t_2) & \varphi_2(t_2) & \dots & \varphi_n(t_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(t_n) & \varphi_2(t_n) & \dots & \varphi_n(t_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Theorems 3 and 4 directly imply the following condition for unique solvability of the corrected inverse problem  $Q^{-1} \circ R$ .

**Theorem 5.** Let  $x \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$ . If the family of functions

$$t \mapsto x(t)^{i_k} h(x(t), t)^{j_k}, \quad k = 1, 2, \dots, \kappa(p),$$

is linearly independent in the vector space  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  then there exist  $\tau_1, \dots, \tau_{\kappa(p)} \in \mathbb{R}$  such that, for all  $\beta_1, \dots, \beta_{\kappa(p)} \in \mathbb{R}$ , the problem  $Q^{-1} \circ R$  is uniquely solvable for the data  $\tau_1, \dots, \tau_{\kappa(p)}$ ,  $x(\tau_1), \dots, x(\tau_{\kappa(p)})$ ,  $\beta_1, \dots, \beta_{\kappa(p)}$ .

#### 4. Inverse problem ( $\varepsilon \neq 0, p = 1$ )

In this section, we extend the class of problems under study by considering the nondegenerate case  $\varepsilon \neq 0$  and assuming that the function  $f$  in the right-hand part of (1) is a polynomial of degree  $p = 1$ .

An iterative algorithm is proposed in [6] for calculating an approximate solution to the corresponding inverse problem. The algorithm consists in combining, at each iteration step, the solution of the inverse problem for the case of  $\varepsilon = 0$  and the solution of the direct problem, which is reduced to the proof of the existence and uniqueness of the solution in the case of  $\varepsilon \neq 0$ . We will outline the algorithm.

Step 0. By using the initial data  $t_i^0$ ,  $x^0(t_i^0) = \alpha_i^0$ ,  $\dot{x}^0(t_i^0) = \beta_i^0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , calculate the coefficients  $f_i^0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , in the right-hand part of the system according to Theorem 2 for the degenerate case  $\varepsilon = 0$ . After obtaining the right-hand part of (1), use the solvability of the nondegenerate direct problem on the sheet of the integral manifold (Theorem 1) and denote the solution by  $x^1(t)$ ,  $y^1(t)$ , where  $y^1(t) = h(x^1(t), t)$ .

STEP 1. Take the solution found at the points  $t_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  (we keep  $t_i = t_i^0$  unchanged) as the initial data. We have

$$x^1(t_i) = \alpha_i^1 = \int_0^{t_i} [f_1^1 + f_2^1 x^0(t) + f_3^1 h(x^0(t), t)] dt, \quad y^1(t_i) = h(x^1(t_i), t_i).$$

Find  $f_i^1$ ,  $i = 1, 2, 3$ , according to Theorem 2, use again the solvability of the direct problem (Theorem 1), and denote the solution by  $x^2(t)$ ,  $y^2(t)$ , where  $y^2(t) = h(x^2(t), t)$ .

STEP  $m$ . Considering  $x^m(t)$ ,  $y^m(t)$  as the initial data, we obtain

$$\begin{aligned} x^{m+1}(t_i) &= \alpha_i^{m+1} = \int_0^{t_i} [f_1^m + f_2^m x^m(t) + f_3^m h(x^m(t), t)] dt, \\ y^{m+1}(t_i) &= h(x^{m+1}(t_i), t_i), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{3}$$

The convergence of the proposed algorithm is proven in [6] by means of the Banach fixed-point theorem.

**Theorem 6 [6].** Suppose that  $X = Y = \mathbb{R}$ ; the functions  $f \in F$  are polynomials of degree one;  $g \in G$  meets the condition of the implicit function theorem, which fact allows us to replace the equation  $g(x(t), y(t), t, 0) = 0$  by the equivalent equation of the form  $y(t) = h(x(t), t)$ ; and the domain of unknowns  $(x, y)$  is the set  $W$  defined in (2). Assume also that the slow surface consists of a single sheet. Let  $c_\alpha, c_\beta, c_f, c_h \in \mathbb{R}$  and  $t^0, \alpha^0, \beta^0 \in \mathbb{R}^3$  be such that the following hold:

$$0 \leq c_\alpha, c_h, c_f(1 + c_h) < 1;$$

$$0 \leq \alpha_i^m \leq c_\alpha, \quad 0 \leq \beta_i^m \leq c_\beta, \quad 0 \leq f_i^m \leq c_f, \quad 0 \leq h(\alpha_i^m, t_i^0) \leq c_h \text{ for all } i = 1, 2, 3; \\ m = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1^0 & h(\alpha_1^0, t_1^0) \\ 1 & \alpha_2^0 & h(\alpha_2^0, t_2^0) \\ 1 & \alpha_3^0 & h(\alpha_3^0, t_3^0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Then the inverse problem for system (1) with  $\varepsilon \neq 0$  has a unique solution.

## 5. Inverse problem ( $\varepsilon \neq 0$ , $p$ is arbitrary)

Consider now the case  $\varepsilon \neq 0$ ; suppose that the main conditions of Theorem 6 hold; but assume that the function  $f$  in the right-hand part of (1) is a polynomial of arbitrary degree at most  $p$ .

Then the assertion very similar to Theorem 6 can be proven along the same lines as in [6]. The main difference consists in replacing (3) with the following more complex expressions:

$$x^{m+1}(t_i) = \alpha_i^{m+1} = \int_0^{t_i} \sum_{k=1}^{\kappa(p)} \gamma_k x(t)^{i_k} y(t)^{j_k} dt,$$

$$y^{m+1}(t_i) = h(x^{m+1}(t_i), t_i), \quad i = 1, 2, \dots, \kappa(p),$$

where  $\kappa(p)$ ,  $i_k$ , and  $j_k$  are defined in Section 3.

Note that the domain of unknowns  $W$  defined in (2) ensures the inequalities  $0 \leq x^{i_k} \leq 1$  and  $0 \leq y^{j_k} \leq 1$ , which fact simplifies the verification of the conditions listed in Theorem 6.

The author is indebted to A. E. Gutman and V. N. Potapov for their help in this work.

#### REFERENCES

1. Gutman A. E. and Kononenko L. I., “Formalization of inverse problems and its applications [in Russian],” Sib. J. Pure Appl. Math., **17**, No. 4, 49–56 (2017). DOI: 10.17377/PAM.2017.17.5.
2. Gutman A. E. and Kononenko L. I., “The inverse problem of chemical kinetics as a composition of binary correspondences [in Russian],” Sib. Elektron. Mat. Izv., **15**, 48–53 (2018). DOI: 10.17377/semi.2018.15.006.
3. Goldstein V. M. and Sobolev V. A., Qualitative Analysis of Singularly Perturbed Systems [in Russian], Izdat. Inst. Mat., Novosibirsk (1988).
4. Kononenko L. I., “Identification problem for singular systems with small parameter in chemical kinetics [in Russian],” Sib. Elektron. Mat. Izv., **13**, 175–180 (2016). DOI: 10.17377/semi.2016.13.015.
5. Gutman A. E. and Kononenko L. I., “Binary correspondences and the inverse problem of chemical kinetics [in Russian],” Vladikavk. Mat. Zh., **20**, No. 3, 37–47 (2018).
6. Kononenko L. I., “The identification problem for a nonsingular system of ordinary differential equations with fast and slow variables [in Russian],” Mat. Zamet. SVFU, **28**, No. 2, 3–15 (2021).
7. Mitropolsky Yu. A. and Lykova O. B., Integral Manifolds in Nonlinear Mechanics [in Russian], Nauka, Moscow (1963).
8. Vasil’eva A. V. and Butuzov V. F., Singularly Perturbed Equations in Critical Cases [in Russian], Nauka, Moscow (1978).
9. Voropaeva N. V. and Sobolev V. A., Geometric Decomposition of Singularly Perturbed Systems [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2009).
10. Kononenko L. I., “On the smoothness of slow surfaces of singularly perturbed systems [in Russian],” Sib. Zh. Ind. Mat., **5**, No. 2, 109–125 (2002).
11. Tikhonov A. N., “On independence of solutions to differential equations on a small parameter [in Russian],” Mat. Sb., **22**, No. 2, 193–204 (1948).
12. Romanov V. G., “Inverse problems for hyperbolic systems [in Russian],” in: Numerical Methods in Mathematical Physics, Geophysics and Optimal Control, **233**, pp. 75–83, Nauka, Novosibirsk (1978).
13. Kabanikhin S. I., Inverse and Ill-posed Problems [in Russian], Sib. Nauch. Izdat., Novosibirsk (2009).
14. Kozhanov A. I., “Nonlinear loaded equations and inverse problems,” Comput. Math. Math. Phys., **44**, No. 4, 657–675 (2004).
15. Golubyatnikov V. P., “An inverse problem for the Hamilton–Jacobi equation on a closed manifold,” Sib. Math. J., **38**, No. 2, 235–238 (1997).

- 
16. Anikonov Yu. E., Some questions in the theory of inverse problems for kinetic equations [in Russian], in: Inverse Problems of Mathematical Physics, pp. 28–41, Vychisl. Tsentr Sib. Otdel. Akad. Nauk SSSR, Novosibirsk (1985).

*Submitted February 3, 2023*

*Revised February 10, 2023*

*Accepted February 28, 2023*

Larisa I. Kononenko  
Sobolev Institute of Mathematics,  
4 Koptyug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia  
[larak@math.nsc.ru](mailto:larak@math.nsc.ru)

Математические заметки СВФУ  
Январь—март, 2023. Том 30, № 1

УДК 517.927.4

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ  
ДИССОЦИАЦИИ ГИДРАТА ПРИРОДНОГО  
ГАЗА В ЛАБОРАТОРНОМ ОБРАЗЦЕ  
ПЕСЧАНИКА ПРИ ДЕПРЕССИОННОМ РЕЖИМЕ

В. А. Иванов, И. И. Рожин

**Аннотация.** Работа посвящена математическому моделированию процесса диссоциации (разложения) гидрата природного газа Средневилюйского газоконденсатного месторождения в лабораторном образце природного песчаника. В начальный момент времени пористая среда заполнена природным газом, водой и гидратом и находится в термобарических условиях, соответствующих стабильному состоянию газогидрата. Затем с одной из сторон цилиндрического образца гидрата стравливается давление, что вызывает его разложение. Математическая модель процесса разложения учитывает двухфазную фильтрацию газа и воды, эффект дросселирования, конвективный теплообмен, поглощение тепла при диссоциации гидрата, кинетику этого процесса. Разработанная модель и ее алгоритм численной реализации проверены на адекватность путем сравнения с результатами известной экспериментальной работы. В результате вычислительного эксперимента получены распределения давления и температуры газа, гидрато- и водонасыщенности. Также проведена оценка продолжительности процесса диссоциации гидрата при варьировании некоторых исходных данных.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.59.65.006

**Ключевые слова:** газовый гидрат, диссоциация, депрессионный режим, природный газ, пористая среда, лабораторный образец, вычислительный эксперимент.

В последние годы идет интенсивное развитие науки о газовых гидратах во всем мире, что подтверждается увеличением количества публикаций и научных конференций, посвященных теоретическим и практическим аспектам исследований газогидратов. Среди возможных технологических применений газогидратов являются хранение и транспортировка природного газа, разделение газовых смесей, утилизация парниковых газов с одновременным получением природного газа, опреснение воды, холодильное хранение и др. многими промышленно развитыми странами (в первую очередь странами, не обладающими собственными ресурсами углеводородов) разработаны и приняты к осуществлению национальные программы научно-практического изучения газовых гидратов. Прежде всего, широкий научный интерес к газовым гидратам связан с рассмотрением их

---

Работа выполнена в рамках госзадания Минобразования РФ (Рег. № 122011100157-5, научная тема FWRS-2021-0003).

© 2023 Иванов В. А., Рожин И. И.

в качестве перспективного нетрадиционного источника углеводородного сырья, а также внутренней логикой развития газогидратной проблематики. В частности, особое внимание уделяется фундаментальным исследованиям свойств этих соединений-включений и условий их образования/разложения в каналах и пористых структурах. Перед исследователями, изучающими особенности образования/разложения газогидратов методами математического моделирования и лабораторного эксперимента, возникают новые задачи, соответствующие более глубокому физическому описанию этих процессов.

В статье Г. Г. Цыпкина [1] выведено автомодельное решение одномерной задачи разложения гидрата метана в пористом коллекторе при снижении давления на добывающей скважине. Для упрощения аналитического решения рассмотрены два случая. В первом случае продуктивный пласт с гидратом считается достаточно тонким, тогда процесс диссоциации гидрата можно рассматривать как изотермический. Во втором случае толщина пласта значительная и необходимо учитывать уравнение баланса тепла и зависимость давления диссоциации гидрата от температуры. В работе В. И. Васильева и др. [2] задача разложения гидрата метана при добыче газа из пористого коллектора также решена аналитическим методом. При условии достаточно малого перепада давления на скважине для решения основных уравнений газовой динамики в пористой среде применяется метод линеаризации. Это позволяет получить систему однородных параболических уравнений для температуры, давления и водонасыщенности. Полученная задача имеет автомодельное решение, которое позволяет рассмотреть широкий диапазон параметров при меньших затратах, и, таким образом, лучше понять качественные особенности рассматриваемого физического процесса.

В отличие от вышеописанных работ, в которых рассматривается фронтовой режим диссоциации гидрата, в [3] процесс диссоциации гидрата в пористой среде моделируется в объемном режиме с учетом кинетики процесса. Одномерная модель построена с учетом уравнения состояния Пенга — Робинсона для метана, массовых соотношений компонентов при диссоциации гидрата метана, кинетики разложения гидрата по модели Ким и др. [4], уравнения равновесного давления гидрата по Слоан [5], закона Дарси без учета гравитации, кривых относительных фазовых проницаемостей по модели из [6], уравнения абсолютной проницаемости гидратонасыщенной пористой среды по Масуда и др. [7], уравнения капиллярного давления в порах, а также уравнения изменения энталпии из [8]. В [9] одномерная модель модифицирована до трехмерной, а также учитываются возможность наличия солей и массоперенос посредством диффузии. В работе [10] с помощью аналогичной модели рассмотрены различные сценарии снижения давления в лабораторном образце и их эффект на характер извлечения газа. При этом проверка адекватности численной модели проведена путем сравнения с результатами эксперимента из [7].

Работы Н. Г. Мусакаева с соавторами [11, 12] посвящены численному исследованию процесса образования/диссоциации газового гидрата (гидрата метана)

при разработке газогидратных залежей. Построены математические модели в плоскорадиальном приближении и разработаны алгоритмы их численной реализации, позволяющие определить основные параметры (динамики полей температуры, давления и гидратонасыщенности) при неизотермическом фильтрационном потоке в гидратонасыщенном пласте с учетом разложения гидрата метана на газ и воду (лед). С использованием авторской схемы расчета гидратонасыщенности показано, что для рассмотренных параметров пласта характерным является фронтальный режим фазовых переходов. В статье [13] предложен и теоретически описан способ разработки газогидратной залежи в циклическом режиме. При данном способе диссоциация гидрата происходит за счет геотермальной теплоты самого пласта, а также теплоты окружающих горных пород. Математическая модель процесса строится в предположении, что темп диссоциации гидрата намного ниже скорости пробега волн давления в пористой среде. В таком случае законы сохранения масс газа и гидрата записываются в интегральной форме для всего пласта в целом, что позволяет значительно упростить расчеты.

В лаборатории техногенных газовых гидратов ИПНГ СО РАН проводятся экспериментальные исследования по изучению образования и разложения гидратов природного газа в свободном объеме [14–16] и в пористой среде [17, 18] с учетом состава и минерализации пластовых вод.

Численное моделирование является эффективным и единственным методом анализа динамической реакции залежей гидратов природного газа и добычи флюидов (воды и газа) из них. Вычислительный эксперимент позволяет получить достаточно достоверные данные о физических процессах, изучение которых в лабораторных или натурных условиях очень сложно, а иногда просто невозможно, и всегда требует значительных затрат средств и времени. В реальных лабораторных экспериментах не всегда возможно определить распределение давления, температуры, водонасыщенности и гидратонасыщенности по всему объему образца в различные моменты времени. Тем самым целью работы являются выбор и верификация математической модели диссоциации гидрата природного газа в лабораторном образце песчаника при понижении давления (или при разгерметизации). Полученные результаты могут быть использованы для разработки методики проведения лабораторных экспериментов по изучению процесса образования/разложения газогидратов.

## **1. Математическая модель и алгоритм численного решения**

Объектом исследования является лабораторный образец песчаника, заполненный природным газом Средневилюйского газоконденсатного месторождения и его гидратом. Длина образца составляет 30 см, диаметр — 4 см. Температура и давление соответствуют равновесным условиям гидратообразования. В начальный момент времени с левой торцевой границы образца стравливается давление и запускается процесс диссоциации гидрата в пористой среде депрес-

сионным воздействием.

Для описания процесса предложена одномерная математическая модель, которая учитывает кинетику разложения гидрата и позволяет описать не только фронтовой режим диссоциации, но и объемный, характерный для пористых сред с высокой проницаемостью. В математической модели процесса включены уравнения, которые выводятся на основе фундаментальных законов сохранения массы и энергии. Роль уравнений движения играет закон фильтрации Дарси. Для замыкания системы уравнений добавляются: уравнение состояния газа, условие термодинамического равновесия «гидрат — газ + вода», выражение массовой скорости выделения газа при диссоциации гидрата, массовые соотношения компонентов при диссоциации гидрата, уравнение капиллярного давления, соотношения для относительных фазовых проницаемостей и зависимость абсолютной проницаемости от гидратонасыщенности. Эти уравнения получены при следующих допущениях: пористая среда однородна и нескжимаема, газ не растворяется в воде, при диссоциации гидрата не образуется лед.

Уравнения сохранения массы при фильтрации газа и воды через пористую среду в дифференциальной форме имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho_g S_g) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_g v_g) = \dot{m}_g, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho_w S_w) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_w v_w) = \dot{m}_w, \quad (2)$$

где  $t$  — время;  $x$  — пространственная координата, отсчитанная от левого края образца;  $\phi$  — пористость;  $\rho_g$ ,  $\rho_w$  — плотности газа и воды соответственно;  $S_g$  — газонасыщенность;  $S_w$  — водонасыщенность;  $v_g$ ,  $v_w$  — скорости фильтрации газа и воды соответственно;  $\dot{m}_g$ ,  $\dot{m}_w$  — скорости изменения масс газа и воды при разложении гидрата.

Уравнение сохранения массы гидрата при его диссоциации записывается следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho_h S_h) = \dot{m}_h, \quad (3)$$

где  $\rho_h$  — плотность гидрата;  $S_h$  — гидратонасыщенность;  $\dot{m}_h$  — скорость изменения массы гидрата при его разложении. Газ, вода и гидрат занимают все поровое пространство, так что сумма насыщенностей пор фазами  $S_g + S_w + S_h = 1$ .

Уравнения сохранения дополняются уравнением состояния идеального газа

$$p_g = \rho_g R_M T, \quad (4)$$

где  $R_M = R/M_g$  — газовая постоянная;  $R$  — универсальная газовая постоянная;  $M_g$  — молярная масса газа;  $p$  — давление;  $T$  — температура.

При диссоциации газового гидрата, описываемого уравнением



( $M$  обозначает молекулу-гостя одного или нескольких видов газа), массы газа, гидрата и воды соотносятся так:

$$\dot{m}_h = -\dot{m}_g \frac{N_H M_w + M_g}{M_g}, \quad (5)$$

$$\dot{m}_w = \dot{m}_g \frac{N_H M_w}{M_g}, \quad (6)$$

где  $N_H$  — гидратное число, т. е. число молекул воды, приходящихся на одну молекулу-гостя;  $M_w$  — молярная массы воды.

Скорость выделения газа и соответственно кинетика диссоциации гидрата определяется по модели [4]. При этом в данной работе летучесть газа  $f$  аппроксимируется давлением  $p$ . Тогда

$$\dot{m}_g = k_d M_g A_s (f_e - f) \approx k_d M_g A_s (p_e - p), \quad (7)$$

$$k_d = k_0 \exp \left( -\frac{\Delta E_a}{RT} \right), \quad (8)$$

где  $A_s$  — удельная площадь внутренней поверхности порового пространства;  $f_e$  — равновесная летучесть газа;  $p_e$  — равновесное давление гидратообразования;  $k_0$  — кинетический коэффициент диссоциации гидрата;  $\Delta E_a$  — энергия активации.

Равновесное давление  $p_e$  зависит от температуры и вычисляется по формуле из [5] с эмпирическими коэффициентами  $A_w$  и  $B_w$ , зависящими от состава газа:

$$p_e = 1.15 \exp \left( A_w + \frac{B_w}{T} \right). \quad (9)$$

Межфазная граница между гидратом и флюидами в поровом пространстве  $A_s$  находится по соотношению из [10]. В этой работе формула из [19], выведенная на основе модели параллельных цилиндров, дополняется множителем, зависящим от насыщенностей поровых флюидов и гидрата:

$$A_s = \sqrt{\frac{(1 - S_h)^3 \phi^3}{2 K_e}} (S_g S_w S_h)^{2/3}. \quad (10)$$

Здесь эффективная проницаемость утрамбованного песка  $K_e$  существенно зависит от гидратонасыщенности  $S_h$  и определяется по формуле Масуда [7]:

$$K_e = K (1 - S_h)^N, \quad (11)$$

где  $K$  — абсолютная проницаемость пористой среды;  $N$  — показатель степени.

Скорости фильтрации газа и воды в уравнениях (1), (2) определяются по закону Дарси для многофазного потока [20]:

$$v_g = -\frac{K_e k_{rg}}{\mu_g} \frac{\partial p_g}{\partial x}, \quad (12)$$

$$v_w = -\frac{K_e k_{rw}}{\mu_w} \frac{\partial p_w}{\partial x}. \quad (13)$$

Здесь  $\mu_g$ ,  $\mu_w$  — динамические вязкости газа и воды;  $k_{rg}$ ,  $k_{rw}$  — относительные фазовые проницаемости газа и воды, которые рассчитываются по степенной зависимости из [6]:

$$k_{rg} = \left( \frac{\frac{S_g}{S_w + S_g} - S_{gr}}{1 - S_{wr} - S_{gr}} \right)^{n_g}, \quad (14)$$

$$k_{rw} = \left( \frac{\frac{S_w}{S_w + S_g} - S_{wr}}{1 - S_{wr} - S_{gr}} \right)^{n_w}, \quad (15)$$

где  $S_{gr}$ ,  $S_{wr}$  — остаточные газо- и водонасыщенности;  $n_g$ ,  $n_w$  — эмпирические показатели степени.

Вязкость воды  $\mu_w$  считается постоянной, а вязкость газа  $\mu_g$  рассчитывается по формуле для вязкости метана из [8] как функция от температуры и плотности:

$$\begin{aligned} \mu_g = & (2.5404 \cdot 10^{-3} + 2.8764 \cdot 10^{-5} \cdot T + 3.279 \cdot 10^{-9} \cdot T^2 \\ & - 3.7838 \cdot 10^{-12} \cdot T^3 + 2.0891 \cdot 10^{-5} \cdot \rho_g + 2.5127 \cdot 10^{-7} \cdot \rho_g^2 \\ & - 5.822 \cdot 10^{-10} \cdot \rho_g^3 + 1.8378 \cdot 10^{-13} \cdot \rho_g^4) \cdot 10^{-3}, \end{aligned} \quad (16)$$

где размерность температуры в К, плотности газа — кг/м<sup>3</sup>, динамической вязкости газа — Па·с.

Давление воды отличается от давления газа в той же точке порового пространства на величину капиллярного давления

$$p_g - p_w = p_c = p_c^e \left( \frac{\frac{S_w}{S_w + S_g} - S_{wr}}{1 - S_{wr}} \right)^{-n_c}, \quad (17)$$

где  $p_c^e$  — пороговое давление;  $n_c$  — эмпирический показатель степени.

Подставляя уравнения Дарси (12) и (13) в уравнения сохранения масс газа и воды (1) и (2), получаем следующие выражения:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_g S_g) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_g \frac{K_e k_{rg}}{\mu_g} \frac{\partial p_g}{\partial x} \right) = \dot{m}_g, \quad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_w S_w) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_w \frac{K_e k_{rw}}{\mu_w} \frac{\partial p_w}{\partial x} \right) = \dot{m}_w. \quad (19)$$

Уравнение сохранения энергии пористой среды при фильтрации газа и воды в дифференциальной форме, выраженное с помощью удельной энталпии  $H$  и температуры, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\phi (\rho_g S_g H_g + \rho_w S_w H_w + \rho_h S_h H_h) + (1 - \phi) \rho_s H_s] \\ - \frac{\partial}{\partial x} (\rho_g v_g H_g + \rho_w v_w H_w) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\lambda$  — теплопроводность пористой среды, вычисленная с учетом ее компонентного состава; индексы  $g$ ,  $w$ ,  $h$ ,  $s$  обозначают газ, воду, гидрат и скелет пористой среды соответственно. Нужно отметить, что уравнение (20) не учитывает поток тепла извне, т. е. боковая поверхность цилиндрического образца считается теплоизолированной. Из уравнения (20) с учетом уравнений сохранения масс (1) и (2) получаем

$$\begin{aligned} (1 - \phi) \rho_s \frac{\partial H_s}{\partial t} + \phi \left( \rho_g S_g \frac{\partial H_g}{\partial t} + \rho_w S_w \frac{\partial H_w}{\partial t} + \rho_h S_h \frac{\partial H_h}{\partial t} \right) \\ - \rho_g v_g \frac{\partial H_g}{\partial x} + \rho_w v_w \frac{\partial H_w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{m}_h \Delta H_D. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь составляющая  $\dot{m}_h \Delta H_D = \dot{m}_g H_g + \dot{m}_w H_w + \dot{m}_h H_h$  представляет собой тепловой поток при диссоциации единицы объема гидрата, где изменение удельной энталпии определяется по уравнению из работы [8]:

$$\Delta H_D = 446.12 \cdot 10^3 - 132.638 \cdot T \text{ при } 273 \text{ K} < T < 298 \text{ K}. \quad (22)$$

Дифференциал удельной энталпии  $H$  как функция от температуры и давления записывается в виде

$$dH = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)_T dp = c_p dT + \sigma dp, \quad (23)$$

где  $c_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении;  $\sigma$  — коэффициент дросселирования. Таким образом, уравнение сохранения энергии принимает следующий вид:

$$[\phi \rho_g S_g c_{pg} + \phi \rho_w S_w c_{pw} + \phi \rho_h S_h c_{ph} + (1 - \phi) \rho_s S_s c_{ps}] \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) - (\rho_g v_g c_{pg} + \rho_w v_w c_{pw}) \frac{\partial T}{\partial x} - \phi \rho_g S_g \sigma_g \frac{\partial p_g}{\partial t} - \rho_g v_g \sigma_g \frac{\partial p_g}{\partial x} + \dot{m}_h \Delta H_D, \quad (24)$$

где  $c_{pg}$ ,  $c_{pw}$ ,  $c_{ph}$ ,  $c_{ps}$  — удельные изобарные теплоемкости газа, воды, гидрата и скелета пористой среды соответственно;  $\sigma_g$  — коэффициент дросселирования газа.

Описанные дифференциальные уравнения решаются относительно плотности газа  $\rho_g$ , температуры  $T$ , водонасыщенности  $S_w$  и гидратонасыщенности  $S_h$ . На каждом временном шаге эти неизвестные параметры находятся последовательно. Сначала совместно вычисляются плотность газа и температура, затем отдельно определяются водонасыщенность и гидратонасыщенность. Плотность газа и температура находятся по следующим уравнениям, выведенным из (18) и (24) с учетом (4) и (12):

$$\begin{aligned} \phi(1 - S_w^- - S_h^-) \frac{\partial \rho_g}{\partial t} - \frac{R_M}{\mu_g} \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_g K_e k_{rg} \left( \frac{\partial \rho_g}{\partial x} T + \rho_g \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right) &= \dot{m}_g^-, \\ (\rho c_p)^- \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda^- \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \rho_g c_{pg} \frac{K_e^- k_{rg}^- R_M}{\mu_g} \left( \frac{\partial \rho_g}{\partial x} T + \rho_g \frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{\partial T}{\partial x} \\ &\quad - \rho_w v_w^- c_{pw} \frac{\partial T}{\partial x} - \phi \rho_g (1 - S_w^- - S_h^-) \sigma_g \frac{\partial p_g}{\partial t} \\ &\quad + \rho_g \sigma_g \frac{K_e^- k_{rg}^- R_M^2}{\mu_g} \left( \frac{\partial \rho_g}{\partial x} T + \rho_g \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \dot{m}_h^- \Delta H_D, \end{aligned} \quad (25)$$

где верхний индекс  $-$  означает, что значение параметра берется с предыдущего временного слоя;  $\rho c_p$  — объемная теплоемкость пористой среды, насыщенной газом, водой и гидратом.

Далее вычисляется водонасыщенность по явной схеме согласно уравнению (19), где производная по времени аппроксимирована разностью  $\frac{\partial S_w}{\partial t} \approx \frac{S_w - S_w^-}{\tau}$ ,  $\tau$  — шаг по времени. При этом значения относительной фазовой проницаемости воды и капиллярного давления рассчитываются с использованием значения

водонасыщенности от нижнего временного слоя  $S_w^-$  по уравнениям (15) и (17), тогда

$$S_w = S_w^- + \frac{\tau}{\phi\rho_w} \left[ \frac{\rho_w}{\mu_w} \frac{\partial}{\partial x} \left( K_e^- k_{rw}(S_w^-) \frac{\partial p_w(S_w^-)}{\partial x} \right) + \dot{m}_w \right]. \quad (26)$$

Затем определяется гидратонасыщенность также по явной схеме согласно уравнению (3), где производная по времени аппроксимируется разностью  $\frac{\partial S_h}{\partial t} \approx \frac{S_h - S_h^-}{\tau}$ :

$$S_h = S_h^- + \frac{\tau \dot{m}_h}{\phi\rho_h}. \quad (27)$$

Уравнения (25)–(27) дополняются следующими начальными и граничными условиями, при этом на левой границе ( $x = 0$ ) задается условие I-го рода, а на правой границе ( $x = L$ ) — условие II-го рода:

$$\rho_g = \rho_g^0, \quad T = T^0, \quad S_w = S_w^0, \quad S_h = S_h^0 \quad \text{при } t = 0; \quad (28)$$

$$\rho_g = \rho_{g0}, \quad T = T_0 \quad \text{при } x = 0; \quad (29)$$

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = L. \quad (30)$$

## 2. Численная реализация и тестирование модели

Построенная модель диссоциации гидрата в пористой среде описывает процессы, сильно отличающиеся друг от друга по скорости протекания. С одной стороны, относительно быстро изменяется давление в образце, которое после открытия клапана на торце выравнивается с внешним давлением за несколько минут. С той же скоростью протекает конвективный теплообмен. С другой стороны, разложение гидрата в цилиндрическом образце с теплоизолированными боковыми стенками может занять время порядка нескольких суток. Поэтому уравнения для температуры и плотности газа целесообразно решить как единую взаимозависимую систему, а уравнения для гидратонасыщенности и водонасыщенности — решить отдельно.

Уравнения для температуры и плотности газа (25) представляют собой параболические уравнения с переменными коэффициентами. В построенной численной модели эти коэффициенты пересчитываются через определенные шаги по времени, а в каждом временном шаге решаются параболические уравнения с фиксированными коэффициентами. Также на каждом шаге по времени вычисляются гидратонасыщенность и водонасыщенность по уравнениям (26) и (27). Шаг по времени  $\tau$  вначале принимается равным 0.1 сек, затем по мере стабилизации давления в образце постепенно доводится до 60 сек. Расчетный отрезок разбивается на 50 интервалов по длине. Программный код реализован в пакете прикладных программ Matlab.

Верификация численной модели проведена путем сравнения с экспериментальными данными работы [21], в которой исследована диссоциация гидрата

метана в образце песчаника Вегеа при относительно небольшом снижении давления с 3.17 МПа до 2.495 МПа и при поддержании температуры термостатической рубашки 273.7 К (табл. 1). Во время эксперимента фиксировался объем газа, выделяемого из образца. Этот параметр использован для сравнения результатов численного моделирования и лабораторного эксперимента, что показало достаточно хорошее совпадение (рис. 1).

**Таблица 1.** Параметры лабораторного эксперимента по диссоциации гидрата в пористой среде [21]

Длина образца	15 см
Площадь сечения образца	11.4 см <sup>2</sup>
Пористость	18.8 %
Начальное давление	3.17 МПа
Начальная температура	273.7 К
Конечное давление	2.495 МПа
Температура окружающей среды	273.7 К
Начальная гидратонасыщенность	42.76 %
Начальная водонасыщенность	17 %

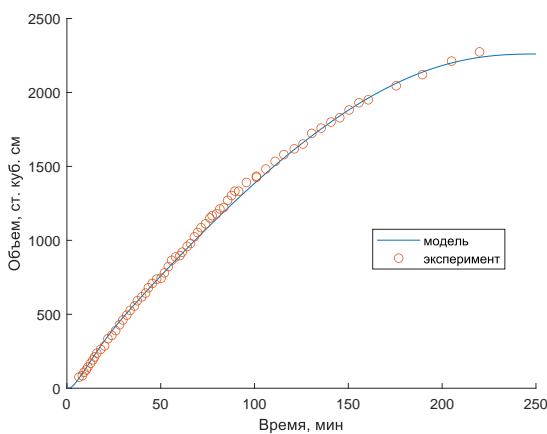


Рис. 1. Объем газа, выделяемого при диссоциации гидрата, в зависимости от времени по данным лабораторного эксперимента и согласно разработанной численной модели.

### 3. Результаты вычислительного эксперимента

В вычислительном эксперименте исследована динамика процесса разложения гидрата, а также характер поведения изучаемого объекта при варьировании некоторых исходных данных — конечного давления и начальной гидратонасыщенности.

**Таблица 2.** Параметры модели  
диссоциации гидрата в пористой среде

Геометрия, начальные и граничные условия	
Длина образца	0.3 м
Диаметр образца	0.04 м
Начальная температура	10° С
Начальное давление	8 МПа
Конечное давление	2 МПа
Наружная температура	10° С
Физические свойства	
Плотность гидрата	920 кг/м <sup>3</sup>
Плотность скелета пористой среды	2650 кг/м <sup>3</sup>
Плотность воды	1000 кг/м <sup>3</sup>
Удельная теплоемкость газа при постоянном давлении	2093 Дж/(кг·К)
Удельная теплоемкость гидрата	3210 Дж/(кг·К)
Удельная теплоемкость скелета пористой среды	700 Дж/(кг·К)
Удельная теплоемкость воды	4200 Дж/(кг·К)
Коэффициент теплопроводности газа	0.0307 Вт/(м·К)
Коэффициент теплопроводности гидрата	1.88 Вт/(м·К)
Коэффициент теплопроводности скелета пористой среды	2.0 Вт/(м·К)
Коэффициент теплопроводности воды	0.58 Вт/(м·К)
Газовая постоянная	480.76 Дж/(кг·К)
Коэффициент дросселирования газа	$-1.5 \cdot 10^{-4}$ Дж/(кг·Па)
Петрофизические свойства	
Пористость	0.188
Коэффициент проницаемости	100 мД
Остаточная водонасыщенность	0.2
Динамическая вязкость газа	$1.3 \cdot 10^{-5}$ Па·с
Динамическая вязкость воды	$1.8 \cdot 10^{-3}$ Па·с
Начальная гидратонасыщенность	0.5
Показатель степени $N$ в уравнении (11)	15
Начальная водонасыщенность	0.3
Остаточная газонасыщенность	0
Пороговое капиллярное давление	4000 Па
Показатель степени $n_g$ в уравнении (14)	2
Показатель степени $n_w$ в уравнении (15)	4
Показатель степени $n_c$ в уравнении (17)	0.65
Параметры гидрата	
Молярная масса воды	18.01528 г/моль
Молярная масса газа	17.293 г/моль
Гидратное число	7.169
Коэффициент $A_w$ в уравнении (9)	49.3185
Коэффициент $B_w$ в уравнении (9)	-9459 К
Кинетический коэффициент диссоциации гидрата $k_0$ в (8)	$3.6 \cdot 10^4$ моль/(м <sup>2</sup> · Па·с)
$\Delta E_a/R$ в уравнении (8)	9752.73 К

В табл. 2 представлены исходные данные численного расчета разложения гидрата в пористой среде. Использованы параметры, характерные для природного газа Средневилюйского месторождения и для песчаника Берега, известного из литературных источников.

При исходных данных (табл. 2) разложение гидрата в образце песчаника

завершается через 27.5 часов. При этом выделяется 5000 см<sup>3</sup> газа. На рис. 2 представлены распределения давления и температуры газа в пористой среде цилиндрического образца после начала стравливания газа с его левого торца, а на рис. 3 представлены распределения водо- и гидратонасыщенности. Кривые соответствуют шести моментам времени: 1 мин, 5 мин, 20 мин, 3 ч, 10 ч и 27.5 ч. Из этих графиков видна следующая картина процесса. Выделение газа из порового пространства вызывает понижение давления (рис. 2а), что, в свою очередь, дестабилизирует находящийся в порах гидрат. Гидрат начинает разлагаться с довольно высокой скоростью (рис. 3а), что сопровождается уменьшением температуры (рис. 2б) и выделением воды в поровом пространстве (рис. 3б). В дальнейшем, когда температура образца достигает равновесного значения для конечного давления, диссоциация гидрата резко замедляется. Далее оставшийся гидрат разлагается под воздействием притока тепла с левого торца и, таким образом, процесс диссоциации переходит из депрессионного режима в тепловой [22]. Такой же эффект описан в работах [10, 13]. В данном случае конечному давлению 2 МПа соответствует равновесная температура 2.4°C. На графике (рис. 2б) приближение температуры образца к этому значению говорит об окончании депрессионного режима.

Количество разложившегося гидрата при депрессионном режиме зависит от величины внутренней энергии системы, которая поглощается при диссоциации гидрата. Следовательно, чем больше эффективная теплоемкость пористой среды, тем больше гидрата разлагается в начальный период.

На рис. 4а построены графики изменения объема извлеченного из образца газа по времени при варьировании величины конечного давления от 1 МПа до 6 МПа и при фиксированных значениях прочих исходных параметров, а на рис. 4б представлены те же кривые в начальный период, когда имеет место депрессионный режим. Видно, что чем меньше конечное давление, тем быстрее происходит разложение гидрата. Эта зависимость продолжительности диссоциации от конечного давления показана на рис. 5а. При этом продолжительность начального депрессионного режима нелинейно зависит от конечного давления (рис. 5б). Кривая имеет минимум при конечном давлении 3 МПа. Вероятно, рост продолжительности депрессионного режима при снижении конечного давления с 3 МПа до 1 МПа связан с тем, что здесь равновесная температура ниже и поэтому большая масса гидрата должна диссоциироваться, чтобы температура образца достигала равновесного значения. А при больших значениях конечного давления кинетика процесса оказывается замедленной из-за небольшого перепада давления.

На рис. 6 представлены результаты моделирования при варьировании начальной гидратонасыщенности от 10% до 50%. Из графиков следует, что при значениях начальной гидратонасыщенности 40% и 50% присутствует продолжительный тепловой режим диссоциации (рис. 6а), а при малых значениях 10%, 20% и 30% весь гидрат разлагается во время интенсивного депрессионного режима в течение нескольких или нескольких десятков минут (рис. 6б). Следова-

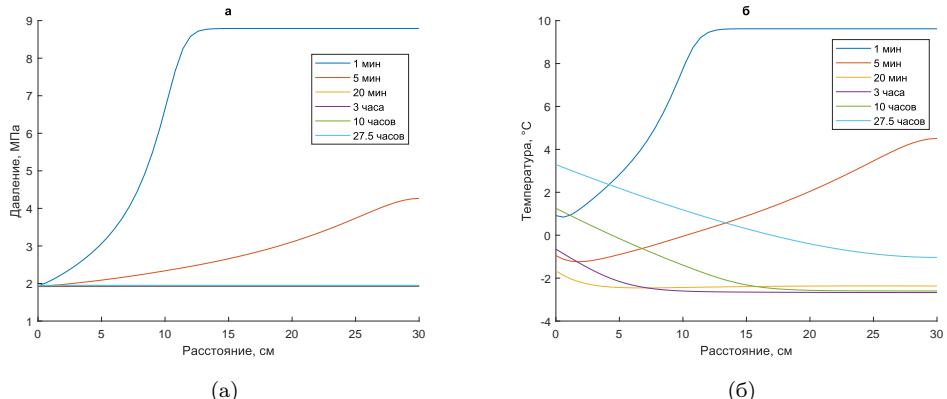


Рис. 2. Распределение по длине образца в различные моменты времени после начала стравливания газа: (а) давления газа; (б) температуры газа.

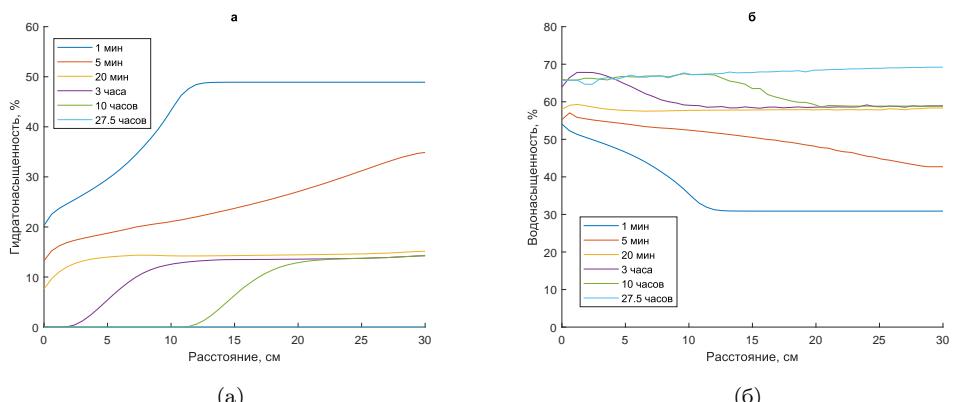


Рис. 3. Распределение по длине образца в различные моменты времени после начала стравливания газа: (а) гидратонасыщенности; (б) водонасыщенности.

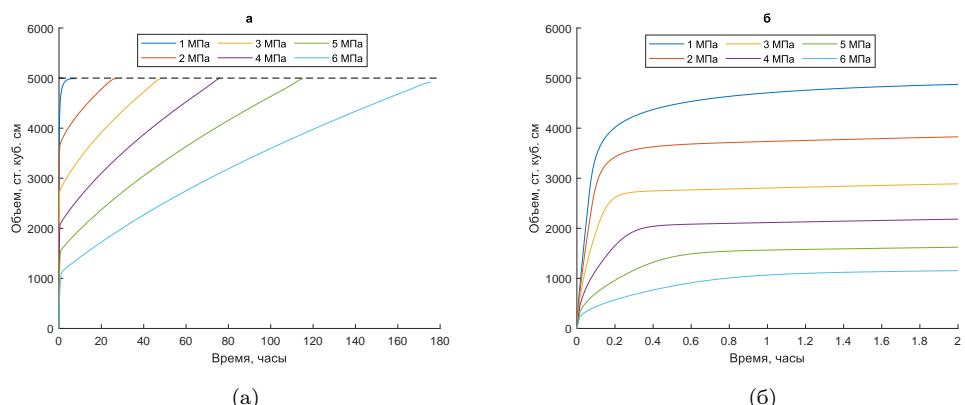


Рис. 4. Зависимость объема извлеченного из образца газа от времени при различных значениях конечного давления: (а) за весь период диссоциации гидрата; (б) в начальный период.

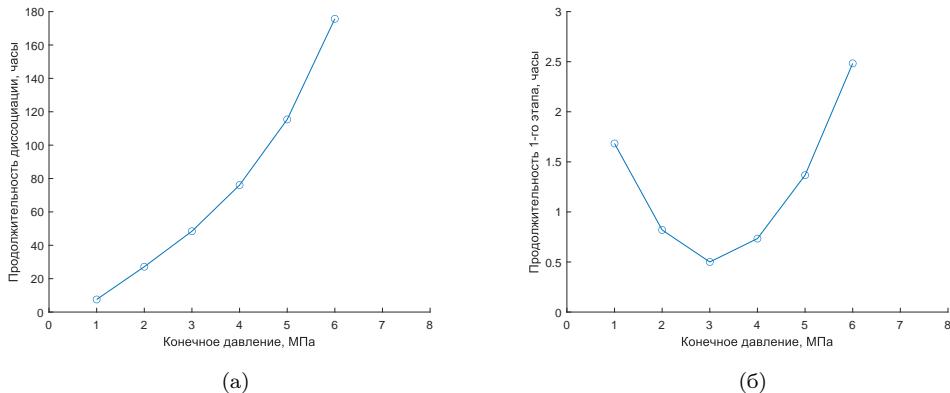


Рис. 5. Зависимость продолжительности от конечного давления: (а) диссоциации гидрата; (б) начального периода депрессионного режима.

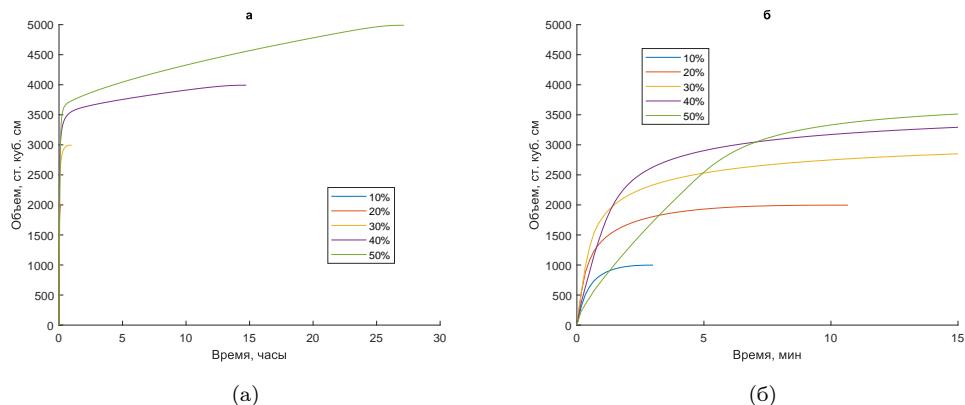


Рис. 6. Зависимость объема извлеченного из образца газа от времени при различных значениях начальной гидратонасыщенности: (а) за весь период диссоциации гидрата; (б) в начальный период диссоциации гидрата.

тельно, величина гидратонасыщенности пористого образца играет критическую роль в характере исследуемого процесса и нелинейно влияет на продолжительность эксперимента.

#### 4. Заключение

Разработана численная модель диссоциации гидрата природного газа в лабораторном образце песчаника, которая учитывает кинетику процесса и позволяет описать объемный режим диссоциации. Выявлено, что вначале гидрат разлагается в депрессионном режиме, после которого, в зависимости от исходных данных, процесс может перейти в тепловой режим. Показано, что динамика разложения гидрата существенно зависит от параметров эксперимента и от свойств образца пористой среды, таких как конечное давление и началь-

ная гидратонасыщенность. При этом продолжительность эксперимента может различаться на порядок — от нескольких минут до нескольких суток. Для более точного описания физического процесса необходимо рассмотреть двух- или трехмерную постановку задачи, а также использовать соответствующие имеющиеся условиям уравнение состояния реального газа и более точные входные параметры вычислительного эксперимента.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Цыпкин Г. Г. Аналитическое решение нелинейной задачи разложения газового гидрата в пласте // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2007. № 5. С. 133–142.
2. Васильев В. И., Попов В. В., Цыпкин Г. Г. Численное исследование разложения газовых гидратов, существующих с газом в природных пластах // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 4. С. 127–134.
3. Sun X., Nanchary N., Mohanty K. K. 1-D modeling of hydrate depressurization in porous media // Transp. Porous Media. 2005. V. 58, N 3. P. 315–338.
4. Kim H. C., Bishnoi P. R., Heidemann R. A., Rizvi S. S. Kinetics of methane hydrate decomposition // Chem. Eng. Sci. 1987. V. 42, N 7. P. 1645–1653.
5. Sloan E. D. Clathrate hydrates of natural gases. New York: Marcel Dekker, 1998.
6. Brooks R. H., Corey A. T. Hydraulic properties of porous media // Hydrology Papers. Fort Collins, CO: Colorado State Univ., 1964. N 3. 27 р.
7. Masuda Y. Modeling and experimental studies on dissociation of methane gas hydrates in Berea sandstone cores // Proc. 3rd Int. Conf. Gas Hydrates. Salt Lake City, UT, 1999.
8. Selim M. S., Sloan E. D. Heat and mass transfer during the dissociation of hydrates in porous media // AIChE J. 1989. V. 35, No. 6. P. 1049–1052.
9. Sun X., Mohanty K. K. Kinetic simulation of methane hydrate formation and dissociation in porous media // Chem. Eng. Sci. 2006. V. 61, N 11. P. 3476–3495.
10. Ruan X., Song Y., Zhao J., Liang H., Yang M., Li Y. Numerical simulation of methane production from hydrates induced by different depressurizing approaches // Energies. 2012. V. 5, N 2. P. 438–458.
11. Musakaev N. G., Khasanov M. K., Borodin S. L. The mathematical model of the gas hydrate deposit development in permafrost // Int. J. Heat Mass Transfer. 2018. V. 118. P. 455–461.
12. Мусакаев Н. Г., Хасанов М. К., Бородин С. Л., Бельских Д. С. Численное исследование процесса разложения гидрата метана при закачке теплого газа в гидрато-насыщенную залежь // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика. 2018. № 56. С. 88–101.
13. Шагапов В. Ш., Чиглинцева А. С., Русинов А. А. Теоретическое моделирование процесса извлечения газа из пористого газогидратного пласта, частично насыщенного газом, с учетом теплового взаимодействия с окружающими породами // Теор. основы хим. технологии. 2016. Т. 50, № 4. С. 452–462.
14. Kalacheva L. P., Portnyagin A. S. The influence of electrolytes composition on the dissociation rate of natural gas hydrates obtained in model stratum waters // IOP Conf. Ser. Earth Environ. Sci. 2019. V. 272, N 2.
15. Semenov M. E., Fedorov A. P., Koryakina V. V., Ivanova I. K. Kinetics of formation and decomposition of natural gas hydrates during synthesis from formed ice // Theor. Found. Chem. Eng. 2020. V. 54, N 5. P. 1120–1125.
16. Калачева Л. П., Иванова И. К., Портнягин А. С., Иванов В. К. Оценка возможности хранения природных и попутных нефтяных газов в гидратном состоянии // SOCAR Proc. 2022. Спец. выпуск 1. С. 99–110.
17. Kalacheva L. P., Ivanova I. K., Portnyagin A. S., Rozhin I. I., Argunova K. K., Nikolaev A. I. Determination of the lower boundaries of the natural gas hydrates stability zone in the subpermafrost horizons of the Yakut arch of the Vilyui syneclyse, saturated with bicarbonate-sodium type waters // SOCAR Proc. 2021. Special Issue 2. P. 1–11.
18. Kalacheva L. P., Ivanova I. K., Portnyagin A. S. Equilibrium conditions of the natural gas hydrates formation in the pore space of dispersed rocks // IOP Conf. Ser. Earth Environ. Sci. 2021. V. 666, N 4. Article N 042062.

- 
19. Amyx J., Bass D., Whiting R. L. Petroleum reservoir engineering physical properties. New York: McGraw-Hill, 1960.
  20. Басниев К. С., Кочина И. Н., Максимов В. М. Подземная гидромеханика. М.: Недра, 1993.
  21. Yousif M. H., Abass H. H., Selim M. S., Sloan E. D. Experimental and theoretical investigation of methane-gas-hydrate dissociation in porous media // SPE Reservoir Eng. 1991. V. 6, N 1. P. 69–76.
  22. Вольф А. А. Особенности процесса разложения газовых гидратов в пористых средах. Дис. .... канд. физ.-мат. наук. Тюмень: Тюмен. филиал ИТМП СО РАН, 1999.

*Поступила в редакцию 25 июля 2022 г.*

*После доработки 16 августа 2022 г.*

*Принята к публикации 28 февраля 2023г.*

Иванов Виктор Анатольевич, Рожин Игорь Иванович  
Институт проблем нефти и газа СО РАН,  
ФИЦ Якутский научный центр СО РАН,  
ул. Петровского, 2, Якутск 677980  
victor.ivanov88@gmail.com, i\_rozhin@mail.ru

NUMERICAL STUDY OF NATURAL GAS HYDRATE  
DISSOCIATION IN A LABORATORY SANDSTONE  
SAMPLE UNDER A DEPRESSION REGIME

V. A. Ivanov and I. I. Rozhin

**Abstract:** The present work covers mathematical modeling of the process of dissociation (decomposition) of natural gas hydrate of the Sredneviluysky gas condensate field in a laboratory sample of natural sandstone. Initially, the porous medium, filled with natural gas, water, and hydrate, is in thermobaric conditions meeting the stable state of the gas hydrate. Then, the pressure is released from one side of the cylindrical hydrate sample, which causes its decomposition. The mathematical model of the decomposition process takes into account the two-phase filtration of gas and water, the throttling effect, convective heat exchange, heat absorption during hydrate dissociation, and the kinetics of this process. The developed model and its implementation algorithm are tested against the results of a known experimental work. As a result of the computational experiment, distributions of gas pressure and temperature, hydrate and water saturation are obtained. Furthermore, the duration of the hydrate dissociation process is estimated with varying some initial parameters.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.59.65.006

**Keywords:** gas hydrate, dissociation, depression mode, natural gas, porous medium, laboratory sample, computational experiment.

REFERENCES

1. Tsypkin G. G., “Analytical solution of the nonlinear problem of gas hydrate dissociation in a formation,” Fluid Dyn., **42**, No. 5, 798–806 (2007).
2. Vasil’ev V. I., Popov V. V., and Tsypkin G. G., “Numerical investigation of the decomposition of gas hydrates coexisting with gas in natural reservoirs,” Fluid Dyn., **41**, No. 4, 599–605 (2006).
3. Sun X., Nanchary N., and Mohanty K. K., “1-D modeling of hydrate depressurization in porous media,” Transp. Porous Media, **58**, No. 3, 315–338 (2005).
4. Kim H. C., Bishnoi P. R., Heidemann R. A., and Rizvi S. S., “Kinetics of methane hydrate decomposition,” Chem. Eng. Sci., **42**, No. 7, 1645–1653 (1987).
5. Sloan E. D., Clathrate Hydrates of Natural Gases, Marcel Dekker, New York (1998).
6. Brooks R. H. and Corey A. T., “Hydraulic properties of porous media,” Hydrology Papers, No. 3, Colorado State Univ., Fort Collins, CO (1964).
7. Masuda Y., “Modeling and experimental studies on dissociation of methane gas hydrates in Berea sandstone cores,” Proc. 3rd Int. Conf. Gas Hydrates, Salt Lake City, UT (1999).
8. Selim M. S. and Sloan E. D., “Heat and mass transfer during the dissociation of hydrates in porous media,” AIChE J., **35**, No. 6, 1049–1052 (1989).
9. Sun X. and Mohanty K. K., “Kinetic simulation of methane hydrate formation and dissociation in porous media,” Chem. Eng. Sci., **61**, No. 11, 3476–3495 (2006).
10. Ruan X., Song Y., Zhao J., Liang H., Yang M., and Li Y., “Numerical simulation of methane production from hydrates induced by different depressurizing approaches,” Energies, **5**, No. 2, 438–458 (2012).

11. Musakaev N. G., Khasanov M. K., Borodin and S. L., "The mathematical model of the gas hydrate deposit development in permafrost," *Int. J. Heat Mass Transfer*, **118**, 455–461 (2018).
12. Musakaev N. G., Khasanov M. K., Borodin S. L., and Belskikh D. S., "Numerical investigation of the methane hydrate decomposition in the process of warm gas injection into a hydrate-saturated reservoir [in Russian]," *Vestn. Tomsk. Gos. Univ., Mat. Mekh.*, No. 56, 88–101 (2018).
13. Shagapov V. S., Chiglintseva A. S., and Rusinov A. A., "Theoretical modeling of gas extraction from a partially gas-saturated porous gas-hydrate reservoir with respect to thermal interactions with surrounding rocks," *Theor. Found. Chem. Eng.*, **50**, No. 4, 449–458 (2016).
14. Kalacheva L. P. and Portnyagin A. S., "The influence of electrolytes composition on the dissociation rate of natural gas hydrates obtained in model stratum waters," *IOP Conf. Ser. Earth Environ. Sci.*, **272**, No. 2 (2019).
15. Semenov M. E., Fedorov A. P., Koryakina V. V., and Ivanova I. K., "Kinetics of formation and decomposition of natural gas hydrates during synthesis from formed ice," *Theor. Found. Chem. Eng.*, **54**, No. 5, 1120–1125 (2020).
16. Kalacheva L. P., Ivanova I. K., Portnyagin A. S., and Ivanov V. K., "Assessment of the possibility of natural and associated petroleum gases storage in the hydrate state," *SOCAR Proc., Special Issue 1*, 99–110 (2022).
17. Kalacheva L. P., Ivanova I. K., Portnyagin A. S., Rozhin I. I., Argunova K. K., and Nikolaev A. I., "Determination of the lower boundaries of the natural gas hydrates stability zone in the subpermafrost horizons of the Yakut arch of the Vilyui syncline, saturated with bicarbonate-sodium type waters," *SOCAR Proc., Special Issue 2*, 1–11 (2021).
18. Kalacheva L. P., Ivanova I. K., and Portnyagin A. S., "Equilibrium conditions of the natural gas hydrates formation in the pore space of dispersed rocks," *IOP Conf. Ser. Earth Environ. Sci.*, **666**, No. 4, Article No. 042062 (2021).
19. Amyx J., Bass D., and Whiting R. L., *Petroleum Reservoir Engineering Physical Properties*, McGraw-Hill, New York (1960).
20. Basniev K. S., Kochina I. N., and Maksimov V. M., *Underground Hydromechanics* [in Russian], Nedra, Moscow 1993.
21. Yousif M. H., Abass H. H., Selim M. S., and Sloan E. D., "Experimental and theoretical investigation of methane-gas-hydrate dissociation in porous media," *SPE Reservoir Eng.*, **6**, No. 1, 69–76 (1991).
22. Wolf A. A., Features of the process of decomposition of gas hydrates in porous media [in Russian], Diss. . . . Kand. Fiz.-Mat. Nauk, Filial ITPM SO RAN, Tyumen (1999).

Submitted July 25, 2022

Revised August 16, 2022

Accepted February 28, 2023

Victor A. Ivanov, Igor I. Rozhin  
Institute of Oil and Gas Problems SB RAS,  
FRC Yakut Scientific Center SB RAS,  
2 Petrovsky Street, 677980 Yakutsk, Russia  
victor.ivanov88@gmail.com, i\_rozhin@mail.ru

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
РАСПРОСТРАНЕНИЯ В ПОРИСТОЙ  
СРЕДЕ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН  
ОТ СИНГУЛЯРНЫХ ИСТОЧНИКОВ

Х. Х Имомназаров, А. А. Михайлов,  
А. Т. Омонов, С. Тордье

**Аннотация.** В работе численно решается система пороупругости в бездиссипативном двумерном случае. Исходная система записывается в виде гиперболической системы первого порядка в терминах скоростей матрицы, скорости насыщающей жидкости, тензора напряжений и давления жидкости. Для численного решения задачи используется совмещенный метод аналитического преобразования и конечно-разностного метода. Предлагаемый алгоритм можно рассматривать как аналог известного спектрального метода на основе Фурье-преобразования. Однако, в отличие от него, применение спектрального метода Лагерра позволяет свести исходную задачу к решению системы уравнений, в которой параметр Лагерра присутствует только в правой части уравнений и имеет рекуррентный характер. Показано, что данный алгоритм решения эффективен при моделировании волновых процессов в средах с резко-контрастными границами типа земля — вода — атмосфера.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.92.13.007

**Ключевые слова:** преобразование Лагерра, пористая среда, численное моделирование, волновое поле, разностная схема.

## Введение

Исследования процессов конвективного тепло- и массопереноса в насыщенных пористых средах традиционно занимают одно из центральных мест среди современных проблем теоретической теплофизики. Это обусловлено прежде всего актуальностью изучения внутренних механизмов переноса массы и энергии в пористой среде, включая прогнозы и оценку эффективности применения пористых материалов в различных областях техники и технологий. Пористые среды очень широко распространены и отличаются большим разнообразием как в естественных, так и в искусственных материалах. Поэтому изучение процессов фильтрации занимает важное место в биологии, гидрологии, гидродинамике, а также в машиностроении, производстве композиционных материалов [1–5] и др.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 21-51-15002).

© 2023 Имомназаров Х. Х, Михайлов А. А., Омонов А. Т., Тордье С.

Первой публикацией, в которой была сформулирована проблема изучения особенностей макроскопического переноса массы в насыщенной жидкостью пористой среде, был отчет об экспериментальных исследованиях выпускника Политехнической школы, французского инженера Дарси, изданный в Париже в середине XIX в. [6]. Годом позже Дарси опубликовал теоретическую работу с анализом экспериментальных данных и выводом известного соотношения между скоростью насыщающей жидкости и градиентом давления (или напора) в пористой среде, названного впоследствии его именем [7]. Фундаментальность подхода и подробный анализ поставленных вопросов в этих работах создали прочный базис для нового раздела гидродинамики — теории фильтрации жидкостей и газов в капиллярно-пористой среде.

При моделировании распространения сейсмических волн в пористой среде часто используется модель Френкеля — Био [8, 9]. Позднее [10] была предложена термодинамически согласованная нелинейная математический модель для описания упругодеформируемых процессов в пористой среде на основе общих первых физических принципов. Особенностью этих моделей является существование трех типов звуковых колебаний: поперечные и два типа продольных. В отличие от моделей типа Френкеля — Био в линеаризованной модели [10] среда описывается тремя упругими параметрами [11, 12]. Эти упругие параметры взаимно однозначно выражаются тремя скоростями упругих колебаний. Это обстоятельство важно для численного моделирования распространения упругих волн в пористых средах, когда известны распределения скоростей акустических волн и физических плотностей матрицы, насыщающей жидкости и пористости.

Исследованию прямых и обратных динамических задач теории пороупругости посвящено много работ (см. [13–33] и указанную там литературу). В данной работе численно решается система пороупругости из [12, 13] в бездиссипативном двумерном случае. Исходная система записывается в виде гиперболической системы первого порядка в терминах скоростей матрицы, скорости насыщающей жидкости, тензора напряжений и давления жидкости. Для численного решения задачи используется совмещенный метод аналитического преобразования и конечно-разностного метода. Предлагаемый алгоритм можно рассматривать как аналог известного спектрального метода на основе Фурье-преобразования. Однако в отличие от него применение спектрального метода Лагерра позволяет свести исходную задачу к решению системы уравнений, в которой параметр Лагерра присутствует только в правой части уравнений и имеет рекуррентный характер. Показано, что данный алгоритм решения эффективен при моделировании волновых процессов в средах с резко-контрастными границами типа земля — вода — атмосфера.

### **Постановка задачи**

Рассмотрим постановку динамической задачи распространения сейсмических волн от сингулярных источников в средах, состоящих из упругих и пористых слоев. В этом случае распространение сейсмических волн в пористой

среде, насыщенной жидкостью, при отсутствии потери энергии описывается для декартовой системы координат в полуплоскости следующей начально-краевой задачей [11, 12, 34]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} &= F_i(x_1, x_2) f(t), \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} &= F_i(x_1, x_2) f(t), \\ \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial t} + \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) + \left( \frac{\rho_l}{\rho} K - \frac{2}{3} \mu \right) \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{\rho_s}{\rho} K \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} - (K - \alpha \rho \rho_s) \operatorname{div} \mathbf{u} + \alpha \rho \rho_l \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ u_i|_{t=0} = v_i|_{t=0} = \sigma_{ik}|_{t=0} = p|_{t=0} &= 0, \\ \sigma_{22} + p|_{x_2=0} = \sigma_{12}|_{x_2=0} = \left. \frac{\rho_l}{\rho} p \right|_{x_2=0} &= 0, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  и  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  — векторы скорости упругого пористого тела с парциальной плотностью  $\rho_s$  и жидкости с парциальной плотностью  $\rho_l$  соответственно,  $p$  — поровое давление,  $\sigma_{ik}$  — тензор напряжений,  $\rho = \rho_l + \rho_s$ ,  $\rho_s = \rho_s^f(1 - d_0)$ ,  $\rho_l = \rho_l^f d_0$ ,  $\rho_s^f$  и  $\rho_l^f$  — физические плотности упругого пористого тела и жидкости соответственно,  $d_0$  — пористость,  $\delta_{ik}$  — символ Кронекера,  $K = \lambda + 2\mu/3$ ,  $\lambda > 0$ ,  $\mu > 0$ , — коэффициенты Ламе,  $\alpha = \rho \alpha_3 + K/\rho^2$ ,  $\rho^3 \alpha_3 > 0$  — модуль объемного сжатия жидкой компоненты гетерофазной среды,  $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$  — вектор массовых сил,  $f(t)$  — моделируемый временной сигнал в источнике,  $F_1$  и  $F_2$  — компоненты вектора силы, описывающей действие локализованного в пространстве источника. Значения этих компонент зависят от типа моделируемого источника:

(1) для источника типа «вертикальная сила»

$$F_1 = 0, \quad F_2 = \delta(x_1 - x_0) \delta(x_2 - z_0);$$

(2) для источника типа «центра давления»

$$F_1 = \delta(x_2 - z_0) \frac{\partial \delta(x_1 - x_0)}{\partial x_1}, \quad F_2 = \delta(x_1 - x_0) \frac{\partial \delta(x_2 - z_0)}{\partial x_2};$$

(3) для источника типа «диполь без момента»

$$F_1 = 0, \quad F_2 = \delta(x_1 - x_0) \frac{\partial \delta(x_2 - z_0)}{\partial x_2}.$$

Здесь  $x_0, z_0$  — пространственные координаты источника.

Упругие модули  $K$ ,  $\mu$ ,  $\alpha_3$  выражаются через скорость распространения поперечной волны  $c_s$  и две скорости продольных волн  $c_{p_1}$ ,  $c_{p_2}$  следующими формулами [35, 36]:

$$\begin{aligned} \mu &= \rho_s c_s^2, \\ K &= \frac{\rho}{2} \frac{\rho_s}{\rho_l} \left( c_{p_1}^2 + c_{p_2}^2 - \frac{8}{3} \frac{\rho_l}{\rho} c_s^2 - \sqrt{(c_{p_1}^2 - c_{p_2}^2)^2 - \frac{64}{9} \frac{\rho_l \rho_s}{\rho^2} c_s^4} \right), \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2\rho^2} \left( c_{p_1}^2 + c_{p_2}^2 - \frac{8}{3} \frac{\rho_s}{\rho} c_s^2 + \sqrt{(c_{p_1}^2 - c_{p_2}^2)^2 - \frac{64}{9} \frac{\rho_l \rho_s}{\rho^2} c_s^4} \right). \end{aligned}$$

### Алгоритм решения

Для решения поставленной задачи (1)–(3) применим интегральное преобразование Лагерра по времени [37, 38]

$$\vec{W}_m(x_1, x_2) = \int_0^\infty \vec{W}(x_1, x_2, t)(ht)^{-\frac{\alpha}{2}} l_m^\alpha(ht) d(ht) \quad (1)$$

с формулами обращения

$$\vec{W}(x_1, x_2, t) = (ht)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{(m+\alpha)!} \vec{W}_m(x_1, x_2) l_m^\alpha(ht), \quad (2)$$

где  $l_m^\alpha(ht)$  — функции Лагерра. В результате данного преобразования исходная задача (1)–(3) сводится к двумерной пространственной дифференциальной задаче в спектральной области:

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} u_i^m + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial \sigma_{ik}^m}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P^m}{\partial x_i} &= F_i^m(x_1, x_2) - h \sum_{n=0}^{m-1} u_i^n, \\ \frac{h}{2} v_i^m + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P^m}{\partial x_i} &= F_i^m(x_1, x_2) - h \sum_{n=0}^{m-1} v_i^n, \\ \frac{h}{2} \sigma_{ik}^m + \mu \left( \frac{\partial u_k^m}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i^m}{\partial x_k} \right) + \left( \lambda - \frac{\rho_s}{\rho} K \right) \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{u}^m & \\ - \frac{\rho_s}{\rho} K \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{v}^m &= -h \sum_{n=0}^{m-1} \sigma_{ik}^n, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} P^m - (K - \alpha \rho \rho_s) \operatorname{div} \mathbf{u}^m + \alpha \rho \rho_l \operatorname{div} \mathbf{v}^m &= -h \sum_{n=0}^{m-1} P^n, \\ \sigma_{22}^m + P^m|_{x_2=0} &= \sigma_{12}^m|_{x_2=0} = \frac{\rho_l}{\rho} P^m|_{x_2=0} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Для решения приведенной задачи воспользуемся конечно-разностной аппроксимацией производных по пространственным координатам на сдвинутых сетках с четвертым порядком точности [39]. Для этого в расчетной области введем в направлении координаты  $z = x_1$  сетки  $\omega z_1$  и  $\omega z_{1/2}$  с шагом дискретизации  $\Delta z$ , сдвинутые относительно друг друга на  $\Delta z/2$ :

$$\omega z_1 = (x, j\Delta z, t), \quad \omega z_{1/2} = \left( x, j\Delta z + \frac{\Delta z}{2}, t \right), \quad j = 0, \dots, M.$$

Аналогично введем в направлении координаты  $x = x_2$  сетки  $\omega x_1$  и  $\omega x_{1/2}$  с шагом дискретизации  $\Delta x$ , сдвинутые относительно друг друга на  $\Delta x/2$ :

$$\omega x_1 = (i\Delta x, z, t), \quad \omega x_{1/2} = \left( i\Delta x + \frac{\Delta x}{2}, z, t \right), \quad i = 0, \dots, N.$$

На данных сетках введем операторы дифференцирования  $D_x$  и  $D_z$ , аппроксимирующие производные  $\frac{\partial}{\partial x}$  и  $\frac{\partial}{\partial z}$  с четвертым порядком точности по координатам  $z = x_1$  и  $x = x_2$ :

$$\begin{aligned} u_1^m(x, z), \quad \nu_1^m(x, z) &\in \omega x_1 \times \omega z_1, \\ u_2^m(x, z), \quad \nu_2^m(x, z) &\in \omega x_{1/2} \times \omega z_{1/2}, \\ \sigma_{11}^m(x, z), \quad \sigma_{22}^m(x, z), \quad P^m(x, z) &\in \omega x_{1/2} \times \omega z_1, \\ \sigma_{12}^m(x, z) &\in \omega x_1 \times \omega z_{1/2}. \end{aligned}$$

Определим искомые компоненты вектора решения в следующих узлах сеток:

$$\begin{aligned} u_1^m(x, z), \nu_1^m(x, z) &\in \omega x_1 \times \omega z_1, \quad u_2^m(x, z), \nu_2^m(x, z) \in \omega x_{1/2} \times \omega z_{1/2}, \\ \sigma_{11}^m(x, z), \sigma_{22}^m(x, z), P^m(x, z) &\in \omega x_{1/2} \times \omega z_1, \quad \sigma_{12}^m(x, z) \in \omega x_1 \times \omega z_{1/2}. \end{aligned}$$

В результате конечно-разностной аппроксимации задачи (6) получим систему линейных алгебраических уравнений. Представим искомый вектор решения  $\mathbf{W}$  в следующем виде:

$$\mathbf{W}(m) = (\mathbf{V}_0(m), \mathbf{V}_1(m), \dots, \mathbf{V}_{M+N}(m))^T,$$

$$\mathbf{V}_{i+j} = (u_1^{i,j}, u_2^{i+1/2, j+1/2}, \nu_1^{i,j}, \nu_2^{i+1/2, j+1/2}, \sigma_{11}^{i+1/2, j}, \sigma_{22}^{i+1/2, j}, \sigma_{12}^{i, j+1/2}, P^{i+1/2, j})^T.$$

Данная система линейных алгебраических уравнений в векторной форме может быть записана так:

$$\left( A + \frac{h}{2} E \right) \mathbf{W}(m) = \mathbf{F}(m-1).$$

Матрица системы сведенной задачи имеет хорошую обусловленность, что позволяет использовать быстрые методы решения систем линейных алгебраических уравнений на основе итерационных методов типа сопряженных градиентов, сходящиеся к искомому решению с требуемой точностью всего за несколько итераций.

### Численные результаты

В данной статье представлены численные результаты моделирования сейсмических волновых полей для тестовой модели среды. Заданная модель среды состоит из двух изотропных слоев: верхний слой — вода, нижний — пористая среда. Физические характеристики слоев были заданы следующими параметрами:

- 1) верхний слой —  $\rho = 1 \text{ г}/\text{см}^3$ ,  $c_p = 1.5 \text{ км}/\text{с}$ ,  $c_s = 0$ ;
- 2) нижний слой —  $\rho_s^f = 1.5 \text{ г}/\text{см}^3$ ,  $\rho_l^f = 1 \text{ г}/\text{см}^3$ ,  $c_{p1} = 2.1 \text{ км}/\text{с}$ ,  $c_{p2} = 0.6 \text{ км}/\text{с}$ ,  $c_s = 1.3 \text{ км}/\text{с}$ ,  $d = 0.2$ .

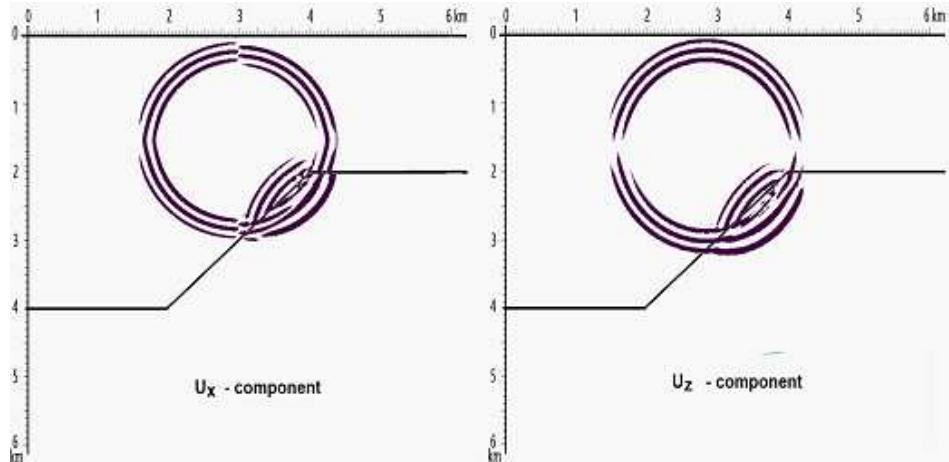


Рис. 1. Мгновенные снимки волнового поля скорости смещений в момент времени  $T = 1$  с: левый — для  $u_x(x, z)$ -компоненты, правый — для  $u_z(x, z)$ -компоненты.

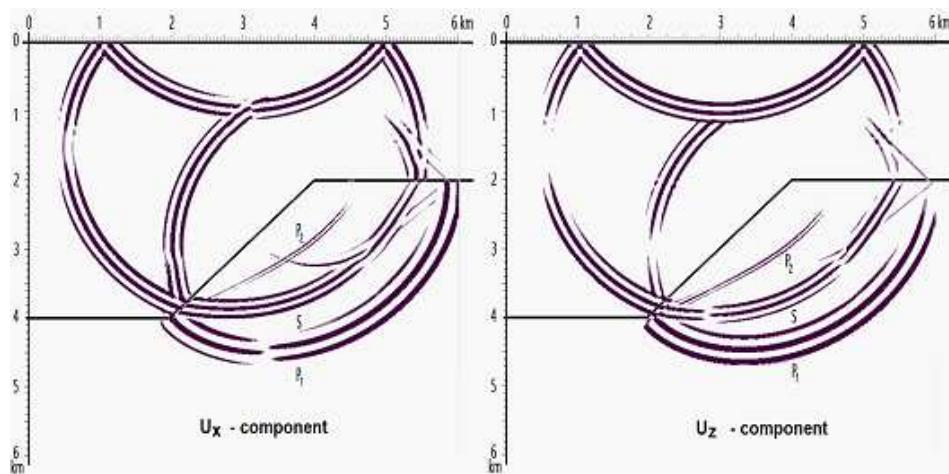


Рис. 2. Мгновенные снимки волнового поля скорости смещений в момент времени  $T = 1.8$  секунда: левый — для  $u_x(x, z)$ -компоненты, правый — для  $u_z(x, z)$ -компоненты.

Волновое поле моделировалось от точечного источника типа диполь без момента с координатами  $x_0 = 3$  км,  $z_0 = 1.5$  км, который расположен в верхнем водном слое. Временной сигнал в источнике задавался в виде импульса Пузырева с несущей в виде

$$f(t) = \exp\left(-\frac{2\pi f_o(t - t_0)^2}{\gamma^2}\right) \sin(2\pi f_o(t - t_0)),$$

где  $\gamma = 4$ ,  $f_0 = 10$  Гц,  $t_0 = 0.15$  с.

Результаты численных расчетов волнового поля для заданной модели сре-ды представлены на рис. 1, 2. На данных рисунках изображены мгновенные

снимки волнового поля для  $u_x$ - и  $u_z$ -компонент скорости смещения в фиксированные моменты времени. На рис. 1 для  $T = 1$  с, а на рис. 2 для  $T = 1.8$  с. Граница раздела слоев изображена на рисунках сплошной линией.

На рисунках видно, что при падении продольной волны, излучаемой источником заданного типа, на границу раздела слоев в заданной среде образуются соответствующие типы волн. В водном слое возникают отраженные от границ продольные волны, а в нижнем пористом слое возникают два типа продольных волн  $P_1$  и  $P_2$  и поперечная волна  $S$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Chen X., Zhang Y., Yan S. Two-dimensional simulations of resin flow in dual-scale fibrous porous medium under constant pressure // J. Reinforced Plastics Compos. 2013. V. 32, N 22. P. 1757–1766.
2. Gantois R., Cantarel A., Dusserre G., Felices J. N., Schmidt F. Mold filling simulation of resin transfer molding combining BEM and level set method // Appl. Mech. Mater. 2011. V. 62. P. 57–65.
3. Loudad R., Saouab A., Beauchene P., Agogue R., Desjoyeaux B. Numerical modeling of vacuum-assisted resin transfer molding using multilayer approach // J. Compos. Mater. 2017. V. 51, N 24. P. 3441–3452.
4. Song Y. S. Mathematical analysis of resin flow through fibrous porous media // Appl. Compos. Mater. 2006. V. 13, N 5. P. 335–343.
5. Yang B., Tang Q., Wang S., Jin T., Bi F. Three-dimensional numerical simulation of the filling stage in resin infusion process // J. Compos. Mater. 2016. V. 50, N 29. P. 4171–4186.
6. Darcy H. Les fontaines publiques de la ville de Dijon. Paris: V. Dalmont, 1856.
7. Darcy H. Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux. Paris: Mallet-Bachelier, 1857.
8. Френкель Я. И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. география и геофизика. 1944. Т. 8, № 4. С. 133–146.
9. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range // J. Acoust. Soc. Amer. 1956. V. 28. P. 168–178.
10. Доровский В. Н. Континуальная теория фильтрации // Геология и геофизика. 1989. № 7. С. 39–45.
11. Доровский В. Н., Перепечко Ю. В., Роменский Е. И. Волновые процессы в насыщенных пористых упругодеформируемых средах // Физика горения и взрыва. 1993. № 1. С. 100–111.
12. Blokhin A. M., Dorovsky V. N. Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum. New York: Nova Sci., 1995.
13. Lake L. Enhanced oil recovery. Prentice Hall: Englewood Cliffs, 1989.
14. Vafai K. Porous media: Applications in biological systems and biotechnology. London: Taylor & Francis, 2011.
15. Aker E., Maloy K. J., Hansen A. Simulating temporal evolution of pressure in two-phase flow in porous media // Phys. Rev. 1998. E 58. P. 2217–2226.
16. Zhao B. et al. Comprehensive comparison of pore-scale models for multiphase flow in porous media // PNAS. 2019. N 116. P. 13799–13806.
17. Имомназаров Х. Х. Характеристики интерференционных волновых полей в присутствии пористого слоя // Докл. АН. 1997. Т. 352, № 1. С. 105–108.
18. Имомназаров Х. Х. Численное моделирование некоторых задач теории фильтрации для пористых сред // Сиб. журн. индустр. математики. 2001. Т. 4, № 2. С. 154–165.
19. Alekseev A. S., Imomnazarov Kh. Kh., Grachev E. V., Rakhmonov T. T., Imomnazarov B. Kh. Direct and inverse dynamic problems for a system of equations of homogeneous elastic-porous media // Appl. Math. Lett. 2004. V. 17, N 9. P. 1097–1103.

20. Imomnazarov Kh. Kh., Zhabbasbay B. M. Optimization method to solve the inverse problem of electrokinetics for vertically inhomogeneous media // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2004. V. 12, N 5. P. 481–491.
21. Imomnazarov Kh. Kh., Kholmurodov A. E. Direct and inverse dynamic problems for SH-waves in porous media // Math. Comput. Model. 2007. V. 45, N 3-4. P. 270–280.
22. Сорокин К. Э., Имомназаров Х. Х. Численное решение линейной двумерной динамической задачи для пористых сред // Журн. СФУ. Сер. математика и физика. 2010. Т. 3, № 2. С. 256–261.
23. Имомназаров Х. Х., Имомназаров Ш. Х., Рахмонов Т. Т., Янгибоев З. Ш. Регуляризация в обратных динамических задачах для уравнения SH волн в пористой среде // Владикавк. мат. журн. 2013. Т. 15, № 2. С. 45–57.
24. Imomnazarov Kh. Kh., Mikhailov A. A. Application of a spectral method to numerical modeling of the propagation of seismic waves in porous media with energy dissipation // Numer. Anal. Appl. 2014. V. 7, N 2. P. 117–123.
25. Imomnazarov Kh. Kh., Imomnazarov Sh. Kh., Korobov P. V., Kholmurodov A. E. Direct and inverse problems for nonlinear one-dimensional poroelasticity equations // Dokl. Math. 2014. V. 89, N 2. P. 250–252.
26. Priimenko V. I., Vishnevskii M. P. An identification problem related to the Biot system // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2015. V. 23, N 3. P. 219–230.
27. Imomnazarov Kh. Kh., Mikhailov A. A., Rakhmonov T. T. Simulation of the seismic wave propagation in porous media described by three elastic parameters // Сиб. электрон. мат. изв. 2019. Т. 16. P. 591–599.
28. Vishnevskii M. P., Priimenko V. I. On the solvability of some dynamic poroelastic problems // Sib. Math. J. 2019. V. 60, N 3. P. 429–449.
29. Imomnazarov Kh. Kh., Jabborov N. M. Application of A-analytic functions to the investigation of the Cauchy problem for a stationary poroelasticity system // J. Contemp. Math. Fundamental Directions. 2019. V. 65, N 1. P. 33–43.
30. Vicente B. J., Priimenko V. I., Pires A. P. Mathematical model of water alternated polymer injection // Transport in Porous Media. 2020. V. 135. P. 431–456.
31. Turdiyev U., Imomnazarov Kh. A system of equations of the two-velocity hydrodynamics without pressure // AIP Conf. Proc. 2021. V. 2365. 070002.
32. Imomnazarov Kh., Kholmuradov A. E., Dilmuradov N. Direct and inverse dynamic quasilinear problems of poroelasticity // AIP Conf. Proc. 2021. V. 2365. 070020.
33. Da Silva R. B., Priimenko V. I. An analytical solution of the saturated and incompressible poroelastic model for transient wave propagation // Eumaras. J. Math. Comput. Appl. 2021. V. 9, N 2. P. 12–31.
34. Imomnazarov Kh. Kh. A mathematical model for the movement of a conducting liquid through a conducting porous medium: I. Excitation of oscillations of the magnetic field by the surface Rayleigh waves // Math. Comput. Model. 1996. V. 24, N 1. P. 79–84.
35. Имомназаров Х. Х. Несколько замечаний о системе уравнений Био // Докл. АН. 2000. Т. 373, № 4. С. 536–537.
36. Imomnazarov Kh. Kh. Some remarks on the Biot system of equations describing wave propagation in a porous medium // Appl. Math. Lett. 2000. V. 13, N 3. P. 33–35.
37. Mikhailenko B. G., Mikhailov A. A., Reshetova G. V. Numerical modeling of transient seismic fields in viscoelastic media based on the Laguerre spectral method // Pure Appl. Geophys. 2003. N 160. P. 1207–1224.
38. Mikhailenko B. G., Mikhailov A. A., Reshetova G. V. Numerical viscoelastic modeling by the spectral Laguerre method // Geophys. Prospect. 2003. N 51. P. 37–48.
39. Levander A. R. Fourth order velocity-stress finite-difference scheme // Proc. 57th SEG Annu.

Meeting. New Orleans, 1987. P. 234–245.

*Поступила в редакцию 27 декабря 2022 г.*

*После доработки 13 февраля 2023 г.*

*Принята к публикации 28 февраля 2023 г.*

Имомназаров Холматжон Худайназарович

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,

пр. Академика Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

[imom@omzg.sscce.ru](mailto:imom@omzg.sscce.ru)

Михайлов Александр Анатольевич

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,

пр. Академика Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

[alex\\_mikh@omzg.sscce.ru](mailto:alex_mikh@omzg.sscce.ru)

Омонов Алишер Тошпулатович

Ташкентский государственный экономический университет,

Ташкент 100066, Узбекистан

[alisher.omonov1992@mail.ru](mailto:alisher.omonov1992@mail.ru)

Тордье Себастьян

Университет г. По,

По 64300, Франция

[sebastien.tordeux@univ-pau.fr](mailto:sebastien.tordeux@univ-pau.fr)

## NUMERICAL MODELING OF THE SEISMIC WAVES PROPAGATION IN A POROUS MEDIUM FROM SINGULAR SOURCES

**Kh. Kh. Imomnazarov, A. A. Mikhailov,  
A. T. Omonov, and S. Tordeux**

**Abstract:** A linear two-dimensional problem in the form of dynamic equations of porous media for the components of velocities, stresses and pressure is considered. The dynamic equations are based on conservation laws and consistent with the thermodynamics conditions. The medium is considered to be ideal (there is no energy loss in the system) isotropic and two-dimensional inhomogeneous with respect to space. For the numerical solution of the problem posed, the method of integrating the integral Laguerre transform with respect to time with finite-difference approximation in spatial coordinates is used. The solution algorithm employed makes it possible to efficiently carry out simulations in a complex porous medium and to study the wave effects arising in such media.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.92.13.007

**Keywords:** Laguerre transform, porous medium, numerical simulation, wave field, difference scheme.

### REFERENCES

- Chen X., Zhang Y., and Yan S., “Two-dimensional simulations of resin flow in dual-scale fibrous porous medium under constant pressure,” *J. Reinforced Plastics Compos.*, **32**, No. 22, 1757–1766 (2013).
- Gantois R., Cantarel A., Dusserre G., Felices J. N., and Schmidt F., “Mold filling simulation of resin transfer molding combining BEM and level set method,” *Appl. Mech. Mater.*, **62**, 57–65 (2011).
- Loudad R., Saouab A., Beauchene P., Agogue R., and Desjoyeaux B., “Numerical modeling of vacuum-assisted resin transfer molding using multilayer approach,” *J. Compos. Mater.*, **51**, No. 24, 3441–3452 (2017).
- Song Y. S., “Mathematical analysis of resin flow through fibrous porous media,” *Appl. Compos. Mater.*, **13**, No. 5, 335–343 (2006).
- Yang B., Tang Q., Wang S., Jin T., and Bi F., “Three-dimensional numerical simulation of the filling stage in resin infusion process,” *J. Compos. Mater.*, **50**, No. 29, 4171–4186 (2016).
- Darcy H., *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon*, V. Dalmont, ed., Paris (1856).
- Darcy H., *Recherches Expérimentales Relatives au Mouvement de L'eau Dans les tuyaux*, Mallet-Bachelier, Paris (1857).
- Frenkel Ya. I., “On the theory of seismic and seismoelectric phenomena in a moist soil,” *J. Phys. USSR*, No. 8, 230–241 (1944).
- Biot M. A., “Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range,” *J. Acoust. Soc. Amer.*, **28**, 168–178 (1956).
- Dorovsky V. N., “Continual theory of filtration,” *Sov. Geol. Geofiz.*, No. 7, 34–39 (1989).
- Dorovsky V. N., Perepechko Yu. V., and Romensky E. I., “Wave processes in saturated porous elastically deformed media,” *Comb. Explos. Shock Waves*, No. 1, 100–111 (1993).

12. Blokhin A. M. and Dorovsky V. N., Mathematical Modelling in the Theory of Multivelocity Continuum, Nova Sci., New York (1995).
13. Lake L., Enhanced Oil Recovery, Prentice Hall, Englewood Cliffs (1989).
14. Vafai K., Porous Media: Applications in Biological Systems and Biotechnology, Taylor&Francis, London (2011).
15. Aker E., Maloy K. J., and Hansen A., “Simulating temporal evolution of pressure in two-phase flow in porous media,” Phys. Rev., E 58, 2217–2226 (1998).
16. Zhao B. et al., “Comprehensive comparison of pore-scale models for multiphase flow in porous media,” PNAS, No. 116, 13799–13806 (2019).
17. Imomnazarov Kh. Kh., “Characteristics of interference wave fields in the presence of a porous layer [in Russian],” Dokl. RAN, **352**, No. 1, 105–108 (1997).
18. Imomnazarov Kh. Kh., “Numerical simulation of some problems of filtration theory for porous media [in Russian],” Sib. Zh. Ind. Mat., **4**, No. 2, 154–165 (2001).
19. Alekseev A. S., Imomnazarov Kh. Kh., Grachev E. V., Rakhmonov T. T., and Imomnazarov B. Kh., “Direct and inverse dynamic problems for a system of equations of homogeneous elastic-porous media,” Appl. Math. Lett., **17**, No. 9, 1097–1103 (2004).
20. Imomnazarov Kh. Kh. and Zhapbasbay B. M., “Optimization method to solve the inverse problem of electrokinetics for vertically inhomogeneous media,” J. Inverse Ill-Posed Probl., **12**, No. 5, 481–491 (2004).
21. Imomnazarov Kh. Kh. and Kholmurodov A. E., “Direct and inverse dynamic problems for SH-waves in porous media,” Math. Comput. Model., **45**, No. 3-4, 270–280 (2007).
22. Sorokin K. E. and Imomnazarov Kh. Kh., “Numerical solution of a linear two-dimensional dynamic problem for porous media [in Russian],” Zh. Sib. Fed. Univ., Ser. Mat. Fiz., **3**, No. 2, 256–261 (2010).
23. Imomnazarov Kh. Kh., Imomnazarov Sh. Kh., Rakhmonov T. T., and Yangiboev Z. Sh., “Regularization in inverse dynamic problems for the equation of SH waves in a porous medium [in Russian],” Vladikavkaz. Mat. Zh., **15**, No. 2, 46–58 (2013).
24. Imomnazarov Kh. Kh. and Mikhailov A. A., “Application of a spectral method to numerical modeling of the propagation of seismic waves in porous media with energy dissipation,” Numer. Anal. Appl., **7**, No. 2, 117–123 (2014).
25. Imomnazarov Kh. Kh., Imomnazarov Sh. Kh., Korobov P. V., and Kholmurodov A. E., “Direct and inverse problems for nonlinear one-dimensional poroelasticity equations,” Dokl. Math., **89**, No. 2, 250–252 (2014).
26. Priimenko V. I. and Vishnevskii M. P., “An identification problem related to the Biot system,” J. Inverse Ill-Posed Probl., **23**, No. 3, 219–230 (2015).
27. Imomnazarov Kh. Kh., Mikhailov A. A., and Rakhmonov T. T., “Simulation of the seismic wave propagation in porous media described by three elastic parameters,” Sib. Elektron. Mat. Izv., **16**, 591–599 (2019).
28. Vishnevskii M. P. and Priimenko V. I., “On the solvability of some dynamic poroelastic problems,” Sib. Math. J., **60**, No. 3, 429–449 (2019).
29. Imomnazarov Kh. Kh. and Jabborov N. M., “Application of A-analytic functions to the investigation of the Cauchy problem for a stationary poroelasticity system,” J. Contemp. Math., Fundamental Directions, **65**, No. 1, 33–43 (2019).
30. Vicente B. J., Priimenko V. I., and Pires A. P., “Mathematical model of water alternated polymer injection,” Transp. Porous Media, **135**, 431–456 (2020).
31. , “A system of equations of the two-velocity hydrodynamics without pressure,” AIP Conf. Proc., **2365**, 070002 (2021).
32. Imomnazarov Kh., Kholmurodov A., and Dilmuradov N., “Direct and inverse dynamic quasi-linear problems of poroelasticity,” AIP Conf. Proc., **2365**, 070020 (2021).
33. Da Silva R. B. and Priimenko V. I., “An analytical solution of the saturated and incompressible poroelastic model for transient wave propagation,” Euaras. J. Math. Comput. Appl., **9**, No. 2, 12–31 (2021).
34. Imomnazarov Kh. Kh., “A mathematical model for the movement of a conducting liquid through a conducting porous medium: I. Excitation of oscillations of the magnetic field by the surface Rayleigh wave,” Math. Comput. Model., **24**, No. 1, 79–84 (1996).

35. *Imomnazarov Kh. Kh.*, “Some remarks on the system of Biot equations [in Russian],” Dokl. Akad. Nauk, **373**, No. 4, 536–537 (2000).
36. *Imomnazarov Kh. Kh.*, “Some remarks on the Biot system of equations describing wave propagation in a porous medium,” Appl. Math. Lett., **13**, No. 3, 33–35 (2000).
37. *Mikhailenko B. G., Mikhailov A. A., and Reshetova G. V.*, “Numerical modeling of transient seismic fields in viscoelastic media based on the Laguerre spectral method,” Pure Appl. Geophys., No. 160, 1207–1224 (2003).
38. *Mikhailenko B. G., Mikhailov A. A., and Reshetova G. V.*, “Numerical viscoelastic modeling by the spectral Laguerre method,” Geophys. Prospect., No. 51, 37–48 (2003).
39. *Levander A. R.*, “Fourth order velocity-stress finite-difference scheme,” Proc. 57th SEG Annu. Meeting, pp. 234–245, New Orleans (1987).

*Submitted December 27, 2022*

*Revised February 13, 2023*

*Accepted February 28, 2023*

Kholmatzhon Kh. Imomnazarov, Aleksandr A. Mikhailov  
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Physics,  
6 Lavrentiev Avenue, Novosibirsk 630090, Russia  
[imom@omzg.sccc.ru](mailto:imom@omzg.sccc.ru), [alex\\_mikh@omzg.sccc.ru](mailto:alex_mikh@omzg.sccc.ru)

Alisher T. Omonov  
Tashkent State University of Economics,  
49 Islom Karimov Street, Tashkent 100066, Uzbekistan  
[omonovat@tsue.uz](mailto:omonovat@tsue.uz)

Sebastien Tordeux  
Université de Pau et des Pays de l’Adour,  
BP 1155, 64013 Pau Cedex, France  
[sebastien.tordeux@univ-pau.fr](mailto:sebastien.tordeux@univ-pau.fr)

ПРИМЕНЕНИЕ СВЕРТОЧНЫХ НЕЙРОННЫХ  
СЕТЕЙ ДЛЯ ПОИСКА И ОПРЕДЕЛЕНИЯ  
ФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК  
НЕОДНОРОДНОСТЕЙ В ГЕОЛОГИЧЕСКОЙ  
СРЕДЕ ПО СЕЙСМИЧЕСКИМ ДАННЫМ

М. В. Муратов, Д. С. Конов,  
Д. И. Петров, И. Б. Петров

**Аннотация.** В работе с применением сверточных нейронных сетей решаются обратные задачи сейморазведки определения пространственного положения и физических характеристик, таких как доля слипшейся поверхности и характер насыщения, геологических трещин. Обучающая и валидационная выборки формируются с использованием численного моделирования с применением сеточно-характеристического метода на неструктурированных сетках в двумерном случае. Используются определяющие уравнения механики сплошных сред, трещины задаются в области интегрирования дискретно — такой подход позволяет получить наиболее детальные картины волновых откликов.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.87.50.008

**Ключевые слова:** обратные задачи сейморазведки, трещиноватые среды, сверточные нейронные сети, машинное обучение, математическое моделирование, сеточно-характеристический метод, дискретные модели трещин, бесконечно тонкая трещина.

Сейморазведка — один из наиболее распространенных на практике подходов для определения структуры грунта без глубокого бурения. Искусственно возбужденные сейсмические колебания отражаются от областей неоднородностей, образуя волновой отклик, который фиксируется на сейсмограммах. Правильная интерпретация полученных данных, т. е. определение структуры геологического разреза по характеру волнового отклика, является основной задачей сейморазведки.

Важный вклад в развитие методологии решения обратных задач сейморазведки был сделан Клаербо [1]. Развитие высокопроизводительных вычислительных систем позволило их использовать для решения практических задач интерпретации сейсмических данных [2, 3]. Особый интерес представляет эффективное решение обратных задач. Наиболее распространенным подходом в

---

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 20-01-00572.

© 2023 Муратов М. В., Конов Д. С., Петров Д. И., Петров И. Б.

описании вмещающих сред является использование акустической модели, существенным недостатком которого является игнорирование значительного объема информации, который несут с собой поперечные волны. Данного недостатка лишена методология с применением численного моделирования геологических сред с применением упругих двухкомпонентных моделей [4].

Данное исследование является продолжением работ [5, 6]. Для решения обратных задач сейсморазведки используется подход с применением методов машинного обучения. В работе использовались глубокие нейронные сети. В последнее десятилетие они хорошо зарекомендовали себя в таких прикладных областях, как машинный перевод, компьютерное распознавание и генерация речи, анализ текстов, машинное зрение. Во всех перечисленных задачах приходится обрабатывать значительные объемы данных и выявлять связи внутри них. Это также является отличительной особенностью задач сейсморазведки, поэтому сверточные нейронные сети стали использовать и в этой области. Например, при помощи глубокой сверточной нейронной сети решалась двумерная задача поиска разлома [7]. Решению аналогичной задачи в трех измерениях посвящена работа [8]. Примечательно, что при таком подходе практически отсутствует этап специальной обработки входных сейсмических данных, что упрощает его применение по сравнению со стандартными методами. Гибкость и относительная простота делает такие методы эффективными для решения практических задач. Так, в работе [9] глубокие нейросети используются для обнаружения выбросов CO<sub>2</sub>, а в [10] данные методы применяются для обнаружения и классификации дефектов в композитных материалах.

Данная работа посвящена разработке методики интерпретации сейсмических данных с целью выявления областей неоднородностей, в том числе трещин, с использованием сверточных нейронных сетей. Трещиноватые коллекторы потенциально могут содержать запасы углеводородов, поэтому их поиск является важной задачей.

Обратная задача сейсморазведки трещиноватого пласта решалась с использованием сверточных нейронных сетей. Обучение нейронной сети проводилось на выборках, сформированных с применением математического моделирования для прямых задач сейсморазведки.

## 1. Математическая модель среды и численный метод

Рассматриваемая в ходе решения прямой задачи геологическая среда представлена моделью линейно-упругой среды, определяющая система уравнений которой в  $\Omega \subset R^2$  может быть представлена в следующем виде [11, 12]:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \sum_j \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial T_{ij}}{\partial t} = \lambda \left( \sum_k \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) I_{ij} + \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (1)$$

где  $v_i$  — компоненты скорости  $v = v(x, y)$ ,  $T_{ji}$  — компоненты тензора напряжений  $T = T(x, y)$ ,  $\rho$  — плотность среды,  $\lambda$  и  $\mu$  — коэффициенты Ламе,  $I_{ij}$  —

компоненты единичного тензора. Согласно [13] данная система является гиперболической.

В двумерном случае данная система примет вид

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y}, \\ \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} &= \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y}, \\ \frac{\partial T_{xx}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y}, \\ \frac{\partial T_{yy}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_y}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_x}{\partial y}, \\ \frac{\partial T_{xy}}{\partial t} &= \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right).\end{aligned}$$

Вводя вектор  $u = \{v_x, v_y, T_{xx}, T_{yy}, T_{xy}\}$ , систему (1) приводим к виду

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \sum_{i=1,2} A_i \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi_i} = 0. \quad (2)$$

Матрицы  $A_i$  представляются в следующем виде:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/\rho \\ -\lambda - 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda - 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1/\rho \\ 0 & 0 & 0 & -1/\rho & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Численное решение (2) находится с применением сеточно-характеристического метода [13, 14]. Проводим покоординатное расщепление и заменой переменных сводим систему к системе независимых скалярных уравнений переноса в инвариантах Римана:

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \Omega_i \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi'_i} = 0. \quad (3)$$

Для каждого уравнения переноса (3) производится обход всех узлов расчетной сетки, и для каждого узла опускаются характеристики. С временного слоя  $n$  соответствующая компонента вектора переносится на временной слой  $n+1$  по формуле

$$w_k^{n+1}(\xi'_i) = w_k^n(\xi'_i - \omega_k \tau) \quad (4)$$

где  $\tau$  — шаг по времени.

После того, как все значения перенесены, идет обратный переход к вектору искомых значений  $\vec{u}$ .

Рассмотрена интерполяция на неструктурированных треугольных сетках. Значения в каждой точке находятся с использованием значений в опорных точках сетки  $\vec{w}(\vec{r}_{ijkl})$  и весов этих точек  $p_{ijkl}(\vec{r})$  по формуле

$$\vec{w}(\vec{r}) = \sum_{i,j,k,l} p_{ijkl}(\vec{r}) \vec{w}(\vec{r}_{ijkl}). \quad (5)$$

Сеточно-характеристический метод позволяет применять наиболее корректные алгоритмы на границах и контактных границах области интегрирования [15, 16].

Границное условие можно записать в общем виде так:

$$\mathbf{D}\vec{u}(\xi_1, \xi_2, t + \tau) = \vec{d}, \quad (6)$$

где  $\mathbf{D}$  — некоторая матрица размера  $9 \times 3$  для трехмерного случая ( $5 \times 2$  — для двумерного),  $\vec{d}$  — вектор,  $\vec{u}(\xi_1, \xi_2, t + \tau)$  — значение искомых значений скорости и компонент тензора напряжений в граничной точке на следующем временном шаге.

В рассматриваемых в данной работе задачах граничные условия задают отражение от верха области интегрирования и поглощение на других ее границах.

## 2. Механико-математические модели трещин

Во встречающихся на практике задачах сейморазведки приходится иметь дело с разнородностью характера взаимодействия сейсмических волн с областью трещины. Трещина представляет собой сложную неоднородную структуру [17, 18]. Местами створки трещины находятся на некотором отдалении и разделены насыщающим веществом [18], местами наблюдается слипание, когда под действием сил давления стенки вплотную прилегают друг к другу [19]. Кроме того, трещины можно классифицировать по характеру их насыщения: флюид или газ [18, 19].

В рассматриваемых задачах использовались дискретные модели трещин, основанные на концепции бесконечно-тонкой трещины — трещина задавалась в виде границы или контактной границы с определенным граничным условием. Рассмотрим подробно условия, использованные в данной работе.

(а) УСЛОВИЕ ГАЗОНАСЫЩЕНИЯ ТРЕЩИНЫ. Модель газонасыщенной трещины хорошо моделирует поведение трещин, заполненных воздухом или газом на небольшой глубине до 100–150 м [19]. При больших глубинах под действием давления трещины с воздухом закрываются, а газ приобретает свойства жидкости.

Трещина задается в виде граничного условия свободного отражения на створках трещины:

$$\mathbf{T}\vec{n} = 0. \quad (7)$$

(б) УСЛОВИЕ ФЛЮИДОНАСЫЩЕНИЯ ТРЕЩИНЫ. В большинстве решаемых на практике задач трещины заполнены флюидом: водой, нефтью, сжиженным

газом и т. д. [18, 19] Поэтому целесообразно было разработать модель, позволяющую описывать такую ситуацию.

Флюидонасыщенная трещина задается в виде контактной границы с условием свободного скольжения [18]:

$$\vec{v}_a \cdot \vec{n} = \vec{v}_b \cdot \vec{n}, \quad \vec{f}_n^a = -\vec{f}_n^b, \quad \vec{f}_\tau^a = \vec{f}_\tau^b.$$

Такая контактная граница полностью пропускает продольные волны без отражения и отражает поперечные. Такая картина соответствует реальной ситуации: значения скоростей распространения продольных волн в жидкостях и плотностей сопоставимы со значениями скоростей и плотностей геологических сред, в то время как скорости поперечных колебаний в жидкостях близки к нулю.

(в) УСЛОВИЕ СЛИПАНИЯ НА ТРЕЩИНЕ. На большой глубине под действием давления бывает, что створки трещин соприкасаются так, что упругие волны почти полностью проходят сквозь трещину. В таком случае оптимально будет использовать контактное условие полного слипания [19]:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_b, \quad \vec{f}^a = -\vec{f}^b, \quad (8)$$

где  $\vec{v}$  — скорости соприкасающихся граничных точек,  $\vec{f}$  — действующая на границу сила,  $a$  — первая,  $b$  — вторая створки трещины.

(г) УСЛОВИЕ ЧАСТИЧНОГО СЛИПАНИЯ ТРЕЩИНЫ (МОДЕЛЬ ЧАСТИЧНО-СЛИПШЕЙСЯ ТРЕЩИНЫ). В реальной сейсморазведке имеют место быть частично слипшиеся трещины [19], в которых часть поверхности створок является слипшейся, а часть разделена флюидом или газом. Такие трещины показывают частичное пропускание фронта упругих волн, что сказывается на амплитудах волн отклика на сейсмограммах.

Была разработана модель трещины, где в разных точках створок случайным образом задавались условия газонасыщения (флюидонасыщения) и полного слипания. Количество тех или иных точек регулировалось весовым коэффициентом — коэффициентом слипания. Такая модель позволила задать газонасыщенные и флюидонасыщенные трещины с процентом слипшихся точек от 0 до 100%.

На основе данной механико-математической модели был разработан программный комплекс, с помощью которого проводилось решение прямых задач сейсморазведки для формирования обучающих и валидационных выборок для обучения нейронных сетей. Рассмотренный подход был верифицирован с помощью данных, полученных в ходе физического моделирования [20, 21].

### 3. Формулировка прямой задачи

Обучающая выборка формировалась решениями прямой задачи. Рассматривалась прямоугольная область интегрирования размеров области геологической среды, рассматриваемой в конкретной задаче. Начальное состояние задавалось в виде плоской волны, распространяющейся с дневной поверхности

(верхняя граница области интегрирования) вертикально вниз. На верхней границе области интегрирования задавалось условие отражения, на боковых и на нижней границах были заданы поглощающие условия. Геометрия трещин задавалась случайным образом согласно постановке рассматриваемой задачи.

#### 4. Решение обратной задачи сейсморазведки

Для реализации сверточных нейронных сетей в работе использовалась библиотека PyTorch [22–24]. Наиболее популярными в среде исследователей являются библиотеки PyTorch и TensorFlow. PyTorch обеспечивает лучшую производительность без необходимости ручной оптимизации, предполагает более простую отладку, быстрее работает с объемными данными — поэтому был сделан выбор в пользу этой библиотеки. Использование аппаратного ускорения с помощью CUDA позволяет ускорить расчеты.

В качестве входных данных использовались две сейсмограммы (вертикальной и горизонтальной компонент отклика), которые формируют образец размером  $2 \times 1500 \times 101$ . Финальный вектор особенностей, используемый в обучающих и валидационных выборках, представлял собой тензор  $9 \times 1500 \times 101$ , который включает данные двух сейсмограмм, модуля скорости на сейсмограммах и данные их Фурье-преобразований (действительная и мнимая части).

Для решения задачи предложена сверточная нейронная сеть, состоящая из пяти сверточных слоев и двух полно связанных. В начале идет сверточный слой размера  $(9, 512, 3)$  ( $9$  — число входных каналов,  $512$  — число выходных каналов,  $3 \times 3$ -kernel size), затем MaxPooling (размер окна  $2 \times 2$ ), функция активации ReLU и нормализация. Второй сверточный слой имеет размер  $(512, 1024, 3, 2)$  ( $512$  — число входных каналов,  $1024$  — число выходных каналов,  $3 \times 3$ -kernel size, stride = 2). После него идет MaxPooling-слой (размер окна  $2 \times 2$ ), также используется функция активации ReLU и выполняется нормализация. Третий слой имеет размер  $(1024, 512, 2)$  ( $1024$  число входных каналов,  $512$  число выходных каналов,  $2 \times 2$ -kernel size). Далее идет полно связанный слой с размером входных и выходных данных  $45$  и  $256$  соответственно. После него следует сверточный слой с  $512$  входными каналами и одним выходным каналом, с размером ядра  $1$  и с функцией активации ReLU. После этого следует финальный полно связанный слой, который преобразует вектор из  $256$  компонент в  $4$  (6 или 8 в зависимости от задачи) искомых характеристик трещины. В качестве оптимизатора нейронной сети был выбран алгоритм Adam с коэффициентом скорости обучения, равным  $0.003$ .

Для каждой задачи обучающая выборка была представлена набором из  $6000$  решений прямых задач. После обучения нейронной сети проводилась ее проверка с использованием валидационной выборки, полученной таким же образом. Проверка проводилась измерением функции потерь (loss-функция), в качестве которой использовалась величина Mean Squared Error (MSE, средняя квадратичная ошибка). В ходе обучения отслеживалась также метрика Mean Absolute Error (MAE, средняя ошибка по модулю). Данные метрики можно

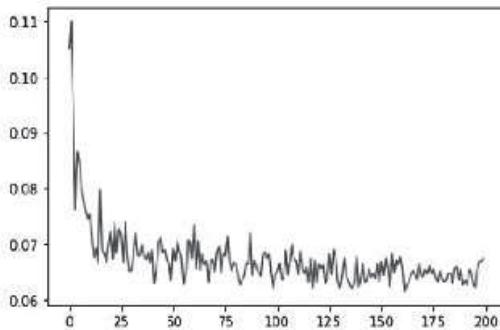


Рис. 1. Зависимость значения метрики MSE от эпохи обучения.

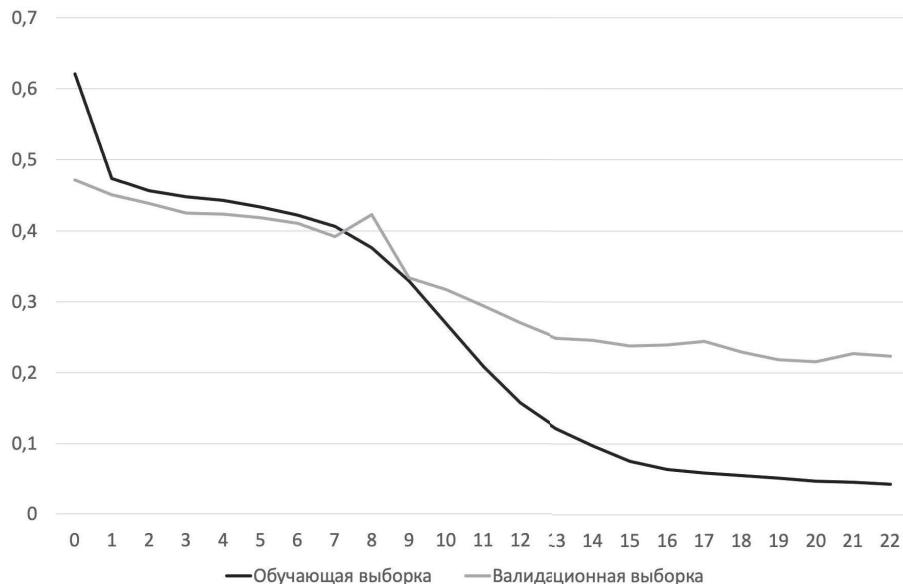


Рис. 2. Графики MSE для обучающей и валидационной выборок в задаче определения пространственного положения двух трещин.

использовать как для одномерной величины, так и для многомерных векторов:

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |y_i - \hat{y}|, \quad MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y})^2.$$

Цель — получить сходимость к нулю последовательности значений этих метрик при возрастании эпохи обучения.

## 5. Результаты распознавания пространственного положения одиночной трещины

Сначала была рассмотрена модель геологической среды, содержащей одиночную трещину. Рассматривалась однородная упругая среда с размером рас-

четной области  $2 \text{ км} \times 2 \text{ км}$ , где скорость продольных волн  $4500 \text{ м/с}$ , скорость поперечных  $2500 \text{ м/с}$ , плотность вмещающей среды  $2500 \text{ кг/м}^3$ . Трещина полагалась субвертикальной с углом наклона —  $15^\circ$ . Положение варьировалось по обеим координатам в пределах 1 км. Размер трещины изменялся от 50 до 200 м. Сейсмические приемники общим числом 65 единиц располагались равномерно на поверхности, где производилось возбуждение зондирующего импульса. Приемники фиксировали вертикальную и горизонтальную компоненты скорости волн, отразившихся в среде.

Результат изменения функции потерь по метрике MSE для валидационной выборки в задаче обнаружения одиночной трещины представлен на рис. 1. Наблюдается уменьшение значения функционала при увеличении номера эпохи. Таким образом, можно с уверенностью говорить о применимости данного подхода для исследуемых задач.

## 6. Результаты распознавания пространственного положения двух трещин

Вторая модель представляла собой область интегрирования размером  $6000 \times 1440 \text{ м}$  и включала две случайным образом расположенные трещины в области размером  $4000 \times 800 \text{ м}$ . Размер каждой из трещин составлял от 60 до 120 м. Трещины задаются случайно таким образом, что расстояние между ними вдоль обоих осей не меньше 200 м.

На рис. 2 приведены графики MSE для обучающей и валидационной выборок. Наблюдается уменьшение значения функционала при увеличении номера эпохи. На рис. 3 приведены качественные картины сравнения реального пространственного положения (обозначены на рисунках «квадратиком») двух трещин в контрольных образцах (а, б, в) и положения, полученного в результате решения обратной задачи (обозначены «кружком»).

## 7. Результаты распознавания пространственного положения одиночной трещины и характера ее насыщения

В третьей модели рассматривалась среда с одиночной трещиной, у которой варьировались, как и в первой модели, ее пространственное положение, высота и угол наклона. Также в модели задавался разный характер насыщения: газонасыщенная и флюидонасыщенная трещина, и коэффициент слипания — доля слипшейся поверхности створок трещины (частично-слипшаяся трещина).

Наблюдается хорошее сходжение функционала MSE для обучающей и валидационной выборок (рис. 4). Результаты решения обратных задач для пяти контрольных образцов приведены в табл. 1. В скобках для каждого значения указано его реальная величина с целью сопоставления.

## 8. Заключение

Результаты проведенного исследования свидетельствуют о хорошей при-

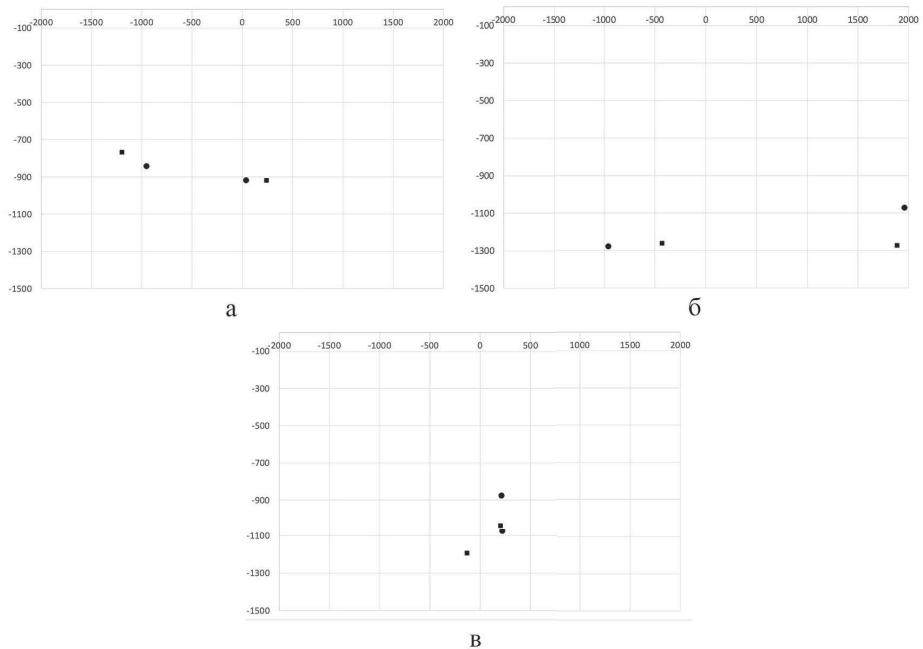


Рис. 3. Сравнение реального пространственного положения («квадратик») двух трещин в трех контрольных образцах (а, б, в) и положения, полученного в результате решения обратной задачи («кружок»).

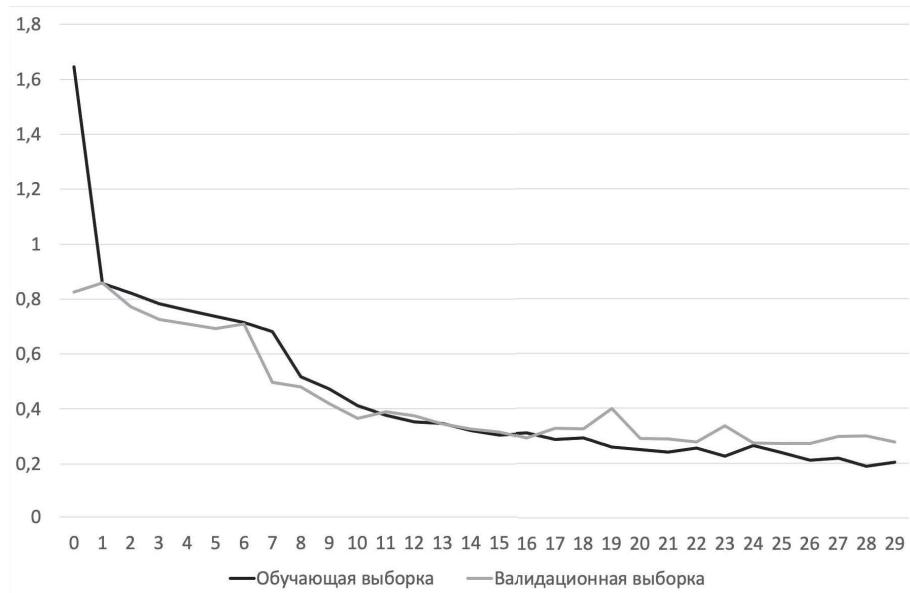


Рис. 4. Графики MSE для обучающей и валидационной выборок в задаче определения физических характеристик трещины.

**Таблица 1.** Экземпляры тестовой выборки и результаты предсказания (в скобках). Характер насыщения (Нас.):  
г — газонасыщенная, ф — флюидонасыщенная

№	x	z	Угол	h	Слипание	Нас.
1	-254 (-674)	1107 (1073)	94.8 (98.4)	54.0 (78.05)	48.6 (50.0)	ф (ф)
2	-1464(-1800)	1210 (1290)	85.9 (84.7)	161.74 (160.6)	54.44 (78.0)	г (г)
3	-421 (-1258)	1348 (1323)	78.9 (76.6)	119.85 (80.51)	35.1 (32.0)	ф (ф)
4	1761 (1881)	1055 (1219)	88.9 (86.9)	130.72 (153.03)	37.82 (56.0)	ф (ф)
5	-899 (-777)	1270 (1330)	79.9 (89.4)	134.63 (126.8)	69.07 (90.0)	г (г)

менимости методов машинного обучения в обратных задачах сейморазведки трещин для поиска их пространственного положения и определения физических характеристик, таких как доля слипшейся поверхности и характер насыщения. Было рассмотрено использование сверточных нейронных сетей, которые обучались на решениях прямых задач с использованием математического моделирования с применением сеточно-характеристического метода на неструктурированных расчетных сетках. Разработанный подход к решению обратных задач сейморазведки с применением машинного обучения дает большую гибкость в постановках рассматриваемых задач, ограниченную только мощностью используемых вычислительных ресурсов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Claerbout J. F. Coarse grid calculations of waves in inhomogeneous media with application to delineation of complicated seismic structure // Geophys. 1970. V. 36, N 3. P. 407–418.
2. Etgen J., Gray S., Zhang Y. An overview of depth imaging in exploration geophysics // Geophys. 2009. V. 74. WCA5–WCA17.
3. Jiao K., Huang W., Vigh D., Kapoor J., Coates R., Starr E. W., Cheng X. Elastic migration for improving salt and subsalt imaging and inversion // SEG Technical Program Expanded Abstracts. 2012. P. 1–5.
4. Luo Y., Tromp J., Denel B., Calandra H. 3D coupled acoustic-elastic migration with topography and bathymetry based on spectral-element and adjoint methods // Geophys. 2013. V. 78, N 4. P. S193–S202.
5. Муратов М. В., Петров Д. И., Рязанов В. В., Бирюков В. А. Решение обратных задач сейморазведки трещиноватых пластов методами машинного обучения // Успехи кибернетики. 2022. Т. 3, № 1. С. 8–13. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-1.
6. Muratov M. V., Petrov D. I., Biryukov V. A. The solution of fractures detection problems by methods of machine learning // Smart Modelling for Engineering Systems. Singapore: Springer, 2021. (Smart Innov. Syst. Technol.; V. 215).
7. Zhang C., Frogner C., Araya-Polo M., Hohl D. Machine-learning based automated fault detection in seismic traces // EAGE Conf. Exhib. 2014.
8. Araya-Polo M., Dahlke T., Frogner C., Zhang C., Poggio T., Hohl D. Automated fault detection without seismic processing // The Leading Edge. 2017. V. 36, N 3. P. 208–214.
9. Wu Yue, Lin Y., Zhou Zh., Delorey A. Seismic-net: A deep densely connected neural network to detect seismic events. 2018. arXiv:1802.02241.
10. Menga M., Chua Y. J., Wouterseonb E., Ong C. P. K. Ultrasonic signal classification and

- imaging system for composite materials via deep convolutional neural networks // Neurocomput. 2017. V. 257. P. 128-135.
- 11. Кондауров В. И., Фортов В. Е. Основы термомеханики конденсированной среды. М.: МФТИ, 2002.
  - 12. Челноков Ф. Б. Численное моделирование деформационных динамических процессов в средах со сложной структурой. Дис. . . канд. физ.-мат. наук. М.: МФТИ, 2005.
  - 13. Магомедов К. М., Холодов А. С. Сеточно-характеристические численные методы. М.: Наука, 1988.
  - 14. Golubev V. I., Shevchenko A. V., Khokhlov N. I., Nikitin I. S. Numerical investigation of compact grid-characteristic schemes for acoustic problems // J. Phys. Conf. Ser. 2021. V. 1902, N 1. 012110.
  - 15. Petrov I. B., Tomasov A. G., Kholodov A. S. On the use of hybrid grid-characteristic schemes for the numerical solution of three-dimensional problems in the dynamics of a deformable solid // USSR Comput. Math. Math. Phys. 1990. V. 30, N 4. P. 191–196.
  - 16. Favorskaya A. V., Breus A. V., Galitskii B. V. Application of the grid-characteristic method to the seismic isolation model // Smart Innov. Syst. Technol. 2019. V. 133. P. 167–181.
  - 17. Козлов Е. А. Модели среды в разведочной сейсмологии. Тверь: ГЕРС, 2006.
  - 18. Левянт В. Б., Петров И. Б., Квасов И. Е. Численное моделирование волнового отклика от субвертикальных макротрещин, вероятных флюидопроводящих каналов // Технологии сейсморазведки. 2011. Т. 4. С. 41–61.
  - 19. Petrov I. B., Muratov M. V. The application of grid-characteristic method in solution of fractured formations exploration seismology direct problems (review article). Mat. Mod. 2019. V. 31, N 4. P. 33–56.
  - 20. Караев Н. А., Левянт В. Б., Петров И. Б., Караев Г. Н., Муратов М. В. Оценка методами математического и физического моделирования возможности использования обменных рассеянных волн для прямого обнаружения и характеристики систем макротрещин // Технологии сейсморазведки. 2015. Т. 1. С. 22–36.
  - 21. Муратов М. В., Стогний П. В., Петров И. Б., Анисимов А. А., Караев Н. А. Изучение динамических процессов в задачах сейсморазведки пластов мезотрещиноватости методами математического и физического моделирования // РЭНСИТ. 2021. Т. 13, № 1. С. 71–78.
  - 22. Ioffe S., Szegedy Ch. Batch normalization: Accelerating deep network training by reducing internal covariate shift // Proc. 32nd Int. Conf. Machine Learning. 2015. V. 37. P. 448–456. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1502.03167>.
  - 23. Paszke A., Gross S., Massa F. PyTorch: An imperative style, high-performance deep learning library // 33rd Conf. Neural Information Processing Systems (NeurIPS 2019). Vancouver, Canada, 2019.
  - 24. Paszke A., Gross S., Chintala S. Automatic differentiation in PyTorch // 31st Conf. Neural Information Processing Systems (NIPS 2017). Long Beach, CA, 2017.

Поступила в редакцию 17 ноября 2022 г.

После доработки 29 декабря 2022 г.

Принята к публикации 28 февраля 2023 г.

Муратов Максим Викторович, Конов Денис Сергеевич,  
Петров Дмитрий Игоревич, Петров Игорь Борисович  
Московский физико-технический институт,  
Институтский пер., 9, Московская обл., г. Долгопрудный 141700  
[max.muratov@gmail.com](mailto:max.muratov@gmail.com), [konov1999@gmail.com](mailto:konov1999@gmail.com),  
[diapetr@gmail.com](mailto:diapetr@gmail.com), [petrov@mpt.ru](mailto:petrov@mpt.ru)

APPLICATION OF CONVOLUTIONAL  
NEURAL NETWORKS FOR SEARCH  
AND DETERMINATION OF PHYSICAL  
CHARACTERISTICS OF INHOMOGENEITIES IN  
GEOLOGICAL MEDIA FROM SEISMIC DATA

M. V. Muratov, D. S. Konov,  
D. I. Petrov, and I. B. Petrov

**Abstract:** With the use of convolutional neural networks, we solve inverse problems of exploration seismology to determine the spatial position and physical characteristics of geological fractures, such as the proportion of excess surface and the nature of saturation. The training and validation sets were formed using numerical modeling by the grid-characteristic method on unstructured meshes in the two-dimensional case. The continuum mechanics equations were used, while the fractures were specified discretely in the integration domain; this approach made it possible to obtain the most detailed patterns of wave responses.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.87.50.008

**Keywords:** inverse problems of exploration seismology, fractured media, convolutional neural networks, machine learning, mathematical modeling, grid-characteristic method, discrete fractured models, infinitely thin fracture.

REFERENCES

1. Claerbout J. F., “Coarse grid calculations of waves in inhomogeneous media with application to delineation of complicated seismic structure,” *Geophys.*, **36**, No. 3, 407–418 (1970).
2. Etgen J., Gray S., and Zhang Y., “An overview of depth imaging in exploration geophysics,” *Geophys.*, **74**, WCA5–WCA17 (2009).
3. Jiao K., Huang W., Vigh D., Kapoor J., Coates R., Starr E. W., and Cheng X., “Elastic migration for improving salt and subsalt imaging and inversion,” *SEG Tech. Program Expanded Abstr.*, 1–5 (2012).
4. Luo Y., Tromp J., Denel B., and Calandra H., “3D coupled acoustic-elastic migration with topography and bathymetry based on spectral-element and adjoint methods,” *Geophys.*, **78**, No. 4, S193–S202 (2013).
5. Muratov M. V., Petrov D. I., Ryazanov V. V., and Biryukov V. A., “Machine learning application to solving inverse problems in fractures layer seismic surveys,” *Russ. J. Cybern.*, **3**, No. 1, 8–13 (2022).
6. Muratov M. V., Petrov D. I., and Biryukov V. A., “The solution of fractures detection problems by methods of machine learning,” in: *Smart Modelling for Engineering Systems*, Springer, Singapore (2021) (Smart Innov. Syst. Technol.; V. 215).
7. Zhang C., Frogner C., Araya-Polo M., and Hohl D., “Machine-learning based automated fault detection in seismic traces,” *EAGE Conf. Exhib.* (2014).

8. Araya-Polo M., Dahlke T., Frogner C., Zhang C., Poggio T., and Hohl D., “Automated fault detection without seismic processing,” *The Leading Edge*, **36**, No. 3, 208–214 (2017).
9. Wu Y., Lin Y., Zhou Zh., and Delorey A., “Seismic-net: a deep densely connected neural network to detect seismic events,” arXiv:1802.02241 (2018).
10. Menga M., Chua Y. J., Woutersenb E., and Ong C. P. K., “Ultrasonic signal classification and imaging system for composite materials via deep convolutional neural networks,” *Neurocomput.*, **257**, 128–135 (2017).
11. Kondaurov V. I. and Fortov V. I., Fundamentals of Thermomechanics of Condensed Matter [in Russian], MIPT, Moscow (2002).
12. Chelnokov F. B., “Numerical simulation of deformation dynamic processes in media with a complex structure [in Russian],” Diss. Kand. Fiz.-Mat. Nauk, MIPT, Moscow (2005).
13. Magomedov K. M. and Kholodov A. S., Grid-Characteristic Numerical Methods [in Russian], Nauka, Moscow (1988).
14. Golubev V. I., Shevchenko A. V., Khokhlov N. I., and Nikitin I. S., “Numerical investigation of compact grid-characteristic schemes for acoustic problems,” *J. Phys., Conf. Ser.*, **1902**, No. 1, 012110 (2021).
15. Petrov I. B., Tormasov A. G., and Kholodov A. S., “On the use of hybrid grid-characteristic schemes for the numerical solution of three-dimensional problems in the dynamics of a deformable solid,” *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, **30**, No. 4, 191–196 (1990).
16. Favorskaya A. V., Breus A. V., and Galitskii B. V., “Application of the grid-characteristic method to the seismic isolation model,” *Smart Innov. Syst. Technol.*, **133**, 167–181 (2019).
17. Kozlov Ye. A., Models of the Medium in Exploration Seismology [in Russian], GERS, Tver (2006).
18. Leviant V. B., Petrov I. B., and Kvasov I. Ye., “Numerical modeling of wave response from subvertical macrofractures, probable fluid-conducting channels [in Russian],” *Tekhnologii Seismorazvedki*, **4**, 41–61 (2011).
19. Petrov I. B. and Muratov M. V., “The application of grid-characteristic method in solution of fractured formations exploration seismology direct problems (review article),” *Mat. Model.*, **31**, No. 4, 33–56 (2019).
20. Karaev N. A., Leviant V. B., Petrov I. B., Karaev N. A., Karaev G. N., and Muratov M. V., “Estimation by methods of mathematical and physical modeling of the possibility of using converted scattered waves for direct detection and characterization of macrofracture systems [in Russian],” *Tekhnologii seismorazvedki*, **1**, 22–36 (2015).
21. Muratov M. V., Stognii P. V., Petrov I. B., Anisimov A. A., and Karaev N. A., “The study of dynamical processes in problems of mesofracture layers exploration seismology by methods of mathematical and physical simulation,” *RENSIT*, **13**, No. 1, 71–78 (2021).
22. Ioffe S. and Szegedy Ch., “Batch normalization: accelerating deep network training by reducing internal covariate shift,” *Proc. 32nd Int. Conf. Machine Learning*, **37**, 448–456 (2015).
23. Paszke A., Gross S., and Massa F., “PyTorch: an imperative style, high-performance deep learning library,” *Proc. 33rd Conf. Neural Information Processing Systems (NeurIPS 2019)*, Vancouver (2019).
24. Paszke A., Gross S., and Chintala S., “Automatic differentiation in PyTorch,” *Proc. 31st Conf. Neural Information Processing Systems (NIPS 2017)*, Long Beach, CA (2017).

Submitted November 11, 2022

Revised December 29, 2022

Accepted February 28, 2023

Maxim V. Muratov, Denis S. Konov,  
Dmitry I. Petrov, Igor B. Petrov  
Moscow Institute of Physics and Technology,  
9 Institutsky Lane, 141700 Dolgoprudny, Russia  
max.muratov@gmail.com, konov1999@gmail.com,  
diapetr@gmail.com, petrov@mipt.ru

**Математическая жизнь**  
**Межгородской научно-исследовательский семинар**  
**«Неклассические задачи математической физики»**

**4 февраля 2023 г.**

Семинар был посвящен памяти академика Е. И. Моисеева.

С докладами о научной деятельности Е. И. Моисеева выступили А. И. Ко-  
жанов, А. П. Солдатов.

С воспоминаниями о Е. И. Моисееве выступили Н. Попиванов, Ш. А. Али-  
мов, А. И. Кожанов, М. С. Садыбеков и др.

**18 февраля 2023 г.**

«О свойствах решений псевдогиперболических уравнений».

Докладчик: Л. Н. Бондарь (Институт математики им. С. Л. Соболева СО  
РАН, г. Новосибирск, Россия).

В докладе рассматривался класс линейных псевдогиперболических уравне-  
ний и систем. Этот класс содержит уравнение Гальперна, уравнение Власова,  
уравнение Рэлея — Бишопа, систему уравнений изгибо-крутильных колебаний  
и др. Псевдогиперболические уравнения и системы являются уравнениями и си-  
стемами, не разрешенными относительно старшей производной. В литературе  
они часто называются уравнениями и системами соболевского типа. Приведе-  
ны результаты о разрешимости для задачи Коши и смешанных краевых задач  
в четверти пространства и обсуждены возникающие особенности.

**4 марта 2023 г.**

«Обратная задача определения переменного показателя производной в урав-  
нении дробной диффузии».

Докладчик: А. Н. Артюшин (Институт математики им. С. Л. Соболева СО  
РАН, Новосибирск, Россия).

В ограниченной многомерной области рассматривается уравнение дробной  
диффузии с переменным показателем производной, зависящим от простран-  
ственной переменной. Начальные данные однородные, а на правую часть и ее  
производную по времени накладываются условия типа монотонности. Для об-  
ратной задачи с финальным переопределением установлены следующие резуль-  
таты: единственность решения, н.и.д. условия разрешимости задачи в терми-  
нах некоторого конструктивного оператора. Кроме этого указано одно простое  
достаточное условие разрешимости обратной задачи. В основе рассуждений  
лежит теорема Биркгофа — Тарского.

**18 марта 2023 г.**

«Прямые и обратные задачи тепломассопереноса в слоистых средах».

Докладчик: В. А. Белоногов (Югорский государственный университет,  
Ханты-Мансийск, Россия).

Изложены исследования регулярной разрешимости в пространствах Собо-  
лева задач сопряжения с условиями сопряжения типа неидеального контакта,  
а также вопросов корректности обратных задач по определению коэффициента  
теплообмена на границе раздела сред, входящего в условие сопряжения. Ос-  
новное внимание удалено системам уравнений тепломассопереноса, т. е. па-  
раболическим системам второго порядка, возникающим при описании процессов

диффузии, фильтрации, тепло- и массопереноса и в самых разных других областях.

Получены теоремы существования и единственности, а также оценки устойчивости решений задачи сопряжения с условиями сопряжения типа неидеального контакта для параболических и эллиптических систем уравнений в классах Соболева. Также доказана корректность обратных задач определения коэффициента теплообмена на границе раздела сред, входящего в условие сопряжения типа неидеального контакта.

«Определение точечных источников в задачах тепломассопереноса».

Докладчик: Л. В. Неустроева (Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, Россия).

Изложены исследования обратных задач об определении точечных источников в математических моделях тепломассопереноса с использованием точечных условий переопределения. Основное внимание удалено моделям, основанным на параболических уравнениях второго порядка, возникающим при описании процессов конвекции — диффузии, фильтрации, тепло- и массопереноса и в самых разных других областях.

Основные результаты работы связаны с вопросом об определении вместе с решением правой части специального вида. Получены теоремы существования, исследованы вопросы единственности решений.

## **ВНИМАНИЮ АВТОРОВ**

1. К публикации в журнале «Математические заметки СВФУ» принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики, механики и информатики. Статьи, опубликованные ранее, а также направленные в другие издания, редакцией не рассматриваются. Редакционный совет вправе воздержаться от принятия статьи к рассмотрению, если она не соответствует профилю журнала.

2. Направляя статью в редакцию журнала, автор (соавторы) на безвозмездной основе передает(ют) издателю на срок действия авторского права по действующему законодательству РФ исключительное право на использование статьи или отдельной ее части (в случае принятия статьи к опубликованию) на территории всех государств, где авторские права в силу международных договоров Российской Федерации являются охраняемыми, в том числе следующие права: на воспроизведение, на распространение, на публичный показ, на доведение до всеобщего сведения, на перевод на иностранные языки (и исключительное право на использование переведенного произведения вышеуказанными способами), на предоставление всех вышеперечисленных прав другим лицам. Одновременно со статьей автор (соавторы) направляет в редакцию подписанный лицензионный договор на право использования научного произведения в журнале. Образец договора высыпается авторам по электронной почте вместе с сообщением о принятии статьи к печати.

3. Для рассмотрения статьи на предмет ее публикации в журнале в редакцию представляются текст статьи объемом не более 1,5 авторских листов (18 страниц журнального текста), написанной на русском или, по согласованию с редакцией, на английском языке, а также сопроводительное письмо, в котором сообщается, что статья направляется именно в журнал «Математические заметки СВФУ», и информация об авторе (коллективе авторов) с указанием фамилии, имени и отчества, полного почтового адреса для переписки, места работы, подробного служебного адреса, адреса электронной почты и номера телефона. Статьи объемом более 1,5 авторских листов, как правило, не рассматриваются и могут быть приняты к рассмотрению и опубликованы лишь по специальному решению редакционного совета.

4. Статья должна быть подготовлена с использованием текстового редактора LaTeX и представлена в виде файлов форматов pdf и tex.

5. В начале статьи указывается индекс УДК и/или MSC. Статья сопровождается аннотацией объемом не менее 100 слов, желательно без формул, и списком ключевых слов. Аннотация и список должны быть представлены на русском и английском языках.

6. Список литературы печатается в конце текста. Ссылки на литературу в тексте нумеруются в порядке их появления и даются в квадратных скобках. Ссылки на неопубликованные работы нежелательны. Оформление литературы должно соответствовать требованиям стандартов (примеры библиографических описаний см. в последних номерах журнала).

7. Издание осуществляет рецензирование всех поступающих в редакцию материалов, соответствующих ее тематике, с целью их экспертной оценки. Все рецензенты являются признанными специалистами по тематике рецензируемых материалов и имеют в течение последних 3 лет публикации по тематике рецензируемой статьи. Рецензии хранятся в редакции издания в течение 5 лет.

8. Принятая к рассмотрению статья направляется на анонимное рецензирование. На основании рецензии редсовет принимает решение о возможности публикации статьи, которое сообщается автору. Автор вправе сообщить свои замечания и возражения к рецензии. Повторное решение редсовета по статье является окончательным.

9. Редакция издания направляет авторам представленных материалов копии рецензий или мотивированный отказ, а также обязуется направлять копии рецензий в Министерство науки и высшего образования Российской Федерации при поступлении в редакцию издания соответствующего запроса.

10. После редакционной подготовки непосредственно перед публикацией автору высыпается корректура. По возможности в наиболее короткие сроки необходимо ее прочесть, внести исправления (правка против авторского оригинала нежелательна) и направить в редакцию. Статья выходит в свет только после получения от автора (коллектива авторов) авторской корректуры, подписанной автором (всеми соавторами) в печать.

11. В соответствии с международными законами об авторском праве Редакция уведомляет авторов журнала об их ответственности за получение ими в случае необходимости письменного разрешения на использование охраняемых авторским правом материалов, таких, как цитаты, воспроизведение данных, иллюстраций и любых иных материалов, которые могут быть использованы в их публикациях, а также о том, что вытекающая отсюда ответственность за нарушение таких авторских прав лежит на авторах. Плата за опубликование с авторами или учреждений, где работают авторы, не взимается, и опубликованные статьи не оплачиваются.

12. Права авторов на использование материалов статей и переводов статей из журнала «Математические заметки СВФУ» в иных публикациях определяются общими международными и российскими законами об авторских правах.