

О СТРОЕНИИ ПЯТИМЕРНЫХ КОМПЛЕКСОВ
ДВУМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОЕКТИВНОМ
ПРОСТРАНСТВЕ P^5 С ЕДИНСТВЕННЫМ ТОРСОМ

И. В. Бубякин

Аннотация. Статья посвящена проективно-дифференциальной геометрии подмногообразий многообразий $G(2, 5)$ двумерных плоскостей проективного пространства P^5 , содержащих единственный торс. Для исследования таких подмногообразий используется грассманово отображение многообразия $G(2, 5)$ двумерных плоскостей проективного пространства P^5 на девятимерное алгебраическое многообразие $\Omega(2, 5)$ пространства P^{19} . Это отображение в сочетании с методом внешних форм Э. Картана и методом подвижного репера позволило определить строение изучаемых многообразий.

DOI 10.25587/SVFU.2017.2.9242

Ключевые слова: грассманово многообразие, комплексы многомерных плоскостей, грассманово отображение, многообразие Сегре.

Настоящая работа относится к многомерной проективно-дифференциальной геометрии, той ее части, в которой изучаются семейства плоскостей различных размерностей в проективном пространстве. Многие ее вопросы представляют интерес не только для многомерной дифференциальной геометрии, но и для интегральной геометрии Радона — Хелгассона — нового направления в современной математике, которому посвящена книга [1] И. М. Гельфанда, С. Г. Гиндикина и М. И. Граева, а также для общей теории дифференциальных уравнений с частными производными, например, представленной в работе [2] И. М. Гельфанда и М. И. Граева, где рассматриваются гипергеометрические функции, связанные с грассмановым многообразием двумерных плоскостей пятимерного пространства. В интегральной геометрии при решении основной задачи рассматриваются комплексы многомерных плоскостей, размерность которых совпадает с размерностью пространства.

Одной из наиболее красивых областей дифференциальной геометрии, где во всей полноте проявляются преимущества инвариантных бескоординатных методов исследования, является теория комплексов многомерных плоскостей проективного пространства. Интерес к теории комплексов многомерных плоскостей обусловлен также задачами интегральной геометрии. Для успешного решения задачи интегральной геометрии необходимо, очевидно, соединить методы

интегральной геометрии с многообразными и красивыми конструкциями, которые получаются в рамках проективной теории комплексов многомерных плоскостей. В этой связи дифференциально-геометрические исследования комплексов плоскостей, которые играют важную роль в интегральной геометрии, остаются в то же время в стороне. Поэтому актуальны исследования проективно-дифференциальной геометрии комплексов многомерных плоскостей. Некоторые пятимерные комплексы двумерных плоскостей в проективном пространстве P^5 и являются объектом изучения в данной работе. Комплексы двумерных плоскостей в пятимерном пространстве являются обобщением комплексов прямых трехмерного пространства в том смысле, что двумерные плоскости в пятимерном пространстве самодвойственны так же, как и прямые в трехмерном пространстве. Семейство двумерных плоскостей p в пятимерном проективном пространстве P^5 также будет самодвойственным, так как при коррелятивном преобразовании ему соответствует семейство того же типа.

В проективном пространстве P^5 двумерная плоскость p определяется тремя линейно независимыми точками. Из матрицы координат этих точек можно составить $\binom{3}{6} = 20$ определителей третьего порядка, которые называются *грассмановыми координатами плоскости p* . Они связаны системой алгебраических уравнений и определяют биективное отображение грассманова многообразия $G(2, 5)$ двумерных плоскостей пространства P^5 на девятимерное алгебраическое многообразие $\Omega(2, 5)$ проективного пространства P^{19} . Это отображение называется *грассмановым отображением* [3, 4].

Исследуем более детально строение алгебраического многообразия $\Omega(2, 5)$. Рассмотрим в пространстве P^5 две двумерные плоскости, пересекающиеся по прямой. Они порождают линейный пучок плоскостей, т.е. семейство двумерных плоскостей, проходящих через прямую и лежащих в некоторой трехмерной плоскости. Этому линейному пучку на многообразии $\Omega(2, 5)$ соответствует прямолинейная образующая. При этом прямая и проходящая через нее трехмерная плоскость вполне определяют линейный пучок, а следовательно, и прямую на многообразии $\Omega(2, 5)$.

Рассмотрим все двумерные плоскости, лежащие в некоторой фиксированной трехмерной плоскости. Они образуют линейное трехпараметрическое семейство, которому на многообразии $\Omega(2, 5)$ соответствует трехмерная плоская образующая, называемой *α -образующей*. Поскольку в пространстве P^5 содержится восьмипараметрическое семейство трехмерных плоскостей, многообразие $\Omega(2, 5)$ несет семейство α -образующих, зависящее от восьми параметров.

Пусть в пространстве P^5 фиксирована некоторая прямая. Рассмотрим все двумерные плоскости, проходящие через нее. Такие двумерные плоскости порождают трехпараметрическую связку, которой на многообразии $\Omega(2, 5)$ также соответствует трехмерная плоская образующая, называемая *β -образующей*. Поскольку пространство P^5 содержит восьмипараметрическое семейство прямых, многообразие $\Omega(2, 5)$ несет семейство β -образующих, зависящее от восьми параметров. Таким образом, многообразие $\Omega(2, 5)$ несет два семейства трехмерных

плоских образующих.

Если трехмерная плоскость пространства P^5 содержит фиксированную прямую, то соответствующие α - и β -образующие многообразия $\Omega(2, 5)$ пересекаются по прямой. Если трехмерная плоскость в пространстве P^5 не содержит прямой, то соответствующие им плоские образующие многообразия $\Omega(2, 5)$ общих точек не имеют.

Рассмотрим в пространстве P^5 фиксированную двумерную плоскость p . Через нее проходит двухпараметрическое семейство трехмерных плоскостей. Поэтому через соответствующую плоскости p точку на многообразии $\Omega(2, 5)$ проходит двухпараметрическое семейство α -образующих. В то же время плоскость p содержит двухпараметрическое семейство прямых. Следовательно, через точку p проходит двухпараметрическое семейство β -образующих многообразия $\Omega(2, 5)$. При этом две образующие различных семейств многообразия $\Omega(2, 5)$, проходящие через точку p , имеют общую прямую, которой в пространстве P^5 соответствует линейный пучок двумерных плоскостей, а две образующие одного семейства имеют единственную общую точку p . Отсюда следует, что все трехмерные плоские образующие, проходящие через точку p , являются плоскими образующими конуса Сегре $C_p(3, 3)$ [5, 6] с вершиной в точке p , лежащего на многообразии $\Omega(2, 5)$. Этот конус представляет собой пересечение касательной плоскости $T_p\Omega(2, 5)$ в точке p к многообразию $\Omega(2, 5)$ с самим многообразием. В пространстве P^5 конусу Сегре $C_p(3, 3)$ соответствует совокупность двумерных плоскостей, пересекающих двумерную плоскость p по прямым.

Грассманово отображение представляет собой биективное отображение многообразия $G(2, 5)$ двумерных плоскостей проективного пространства P^5 на девятимерное точечное алгебраическое многообразие $\Omega(2, 5)$, принадлежащее проективному пространству P^{19} . Касательное пространство $T_p\Omega(2, 5)$ к многообразию $\Omega(2, 5)$ в его произвольной точке p содержит пятимерный конус Сегре $C_p(3, 3)$, проективизация которого является многообразием Сегре $S_p(2, 2)$. Многообразие Сегре $S_p(2, 2)$ остается при этом инвариантным при проективных преобразованиях пространства $P^8 = PT_p\Omega(2, 5)$, являющегося проективизацией с центром в точке p касательного пространства $T_p\Omega(2, 5)$ к многообразию $\Omega(2, 5)$.

В работе [4] М. А. Акивис отмечает, что многообразие Сегре $S_p(2, 2)$, непосредственно связанное с грассмановым многообразием $\Omega(2, 5)$, инвариантно при проективных преобразованиях, и его можно использовать для классификации комплексов двумерных плоскостей, а также для интерпретации их свойств в терминах проективных алгебраических многообразий. Поскольку дифференциальная геометрия комплексов многомерных плоскостей далеко еще не изучена, такой подход к их исследованию представляется актуальным. Дифференциальная геометрия грассмановых подмногообразий представляет самостоятельный интерес для дифференциальной геометрии, а также одновременно является одним из важных средств построения и изучения других многообразий в проективных пространствах.

Пятимерному комплексу двумерных плоскостей C на алгебраическом мно-

гообразии $\Omega(2, 5)$ соответствует пятимерное гладкое многообразие V . Многообразию V в каждой точке p имеет пятимерную касательную плоскость $T_p V$. Проективизация плоскости $T_p V$ с центром в точке p представляет собой четырехмерную плоскость $PT_p V$.

Рассмотрим в проективном пространстве P^5 пятипараметрическое семейство двумерных плоскостей — пятимерный комплекс C . Комплексу C при грасмановом отображении соответствует пятимерное многообразие V , принадлежащее алгебраическому многообразию $\Omega(2, 5)$. Многообразию V в каждой своей точке p имеет пятимерную касательную плоскость $T_p V$. Проективизация плоскости $T_p V$ с центром в точке p представляет собой четырехмерную плоскость $PT_p V$. Различным видам взаимного расположения плоскости $PT_p V$ и многообразия Сегре $S_p(2, 2)$ соответствуют различные классы комплексов C [4]. Многообразию Сегре $S_p(2, 2)$ представляет собой четырехмерную алгебраическую поверхность шестого порядка, несущую два двухпараметрических семейства двумерных плоских образующих. При этом две образующие, принадлежащие различным семействам, имеют общую точку, а две образующие, принадлежащие одному семейству, не пересекаются. Поскольку многообразие Сегре $S_p(2, 2)$ является алгебраической поверхностью шестого порядка, в общем случае плоскость $PT_p V$ пересекает это многообразие в шести точках. Они определяют на многообразии V шесть полей направлений, интегральным кривым которых на комплексе C соответствует шесть семейств торсов (развертывающихся поверхностей с двумерными плоскими образующими), образованных двумерными соприкасающимися плоскостями к некоторой кривой. При этом через каждую образующую комплекса проходит шесть торсов, по одному из каждого семейства. Каждый торс комплекса определяет для двумерной образующей p комплекса C характеристическую прямую, а именно прямую пересечения двух бесконечно близких образующих торса и трехмерную характеристическую плоскость — касательную к торсу.

В проективном пространстве P^5 рассмотрим семейство точечных реперов $\{A_I\}$, $I, J, K = 0, 1, \dots, 5$, и семейство реперов, образованных гиперплоскостями $\alpha^I = (-1)^I(A_0, \dots, A_{I-1}, A_{I+1}, \dots, A_5)$. Уравнения перемещения этих реперов имеют вид

$$dA_I = -\omega_I^J A_J, \quad d\alpha^I = -\omega_J^I \alpha^J,$$

где ω_I^J — линейные дифференциальные формы, удовлетворяющие структурным уравнениям проективного пространства P^5 :

$$d\omega_J^I = \omega_I^K \wedge \omega_K^J.$$

Свяжем с двумерной плоскостью p пространства P^5 семейство точечных реперов так, чтобы точки A_i , $i = 0, 1, \dots, 5$, принадлежали плоскости p . Тогда

$$dA_i = -\omega_i^j A_j - \omega_i^p A_p, \quad dA_p = -\omega_p^i A_i - \omega_i^q A_q,$$

где $i, j = 0, 1, 2$ и $p, q = 3, 4, 5$. Отсюда видно, что двумерная плоскость p в пространстве P^5 зависит от девяти параметров, линейными комбинациями дифференциалов которых являются формы ω_i^p .

Пусть ω_i^p , $i = 0, 1, 2$, $p = 3, 4, 5$, — линейные дифференциальные формы, определяющие перемещение плоскости $p = A_0 \wedge A_1 \wedge A_2$ в пространстве P^5 . Поскольку размерность рассматриваемого комплекса C равна пяти, на нем будут выполняться четыре независимых уравнения

$$\Lambda_p^{\alpha i} \omega_i^p = 0, \quad (1)$$

где $\alpha = 1, 2, 3, 4$. Эти же уравнения определяют четырехмерную плоскость $PT_p V$ в пространстве $P^8 = PT_p \Omega(2, 5)$.

Однопараметрическое семейство двумерных плоскостей p представляет собой трехмерную поверхность с двумерными плоскими образующими. Эта поверхность является торсом [7], если она тангенциально вырожденная ранга один. Торсу на многообразии $\Omega(2, 5)$ соответствует кривая, касательные к которой служат прямолинейными образующими этой поверхности. Данная кривая совпадает с асимптотической линией многообразия $\Omega(2, 5)$. Поэтому в произвольной точке этой линии выполняется равенство

$$\text{rang}(\omega_i^p) = 1. \quad (2)$$

Следовательно, уравнения торсов в пространстве можно записать в параметрическом виде

$$\omega_i^p = a_i x^p dt. \quad (3)$$

Каждый торс, проходящий через плоскость p , определяет на ней характеристическую прямую пересечения двух бесконечно близких образующих и трехмерную характеристическую плоскость, касательную к торсу.

Найдем уравнения характеристической прямой и трехмерной характеристической плоскости торса. Пусть $M = x^i A_i$ — произвольная точка плоскости p . Дифференциал этой точки в силу (3) вычисляется так:

$$dM = (dx^i + x^j \omega_j^i) A_i + (a_i x^i) (x^p A_p) dt.$$

Отсюда следует, что характеристическая прямая в плоскости p определяется уравнением $a_i x^i = 0$, а трехмерная характеристическая плоскость определяется плоскостью p и точкой $S = x^p A_p$. Из уравнений (1) в силу (3) получим

$$\Lambda_p^{\alpha i} a_i x^p = 0. \quad (4)$$

Эта система уравнений определяет трехмерную характеристическую плоскость торса, принадлежащую комплексу C , если выполняется условие

$$\text{rang}(\Lambda_p^{\alpha i} a_i) = 2. \quad (5)$$

Из соотношения (5) определяются тангенциальные координаты характеристических прямых на плоскости p комплекса C .

Если выполняется условие

$$\text{rang}(\Lambda_p^{\alpha i} x^p) = 2, \quad (6)$$

то система (4) определяет характеристическую прямую торса, также принадлежащую комплексу C . Из последнего соотношения находятся координаты точек S , которые вместе с плоскостью p определяют трехмерные характеристические плоскости торса.

Рассмотрим комплексы C , для которых плоскость PT_pV имеет с многообразием Сегре $S_p(2, 2)$ одну характеристическую точку, т. е. комплексы C , через каждую образующую которых проходит единственный торс. Выясним строение таких комплексов C . С этой целью рассмотрим конгруэнцию прямых C_1 с двукратным фокусом и псевдоконгруэнцию трехмерных плоскостей C_3 с двукратной фокусной гиперплоскостью, причем касательная гиперплоскость к гиперповерхности, описываемая двукратным фокусом конгруэнции прямых C_1 , совпадает с двукратной фокусной гиперповерхностью псевдоконгруэнции трехмерных плоскостей C_3 . Строение пятимерных комплексов C описывает следующая

Теорема. Комплексы C , через каждую образующую которых проходит единственный торс, представляют собой многообразие двумерных плоскостей, проходящих через прямые конгруэнции C_1 и лежащих в трехмерных плоскостях псевдоконгруэнции C_3 , при этом касательная гиперплоскость к гиперповерхности, описываемая двукратным фокусом конгруэнции прямых C_1 , совпадает с двукратной фокусной гиперповерхностью псевдоконгруэнции трехмерных плоскостей C_3 .

Доказательство. Комплексы C , для которых плоскость PT_pV имеет с многообразием Сегре $S_p(2, 2)$ одну характеристическую точку, определяются уравнениями

$$\omega_0^3 = 0, \quad \omega_1^3 - \omega_0^4 = 0, \quad \omega_2^3 - \omega_1^4 + \omega_0^5 = 0, \quad \omega_2^4 - \omega_1^5 = 0. \quad (7)$$

Выберем в качестве базисных форм на комплексе C следующие формы: ω_0^4 , ω_0^5 , ω_2^3 , ω_2^4 , ω_2^5 . Покажем, что в этом случае действительно будем иметь одну характеристическую точку, а следовательно, одну характеристическую прямую в плоскости p и одну трехмерную характеристическую плоскость, содержащую образующую комплекса C .

В самом деле, рассматривая совместно уравнения (7), определяющие четырехмерную плоскость PT_pV в пространстве $P^8 = PT_p\Omega(2, 5)$, и уравнения, вытекающие из условия

$$\text{rang}(\omega_i^p) = 1$$

и определяющие конус Сегре $S_p(2, 2)$, получим одну характеристическую точку:

$$\omega_0^4 = \omega_0^5 = \omega_2^3 = \omega_2^4 = 0.$$

Эти уравнения определяют в пространстве P^5 на комплексе C торс, базисной формой на котором является форма ω_2^5 .

Система (4) для рассматриваемого комплекса C имеет вид

$$\begin{aligned} a_0 x^3 &= 0, \\ a_1 x^3 - a_0 x^4 &= 0, \\ a_1 x^4 - a_0 x^5 - a_2 x^3 &= 0, \\ a_1 x^5 - a_2 x^4 &= 0. \end{aligned}$$

Условие (5), определяющее характеристические прямые тора, запишется так:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & -a_2 & 0 \\ 0 & -a_0 & a_1 & -a_2 \\ 0 & 0 & -a_0 & a_1 \end{pmatrix} = 2.$$

Видно, что этому условию удовлетворяет единственная характеристическая прямая $A_0 \wedge A_1$.

Условие (6), определяющее трехмерные характеристические плоскости, содержащие образующую комплекса C , имеет вид

$$\text{rang} \begin{pmatrix} x^3 & -x^4 & -x^5 & 0 \\ 0 & x^3 & x^4 & x^5 \\ 0 & 0 & -x^3 & -x^4 \end{pmatrix} = 2.$$

Этому условию удовлетворяет единственная трехмерная характеристическая плоскость $A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_5$, содержащая плоскость $p = A_0 \wedge A_1 \wedge A_2$.

Итак, пятимерный комплекс C , для которого через каждую образующую p проходит только один торс, определяется уравнениями (7).

Найдем строение комплексов C , для которых через каждую образующую p проходит только один торс. С этой целью, дифференцируя внешним образом уравнения (7), получим независимые квадратичные уравнения:

$$\begin{aligned} \omega_4^3 \wedge \omega_0^4 - (\omega_0^1 - \omega_5^3) \wedge \omega_0^5 - \omega_0^2 \wedge \omega_2^3 &= 0, \\ (\omega_1^1 - \omega_0^0 - \omega_3^3 - \omega_4^4) \wedge \omega_0^4 + (\omega_5^4 - \omega_0^1 - \omega_4^3) \wedge \omega_0^5 \\ &\quad + (\omega_1^2 + \omega_4^3 - \omega_0^1) \wedge \omega_2^3 - (\omega_0^2 + \omega_5^3) \wedge \omega_2^4 = 0, \\ (\omega_1^0 - \omega_3^4 - \omega_2^1 + \omega_5^4) \wedge \omega_0^4 + (\omega_1^1 - \omega_0^0 - \omega_4^4 + \omega_5^5) \wedge \omega_0^5 + (\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_4^4 + \omega_3^3) \wedge \omega_2^3 \\ &\quad + (\omega_1^2 + \omega_4^3 - \omega_0^1 - \omega_5^4) \wedge \omega_2^4 + (\omega_5^3 - \omega_0^2) \wedge \omega_2^5 = 0, \\ (\omega_3^5 + \omega_2^0) \wedge \omega_0^4 - (\omega_1^0 - \omega_4^5 - \omega_2^1) \wedge \omega_0^5 - (\omega_3^4 - \omega_4^5 + \omega_2^1) \wedge \omega_2^3 \\ &\quad - (\omega_1^1 - \omega_5^5 - \omega_2^2 + \omega_4^4) \wedge \omega_2^4 - (\omega_1^2 + \omega_5^4) \wedge \omega_2^5 = 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений вытекает, что формы $\omega_0^1, \omega_0^2, \omega_1^3, \omega_4^3, \omega_5^4$ выражаются через четыре независимые формы $\omega_0^4, \omega_0^5, \omega_2^3, \omega_2^4$. Стало быть, характеристическая прямая $A_0 \wedge A_1$ описывает конгруэнцию, а трехмерная характеристическая плоскость $A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_5$ — псевдоконгруэнцию. При этом точка A_0 описывает

гиперповерхность, а гиперплоскость $A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_4 \wedge A_5$ — четырехмерное многообразие. Не составляет труда проверить, что точка A_0 совпадает с двукратным фокусом конгруэнции прямых $A_0 \wedge A_1$, а гиперплоскость $A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_4 \wedge A_5$ совпадает с двукратной фокусной гиперплоскостью псевдоконгруэнции трехмерных плоскостей $A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_5$, при этом касательная гиперплоскость к гиперповерхности, описываемая двукратным фокусом конгруэнции прямых $A_0 \wedge A_1$, совпадает с двукратной фокусной гиперповерхностью псевдоконгруэнции трехмерных плоскостей $A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_5$. Следовательно, эти конгруэнции прямых $A_0 \wedge A_1$ и псевдоконгруэнция трехмерных плоскостей $A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_5$ являются конгруэнцией прямых C_1 и соответственно псевдоконгруэнцией трехмерных плоскостей C_3 . Итак, образующие комплекса C проходят через прямые конгруэнции C_1 и принадлежат трехмерным плоскостям псевдоконгруэнции C_3 .

Докажем обратное утверждение. Пусть имеется конгруэнция прямых C_1 с двукратным фокусом и псевдоконгруэнция трехмерных плоскостей C_3 с двукратной фокусной гиперплоскостью, причем касательная гиперплоскость к гиперповерхности, описываемая двукратным фокусом конгруэнции прямых C_1 , совпадает с двукратной фокусной гиперповерхностью псевдоконгруэнции трехмерных плоскостей C_3 . Свяжем с прямой конгруэнции C_1 и с трехмерной плоскостью псевдоконгруэнции C_3 семейство точечных реперов так, чтобы вершины A_0, A_1 лежали на образующей конгруэнции C_1 , а вершины A_0, A_1, A_2, A_5 принадлежали трехмерной плоскости псевдоконгруэнции C_3 . Тогда уравнения конгруэнции прямых C_1 можно привести к виду

$$\omega_j^2 = \lambda_{j\alpha}^2 \theta^\alpha, \quad \omega_0^3 = 0, \quad \omega_0^4 = \theta^1, \quad \omega_0^5 = \theta^2, \quad \omega_1^3 = \theta^1, \quad \omega_1^4 = \theta^2 + \theta^3, \quad \omega_1^5 = \theta^4, \quad (8)$$

где $j = 0, 1, \alpha = 1, 2, 3, 4$, а псевдоконгруэнции C_3 — к виду

$$\omega_0^3 = 0, \quad \omega_0^4 = \theta^1, \quad \omega_1^3 = \theta^1, \quad \omega_1^4 = \theta^2 + \theta^3, \quad \omega_2^3 = \theta^3, \quad \omega_2^4 = \theta^4, \quad \omega_5^r = \lambda_{5\alpha}^r \theta^\alpha, \quad (9)$$

где $r = 3, 4$. Из уравнений конгруэнции прямых (8) и уравнений псевдоконгруэнции трехмерных плоскостей (9) видно, что уравнения

$$\omega_0^3 = 0, \quad \omega_0^4 = \theta^1, \quad \omega_0^5 = \theta^2, \quad \omega_1^3 = \theta^1, \quad \omega_1^4 = \theta^2 + \theta^3, \quad \omega_1^5 = \theta^4, \quad \omega_2^3 = \theta^3, \quad \omega_2^4 = \theta^4$$

определяют пятимерный комплекс C , через каждую образующую которого проходит только один торс. Действительно, исключая из последних уравнений формы θ^α , получим

$$\omega_0^3 = 0, \quad \omega_1^3 - \omega_0^4 = 0, \quad \omega_2^3 - \omega_1^4 + \omega_0^5 = 0, \quad \omega_2^4 - \omega_1^5 = 0.$$

Поскольку форма ω_2^5 в эти уравнения не входит, ее можно включить в число базисных форм комплекса C . Она будет базисной на единственном торсе, проходящем через образующую комплекса C . Таким образом, образующие комплекса C , проходящие через прямые конгруэнции C_1 и лежащие в трехмерных плоскостях псевдоконгруэнции C_3 , образуют пятимерный комплекс C , через каждую образующую которого проходит единственный торс. Утверждение теоремы полностью доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г., Граев М. И. Избранные задачи интегральной геометрии. М.: Добросвет, 2007.
2. Гельфанд И. М., Граев М. И. Гипергеометрические функции, связанные с грассманианом $G_{3,6}$ // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 1. С. 3–38.
3. Бубякин И. В. Геометрия пятимерных комплексов двумерных плоскостей. Новосибирск: Наука, 2001.
4. Akivis M. A. On the differential geometry of a Grassmann manifold // Tensor. 1982. V. 38. P. 273–282.
5. Akivis M. A., Goldberg V. V. On the structure of submanifolds with degenerate Gauss maps // Geom. Dedicata. 2001. V. 86, N 1–3. P. 205–226.
6. Akivis M. A., Goldberg V. V. Projective differential geometry of submanifolds. Amsterdam: North-Holland, 1993.
7. Landsberg J. M. Algebraic geometry and projective differential geometry. Seoul: Seoul National Univ., 1999. (Lect. Notes Ser. Seoul; V. 45).

Статья поступила 28 февраля 2017 г.

Бубякин Игорь Витальевич
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891
bubyakiniv@mail.ru

ABOUT THE STRUCTURE OF FIVE-DIMENSIONAL
COMPLEXES OF TWO-DIMENSIONAL
PLANES IN PROJECTIVE SPACE P^5 WITH
A SINGLE DEVELOPABLE SURFACE

I. V. Bubyakin

Abstract. This article focuses on projective differential geometry of submanifolds of 2-dimensional planes manifolds $G(2, 5)$ in projective space P^5 containing single developable surface. To study such submanifolds we use the Grassmann mapping of manifold $G(2, 5)$ of 2-dimensional planes in projective space P^5 to 9-dimensional algebraic manifold $\Omega(2, 5)$ of space P^{19} . This mapping combined with the method of external Cartan's forms and moving frame method made possible to determine the structure of considered manifolds.

DOI 10.25587/SVFU.2017.2.9242

Keywords: Grassmann manifold, complexes of multidimensional planes, Grassmann mapping, Segre manifold.

REFERENCES

1. Gelfand I. M., Gindikin S. G., and Graev M. I. Selected Topics in Integral Geometry, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2007). (Transl. Math. Monogr.; V. 220).
2. Gel'fand I. M. and Graev M. I. "Hypergeometric functions associated with Grassmanian $G_{3,6}$," Mat. Sb., **180**, No. 1, 3–38 (1989).
3. Bubyakin I. V. Century Geometry of Five-Dimensional Complexes of Two-Dimensional Planes, Nauka, Novosibirsk (2001).
4. Akivis M. A. "On the differential geometry of a Grassmann manifold," Tensor, **38**, 273–282 (1982).
5. Akivis M. A. and Goldberg V. V. "On the structure of submanifolds with degenerate Gauss maps," Geom. Dedicata, **86**, No. 1–3, 205–226 (2001).
6. Akivis M. A. and Goldberg V. V. Projective Differential Geometry of Submanifolds, North-Holland, Amsterdam (1993).
7. Landsberg J. M. Algebraic Geometry and Projective Differential Geometry, Seoul National Univ., Seoul (1999). (Lect. Notes Ser. Seoul; V. 45). 268p.

Submitted February 28, 2017

Igor V. Bubyakin
M. K. Ammosov North-Eastern Federal University
Institute of mathematics and Informatics
48 Kulakovskiy Street, Yakutsk 677891, Russia
bubyakiniv@mail.ru

ЧИСЛЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННОГО
МНОЖЕСТВА И ДОСТАТОЧНЫЕ
УСЛОВИЯ k -ОБНАРУЖЕНИЯ В ИГРЕ
ПРОСТОГО ПОИСКА НА ПЛОСКОСТИ
С. В. Местников, Н. В. Петров

Аннотация. Рассматривается антагонистическая дифференциальная игра простого поиска на плоскости в случае, когда ищущий движется только по прямой. С помощью вспомогательной игры с группой ищущих игроков дается оценка вероятности обнаружения прячущегося игрока. Приводятся примеры построения информационных множеств для рассмотренных игр на разработанной компьютерной программе.

DOI 10.25587/SVFU.2017.2.9243

Ключевые слова: дифференциальная игра поиска, информационные множества, смешанные стратегии.

В настоящей работе рассматривается антагонистическая дифференциальная игра поиска [1–3] со стороны ищущего. Работа примыкает к работам [4–10], в которых исследовались свойства и проблемы аппроксимации информационных множеств для различных классов конкретных дифференциальных игр поиска и со стороны ищущего игрока, и со стороны прячущегося игрока.

Определение, построение и аппроксимация информационных множеств о состоянии игроков в настоящее время является одной из важных задач теории дифференциальных игр, исследованию которой посвящены работы многих авторов (см. ссылки в [11]).

1. Постановка задачи

Пусть уравнения движения игроков P и E , где P — ищущий игрок, а E — прячущийся игрок, описывается системой дифференциальных уравнений:

$$P: \quad \dot{x} = u, \quad \|u\| \leq \alpha, \quad x(0) = x_0, \quad \|x_0\| = r + l, \quad x, u \in R^2, \quad (1)$$

$$E: \quad \dot{y} = v, \quad \|v\| \leq \beta, \quad y(0) = y_0, \quad \|y_0\| \leq r, \quad \beta \leq \alpha, \quad y, v \in R, \quad (2)$$

где x_0 — местоположение ищущего игрока P в момент времени $t_0 = 0$, y_0 — местоположение прячущегося игрока E в момент времени $t_0 = 0$, α , β , r , l — параметры игры.

Допустимые управления $u = u(t)$, $t \geq 0$, игрока P — кусочно постоянные функции. Множество всех допустимых управлений игрока P обозначим через D_P . Под *чистой стратегией* a игрока P будем понимать пару $a = (x_0, u(\cdot))$, где точка $x_0 \in R^2$ удовлетворяет условию (1).

Допустимые управления $v = v(t)$, $t \geq 0$, игрока E — кусочно непрерывные функции. Множество всех допустимых управлений игрока E обозначим через D_E . Под *чистой стратегией* b игрока E будем понимать пару $b = (y_0, v(\cdot))$, где $y_0 \in R^2$ удовлетворяет условию (2). Игра рассматривается в программных стратегиях [1–3].

Состояние информации в игре следующее. В начальный момент времени $t = t_0$ игрок P (E) обладает лишь априорной информацией о другом игроке, т. е. ему известны $\|y_0\| \leq r$ ($\|x_0\| = r + l$) и динамика игры (1), (2). В дальнейшем ходе игры игроки не получают текущей информации о местоположении противника.

Игра происходит следующим образом: игрок E выбирает некоторую точку y_0 из круга радиуса r и допустимые управления $v(\cdot)$. Игрок P , не зная стратегию игрока E , выбирает стратегию $a = (x_0, u(\cdot))$.

Игрок E считается обнаруженным (пойманным) в момент времени t , если расстояние между $x(t)$ и $y(t)$ меньше или равно l , где l — заданное положительное число.

Предположим, что для каждого состояния $x \in R^2$ определено множество $S(x) \subset R^2$ — замкнутый круг радиуса l с центром в точке x , которое в дальнейшем будем называть *областью обнаружения* игрока P .

На состояниях $x(t)$ и $y(t)$ введем функцию $F_1(x(t), y(t))$ игрока P следующим образом:

$$F_1(x(t), y(t)) = \begin{cases} 1, & \text{если } y(t) \in S(x(t)), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что в момент времени $t \in [t_0, T]$ произошло обнаружение игрока E ищущим игроком, если $F_1(x(t), y(t)) = 1$.

Используя функцию (3), на траекториях

$$x(\cdot) = x(\cdot, t_0, x_0, u), \quad y(\cdot) = y(\cdot, t_0, y_0, v)$$

игроков определим следующие функционалы:

$$F_2(x(\cdot), y(\cdot)) = \max_{t \in [t_0, T]} F_1(x(t), y(t)),$$

$$F_2^\tau(x(\cdot), y(\cdot)) = \max_{t \in [t_0, \tau]} F_1(x(t), y(t)), \quad \tau \leq T.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что игрок P при движении вдоль траектории $x(\cdot)$ обнаруживает игрока E (движущегося вдоль траектории $y(\cdot)$), если $F_2(x(\cdot), y(\cdot)) = 1$.

Функцию выигрыша $K((x_0, u(\cdot)), (y_0, v(\cdot)))$ игрока P в ситуации $((x_0, u(\cdot)), (y_0, v(\cdot)))$ определим по правилу

$$K((x_0, u(\cdot)), (y_0, v(\cdot))) = F_2(x(\cdot, t_0, x_0, u), y(\cdot, t_0, y_0, v)).$$

Поскольку рассматриваемые игры антагонистические, функция выигрыша игрока E равна функции выигрыша игрока P с обратным знаком.

Таким образом, мы определили антагонистическую игру

$$\Gamma = \langle A, B, K \rangle$$

в нормальной форме в классе чистых стратегий, A (B) — множество всех чистых стратегий игрока P (E).

Игру поиска будем рассматривать в классе смешанных стратегий [1–3]. Под *смешанной стратегией* μ (ν) игрока P (E) будем понимать конечную смесь

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k) \quad (\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)),$$

заданную на конечном подмножестве $\{a_1, \dots, a_k\} \subset A$ ($\{b_1, \dots, b_m\} \subset B$), где

$$\mu_i = 1/k, \quad i = 1, \dots, k \quad (\nu_i = 1/m, \quad i = 1, \dots, m).$$

Тогда выигрыш $M(\mu, b)$ ($M(a, \nu)$), где μ (ν) — смешанная стратегия, заданная на множестве $\{a_1, \dots, a_k\} \subset A$ ($\{b_1, \dots, b_m\} \subset B$), определяется следующим образом:

$$M(\mu, b) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k F_2(x_i(\cdot), y(\cdot)), \quad M(a, \nu) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m F_2(x(\cdot), y_i(\cdot)), \quad (4)$$

где $x_i(\cdot)$, ($y_i(\cdot)$) — траектория движения игрока P (E), порожденная стратегией a_i (b_i).

Стоит отметить, что выигрыш $M(\mu, b)$ ($M(a, \nu)$) игрока P имеет смысл вероятности обнаружения игрока E в ситуации (μ, b) ((a, ν)) в смешанных стратегиях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что *смешанная стратегия μ игрока P гарантирует вероятность обнаружения, не меньшую чем $\mathcal{V}$* , если $M(\mu, b) \geq \mathcal{V}$ для любого $b \in B$, $0 \leq \mathcal{V} \leq 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что *смешанная стратегия ν игрока E гарантирует вероятность обнаружения, не большую чем $\mathcal{V}$* , если $M(a, \nu) \leq \mathcal{V}$ для любого $a \in A$, $0 \leq \mathcal{V} \leq 1$.

Стратегию игрока P (E) будем называть *гарантирующей*, если она гарантирует ему вероятность обнаружения, равную 1 (0).

Далее выясним, какую вероятность обнаружения может гарантировать себе игрок P в классе смешанных стратегий при отсутствии гарантирующих стратегий. В настоящей работе игра поиска рассматривается со стороны ищущего игрока P .

2. Дифференциальная игра поиска в случае, когда ищущий игрок P движется только по прямым

Предположим, что ищущий игрок P , в начальный момент времени $t_0 = 0$ находясь в точке x_0 , выбирает постоянное управление и в дальнейшем ходе

игры не имеет возможности его изменить. Таким образом, у него реализуется траектория $a = (x_0, u(\cdot))$, где $u(\cdot) = \text{const}$, которая на плоскости представляется в виде прямой.

Рассмотрим игру поиска с одним ищущим игроком P и убегающим игроком E . Представим данную игру на плоскости. Для этого проведем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы точка начального расположения x_0 игрока P лежала на оси Ox , а центр области начального расположения игрока E — круга радиуса r с центром в точке y_0 — совпадал с началом координат. Расстояние между точками x_0 и y_0 равно $r + l$ (рис. 1).

Для гарантированного обнаружения (поймки) прячущегося игрока E одним ищущим игроком P в случае, когда $\beta = 0$, достаточно выполнение неравенства $r \leq l$ (рис. 2).

В случае, когда $\beta > 0$:

$$r + \frac{\beta(r+l)}{\alpha} \leq l. \quad (5)$$

В этом случае ищущий игрок P движется к центру области начального расположения игрока E . В момент времени $t = (r+l)/\alpha$ он попадает в этот центр. При этом круг обнаружения ищущего игрока P полностью покрывает множество достижимости игрока E из начального множества неопределенности, являющееся кругом радиуса $r + \beta t$, при выполнении неравенства (5) (рис. 3).

В этом случае описанная выше стратегия ищущего игрока является гарантирующей обнаружение.

3. Вспомогательная игра поиска с нарядом ищущих игроков. Основные понятия

Предположим что неравенство (5) не выполняется, т. е. $r + \beta(r+l)/\alpha > l$. Это означает, что один ищущий игрок P , двигаясь по прямолинейной траектории, не сможет гарантированно обнаружить прячущегося игрока E .

Рассмотрим вспомогательную игру $\Gamma(k, 1)$ между прячущимся игроком E и нарядом ищущих игроков $\bar{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$, действующих согласованно как один игрок под воздействием системы (1).

В начальный момент игрок E и каждый из наряда ищущих игроков $\bar{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$ выбирают начальные местоположения $y_0 \in Y_0$, $x_0^i \in X_0$, $i = 1, \dots, k$, и допустимые управления $v(\cdot)$, $u_i(\cdot)$ $i = 1, \dots, k$. Начальное множество неопределенности Y_0 игрока E — круг радиуса r с центром в начале координат, множество X_0 — окружность радиуса $r + l$ с центром в начале координат. Тогда у ищущих игроков $\bar{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$ и у прячущегося игрока E реализуются траектории $x_i(\cdot) = x(\cdot, t_0, x_0^i, u_i)$, $i = 1, \dots, k$, и $y(\cdot) = y(\cdot, t_0, y_0, v)$ соответственно. Если начальное местоположение ищущих игроков одинаково: $x_0^i = x_0$, $i = 1, \dots, k$, то вспомогательную игру будем называть *игрой с фиксированным начальным местоположением игроков*.

На состояниях $x(t), \dots, x_k(t)$ и $y(t)$ введем функцию $F_3(x_1(t), \dots, x_k(t), y(t))$

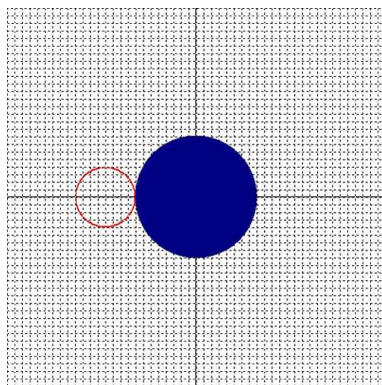
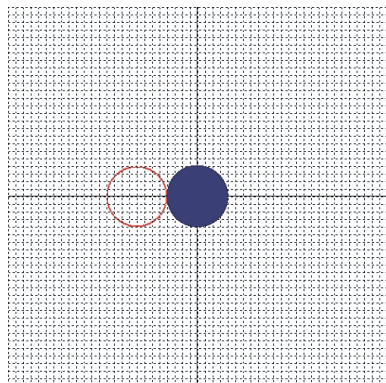
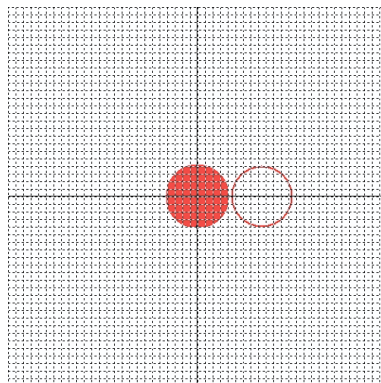
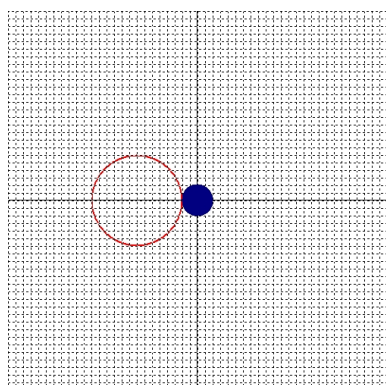


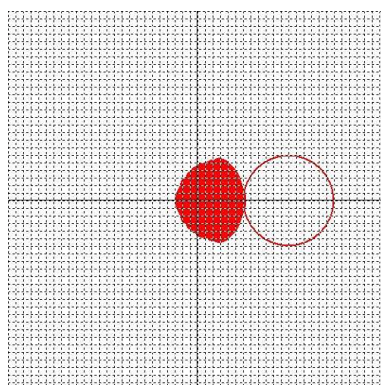
Рис. 1. Начальное местоположение игроков



а) перед началом игры

б) после поимки, где $l = r$ Рис. 2. Игра поиска с одним ищущим игроком при $\beta = 0$ 

а) перед началом игры

б) после поимки, где $r + \frac{\beta(r+l)}{\alpha} = l$ Рис. 3. Игра поиска с одним ищущим игроком при $\beta > 0$

следующим образом:

$$F_3(x_1(t), \dots, x_k(t), y(t)) = \sum_{i=1}^k F_2(x_i(t), y(t)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Будем говорить, что в момент времени $t \in [t_0, T]$ произошло k_* -обнаружение, если $k_*, k_* \leq k$, ищущих игроков обнаружили прячущегося игрока E , т. е. $F_3(x_1(t), \dots, x_k(t), y(t)) = k_*$.

На траекториях $x_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, k$, и $y(\cdot)$ игроков определим следующие функционалы:

$$F_4(x_1(\cdot), \dots, x_k(\cdot), y(\cdot)) = \sum_{i=1}^k F_2(x_i(\cdot), y(\cdot)),$$

$$F_4^\tau(x_1(\cdot), \dots, x_k(\cdot), y(\cdot)) = \sum_{i=1}^k F_2^\tau(x_i(\cdot), y(\cdot)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Будем говорить, что при движении наряда $\bar{P}$ вдоль траекторий $x_1(\cdot), \dots, x_k(\cdot)$ происходит k_* -обнаружение игрока E (движущегося вдоль траектории $y(\cdot)$), если

$$F_4(x_1(\cdot), \dots, x_k(\cdot), y(\cdot)) = k_*.$$

Последнее условие означает, что из наряда игроков $\bar{P}$, двигающихся вдоль траекторий $x_1(\cdot), \dots, x_k(\cdot)$, k_* ищущих игроков обнаруживают убегающего игрока E , движущегося по траектории $y(\cdot)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Стратегия $\bar{a} = ((x_0^1, u_1(\cdot)), \dots, (x_0^k, u_k(\cdot)))$ наряда $\bar{P}$ называется гарантирующей k_* -обнаружение ($1 \leq k_* \leq k$), если

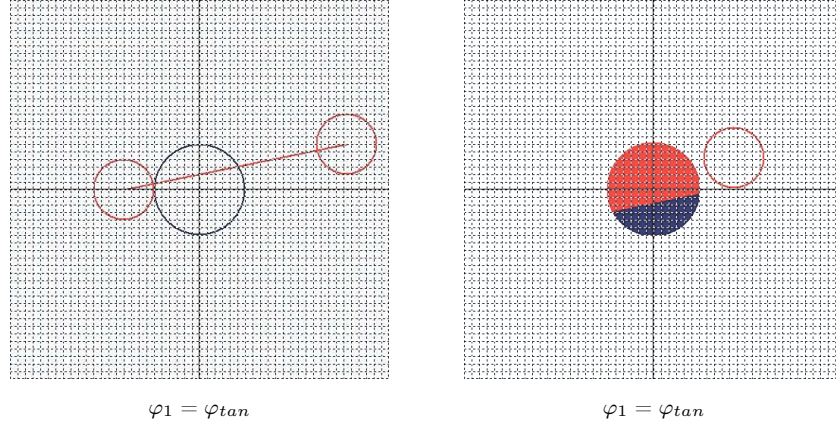
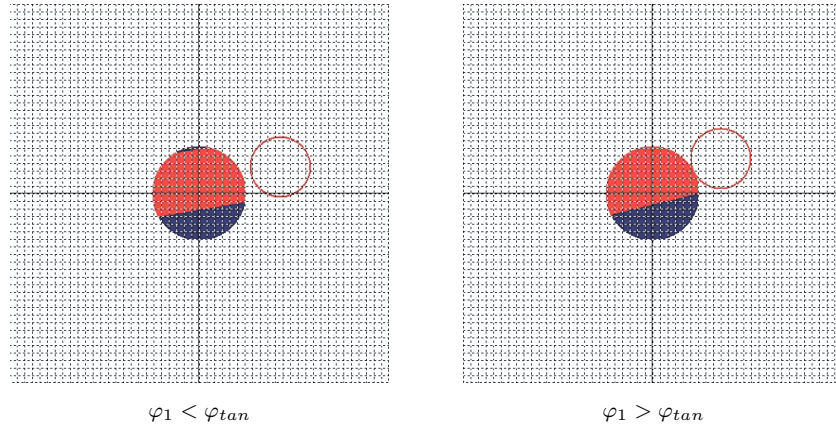
$$F_4(x_1(\cdot), \dots, x_k(\cdot), y(\cdot)) \geq k_*$$

для любой стратегии $b = (y_0, v(\cdot))$ игрока E , где

$$x_i(\cdot) = x(\cdot, t_0, x_0^i, u_i), \quad i = 1, \dots, k, \quad y(\cdot) = y(\cdot, t_0, y_0, v).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Информационным множеством $\Omega^{k,k_*}(t)$ назовем такое множество, в котором может находиться убегающий игрок E , будучи необнаруженным k_* ищущими игроками из наряда k игроков.

Если информационное множество $\Omega^{k,k_*}(t)$ является пустым для вспомогательной игры с нарядом ищущих игроков $\bar{P}$, то существует смешанная стратегия игрока P , гарантирующая вероятность обнаружения $\mathcal{V} \geq k_*/k$ [5–7]. Если $k_* = k$, то множество $\Omega^{k,k}(t)$ будем обозначать через $\Omega(t)$. Для конкретных игр, когда k и k_* фиксированы, информационное множество $\Omega^{k,k_*}(t)$ будем называть также областью неопределенности.

Рис. 4. Стратегия где $\varphi_1 = \varphi_{tan}$ Рис. 5. Покрывение области неопределенности, когда $\varphi_1 \neq \varphi_{tan}$

Для визуального отображения информационного множества $\Omega^{k,k*}(t)$ красным (red) цветом раскрасим область, которую исследовал первый ищущий игрок P_1 , зеленым (green) — второй P_2 , и синим (blue) — третий P_3 в случае, когда $k = 3$.

По аналогии с цветовой моделью RGB области, которые исследовали первый и второй ищущие игроки, будут отображаться желтым (yellow), второй и третий — голубым (cyan), первый и третий — пурпурным (magenta) цветом. Область, попавшая одновременно в три круга обнаружения, будет отображаться серым (grey) цветом.

3.1. Вспомогательная игра поиска с двумя ищущими игроками. Начальное местоположение ищущих игроков фиксировано. Предположим, что $k = 2$ и в игре поиска участвуют два ищущих игрока. Рассмотрим случай, когда в начале игры местоположение ищущих игроков фиксировано и

они оба находятся в точке x_0 . Расстояние между точкой x_0 и центром круга начального расположения игрока E — круга радиуса r — равно $r + l$.

Для начала рассмотрим следующую стратегию первого ищущего игрока P_1 . Игрок P_1 , находясь в точке x_0 , начинает движение под углом $\varphi_1 > 0$ в сторону области начального множества неопределенности убегающего игрока E — круга с радиусом r . Обозначим через t_* момент, когда область обнаружения игрока P_1 полностью входит в множество достижимости игрока E в этот момент. В момент t_* две окружности — область обнаружения $S(x(t_*))$ и множество достижимости игрока E — круг радиуса $r + \beta t_*$ касаются друг друга. Выделим такой угол φ_{tan} , при котором эта общая касательная параллельна направлению движения игрока P_1 . Угол по касательной φ_{tan} определяется по формуле

$$\sin(\varphi_{tan}) \left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) = \frac{r - l}{r + l} + \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha^2} + 1 - \frac{(l - r)^2}{(l + r)^2}}. \quad (6)$$

Заметим, что при $\varphi_1 = 0$ игрок P_1 двигается в сторону центра круга неопределенности по прямой $x_0 O$ и при этом $t_* = 2l/(\alpha + \beta)$. При таком движении общая касательная перпендикулярна направлению движения игрока P .

Несложно доказать, что стратегия игрока P_1 , где он будет двигаться по направлению общей касательной между областью обнаружения игрока P_1 и областью достижимости игрока E , доминирует все остальные стратегии, при которых угол $\varphi > \varphi_{tan}$, так как при таком движении покрывается большая часть области неопределенности, чем при любой другой прямолинейной стратегии (рис. 4, 5).

В дальнейшем будем считать, что игрок P_1 выбирает стратегию, где $\varphi_1 = \varphi_{tan}$ определяется по формуле (6).

Игра поиска с двумя ищущими игроками происходит следующим образом. Ищущие игроки P_1, P_2 начинают движение с точки x_0 по траекториям $P_1(t), P_2(t)$, где $t \geq 0$, с постоянной скоростью α , причем $\alpha > \beta$. Будем считать, что $\varphi_1 = -\varphi_2$.

Траектории ищущих игроков $P_1(t), P_2(t)$ описываются следующими уравнениями:

$$P_1(t): \quad \dot{x}_1(t) = \alpha t \cos \varphi_1(t), \quad \dot{x}_2(t) = \alpha t \sin \varphi_1(t),$$

$$P_2(t): \quad \dot{x}_1(t) = \alpha t \cos \varphi_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = \alpha t \sin \varphi_2(t).$$

Игра $\Gamma(2, 1)$ заканчивается в момент T , если ищущие игроки P_1, P_2 , следуя по выбранным траекториям $P_1(t), P_2(t)$, совершили гарантированную поимку (обнаружение) убегающего игрока E , т. е. полностью исследовали область достижимости прячущегося игрока E и при этом информационное множество $\Omega^{2,1}(T)$ стало пустым.

В противном случае считается, что прячущийся игрок E может, зная траектории $P_1(t), P_2(t)$, избежать обнаружения до момента T .

Условием для обнаружения прячущегося игрока E двумя ищущими игроками будет являться выполнение неравенства

$$\frac{l}{2} \left(\frac{1}{\sin \varphi_1} - \frac{\beta}{\alpha \tan(\varphi_1)} - 1 \right) \geq r. \quad (7)$$

В частном случае, когда $\beta = 0$,

$$\frac{l}{2} \left(\frac{1}{\sin \varphi_1} - 1 \right) \geq r. \quad (8)$$

На рис. 6, 7 зеленым цветом отображено информационное множество, состоящее из точек, которые не смог обнаружить первый ищущий игрок P_1 .

Красным цветом отображено информационное множество, состоящее из точек, которые не смог обнаружить второй ищущий игрок P_2 .

Желтым цветом отображено информационное множество, являющееся подмножеством множества достижимости игрока E , имеющее двойное покрытие, т. е. те точки, которые были обнаружены двумя ищущими игроками.

3.2. Вспомогательная игра поиска с двумя ищущими игроками. Начальное местоположение ищущих игроков произвольно. Покажем, что оценку (7) можно улучшить, если разместить ищущих игроков P_1, P_2 в различные начальные положения. Обозначим начальное местоположение ищущего игрока P_1 через x_0^1 , игрока P_2 — через x_0^2 (рис. 8).

Для начала рассмотрим игру поиска, где $\beta = 0$. В данном случае задача сводится к нахождению условия, при котором каждый ищущий игрок, двигаясь по касательной траектории с углом φ_{tan} , исследовал бы область достижимости прячущегося игрока E , представляющую собой полуокружность радиуса r . Условием для гарантированного обнаружения прячущегося игрока E будет выполнение неравенства

$$r \leq 2l, \quad (9)$$

так как две полосы шириной $2l$ полностью покрывают круг радиуса r начального местоположения прячущегося.

В случае, когда $\beta > 0$,

$$r + \beta(t_1 - t_2 + t_3) \leq 2l, \quad (10)$$

где t_1 — момент времени, в который происходит соприкосновение круга обнаружения ищущего игрока P_1 и круга достижимости прячущегося игрока E , t_2 — момент времени, в который круг обнаружения ищущего игрока P_1 находится внутри круга достижимости игрока E и имеет с кругом достижимости одну общую точку, t_3 — общее время, которое потребуется ищущему игроку P_1 для поимки E :

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{(r+l) \cos \varphi_1}{\alpha}, \quad t_2 = \sqrt{\frac{x_d^2 + y_d^2 - l^2}{\alpha}}, \\ t_3 &= \frac{\sqrt{(x_d - \alpha t_1 \cos \varphi_1)^2 + (y_d - \alpha t_1 \sin \varphi_1)^2 - l^2}}{\alpha}, \end{aligned}$$

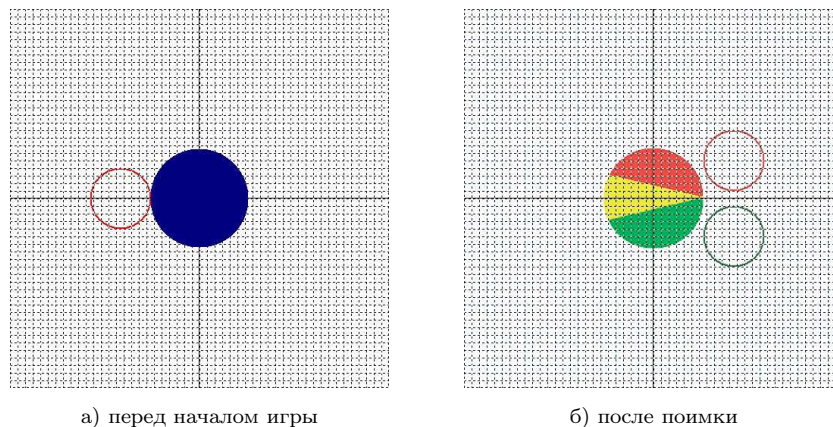
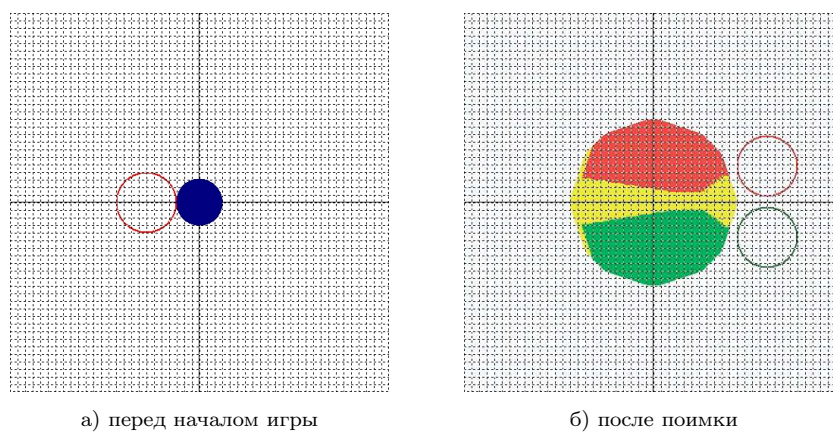
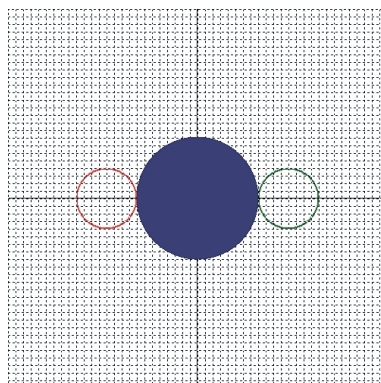
Рис. 6. Игра поиска с двумя ищущими игроками при $\beta > 0$ Рис. 7. Игра поиска с двумя ищущими игроками при $\beta = 0$ 

Рис. 8. Начальное местоположение ищущих игроков

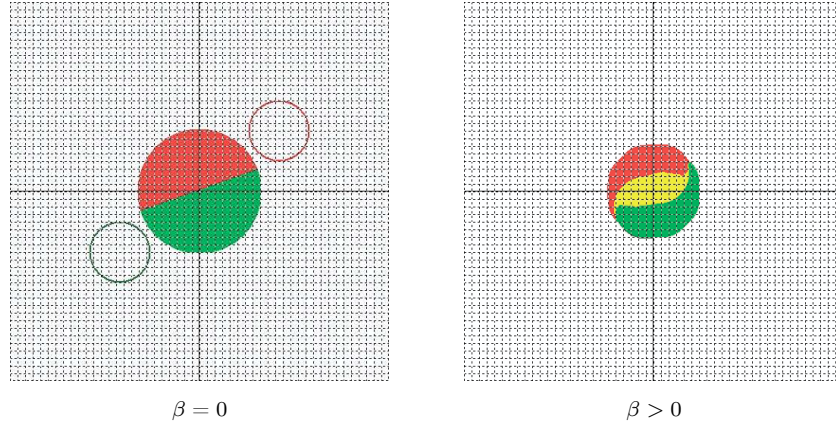
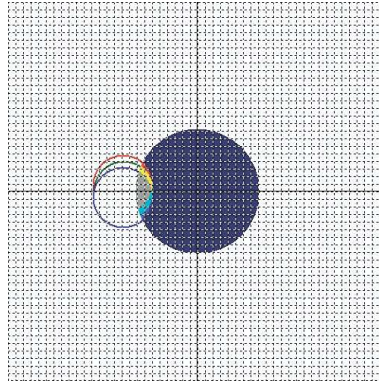


Рис. 9. Игра с двумя ищущими игроками при различных начальных расположениях

Рис. 10. Игра поиска $k = 3$, начальное местоположение ищущих игроков фиксировано

где $(x_d; y_d)$ — координаты точки касания D.

Выполнение неравенства (10) гарантирует обнаружение (поймку) прячущегося игрока E с вероятностью $V \geq 1/2$ для игры поиска подвижного объекта, а выполнение неравенства (9) — для игры поиска неподвижного объекта.

Таким образом, показано, что во вспомогательной игре с двумя ищущими и одним убегающим для гарантированного обнаружения достаточно выполнение условий (7) и (8), если начальное местоположение ищущих фиксировано. Неравенство (7) для подвижного прячущегося игрока, (8) для неподвижного. Условия (9) и (10) найдены для игры, когда начальное местоположение ищущих не фиксировано.

4. Вспомогательная игра поиска с тремя ищущими игроками

Допустим, что вышеприведенные неравенства не выполняются для рассмотренных игр с двумя ищущими и одним убегающим. Будем искать достаточ-

ные условия гарантированного обнаружения для вспомогательной игры с тремя ищущими и одним убегающим и численно строить информационные множества. Рассмотрим случай игры, когда $k = 3$ и наряд ищущих состоит из трех игроков P_1 , P_2 и P_3 .

4.1. Начальное местоположение ищущих игроков фиксировано.

Ищущие игроки P_1 , P_2 и P_3 начинают движение с точки x_0 по траекториям $P_1(t)$, $P_2(t)$ и $P_3(t)$, где $t \geq 0$, с постоянной скоростью α , причем $\alpha > \beta$ (рис. 10).

Траектории ищущих игроков $P_1(t)$, $P_2(t)$, $P_3(t)$ описываются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} P_1(t): \quad \dot{x}_1(t) &= \alpha t \cos \varphi_1(t), \quad \dot{x}_2(t) = \alpha t \sin \varphi_1(t); \\ P_2(t): \quad \dot{x}_1(t) &= \alpha t, \quad \dot{x}_2(t) = \alpha t; \\ P_3(t): \quad \dot{x}_1(t) &= \alpha t \cos \varphi_3(t), \quad \dot{x}_2(t) = \alpha t \sin \varphi_3(t). \end{aligned}$$

Будем считать, что $\varphi_1 = -\varphi_3$.

Достаточным условием для гарантированной поимки (обнаружения) в случае, когда $\beta = 0$, будет выполнение неравенства

$$\sqrt{(\alpha t_1 - (r + l) - l \sin(\varphi_1/2))^2 + \cos^2(\varphi_1/2)l^2} \geq r \quad (11),$$

где t_1 — момент времени, в который ищущие игроки P_1 и P_2 , двигаясь по траекториям $P_1(t)$, $P_2(t)$, имеют точку соприкосновения окружностей обнаружения.

В случае, когда $\beta > 0$, достаточным условием гарантированного обнаружения будет выполнение неравенства

$$(\alpha t_1 - (r + l) - l \sin(\varphi_1/2))^2 + \cos^2(\varphi_1/2)l^2 \geq (r + \beta t_1)^2. \quad (12)$$

Выполнение неравенств (11), (12) гарантирует поимку прячущегося игрока E с вероятностью $V \geq 1/3$ [5].

4.2. Начальное расположение ищущих игроков произвольно.

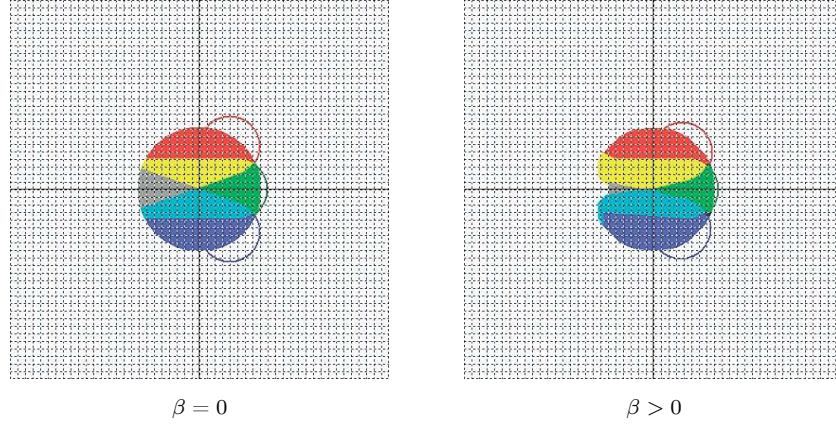
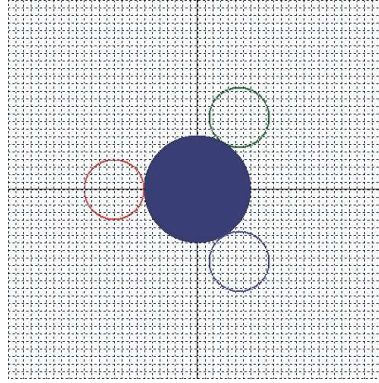
В этом случае аналитические оценки получены для игры поиска неподвижного объекта. Для игры поиска подвижного объекта информационные множества получены только численно с помощью программы.

Рассмотрим случай, когда начальное расположение ищущих игроков P_1 , P_2 , P_3 различно. Обозначим начальное расположение ищущих игроков P_1 , P_2 , P_3 через x_{01} , x_{02} и x_{03} соответственно. В этой игре, когда $\beta = 0$ (поиск неподвижного объекта), если три полосы шириной $2l$ полностью покрывают круг радиуса r начального местоположения прячущегося, т. е. при выполнении условия

$$r \leq 3l, \quad (13)$$

игрок P в основной игре, используя смешанные стратегии (4), гарантирует обнаружение (поимку) прячущегося игрока E с вероятностью $V \geq 1/3$ [5].

С помощью программы раскрасим и покажем характерные области информационного множества, когда начальными местоположениями ищущих игроков

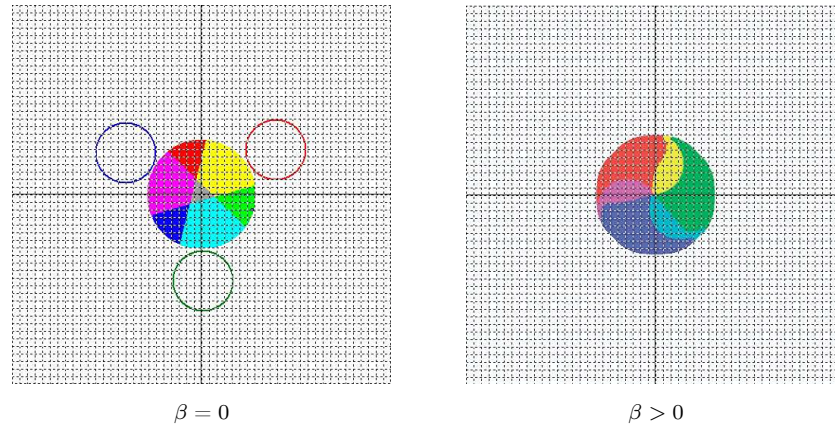
Рис. 11. Покрывание при $k = 3$ и фиксированном расположении ищущих игроковРис. 12. Игра поиска $k = 3$, начальное местоположение ищущих игроков произвольно

при прямолинейной траектории будут точки x_{0_1} с координатами $(0; -(r + l))$, x_{0_2} с координатами $(1/2(r + l); \sin 60^\circ(r + l))$ и x_{0_3} с координатами $(1/2(r + l); -\sin 60^\circ(r + l))$.

Заметим, что при выполнении условия

$$\frac{3}{4}r \leq l \quad (14)$$

ищущий игрок в основной игре, используя смешанные стратегии (4), гарантирует обнаружение (поймку) прячущегося игрока E с вероятностью $V \geq 2/3$. Действительно, в этом случае полоса шириной $2l$ покрывает $2/3$ часть окружности радиуса r , границы круга начального местоположения прячущегося. Это означает, что три полосы шириной $2l$, соответствующие траекториям ищущих, начинающиеся с точек x_0^1 , x_0^2 и x_0^3 соответственно (рис. 12), полностью покрывают начальный круг неопределенности таким образом, что любая точка этого круга попадает хотя бы в две такие полосы.

Рис. 13. Покрытие при $k = 3$ и произвольном расположении ищущих игроков

Покажем два рисунка, где программой разными цветами раскрашиваются области, которые исследовали отдельно первый ищущий игрок P_1 , второй P_2 и третий P_3 ; области, которые исследовали совместно P_1 и P_2 , P_1 и P_3 , P_2 и P_3 ; области, которые совместно исследованы всеми тремя ищущими.

На рис. 13 информационное множество $\Omega^{3,2}(T)$ — это объединение множеств, которые раскрашены красным, зеленым и синим, где T — момент времени, когда ищущие полностью исследовали множество достижимости игрока E . По построению красным (red) цветом раскрашено множество точек, которое исследовано только первым ищущим игроком P_1 , зеленым (green) — только вторым P_2 и синим (blue) — только третьим ищущим P_3 . $\Omega^{3,2}(T)$ — это множество, в котором может находиться убегающий игрок E , будучи необнаруженным двумя ищущими игроками из наряда трех игроков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А. Оптимальный поиск в условиях конфликта. Л.: ЛГУ, 1986.
2. Петросян Л. А., Гарнаев А. Ю. Игры поиска. СПб: СПбГУ, 1992.
3. Зенкевич Н. А., Местников С. В. Динамический поиск подвижного объекта в условиях конфликта // Вопросы механики и процессов управления. 1991. Т. 14. С. 68-76.
4. Местников С. В. Аппроксимация области неопределенности в дифференциальных играх поиска // Дифференц. уравнения. 1992. N 6. Т. 28. С. 967-972.
5. Mestnikov S. V. Estimates for the detection probability and uncertainty domain in a differential search game // Мат. заметки ЯГУ. 1994, Т. 1, вып. 2. С. 99-104.
6. Mestnikov S. V. Information sets and mixed strategies in a differential search game // Мат. заметки ЯГУ. 1996. Т. 3, вып. 1. С. 87-94.
7. Mestnikov S. V. Approximation of The Information Sets in Differential Search game with Detail of Pursuers // Proc. Tenth Intern. Sympos. Dynamic Games Appl. St. Petersburg. Russia. 2002. P. 630-631.
8. Местников С.В. Аппроксимация информационного множества дифференциальной игры поиска с нарядом ищущих // Мат. заметки ЯГУ. 2002. Т. 9, вып. 1. С. 58-71.
9. Mestnikov S. V., Everstova G. V. Approximation of the information set in a differential search game with a team of evaders // Contributions to Game Theory and Management.

Vol. 3. St.Petersburg. 2010. P.280–288.

10. *Mestnikov S. V., Petrov N. V., Everstova G. V.* Numerical cobstruction of the information sets in the simple search game with a team of pursuers and estimates for a detection probability // Collected abstracts of papers presented on the Eighth International Conference Game Theory and Management (GTM2014), Graduate School of Management SPbU. 2014. P.207–208.
11. *Hohzaki R.* Search games: Literature and survey // J. Operat. Res. Soc. Japan. 2016. V 59, N 1. P. 1–34.

Статья поступила 24 января 2017 г.

Местников Семен Владимирович, Петров Николай Владимирович
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова
Институт математики и информатики
ул. Кулаковского 42, Якутск 677891
mestsv@mail.ru, stalker_pnv@mail.ru

NUMERICAL CONSTRUCTION
OF THE INFORMATION SET AND SUFFICIENT
CONDITIONS FOR k -DETECTION IN THE SIMPLE
SEARCH GAME ON THE PLANE

S. V. Mestnikov and N. V. Petrov

Abstract. The antagonistic differential simple search game on the plane is considered. The searcher is moving along straight lines. Using the auxiliary game with a detail of pursuers the estimates for the detection probability are determined. The information sets are built in the example with two and three pursuers.

DOI 10.25587/SVFU.2017.2.9243

Keywords: differential search game, information set, mixed strategies.

REFERENCES

1. Petrosyan L. A. and Zenkevich N. A. Optimal Search under Conditions of Conflict. Textbook [in Russian], Leningr. Univ., Leningrad (1987).
2. Petrosyan L. A. and Garnaev A. Yu. Search Games. Textbook [in Russian], Izdat. St. Petersburg Univ., St. Petersburg (1992).
3. Zenkevich N. A. and Mestnikov S. V. "Dynamic search for a moving object in conditions of a conflict," in: Control of dynamical systems (A. T. Taldykin, ed.), Vopr. Mekh. Protsessov Upr., **14**, 68–76 (1991).
4. Mestnikov S. V. "Approximation of the domain of uncertainty in differential search games," Differ. Equations, **28**, No. 6, 967–972 (1992).
5. Mestnikov S. V. "Estimates for the detection probability and uncertainty domain in a differential search game," Mat. Zamet. YaGU, **1**, No. 2, 99–104 (1994).
6. Mestnikov S. V. "Information sets and mixed strategies in a differential search game," Mat. Zamet. YaGU, **3**, No. 1, 87–94 (1996).
7. Mestnikov S. V. "Approximation of the information sets in differential search game with detail of pursuers," in: Proc. 10th Int. Symp. Dynamic Games Appl., St. Petersburg, Russia, 630–631 (2002).
8. Mestnikov S. V. "Approximation of the information set of a differential search game with detail of searchers," Mat. Zamet. YaGU, **9**, No. 1, 58–70 (2002).
9. Mestnikov S. V. and Everstova G. V. "Approximation of the information set in a differential search game with a team of evaders," in: Contributions to Game Theory and Management. Vol. 3. The 3rd Int. Conf. Game Theory and Management (GTM 2009) Coll. Papers, Graduate School of Management, St. Petersburg Univ., St. Petersburg, 280–288 (2010).
10. Mestnikov S. V., Petrov N. V., and Everstova G. V. "Numerical construction of the information sets in a simple search game with a team of pursuers and estimates for the detection probability," in: The 8th Int. Conf. Game Theory and Management (GTM 2014) Coll. Papers, Graduate School of Management, St. Petersburg Univ., St. Petersburg, 207–208 (2014).

-
11. Hohzaki R. "Search games: Literature and survey," J. Oper. Res. Soc. Japan. **59**, No. 1, 1–34 (2016).

Submitted January 24, 2017

Semen V. Mestnikov and Nikolay V. Petrov
M. K. Ammosov North-Eastern Federal University,
Institute of Mathematics and Informatics,
42, Kulakovsky St., Yakutsk 677000, Russia
mestsv@mail.ru, stalker_pnv@mail.ru

ПРОДОЛЖЕНИЕ ЧАСТИЧНОЙ ПОЛУГРУППОВОЙ ОПЕРАЦИИ

А. О. Петриков

Аннотация. Исследуется внутреннее продолжение частичных операций на частичной полугруппе. Рассматриваются продолжения частичной полугруппы внутренним образом до полной с сохранением ассоциативности. Рассмотрены возможности продолжения частичной операции на частичной полугруппе ненулевых элементов вполне 0-простой полугруппы стандартным и нестандартным способами. Получен отрицательный ответ на вопрос о том, любое ли продолжение частичной операции на частичной полугруппе ненулевых элементов вполне 0-простой полугруппы является вполне простой полугруппой, и всякое ли продолжение стандартно. Однако в некоторых случаях ответы положительные. Получены необходимые и достаточные условия продолжаемости частичной операции на частичной полугруппе ненулевых вычетов, а также частичной операции на полугруппе ненулевых (2×2) -матриц над полем. Показана единственность продолжения частичной операции на полугруппе ненулевых (2×2) -матриц над полем.

DOI 10.25587/SVFU.2017.2.9244

Ключевые слова: частичная операция, частичная полугруппа, вполне 0-простая полугруппа, полугруппа вычетов.

1. Введение

Частичные алгебраические операции, т. е. операции, определенные, возможно, не для всех значений аргументов, всегда привлекали внимание специалистов — во-первых, по причине того, что они являются обобщением обычных операций, и, во-вторых, ввиду их распространенности. Систематическое изложение теории частичных бинарных операций можно найти в монографии [1]. Попытка свести изучение частичных бинарных операций к обычным приводит к вопросу о возможности продолжения частичной операции до полной с сохранением тех или иных свойств, например ассоциативности.

В данной работе нас будут интересовать внутренние продолжения (см. [2]), т. е. такие, которые не предполагают добавления новых элементов. В. В. Розен в [3] ввел понятие сильной ассоциативности частичной бинарной операции. Частичная бинарная операция называется *сильно ассоциативной*, если для любых элементов a, b, c произведения $(ab)c$ и $a(bc)$ либо оба не существуют, либо оба существуют и в этом случае равны друг другу. Множество с сильно ассоциативной частичной бинарной операцией назовем *частичной полугруппой*. Несложно видеть, что любая частичная полугруппа может быть получена из

некоторой полугруппы с нулем, если удалить нуль и объявить неопределенными произведения, которые ранее равнялись нулю. Необходимые и достаточные условия внутренней продолжаемости полугруппы частичных преобразований с единицей были получены Е. С. Ляпиным в 1982 г. [2].

Нас будет интересовать вопрос о внутреннем продолжении частичной полугруппы до полной с сохранением ассоциативности. Существование внутренне продолжаемой частичной полугруппы очевидно. В качестве внутренне непродолжаемой частичной полугруппы можно взять полугруппу из [4], т. е. подполугруппу полугруппы частичных непустых преобразований трехэлементного множества, состоящую из элементов $1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & a & a \end{pmatrix}$, $2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & a & c \end{pmatrix}$, $3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & b & b \end{pmatrix}$, $4 = \begin{pmatrix} b & c \\ a & a \end{pmatrix}$, $5 = \begin{pmatrix} b & c \\ a & b \end{pmatrix}$, $6 = \begin{pmatrix} b & c \\ b & b \end{pmatrix}$, $7 = \begin{pmatrix} c \\ a \end{pmatrix}$, $8 = \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}$; умножение в ней описывается в табл. 1.

Таблица 1. Непродолжаемая частичная полугруппа

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	3	—	—	—	—	—
2	1	2	3	7	8	8	7	8
3	1	1	3	1	1	3	—	—
4	4	4	6	—	—	—	—	—
5	4	4	6	7	7	8	—	—
6	4	4	6	4	4	6	—	—
7	7	7	8	—	—	—	—	—
8	7	7	8	7	7	8	—	—

Полугруппой S^1 назовем полугруппу S , если S содержит единицу, иначе $S \cup \{1\}$.

Отношения Грина $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{H}, \mathcal{J}$ на полугруппе S определяются обычным образом: $\mathcal{R} = \{(a, b) \mid aS^1 = bS^1\}$, $\mathcal{L} = \{(a, b) \mid S^1a = S^1b\}$, $\mathcal{H} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L}$, $\mathcal{J} = \{(a, b) \mid S^1aS^1 = S^1bS^1\}$. Для элемента $a \in S$ через $R(a), L(a), H(a), J(a)$ обозначаются $\mathcal{R}$ -, $\mathcal{L}$ -, $\mathcal{H}$ -, $\mathcal{J}$ -классы, содержащие a . Напомним, что множества $\mathcal{R}$ -, $\mathcal{L}$ -, $\mathcal{J}$ -классов являются частично упорядоченными множествами.

Предложение 1. Если полугруппа S с нулем имеет одноэлементный минимальный ненулевой $\mathcal{J}$ -класс, то частичная операция на $S \setminus \{0\}$ может быть продолжена до полной ассоциативной операции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть минимальный ненулевой одноэлементный $\mathcal{J}$ -класс состоит из элемента a . Множество $I = \{0, a\}$ является идеалом полугруппы S . При замене всех неопределенных произведений в $S \setminus \{0\}$ на a частичная полугруппа $S \setminus \{0\}$ станет полной, и ассоциативность будет сохраняться, так как a — нуль в продолженной полугруппе. $\square$

2. Частичная полугруппа ненулевых элементов вполне 0-простой полугруппы

Простая полугруппа S — это полугруппа, не содержащая собственных идеалов. *Вполне простая полугруппа* S — это полугруппа, единственным идеалом которой является лишь S и имеющая примитивный идемпотент (т. е. минимальный относительно естественного порядка на множестве идемпотентов: $e \leq f \Leftrightarrow ef = fe = e$). *Вполне 0-простая полугруппа* S — это полугруппа с нулем, идеалами которой являются лишь $\{0\}$ и S , причем $S^2 \neq \{0\}$, имеющая минимальный ненулевой идемпотент. Хорошо известная теорема Сушкевича — Риса утверждает (см. [5, теорема 3.5]), что вполне 0-простые полугруппы — это в точности рисовские матричные полугруппы $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ над группой с нулем G^0 с сэндвич-матрицей $P = \|p_{\lambda i}\|_{\lambda \in \Lambda, i \in I}$, где $p_{\lambda i} \in G^0$, причем в каждой строке и в каждом столбце матрицы P присутствуют ненулевые элементы (см. [5]).

Элементы полугруппы $\mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ рассматриваем как $(I \times \Lambda)$ -матрицы над $G^0 = G \cup \{0\}$, где $0 \notin G$, у которых не более одного элемента отлично от 0. Ненулевые элементы из S имеют вид $(g)_{i\lambda}$, где $g \in G$, $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$. Тогда для $A = (a)_{i\lambda}$, $B = (b)_{j\mu}$ из S произведение имеет вид

$$A \circ B = APB = (a)_{i\lambda} \circ (b)_{j\mu} = \begin{cases} (ap_{\lambda j}b)_{i\mu}, & p_{\lambda j} \neq 0, \\ 0, & p_{\lambda j} = 0. \end{cases}$$

Частичную операцию на множестве ненулевых элементов вполне 0-простой полугруппы можно продолжить до полной, как показывает следующее предложение.

Предложение 2. *Частичную полугруппу ненулевых элементов вполне 0-простой полугруппы $M = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P) \setminus \{0\}$ можно продолжить внутренним образом до полной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменим все нулевые элементы сэндвич-матрицы P любыми элементами группы G , например единицей e . Получим новую сэндвич-матрицу $\tilde{P}$. Положим $A * B = A\tilde{P}B$ для $A, B \in M$. Тогда для любых матриц $A, B, C \in M$ будет выполняться равенство

$$(A * B) * C = (A\tilde{P}B)\tilde{P}C = A\tilde{P}(B\tilde{P}C) = A * (B * C)$$

в силу ассоциативности умножения матриц. При этом все ранее существовавшие произведения останутся неизменными, а не существовавшие в M произведения примут ненулевые значения. Следовательно, частичную полугруппу ненулевых элементов вполне 0-простой полугруппы можно продолжить без добавления элемента. $\square$

Назовем *стандартным* способ продолжения операции на $\mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P) \setminus \{0\}$, описанный в предложении 2. Заметим, что стандартных продолжений может быть много. Любое другое продолжение частичной полугруппы ненулевых элементов вполне 0-простой полугруппы назовем *нестандартным*.

Лемма 3. Пусть $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ — вполне 0-простая полугруппа, $M = S \setminus \{0\}$ — частичная полугруппа ненулевых элементов. Если $(M, *)$ — продолжение частичной операции $\cdot$ на M , $(M, *)$ — вполне простая полугруппа и $\mathcal{R}$ - и $\mathcal{L}$ -классы в $(M, \cdot)$ и $(M, *)$ одни и те же, то продолжение $*$ стандартное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Всякая вполне 0-простая полугруппа, очевидно, удовлетворяет следующему условию: для любых a, b, c из $ab = c \neq 0$ следует, что $c\mathcal{R}a$ и $c\mathcal{L}b$. Для вполне простой полугруппы условие упрощается: для любых a, b, c из $ab = c$ следует, что $c\mathcal{R}a$ и $c\mathcal{L}b$. Рассмотрим произвольные $i \in I$ и $\mu \in \Lambda$. Так как $\mathcal{R}$ - и $\mathcal{L}$ -классы в $(M, \cdot)$ и $(M, *)$ одни и те же и $(M, *)$ вполне проста, то элемент $(e)_{i\lambda} * (e)_{j\mu}$ лежит в том же $\mathcal{R}$ -классе, что $(e)_{i\lambda}$, и в том же $\mathcal{L}$ -классе, что $(e)_{j\mu}$. Следовательно, $(e)_{i\lambda} * (e)_{j\mu} = (g)_{i\mu}$ при некотором $g \in G$. Если $p_{\lambda j} \neq 0$, то $g = p_{\lambda j}$; в случае, когда $(e)_{i\lambda} * (e)_{j\mu} = (g)_{i\mu}$ и $p_{\lambda j} = 0$, положим $\tilde{p}_{\lambda j} = g$.

Пусть $a, b \in G$ и $p_{\lambda j} = 0$. Найдем такие $\nu \in \Lambda$ и $k \in I$, что $p_{\nu i} \neq 0$ и $p_{\mu k} \neq 0$.

Имеем $(a)_{i\lambda} * (b)_{j\mu} = ((ap_{\nu i}^{-1})_{i\nu} \cdot (e)_{i\lambda}) * ((e)_{j\mu} \cdot (p_{\mu k}^{-1}b)_{k\mu}) = (ap_{\nu i}^{-1})_{i\nu} * (e)_{i\lambda} * (e)_{j\mu} * (p_{\mu k}^{-1}b)_{k\mu} = (ap_{\nu i}^{-1})_{i\nu} * ((e)_{i\lambda} * (e)_{j\mu}) * (p_{\mu k}^{-1}b)_{k\mu} = (ap_{\nu i}^{-1})_{i\nu} \cdot (\tilde{p}_{\lambda i})_{i\mu} \cdot (p_{\mu k}^{-1}b)_{k\mu} = (ap_{\nu i}^{-1}p_{\nu i}\tilde{p}_{\lambda j}p_{\mu k}p_{\mu k}^{-1}b)_{i\mu} = (a\tilde{p}_{\lambda j}b)_{i\mu}$.

Таким образом, продолжение $*$ стандартно: $(M, *) = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P')$, где $P'_{\lambda i} = \begin{cases} p_{\lambda i}, & p_{\lambda i} \neq 0, \\ \tilde{p}_{\lambda i}, & p_{\lambda i} = 0. \end{cases} \quad \square$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Пусть $|I| < \infty$ или $|\Lambda| < \infty$. Ниже будет доказано (см. предложение 7), что в этом случае полугруппа вполне проста, поэтому для утверждения о том, что продолжение $*$ стандартно, достаточно требовать сохранения $\mathcal{R}$ - и $\mathcal{L}$ -классов.

Пусть $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ — вполне 0-простая полугруппа. Тогда $R_i = \{(g)_{i\lambda} \mid g \in G, \lambda \in \Lambda\}$, $L_\lambda = \{(g)_{i\lambda} \mid g \in G, i \in I\}$ — ненулевые $\mathcal{R}$ - и $\mathcal{L}$ -классы.

Теорема 5. Пусть $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ — вполне 0-простая полугруппа, $M = S \setminus \{0\}$ — частичная полугруппа ненулевых элементов из S . Если $*$ — полная ассоциативная операция, продолжающая частичную операцию $\cdot$ на M , то $\mathcal{R}$ -, $\mathcal{L}$ - и $\mathcal{H}$ -классы полугруппы $(M, *)$ являются объединениями соответственно $\mathcal{R}$ -, $\mathcal{L}$ -, $\mathcal{H}$ -классов полугруппы S , причем если $\tilde{R}$ и $\tilde{R}'$ — $\mathcal{R}$ -классы полугруппы $(M, *)$, $\tilde{R} = \bigcup_{i \in I_1} R_i$, $\tilde{R}' = \bigcup_{i \in I'_1} R_i$, где R_i — $\mathcal{R}$ -классы полугруппы S , то между множествами I_1 и I'_1 существует взаимно однозначное соответствие. Аналогичное утверждение имеет место для $\mathcal{L}$ -классов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тот факт, что при продолжении операции ненулевые классы отношений Грина могут лишь увеличиваться, очевиден. Поэтому $\mathcal{R}$ -, $\mathcal{L}$ -, $\mathcal{H}$ -классы в $(M, *)$ являются объединениями классов $(S, \cdot)$. Выберем какие-либо индексы $i_1 \in I_1$, $i'_1 \in I'_1$, $\lambda \in \Lambda$ и элементы $a \in R_{i_1} \cap L_\lambda$, $a' \in R_{i'_1} \cap L_\lambda$. Для каждого $i \in I_1$ возьмем элемент $a_i \in R_i \cap L_\lambda$. Так как $a, a_i \in \tilde{R}$, существует элемент $s_i \in M$ такой, что $a * s_i = a_i$. Так как $a, a' \in L_\lambda$, то $a' = ua$, $a = va'$

при некоторых $u, v \in S$. Положим $a'_i = ua_i$ для каждого $i \in I_1$. Так как $va'_i = vua_i = vua * s_i = a * s_i = a_i$, то $a'_i \in L_\lambda$. Пусть $a'_i \in R_j$ при некотором $j \in I$. Так как $a'_i \in \tilde{R}$, то $j \in I'_1$. Таким образом, имеем отображение $i \mapsto j$, $I_1 \rightarrow I'_1$. Осталось проверить, что отображение $i \mapsto j$ взаимно однозначно. Пусть $i, k \in I_1$ и $ua_i, ua_k \in R_j$ при некотором j . Так как $vu \neq 0$ и $ua_i \neq 0$, то $vua_i \neq 0$. Аналогично $vua_k \neq 0$. Таким образом, $(vua_i, vua_k) \in \mathcal{R}_S$, т. е. $(a_i, a_k) \in \mathcal{R}_S$, поэтому $i = k$. Этим доказано, что отображение $i \mapsto j$ инъективно. Возьмем теперь любое $j \in I'_1$ и элемент $b \in R_j \cap L_\lambda$. Так как отображения $x \mapsto ux$, $y \mapsto vy$ являются взаимно однозначными и взаимно обратными соответствиями между классами $\tilde{R}$ и $\tilde{R}'$, сохраняющими $\mathcal{L}$ -классы, то $vb \in R_i \cap L_\lambda$ для некоторого $i \in I_1$. Так как $u \cdot vb = b \in R_j \cap L_\lambda$, то $i \mapsto j$. Этим доказана сюръективность отображения $i \mapsto j$. Теорема доказана. $\square$

Естественно возникают следующие 2 вопроса:

- 1) для всякого ли продолжения частичной операции на $M = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P) \setminus \{0\}$ полугруппа будет вполне простой;
- 2) всякое ли продолжение стандартно?

Мы увидим, что на оба вопроса в общем случае ответ отрицательный. Тем не менее, в некоторых важных частных случаях ответы положительные.

Предложение 6. *При любом ассоциативном продолжении $*$ полугруппа $(M, *)$ проста.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a, b \in M$. Так как $S = M \cup \{0\}$ — 0-простая полугруппа и $a, b \neq 0$, то $b \in SaS$ и $a \in SbS$. Следовательно, $b = xay$, $a = ubv$ при некоторых $x, y, u, v \in S$. Так как $a, b \neq 0$, то $b = x * a * y$, $a = u * b * v$. Следовательно, $(M, *)$ — простая полугруппа. $\square$

Предложение 7. *Если $|I| < \infty$ или $|\Lambda| < \infty$, то при любом ассоциативном продолжении операции на M полугруппа $(M, *)$ вполне проста.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 6 знаем, что $(M, *)$ — простая полугруппа. Пусть $|I| < \infty$ (случай $|\Lambda| < \infty$ рассматривается аналогично). Тогда полугруппа $S = M \cup \{0\}$ имеет лишь конечное число $\mathcal{R}$ -классов. Ранее отмечали, что $\mathcal{R}$ -классы полугруппы $(M, *)$ являются объединением ненулевых $\mathcal{R}$ -классов полугруппы S . Следовательно, полугруппа $(M, *)$ также имеет лишь конечное число $\mathcal{R}$ -классов. Так как в одном $\mathcal{R}$ -классе идемпотенты попарно не сравнимы (в смысле естественного порядка), то $(M, *)$ не имеет бесконечно убывающих последовательностей идемпотентов. Отсюда следует, что в $(M, *)$ есть примитивный идемпотент. Наконец, так как $(M, *)$ проста и имеет примитивный идемпотент, то $(M, *)$ вполне проста. $\square$

Следующее утверждение касается вполне 0-простых полугрупп $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ с конечным числом $\mathcal{H}$ -классов. Положим $m = |I|$, $n = |\Lambda|$. При этом $m, n < \infty$, а группа G может быть бесконечной. Сэндвич-матрица P имеет размер $n \times m$. Пусть заданы разбиения множеств I и Λ : $I = \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha$, $\Lambda = \bigcup_{\beta \in B} J_\beta$.

Тогда имеем разбиение матрицы P на подматрицы $P_{\alpha\beta} = \|p_{\lambda i}\|_{\lambda \in J_\beta, i \in I_\alpha}$. Разбиение будем называть *нетривиальным*, если не все подматрицы имеют размер 1×1 . Предложение 8 дает необходимое условие наличия нестандартного продолжения частичной операции на $\mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P) \setminus \{0\}$. Напомним, что обязательным требованием к матрице P является существование в каждой строке и каждом столбце ненулевого элемента.

Предложение 8. Пусть $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ — вполне 0-простая полугруппа, $M = S \setminus \{0\}$ — частичная полугруппа ее ненулевых элементов, и пусть I и Λ конечны. Если частичная операция на M имеет нестандартное продолжение до полной ассоциативной операции, то матрица P имеет нетривиальное разбиение на подматрицы одного размера такое, что каждая подматрица содержит не более одного ненулевого элемента.

Доказательство. Если есть нестандартное продолжение $*$, то ввиду теоремы 5 $\mathcal{R}$ -классы полученной полугруппы будут являться объединениями некоторых ненулевых $\mathcal{R}$ -классов полугруппы S , и то же имеет место для $\mathcal{L}$ -классов, причем количество $\mathcal{R}$ -классов полугруппы S , входящих в один $\mathcal{R}$ -класс полугруппы $(M, *)$, одно и то же, и аналогичное верно для $\mathcal{L}$ -классов. По лемме 3 $\mathcal{R}$ - и $\mathcal{L}$ -классы полугруппы $(M, \cdot)$ не совпадают с $\mathcal{R}$ - или $\mathcal{L}$ -классами полугруппы $(M, *)$. Так как $|I|, |\Lambda| < \infty$, ввиду предложения 7 $(M, *)$ — вполне простая полугруппа. Поэтому имеем нетривиальное разбиение матрицы P на подматрицы одного размера. Если в одной подматрице будет более одного ненулевого элемента, то соответствующий $\mathcal{H}$ -класс будет содержать более одного идемпотента, что невозможно (хорошо известно, что $\mathcal{H}$ -класс, содержащий идемпотент, является группой, а в группе ровно один идемпотент.) $\square$

Замечание 9. Предложение 8 позволяет устанавливать несуществование других продолжений (за исключением стандартных). Например, конечная вполне 0-простая полугруппа с матрицей P , у которой на диагонали стоят нули, а остальные элементы ненулевые, не имеет нестандартных продолжений.

Приведем пример нестандартного продолжения.

Пример 1. Пусть $S = \mathcal{M}^0(G, \{1, 2\}, \{1, 2\}, P)$ — вполне 0-простая полугруппа. Будем считать, что G — произвольная группа, а сэндвич-матрица P имеет вид $P = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}$. Так как S вполне 0-проста, то $p_1, p_2 \neq 0$. Ясно, что рассматриваемый пример является минимальным по размерам сэндвич-матрицы, допускающей разбиение на подматрицы, удовлетворяющее требованиям предложения 8.

Элементы частичной полугруппы $M = S \setminus \{0\}$ имеют вид $(g)_{ij}$, где $g \in G$, $i, j \leq 2$. Разбиению матрицы P на подматрицы, как показано в табл. 2, соответствует в S объединение $\mathcal{R}$ -классов R_1 и R_2 в один $\mathcal{R}$ -класс; покажем, что это может быть сделано.

Ввиду леммы 3.6 из [5] можем считать, что $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Таким образом,

Таблица 2. Разбиение матрицы P на подматрицы

p_1	0
0	p_2

в частичной полугруппе M имеем

$$(g)_{i\lambda} \cdot (h)_{j\mu} = \begin{cases} (gh)_{i\mu}, & \text{если } \lambda = j, \\ \text{не существует,} & \text{если } \lambda \neq j. \end{cases}$$

Очевидно, что $S = A \cup B \cup C \cup D$, где $A = \{(g)_{11} \mid g \in G\}$, $B = \{(g)_{12} \mid g \in G\}$, $C = \{(g)_{21} \mid g \in G\}$, $D = \{(g)_{22} \mid g \in G\}$. Множества A , B , C , D — в точности ненулевые $\mathcal{H}$ -классы полугруппы S . Умножение в M этих множеств можно расположить в табл. 3.

Таблица 3. Умножение в M множеств

	A	B	C	D
A	A	B	-	-
B	-	-	A	B
C	C	D	-	-
D	-	-	C	D

Продолжим операцию $\cdot$ в M до операции $*$ согласно правилам $(g)_{i1} * (h)_{2j} = (g)_{i2} * (h)_{1j} = (gh)_{3-i,j}$. Это умножение соответствует табл. 4.

Таблица 4. Продолженное умножение в M множеств

	A	B	C	D
A	A	B	C	D
B	C	D	A	B
C	C	D	A	B
D	A	B	C	D

Полугруппа $(M, *)$ является правой группой. Здесь $A \cup C$ и $B \cup D$ — группы, изоморфные группе $G \times \mathbb{Z}_2$. Если $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ с операцией сложения по модулю 2, то $(g)_{11} \mapsto (g, 0)$, $(g)_{21} \mapsto (g, 1)$ — изоморфизм $A \cup C$ с $G \times \mathbb{Z}_2$, а $(g)_{12} \mapsto (g, 1)$, $(g)_{22} \mapsto (g, 0)$ — изоморфизм $B \cup D$ с $G \times \mathbb{Z}_2$. Очевидно, что продолжение $*$ является нестандартным.

Не всегда продолжение частичной полугруппы ненулевых элементов вполне 0-простой полугруппы определяет вполне простую полугруппу. Следующий пример является одним из таких.

ПРИМЕР 2. Пусть $I = \Lambda = \{0, 1, 2, \dots\}$, $G = \{e\}$, $p_{\lambda i} = \begin{cases} e, & \text{при } \lambda = i, \\ 0, & \text{при } \lambda \neq i, \end{cases}$
 $M = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$, $M = S \setminus \{0\}$. Продолжим частичное умножение на S

следующим образом: $(e)_{ij} * (e)_{kl} = (e)_{i+k-\min(j,k), j+l-\min(j,k)}$. Нетрудно проверить, что прежние соотношения $(e)_{ij} \cdot (e)_{jm} = (e)_{im}$ остаются выполненными. Полугруппа $(M, *)$, полученная продолжением частичной операции на M , изоморфна бициклической полугруппе (см. [5, § 1.12]). Она не является вполне простой, так как имеет сравнимые идемпотенты $(e)_{11} > (e)_{22} > (e)_{33} > \dots$.

3. Необходимые и достаточные условия продолжаемости $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \cdot)$

Для полугруппы $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$, как нетрудно проверить, $\mathcal{J}$ -классы образуют решетку, изоморфную решетке делителей числа n (или, что то же самое, прямому произведению конечного числа конечных цепей). Если n четно, то одноэлементный минимальный ненулевой $\mathcal{J}$ -класс — это $J(\frac{n}{2})$.

Следующая теорема дает полный ответ на вопрос о продолжаемости операции в частичной полугруппе $S = (\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \cdot)$.

Теорема 10. Пусть $S = (\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \cdot)$ — частичная мультипликативная полугруппа вычетов. Частичная операция на S продолжается до полной ассоциативной операции в том и только том случае, если выполнено одно из следующих условий:

- (1) n четно;
- (2) $n = p^k$, где $k \in \mathbb{N}$, а p — нечетное простое число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть операция на S продолжается, но не выполнено ни (1), ни (2). Тогда n можно представить в виде $n = uv$, где u, v — нечетные числа, $u, v > 1$ и $(u, v) = 1$.

Продолжение операции $\cdot$ умножения по модулю n будем обозначать через $*$. Очевидно, что $x * y = xy$, если $xy \nmid n$.

Обозначим $a = u * v$. Докажем, что $a \dot{:} u$ или $a \dot{:} v$. Пусть $a \not\dot{:} u$ и $a \not\dot{:} v$. Тогда $a(u+1) \not\dot{:} uv$ (иначе $a \dot{:} u$). Отсюда получаем: $a \cdot (u+1) = a * (u+1) = (u * v) * (u+1) = u * (v * (u+1)) = u * (v \cdot (u+1)) = u * v = a$. Таким образом, $(u+1)a = a$, откуда $ua = 0$, а значит, $a \dot{:} v$; противоречие тому, что $a \not\dot{:} u$ и $a \not\dot{:} v$.

Итак, $a \dot{:} u$ или $a \dot{:} v$. Далее будем считать, что $a \dot{:} u$. Имеем $a = uk$. Положим $d = (k, v)$. Тогда $k = k_1 d$, $v = v_1 d$ для некоторых k_1, v_1 таких, что $(k_1, v_1) = 1$. Заметим, что v_1 — нечетное. Докажем, что $v_1 \neq 1$. Действительно, если $v_1 = 1$, то $v = d$ и $a = uk = uk_1 d = uk_1 v \dot{:} uv$, что невозможно. Таким образом, $v_1 \geq 3$.

Найдем такое t , что $t \not\dot{:} v_1$, $(u+t) \not\dot{:} v_1$ и $t \not\dot{:} u$. Действительно, возьмем $t = 1$, если $(u+1) \not\dot{:} v_1$, и $t = 2$, если $(u+1) \dot{:} v_1$. Проверим, что $(u+t)a \not\dot{:} uv$. Действительно, если $(u+t)a \dot{:} uv$, то $(u+t)uk_1 d \dot{:} uv_1 d$, поэтому $(u+t)k_1 \dot{:} v_1$. Так как $(k_1, v_1) = 1$, то $(u+t) \dot{:} v_1$. Но это противоречит выбору числа t . Проверим,

далее, что $ta \dot{\neq} uv$. Действительно, если $ta \dot{=} uv$, то $tuk_1d \dot{=} uv_1d$, откуда $tk_1 \dot{=} v_1$, а значит, $t \dot{=} v_1$; снова противоречие с выбором t .

Отметим, что поскольку $(u+t)a \dot{\neq} uv$ и $ta \dot{\neq} uv$, выполняются $a * (u+t) = a \cdot (u+t)$ и $a * t = a \cdot t$. Далее получаем

$$\begin{aligned} a(u+t) &= a * (u+t) = (u * v) * (u+t) = u * (v * (u+t)) \\ &= u * (v \cdot (u+t)) = u * (v \cdot t) = u * (v * t) = (u * v) * t = at. \end{aligned}$$

Итак, $(u * t)a = ta$. Следовательно, $ua = 0$. Это означает, что $a \dot{=} v$. Так как $a \dot{=} u$ и $a \dot{=} v$, то $a \dot{=} uv$, что невозможно. Следовательно, выполнено условие (1) либо условие (2).

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Допустим, что выполняется условие (1), тогда полугруппа имеет два минимальных ненулевых $\mathcal{J}$ -класса, один из которых состоит из одного элемента $\frac{n}{2}$. Тогда по предложению 1 операция в частичной полугруппе продолжается до полной ассоциативной операции.

Допустим, что выполняется условие (2). Пусть $a = p^l x$, $b = p^m y$, где $(x, p) = (y, p) = 1$. Тогда определим операцию $*$, полагая $a * b = ab = p^{l+m} xy$, если $l + m < k$, и $a * b = p^{k-1} xy$, если $l + m \geq k$. Пусть $a = p^l x$, $b = p^m y$, $c = p^r z$. Покажем ассоциативность данной операции:

$$1) \ l + m + r < k$$

$$(a * b) * c = p^{l+m} xy * c = p^{l+m+r} xyz, \quad a * (b * c) = a * p^{m+r} yz = p^{l+m+r} xyz;$$

$$2) \ l + m + r \geq k$$

$$(a) \ l + m < k, \ m + r < k$$

$$(a * b) * c = p^{l+m} xy * c = p^{k-1} xyz, \quad a * (b * c) = a * p^{m+r} yz = p^{k-1} xyz;$$

$$(b) \ l + m < k, \ m + r \geq k$$

$$(a * b) * c = p^{l+m} xy * c = p^{k-1} xyz, \quad a * (b * c) = a * p^{k-1} yz = p^{k-1} xyz;$$

$$(c) \ l + m \geq k, \ m + r < k$$

$$(a * b) * c = p^{k-1} xy * c = p^{k-1} xyz, \quad a * (b * c) = a * p^{m+r} yz = p^{k-1} xyz;$$

$$(d) \ l + m \geq k, \ m + r \geq k$$

$$(a * b) * c = p^{k-1} xy * c = p^{k-1} xyz, \quad a * (b * c) = a * p^{k-1} yz = p^{k-1} xyz.$$

Таким образом, операция в частичной полугруппе может быть продолжена до полной ассоциативной. $\square$

4. Частичная полугруппа ненулевых матриц над полем

Пусть S — множество ненулевых матриц размера 2×2 над полем F . Очевидно, что относительно обычного матричного умножения S — частичная полугруппа. Обозначим через M частичную полугруппу 2×2 матриц ранга 1. Нетрудно видеть, что $M \cup \{0\}$ — вполне 0-простая полугруппа, поэтому частичная операция на M продолжается до полной ассоциативной операции. Верно ли это утверждение для частичной полугруппы S ? Оказывается, что положительный ответ имеет место лишь для поля из двух элементов. Матрицы размера 2×2 будем рассматривать как линейные операторы $a : F^2 \rightarrow F^2$, $(x, y) \mapsto (x, y) \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Ядро $\ker a$ и образ $\operatorname{im} a$ определяются обычным образом: $\ker a = \{v \in F^2 \mid va = 0\}$, $\operatorname{im} a = F^2 a$.

Теорема 11. Частичная операция на полугруппе S всех ненулевых матриц размера 2×2 над полем F продолжается до полной ассоциативной операции в том и только том случае, если $|F| = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого одномерного подпространства K пространства F^2 обозначим через t_K какую-либо матрицу, для которой $\ker t_K = \operatorname{im} t_K = K$. Так как $t_K \cdot t_K = 0$ в полугруппе всех матриц, произведение $t_K \cdot t_K$ не определено в S . Очевидно, t_K — матрица ранга 1.

Докажем НЕОБХОДИМОСТЬ условия $|F| = 2$. Предположим, что операция умножения в S продолжается до полной ассоциативной операции $*$. Рассмотрим произведения $t_K u * t_K$ и $t_K * u t_K$, где u — обратимая матрица. Пусть $p \in K \setminus \{0\}$, а q — такой вектор из $F^2 \setminus K$, что $q t_K = p$. Тогда p, q — базис пространства F^2 и в этом базисе матрица оператора t_K имеет вид $[t_K] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (здесь первая строчка — координаты вектора $p t_K$, вторая — вектора $q t_K$). Оператор u выберем так, чтобы его матрица в базисе p, q имела вид $[u] = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$, где $\alpha, \gamma \neq 0$. Тогда

$$[t_K u] = [t_K][u] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad [u t_K] = [u][t_K] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что

$$\ker(t_K u) = \ker(u t_K) = \operatorname{im}(t_K u) = \operatorname{im}(u t_K) = K.$$

Обозначая через e единичную матрицу, получим

$$t_K u * t_K = (\alpha t_K) * t_K = \alpha e \cdot t_K * t_K = \alpha(t_K * t_K),$$

$$t_K * u t_K = t_K * (\gamma t_K) = t_K * (t_K \cdot \gamma e) = (t_K * t_K) \cdot \gamma e = \gamma(t_K * t_K).$$

Следовательно, при $\alpha \neq \gamma$ операция $*$ неассоциативна. Если $|F| > 2$, то такие элементы α, γ могут быть выбраны. Таким образом, для ассоциативности условие $|F| = 2$ необходимо.

Теперь докажем достаточность условия $|F| = 2$. Имеем $F = \{0, 1\}$ — поле из двух элементов. Положим $t_K * t_K = t_K$ для каждого одномерного подпространства K . Определим другие произведения $a \cdot b$, которые ранее не были определены. Пусть $a \cdot b$ не определено. Это значит, что $ab = 0$, т. е. $\text{im } a \subseteq \ker b$. Отсюда видно, что $a, b \in M$ и $\text{im } a = \ker b = K$, где K — некоторое одномерное подпространство пространства F^2 . Так как $\text{im } a = \text{im } t_K$, то $a = ut_K$ для некоторой матрицы $u \in S$. Так как $\ker b = \ker t_K$, то $b = t_K v$ для некоторой матрицы $v \in S$. Теперь полагаем $a * b = ut_K v$. Это произведение действительно существует, так как $\text{im}(ut_K) = K$, а $\ker v \neq K$ ввиду существования произведения $t_K v$. Проверим корректность этого определения. Пусть $a = u' t_K$, $b = t_K v'$. Тогда

$$ut_K v = ut_K \cdot v = u' t_K \cdot v = u' \cdot t_K v = u' \cdot t_K v' = u' t_K v'.$$

Заметим, что матрицы u и v могут быть выбраны из $S \setminus M$.

Пусть K — одномерное подпространство пространства F^2 , а g — обратимая матрица. Докажем, что $g^{-1} t_K g = \lambda t_{K'}$, где $K' = Kg$, а $\lambda \in F \setminus \{0\}$, поле F произвольное. Действительно, нетрудно проверить, что $\ker(g^{-1} t_K g) = \text{im}(g^{-1} t_K g) = K'$. Пусть $p \in K' \setminus \{0\}$, а q — какой-либо вектор с условием $q t_{K'} = p$. Тогда p, q — базис пространства F^2 и в этом базисе имеем

$$[t_{K'}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [g^{-1} t_K g] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

для некоторого $\lambda \in F \setminus \{0\}$. Отсюда $g^{-1} t_K g = \lambda t_{K'}$. Если $|F| = 2$, то $\lambda = 1$, а значит, $g^{-1} t_K g = t_{K'}$.

Докажем ассоциативность операции

$$a * b = \begin{cases} a \cdot b, & \text{если } a \cdot b \text{ определено в } S, \\ ut_K v, & \text{если } a = ut_K, b = t_K v. \end{cases}$$

Пусть $a, b, c \in S$. Разберем ряд случаев.

СЛУЧАЙ 1: $b \in S \setminus M$. В этом случае произведения ab и bc существуют при любых a, c . Разобьем этот случай на ряд других случаев.

СЛУЧАЙ 1.1: $ab \cdot c$ существует. Тогда, так как S — частичная полугруппа, $a \cdot bc$ тоже существует и $ab \cdot c = a \cdot bc$.

СЛУЧАЙ 1.2: $ab \cdot c$ не существует. Тогда $a \cdot bc$ тоже не существует. Очевидно, $a, c \in M$. Следовательно, $\text{im } a = \ker(bc)$ и $\text{im}(ab) = \ker c$. Обозначим $K = \text{im } a$, $K' = \ker c$. Очевидно, K и K' — одномерные подпространства и $Kb = K'$. Так как $\text{im } a = K$, то $a = ut_K$ при некотором $u \in S \setminus M$. Так как $\ker c = K'$, то $c = t_{K'} v$ при некотором $v \in S \setminus M$. Так как $\ker(b^{-1} t_K b) = \text{im}(b^{-1} t_K b) = K'$, согласно сделанному ранее замечанию $b^{-1} t_K b = t_{K'}$. Теперь получаем

$$(a * b) * c = ab * c = ut_K b * c = (ub \cdot b^{-1} t_K b) * t_{K'} v = ub t_{K'} * t_{K'} v = ub t_{K'} v,$$

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a * bc = ut_K * b t_{K'} v = ut_K * (b t_{K'} b^{-1} \cdot bv) \\ &= ut_K * t_K b v = ut_K b v = ub \cdot b^{-1} t_K b \cdot v = ub t_{K'} v. \end{aligned}$$

Таким образом, $(a * b) * c = a * (b * c)$.

СЛУЧАЙ 2: $b \in M$. Разберем ряд случаев, возникающих внутри этого случая.

СЛУЧАЙ 2.1: произведения ab и bc существуют. Так как $b \in M$, то $\text{im}(ab) = \text{im } b \neq \ker c$, поэтому произведение $ab \cdot c$ существует. Но тогда произведение $a \cdot bc$ также существует и $(ab)c = a(bc)$, т. е. $(a * b) * c = a * (b * c)$.

СЛУЧАЙ 2.2: произведение ab существует, а bc нет. Тогда $\text{im } b = \ker c$. Имеем $b = gt_K$, $c = t_K v$, где g, v — обратимые матрицы. Далее получаем

$$(a * b) * c = ab * c = agt_K * t_K v = agt_K v,$$

$$a * (b * c) = a * (gt_K * t_K v) = a * gt_K v = agt_K v.$$

СЛУЧАЙ 2.3: произведение ab не существует, а bc существует. Этот случай разбирается аналогично предыдущему.

СЛУЧАЙ 2.4: произведения ab и bc не существуют. Тогда $\text{im } a = \ker b = K$, $\text{im } b = \ker c = K'$. Имеем

$$a = ut_K, \quad b = t_K v = u' t_{K'}, \quad c = t_{K'} v';$$

$$(a * b) * c = ut_K v * t_{K'} v' = uu' t_{K'} * t_{K'} v' = uu' t_{K'} v'$$

и

$$a * (b * c) = ut_K * u' t_{K'} v' = ut_K * t_K v v' = ut_K v v' = uu' t_{K'} v'.$$

Таким образом, $(a * b) * c = a * (b * c)$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Оказывается, что продолжение частичной операции на частичной полугруппе S из теоремы 11 единственно.

Матрицы ранга 1 вместе с нулевой матрицей образуют полугруппу $M \cup \{0\}$, которая вполне 0-проста, содержит $9 + 1$ элементов и, как будет видно из дальнейшего, изоморфна рисовской матричной полугруппе $\mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ над группой с нулем $\{0, e\}$, с сэндвич-матрицей $P = \begin{pmatrix} 0 & e & e \\ e & 0 & e \\ e & e & 0 \end{pmatrix}$. Действительно, имеется ровно три одномерных подпространства пространства $(\mathbb{Z}_2)^2$: это

$$K_1 = \{(0, 0), (0, 1)\}, \quad K_2 = \{(0, 0), (1, 0)\}, \quad K_3 = \{(0, 0), (1, 1)\}.$$

Для любых $i, j \in \{1, 2, 3\}$ есть ровно одна матрица ранга 1, у которой ядро равно K_i , а образ равен K_j . Изобразим это в табл. 5, где элементы в строке имеют одинаковые образы, а элементы в столбце — одинаковые ядра.

Замена диагональных элементов 0 элементом e определяет естественным образом продолжение частичной операции на M . Так как множество M конечно, ввиду предложения 7 любое ассоциативное продолжение $*$ частичной операции на M будет давать вполне простую полугруппу. Ненулевые $\mathcal{R}$ - и $\mathcal{L}$ -классы полугруппы $M \cup \{0\}$ будут совпадать с соответствующими классами полугруппы

Таблица 5. Строение частичной полугруппы матриц ранга 1

		im		
		K_1	K_2	K_3
ker	K_1	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
	K_2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
	K_3	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$(M, *)$, поскольку два $\mathcal{R}$ -класса «склеиться» в один не могут по теореме 5, а если «склеиваются» все три $\mathcal{R}$ -класса, то какой-либо $\mathcal{H}$ -класс будет содержать два идемпотента, что невозможно, так как $\mathcal{H}$ -класс, содержащий идемпотент, является группой (см. лемму 2.15 из [5]). Неопределенными в M являются произведения $(e)_{ii} \cdot (e)_{ii}$ ($i = 1, 2, 3$). Но поскольку $\mathcal{R}$ - и $\mathcal{L}$ -классы в $(M, \cdot)$ и $(M, *)$ одни и те же, то $(e)_{ii} * (e)_{ii} = (e)_{ii}$. В обозначениях теоремы 11 это означает, что мы обязаны определить $t_K * t_K = t_K$. Отсюда видно, что ассоциативное умножение $*$ распространяется на все множество S однозначно.

Достаточность в теореме 11 первоначально была установлена с помощью компьютера. А именно, было установлено, что частичная операция на частичной полугруппе ненулевых (2×2) -матриц над полем $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ продолжается, причем однозначно, до полной ассоциативной операции. Результаты компьютерных вычислений приведены в табл. 6 и 7, где

$$\begin{aligned}
 1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & 2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & 3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, & 4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\
 5 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & 6 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & 7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & 8 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 9 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, & 10 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & 11 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & 12 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 13 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & 14 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & 15 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпин Е. С., Евсеев А. Е. Частичные алгебраические действия. С-Пб.: Образование, 1991.
2. Ляпин Е. С. О внутреннем продолжении частичных действий до полных ассоциативных // Изв. вузов. Математика. 1982. № 7. С. 40–44.
3. Розен В. В. Частичные операции в упорядоченных множествах. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1973.
4. Петриков А. О. Частичные полугруппы и отношения Грина // Электрон. информ. системы. 2014. № 3. С. 65–72.

Таблица 6. Частичная полугруппа ненулевых (2×2) -матриц над полем $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	2	1	5	6	3	4	10	11	12	7	8	9	13	14	15
3	3	4	6	5	2	1	13	14	15	7	8	9	10	11	12
4	4	3	2	1	6	5	7	8	9	13	14	15	10	11	12
5	5	6	4	3	1	2	13	14	15	10	11	12	7	8	9
6	6	5	1	2	4	3	10	11	12	13	14	15	7	8	9
7	7	8	9	9	7	8	7	8	9	—	—	—	7	8	9
8	8	7	7	8	9	9	—	—	—	7	8	9	7	8	9
9	9	9	8	7	8	7	7	8	9	7	8	9	—	—	—
10	10	11	12	12	10	11	10	11	12	—	—	—	10	11	12
11	11	10	10	11	12	12	—	—	—	10	11	12	10	11	12
12	12	12	11	10	11	10	10	11	12	10	11	12	—	—	—
13	13	14	15	15	13	14	13	14	15	—	—	—	13	14	15
14	14	13	13	14	15	15	—	—	—	13	14	15	13	14	15
15	15	15	14	13	14	13	13	14	15	13	14	15	—	—	—

Таблица 7. Продолжение частичной полугруппы ненулевых (2×2) -матриц над полем $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	2	1	5	6	3	4	10	11	12	7	8	9	13	14	15
3	3	4	6	5	2	1	13	14	15	7	8	9	10	11	12
4	4	3	2	1	6	5	7	8	9	13	14	15	10	11	12
5	5	6	4	3	1	2	13	14	15	10	11	12	7	8	9
6	6	5	1	2	4	3	10	11	12	13	14	15	7	8	9
7	7	8	9	9	7	8	7	8	9	7	8	9	7	8	9
8	8	7	7	8	9	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9
9	9	9	8	7	8	7	7	8	9	7	8	9	7	8	9
10	10	11	12	12	10	11	10	11	12	10	11	12	10	11	12
11	11	10	10	11	12	12	10	11	12	10	11	12	10	11	12
12	12	12	11	10	11	10	10	11	12	10	11	12	10	11	12
13	13	14	15	15	13	14	13	14	15	13	14	15	13	14	15
14	14	13	13	14	15	15	13	14	15	13	14	15	13	14	15
15	15	15	14	13	14	13	13	14	15	13	14	15	13	14	15

5. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. М.: Мир, 1972.

Статья поступила 15 ноября 2016 г., окончательный вариант — 12 апреля 2017 г.

Петриков Александр Олегович
Национальный исследовательский университет
«Московский институт электронной техники»,
пл. Шокина, 1, Зеленоград 124498
masterpetr@mail.ru

INNER EXTENSIONS OF PARTIAL OPERATIONS ON A PARTIAL SEMIGROUP

A. O. Petrikov

Abstract: We analyse inner extensions of partial operations on a partial semigroup. The problem of extension of a partial operation internally to a full one with preservation of associativity is studied. The possibilities of continuing a partial operation on a partial semigroup of non-zero elements of a completely 0-simple semigroup by standard and non-standard methods are considered. A negative answer is obtained in relation to the question about whether any extension of a partial operation on a partial semigroup of non-zero elements is a completely simple semigroup, and whether any extension is standard. However, in certain cases the answers are positive. The article deduces the necessary and sufficient conditions of extendibility of a partial operation on a semigroup of residue modulo n , and also of a partial operation on a semigroup of non-zero elements of (2×2) -matrices over the field. The uniqueness of the extension of a partial operation on the semigroup of non-zero (2×2) -matrices over a field is shown.

DOI 10.25587/SVFU.2017.2.9244

Keywords: inner extension, partial semigroup, completely 0-simple semigroup, semigroup of residue modulo n .

REFERENCES

1. Lyapin E. S. and Evseev A. E., Partial Algebraic Actions, Obrazovanie, St. Petersburg (1991).
2. Lyapin E. S. "On the internal continuation of partial actions to complete associative," *Izv. vuzov, Mat.*, No. 7, 40–44 (1982).
3. Rozen V. V., Partial Operations in Ordered Sets, *Izd. Saratov. Univ.*, Saratov (1973).
4. Petrikov A. O. "Partial semigroups and Green's relations," *Electron. Inform. Syst.*, No. 3, 65–72 (2014).
5. Clifford A. and Preston Gh., Algebraic Theory of Semigroups, Mir, Moscow (1972).

Submitted November 15, 2016, Revised version April 12, 2017

Alexander O. Petrikov
National Research University of Electronic Technology,
1 Shokin Square, Zelenograd 124498, Russian Federation
masterpetr@mail.ru

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ
ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ
С НЕОДНОРОДНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ
МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
М. В. Васильева, Г. А. Прокопьев

Аннотация. Рассматривается процесс фильтрации двухфазной жидкости в пористой неоднородной среде. Данный процесс описывается связанной системой уравнений для насыщенности, скорости фильтрации и порового давления. Рассмотрены математические модели с учетом и без учета капиллярных сил, при наличии которого для насыщенности имеем нестационарное уравнение конвекции-диффузии. Поскольку данный процесс характеризуется существенным преобладанием конвективного слагаемого в уравнении для насыщенности, используются противоточковые аппроксимации посредством добавления неоднородной искусственной диффузии. Скорость и давление аппроксимируются с использованием смешанного метода конечных элементов. Представлены результаты численных расчетов для двумерного случая с сильно неоднородными коэффициентами проницаемости пористой среды. Рассмотрены несколько случаев, связанных с линейными и нелинейными коэффициентами относительной проницаемости флюида и наличием капиллярных сил.

DOI 10.25587/SVFU.2017.2.9245

Ключевые слова: пористая среда, двухфазная фильтрация, метод конечных элементов, метод Галёркина, численное моделирование.

Введение

Математическое моделирование течений многофазной жидкости в пористых средах имеет важное прикладное значение при добыче нефти и газа [1–3]. Фильтрационный перенос жидкостей и газов в пористых средах, возникающий при извлечении углеводородов, описывается фундаментальными законами сохранения массы, импульса и энергии [4–7]. Однако применить эти законы непосредственно для описания фильтрации в пористых средах чрезвычайно сложно, поэтому на практике используется полумэмпирический подход, основанный на применении закона Дарси взамен уравнения сохранения импульса. Данный закон фильтрации можно также получить посредством процедуры двухмасштабного асимптотического усреднения для задачи на уровне пор, где рассматриваются медленные течения, описываемые посредством уравнения Стокса.

Работа выполнена за счет Российского научного фонда, грант № 17–71–20055.

Основные уравнения фильтрации многофазной жидкости описываются законом сохранения массы и законом Дарси [4, 8–11]. При рассмотрении модели многофазной фильтрации необходимо ввести такие понятия, как насыщенность S_i и относительная проницаемость k_{ri} . Насыщенность i -й фазой флюида определяется как отношение объема, занимаемого данной фазой, к общему объему пустот в пористой среде. Будем рассматривать полностью насыщенную пористую среду:

$$\sum_i S_i = 1.$$

где S_i — насыщенность i -й фазы флюида.

Закон сохранения массы для многофазной фильтрации описывается следующим дифференциальным оператором:

$$\frac{\partial(\phi \rho_i S_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{u}_i) = \rho_i q_i,$$

где ∇ — оператор дивергенции, ϕ — пористость пористой среды, ρ_i — плотность i -й фазы флюида, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ — скорость фильтрации i -й фазы флюида и q_i — внешние источники или стоки. Отметим, что q_i отрицателен для стока и положителен для источников.

В дополнение к закону сохранения массы используем закон сохранения импульса в форме закона Дарси. Этот закон устанавливает линейное отношение между скоростью фильтрации и градиентом давления:

$$\mathbf{u}_i = -\frac{k_{ri}}{\mu_i} \mathbf{k} \nabla p_i,$$

где $\mathbf{k}$ — тензор абсолютной проницаемости пористой среды, k_{ri} и μ_i — относительная проницаемость и вязкость i -й фазы флюида. Заметим, что мы здесь не учитываем гравитационные силы. Относительные фазовые проницаемости зависят от целого ряда характеристик: насыщенности, градиента давления, капиллярных сил, структуры порового пространства и пр. Поскольку наиболее существенно фазовые проницаемости зависят от насыщенностей, в большинстве моделей фильтрации предполагается, что фазовые проницаемости являются функциями, зависящими только от насыщенностей.

Закон Дарси распространяется только на ньютоновские жидкости в некотором ограниченном диапазоне скоростей фильтрации, в котором турбулентность, инерционные и другие высокоскоростные эффекты пренебрежимо малы. Кроме того, при очень низких давлениях этот закон несправедлив вследствие явления проскальзывания.

Прикладные математические модели процессов массопереноса в пористых средах являются существенно нелинейными и трудными для исследования. При приближенном решении нестационарных краевых задач для связанных систем уравнений с частными производными используются два класса методов. Первый из них связан с применением тех или иных неявных схем для исходной системы уравнений. В этом случае имеем достаточно большие вычислительные

сложности перехода на новый временной слой. Второй класс методов ориентирован на уменьшение вычислительной работы за счет использования схем расщепления и решения более простых задач на новом временном слое.

Для численного решения возникающих задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных используется смешанный метод конечных элементов, позволяющий напрямую выполнять законы сохранения [12]. Математическая модель записывается в смешанной обобщенной постановке в терминах скорость — давление и насыщенность. Для аппроксимации полей скоростей и давления могут быть использованы стандартные типы элементов, аналогичные рассматриваемым в [13–15] и др.

Уравнение насыщенности описывается уравнением конвекции-диффузии в случае наличия капиллярных сил и уравнением переноса при их отсутствии. Для аппроксимации уравнений конвекции-диффузии использование стандартного метода конечных элементов (метод Галёркина) ведет к возникновению осцилляций в решении задачи [16–18]. В отличие от оператора диффузионного переноса, аппроксимация которого ведет к симметричной и положительно определенной матрице, аппроксимация оператора конвекции с использованием стандартного метода Галёркина приводит к несимметричной знаконеопределенной матрице, что и приводит к возникновению осцилляций в решении задачи в случае задач с доминирующей конвекцией при больших числах Пекле. Стандартным способом борьбы с осцилляциями является измельчение расчетной сетки до тех пор, пока конвективный член не перестанет доминировать на сеточном уровне [5, 19]. Отметим, что подобное измельчение сетки ведет к увеличению размерности разностной задачи, особенно для случая многомерной постановки, что также приводит к необходимости расчета задачи для скоростей и давления на соответствующих мелких сетках. Известно, что для борьбы с осцилляциями в методе конечных разностей используются потоковые схемы. Их можно построить посредством добавления искусственной диффузии для центрально-разностной схемы. Для конечно-элементной аппроксимации потоковые схемы можно построить аналогичным способом.

Работа состоит из четырех разделов. В первом представлена математическая модель двухфазной фильтрации. Дискретизация по пространству и времени представлена во втором и третьем разделах. Результаты численного решения задачи двухфазной фильтрации в двумерной постановке для случая неоднородных сред даны в четвертом разделе. В конце приводится заключение.

1. Математическая модель двухфазной фильтрации

Рассмотрим течение двухфазной жидкости в пористой среде. Будем предполагать что пористая среда полностью насыщена двумя фазами:

$$S_w + S_o = 1, \quad (1.1)$$

где S_w и S_o — насыщенность водой и нефтью соответственно.

Определим капиллярное давление, которое связано с поверхностным натяжением на границе между двумя фазами. Разница давлений связана следующим образом:

$$p_c = p_o - p_w, \quad (1.2)$$

где p_o и p_w — давление нефтяной и водной фаз.

Учитывая отсутствие переноса массы между фазами (несмешиваемые жидкости), запишем закон сохранения массы для нефти и воды

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\phi \rho_o S_o)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_o \mathbf{u}_o) &= \rho_o q_o, \\ \frac{\partial(\phi \rho_w S_w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w \mathbf{u}_w) &= \rho_w q_w, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где индексы o и w относятся к нефти и воде.

Для скорости течения имеем закон Дарси для каждой из фаз:

$$\mathbf{u}_o = -\frac{k_{ro}}{\mu_o} \mathbf{k} \nabla p_o, \quad \mathbf{u}_w = -\frac{k_{rw}}{\mu_w} \mathbf{k} \nabla p_w, \quad (1.4)$$

где $k_{ro} = k_{ro}(S_o)$, $k_{rw} = k_{rw}(S_w)$ и μ_o , μ_w — эффективная проницаемость и вязкость для нефти и воды соответственно.

Для вывода математической модели введем понятие фазовой подвижности λ_o и λ_w

$$f_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}, \quad \lambda_i = \frac{k_{ri}}{\mu_i},$$

где $\lambda = \lambda_o + \lambda_w$ — общая подвижность и f_i — доля фазы в двухфазном потоке.

Определим суммарную скорость двухфазного потока

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_o + \mathbf{u}_w.$$

Сложив уравнения (1.3), с учетом соотношения (1.1) получим

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = q_o + q_w, \quad (1.5)$$

где для простоты предполагаем, что плотность воды и нефти постоянны, т. е. жидкость несжимаема, а также будем рассматривать несжимаемую пористую среду ($\phi = \text{const}$).

Определим глобальное давление по формуле

$$p = p_o + \int_{p_c(S_o, S_w)} f_w(p'_c(\xi)) d\xi,$$

тогда

$$\lambda \nabla p = \lambda_w \nabla p_w + \lambda_o \nabla p_o.$$

Запишем фазовые скорости с использованием глобального давления:

$$\mathbf{u}_w = -\mathbf{k} \lambda_w \left(\nabla p - \frac{\lambda_o}{\lambda} \nabla p_c \right), \quad (1.6)$$

$$\mathbf{u}_o = -\mathbf{k}\lambda_o \left(\nabla p - \frac{\lambda_w}{\lambda} \nabla p_c \right). \quad (1.7)$$

В качестве расчетной насыщенности будем использовать насыщенность водной фазой $S = S_w$, для которой имеем уравнение

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla(f_w \mathbf{u}) + \nabla(k\lambda_o p'_c \nabla S) = q_w, \quad (1.8)$$

где $p'_c = \frac{\partial p_c}{\partial S}$.

Для коэффициентов предположим следующие зависимости:

$$q_i = 0, \quad k_{ri} = k_{ri}(S_i), \quad \rho_i = \text{const}, \quad \mu_i = \text{const}, \quad \phi = \text{const}, \quad i = o, w,$$

и определим неоднородный тензор проницаемости пористой среды

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}(x).$$

Таким образом, в некоторой области Ω математическая модель, описывающая процесс двухфазной фильтрации, задается системой уравнений для насыщенности, давления и скорости

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (f'_w(S) \nabla S) + \nabla(\mathbf{k}\lambda_o p'_c(S) \nabla S) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1.10)$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{k}\lambda(S) \nabla p, \quad x \in \Omega, \quad (1.11)$$

где $f'_w(S) = \frac{\partial f_w}{\partial S}$.

Без учета капиллярных сил система уравнений принимает следующий упрощенный вид:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (f'_w(S) \nabla S) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1.13)$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{k}\lambda(S) \nabla p, \quad x \in \Omega. \quad (1.14)$$

Система уравнений дополняется начальным условием для насыщенности:

$$S(x, 0) = S_0, \quad x \in \Omega, \quad (1.15)$$

и граничными условиями для давления

$$p = p_1, \quad x \in \Gamma_1, \quad p = p_2, \quad x \in \Gamma_2, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega/\Gamma_1/\Gamma_2, \quad (1.16)$$

и насыщенности

$$\frac{\partial S}{\partial x} = S_1, \quad x \in \Gamma_1, \quad \frac{\partial S}{\partial x} = S_2, \quad x \in \Gamma_2. \quad (1.17)$$

Далее будем предполагать, что Ω — прямоугольная область, а Γ_1 и Γ_2 — часть левой и правой границы соответственно (рис. 1).

Нелинейный характер уравнений и методов, применяемых для их решения, во многом зависят от функциональных соотношений, которые определяют свойства жидкостей и породы в зависимости от искомых переменных: давлений и насыщенности. Вязкости нефти и воды сильно зависят от температуры. Зависимость от давления не очень существенна, поэтому при проведении гидродинамических расчетов изотермической фильтрации вязкости будем полагать постоянными. Отметим, что капиллярное давление зависит от насыщенности водной фазы.

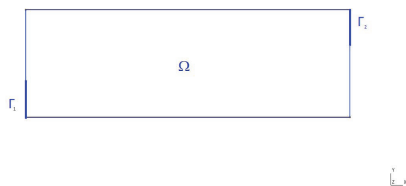
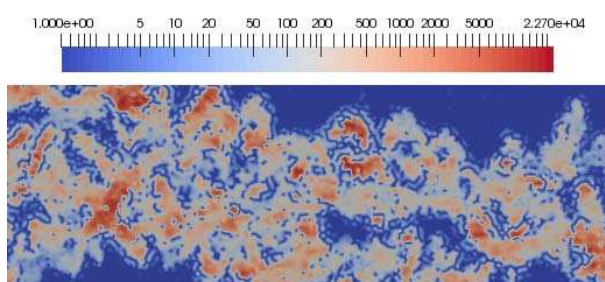
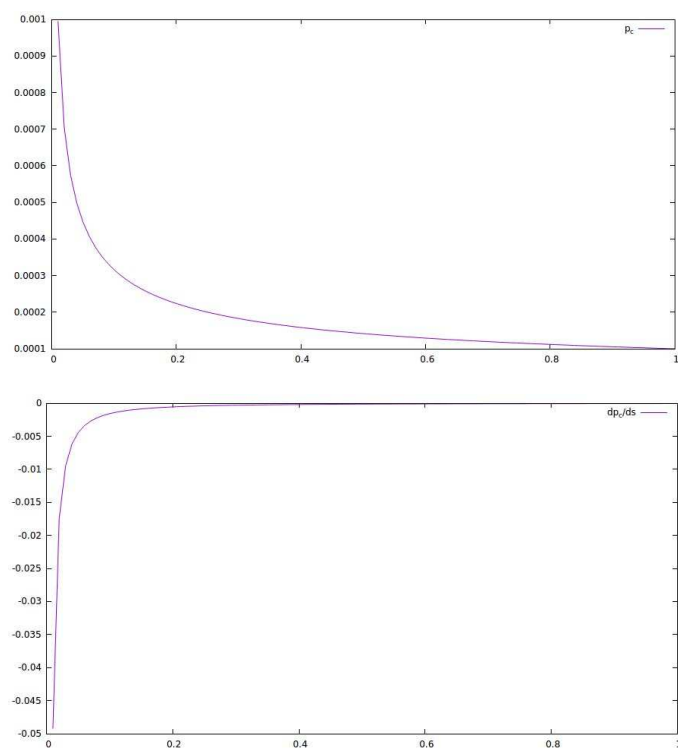
Рис. 1. Расчетная область Ω 

Рис. 2. Проницаемость пористой среды

Рис. 3. Графики зависимости капиллярных сил $p_c(S)$ и их производных $p'_c(S)$

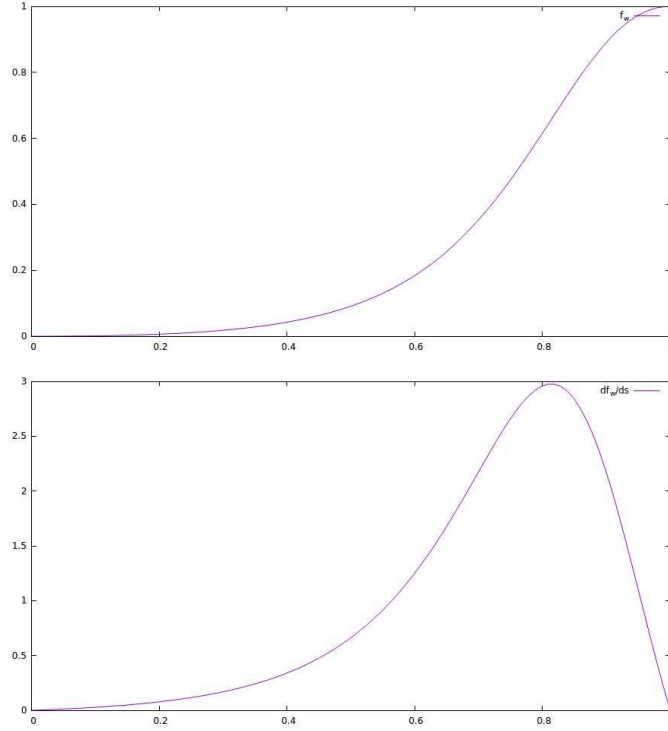


Рис. 4. Графики зависимости доли фазы воды $f_w(S)$ и ее производной $f'_w(S)$

2. Аппроксимация по времени

Вычислительные алгоритмы для приближенного решения начально-краевых задач для нелинейной системы уравнений многофазной жидкости базируются на той или иной линеаризации. Рассмотрим аппроксимации системы уравнений фильтрации двухфазной жидкости по времени. Пусть по времени введена равномерная сетка с шагом τ , так что

$$t_0 = 0, \quad t_{n+1} = t_n + \tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В своем рассмотрении ограничимся двухслойными разностными аппроксимациями, которые связывают решение на $n + 1$ временном слое с решением на n слое.

При решении нелинейных нестационарных задач математической физики естественно использовать линеаризованные схемы, в которых нелинейные коэффициенты берутся с предыдущего временного слоя. В этом случае адаптация к резким изменениям решения достигается выбором временных шагов. Неявная линеаризованная схема имеет следующий вид:

$$\phi \frac{S^{n+1} - S^n}{\tau} + \mathbf{u}^{n+1} \nabla (f'_w(S^n) \nabla S^{n+1}) + \nabla (\mathbf{k} \lambda_o p'_c(S^n) \nabla S^{n+1}) = 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{k}^{-1}u^{n+1} + \lambda(S^n)\nabla p^{n+1} = 0. \quad (2.3)$$

Полученные уравнения можно решать последовательно. Сначала рассчитываются давление и скорости $(\mathbf{u}, p)$, а затем — значения насыщенности S .

Таким образом, представленный вычислительный алгоритм имеет следующие особенности:

- Улучшение устойчивости метода за счет неявного учета насыщенностей, но без совместного решения уравнений;
- Все функции, зависящие от насыщенности, $k_{ri}(S), p_c(S)$, вычисляются с использованием значений с предыдущего временного слоя.

3. Аппроксимация по пространству методом конечных элементов

Для аппроксимации по пространственным переменным применим метод конечных элементов и получим следующую вариационную формулировку: найти $S \in Q(\Omega)$ и $(\mathbf{u}, p) \in V(\Omega) = [H(\Omega)]^d \times L(\Omega)$ такие, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi \frac{S^{n+1} - S^n}{\tau} r \, dx + \int_{\Omega} (\mathbf{u}^{n+1}, f'_w(S^n) \nabla S^{n+1}) r \, dx \\ - \int_{\Omega} (\mathbf{k} \lambda_o p'_c(S^n) \nabla S^{n+1}, \nabla r) \, dx = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} q \, dx = 0, \quad (3.2)$$

$$\int_{\Omega} ((\mathbf{k} \lambda(S^n))^{-1} \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}) \, dx - \int_{\Omega} p^{n+1} \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\partial\Omega} p^{n+1} \cdot n \mathbf{v} \, ds = 0, \quad (3.3)$$

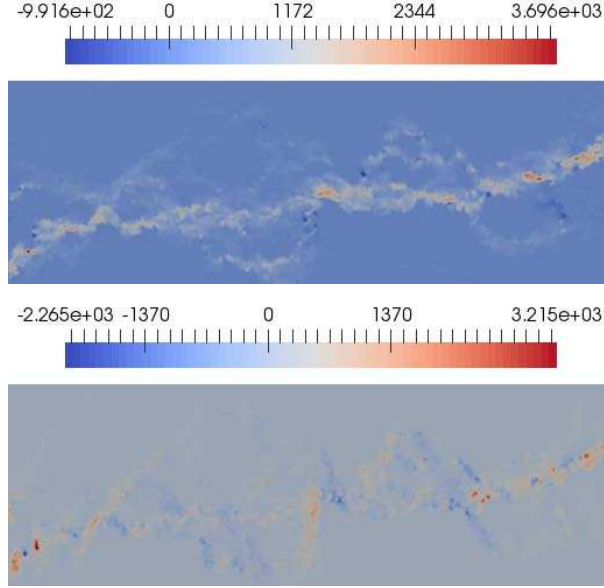
где $r \in \widehat{Q}(\Omega)$ и $(\mathbf{v}, q) \in \widehat{V}(\Omega) = [H(\Omega)]^d \times L(\Omega)$, $d = 2, 3$.

Для численного решения мы должны перейти от непрерывной вариационной задачи к дискретной для некоторого треугольного разбиения $\mathcal{T}_h$ области Ω , где h — размерность расчетной сетки.

Введем конечномерные пространства $Q_h \subset Q$, $\widehat{Q}_h \subset \widehat{Q}$ и $V_h \subset V$, $\widehat{V}_h \subset \widehat{V}$ и определим в них следующую дискретную задачу: найти $S_h \in Q_h$ и $(\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h$ такие, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi \frac{S_h^{n+1} - S_h^n}{\tau} r \, dx + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{n+1}, f'_w(S_h^n) \nabla S_h^{n+1}) r \, dx \\ - \int_{\Omega} (\mathbf{k} \lambda_o p'_c(S_h^n) \nabla S_h^{n+1}, \nabla r) \, dx = 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1} q \, dx = 0, \quad (3.5)$$

Рис. 5. Скорость фильтрации $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$

$$\int_{\Omega} ((k\lambda(S_h^n))^{-1} \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}) dx - \int_{\Omega} p_h^{n+1} \nabla \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\partial\Omega} p_h^{n+1} \cdot n \mathbf{v} ds = 0, \quad (3.6)$$

где $r \in \widehat{Q}_h$ и $(\mathbf{v}, q) \in \widehat{V}_h$.

В качестве базисных функций для скорости и давления будем использовать элементы Равиа — Тома, а для насыщенности будем использовать линейные полиномы с дополнительной численной стабилизацией. Поскольку метод Галёркина на дискретном уровне дает аналог центрального разностного отношения конвективного члена уравнения, это ведет к возникновению осцилляций за счет немонотонности дискретного оператора конвекции. Известно, что для борьбы с осцилляциями в методе конечных разностей используются потоковые схемы. Противопотоковые схемы можно построить посредством добавления искусственной диффузии для центрально-разностной схемы.

4. Результаты численного моделирования

Приведем результаты численного решения модельной задачи двухфазной фильтрации в прямоугольной области Ω (см. рис. 1). Проницаемость пористой среды зададим неоднородной из [20] (50 слой, рис. 2) и положим

$$\mu_o = 0.0003, \quad \mu_w = 0.003, \quad \phi = 1.$$

Рассмотрим три случая задания коэффициентов:

СЛУЧАЙ 1. Линейные коэффициенты относительной проницаемости без учета капиллярных сил

$$k_o = (1 - S), \quad k_w = S.$$

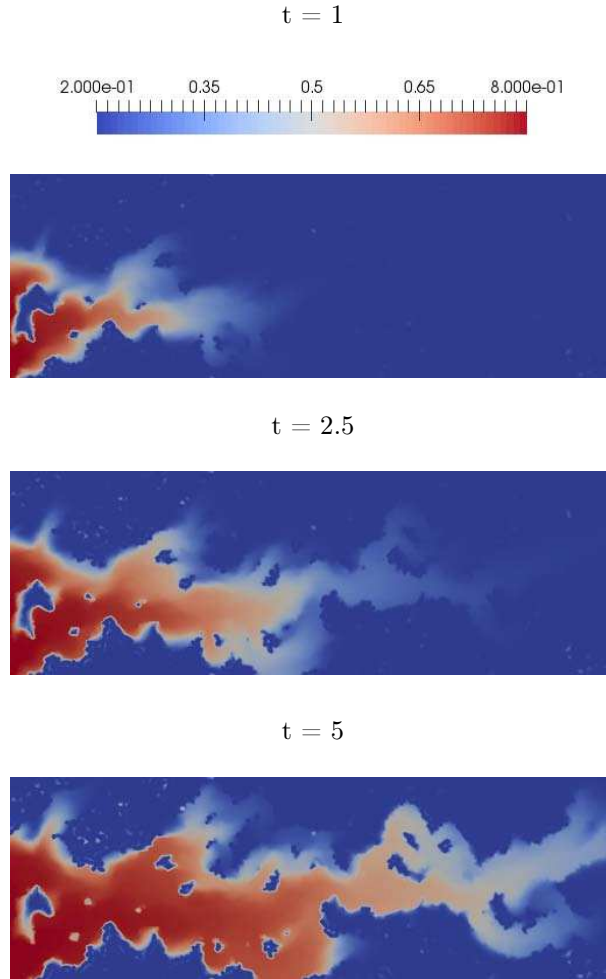


Рис. 6. Насыщенность S при линейном случае относительных проницаемостей (случай 1) на различных временных слоях

СЛУЧАЙ 2. Нелинейные коэффициенты относительной проницаемости без учета капиллярных сил

$$k_o = (1 - S)^2, \quad k_w = S^2.$$

СЛУЧАЙ 3. Нелинейные коэффициенты относительной проницаемости с учетом капиллярных сил

$$k_o = (1 - S)^2, \quad k_w = S^2, \quad p_c = p_{cb} S^{-\frac{1}{\theta}},$$

где $\theta = 2.0$ и $p_{cb} = 0.0001$.

В качестве граничных условий задавались

$$S = 1, \quad p = 1, \quad x \in \Gamma_1, \quad S = 0, \quad p = 0 \quad x \in \Gamma_2.$$

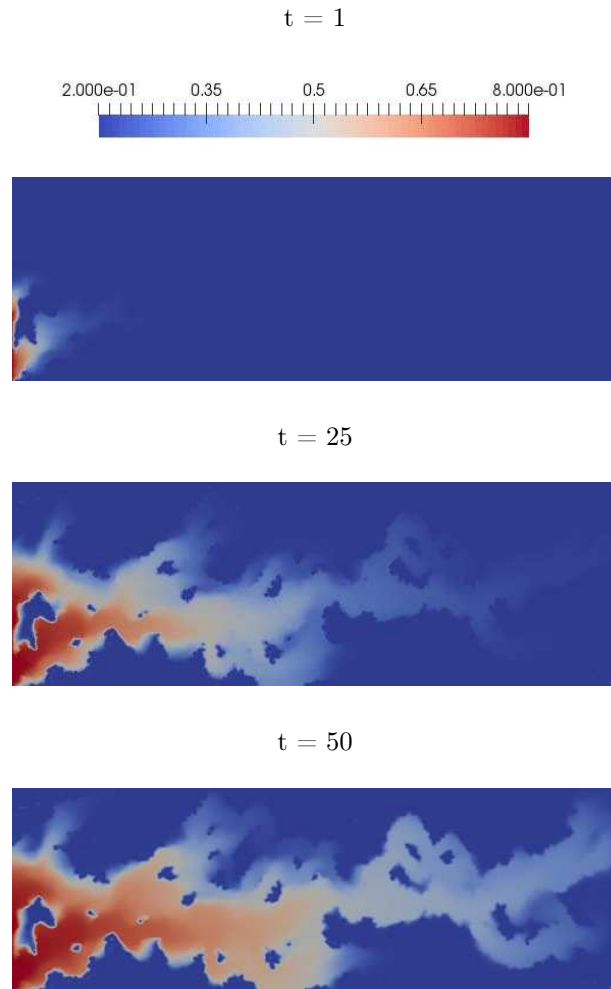


Рис. 7. Насыщенность S при нелинейном случае относительных проницаемостей (случай 2) на различных временных слоях

Расчет проводился при $T_{\max} = 0.20$ с шагом по времени $\tau = 0.004$ с использованием 50 временных слоев. Численное моделирование проводилось на неструктурированной треугольной равномерной расчетной сетке, содержащей 10181 вершин, 29937 ребер и 19958 ячеек.

Для проведения численных расчетов использовалась свободная библиотека FEniCS [21]. Для построения расчетной сетки использовалась свободно распространяемая программа Gmsh [22]. Визуализация данных проводилась с использованием программы Paraview [23]. Для численного нахождения полей давления и скорости использовался прямой метод, который также был использован и при решении уравнения для насыщенности.

Графики зависимостей доли фазы воды и капиллярных сил и их производ-

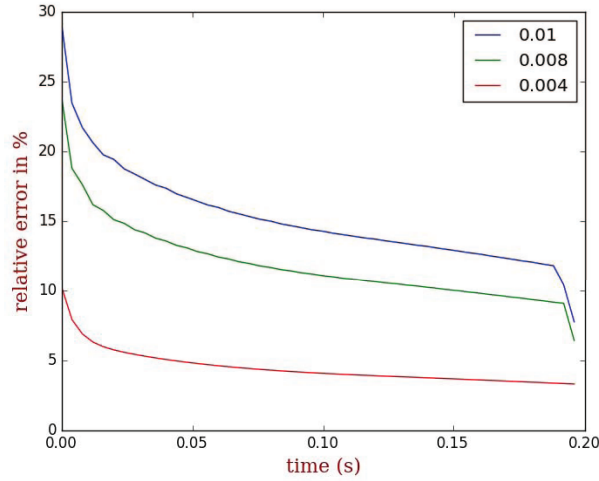


Рис. 8. Численное исследование относительной погрешности для насыщенности в зависимости от изменения шага по времени $\tau = 0.004, 0.008$ и 0.01

ных от насыщенности показаны на рис. 3, 4. На рис. 5 представлено распределение скорости по X и Y на конечный момент времени для случая 1. Распределения для насыщенности на различные моменты времени представлены на рис. 6 для случая 1. На рис. 7 представлены результаты для случая 2. Проведенное моделирование позволяет сделать вывод, что использование различных формул для относительных проницаемостей может существенно сказываться на моделировании течения в пористой среде. Например, при линейных коэффициентах относительных проницаемостей (случай 1) течения оказываются более быстрыми, чем при использовании нелинейных коэффициентов (случай 2).

Проведем численное сравнение зависимости решения задачи при различных значениях шага по времени $\tau = 0.004, 0.008$ и 0.01 (рис. 8). Мы вычисляли относительную погрешность

$$e = \frac{\int_{\Omega} (u_e - u)^2 dx}{\int_{\Omega} u_e^2 dx},$$

где u_e — эталонное решение при $\tau = 0.001$. Сравнение проводилось для случая 3. Отметим, что погрешность решения при $\tau = 0.004$ менее десяти процентов, что оптимально с вычислительной точки зрения.

Распределения насыщенностей для нелинейных коэффициентов с учетом капиллярного давления представлены на рис. 9. При сравнении со случаем без учета капиллярных сил (рис. 10) получили более диффузирующее решение.

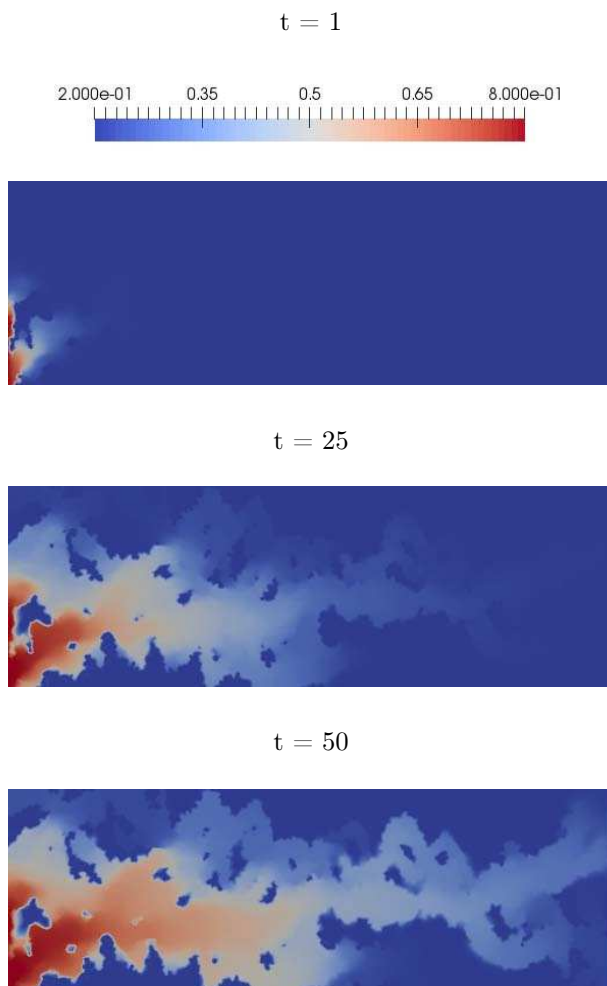


Рис. 9. Насыщенность S при нелинейном случае относительных проницаемостей и наличии капиллярных сил (случай 3) на различных временных слоях

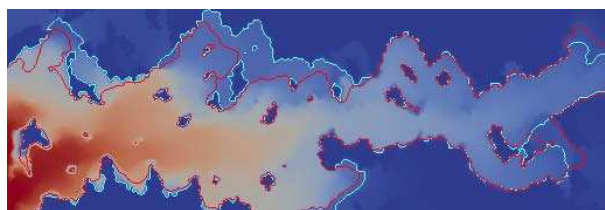


Рис. 10. Численное сравнение учета наличия капиллярных сил. Насыщенности для случая 1 (красное) и случая 2 (голубое) на последний момент времени (изолиния $S = 0.25$)

5. Заключение

В работе рассмотрен метод решения задач двухфазной фильтрации с использованием метода конечных элементов, основанный на смешанной обобщенной постановке в терминах скорость — давление и насыщенность. Для численного решения задачи строится неявная аппроксимация по времени для уравнения насыщенности и конечно-элементная аппроксимация по пространственным переменным. Аппроксимация конвективного члена в уравнении для насыщенности строится с использованием потоковых схем посредством введения искусственной диффузии. Рассмотрен смешанный метод конечных элементов для переменных скорость — давление на треугольных неструктурированных сетках, позволяющий решать задачи в области со сложной геометрией. Вычислительная реализация базируется на открытой библиотеке FEniCS. Проведено численное моделирование задач с использованием рассмотренного алгоритма в двумерной постановке для случая неоднородных свойств пластов. Исследовано поведение насыщенности при разных параметрах, при действии разных сил, с учетом нелинейности коэффициентов.

В дальнейшем планируется рассмотреть подробно методы линеаризации (метод Ньютона) для решения связанной системы уравнений и провести численное моделирование задач многофазной фильтрации в трехмерной постановке с учетом наличия сетей трещин различного масштаба.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aziz K., Settari A. Petroleum reservoir simulation. Applied Sci. Publ., 1979.
2. Bear J. Dynamics of fluids in porous media. Dover Publ., 1988.
3. Chen Z., Huan G., Ma Y. Computational methods for multiphase flows in porous media. Society for Industrial Mathematics, 2006.
4. Афанасьева Н. М., Васильева М. В., Захаров П. Е. Параллельное численное моделирование процесса заводнения нефтяного месторождения // Мат. заметки СВФУ. 2011. Т. 18, вып. 1. С. 159–172.
5. Васильева М. В., Васильев В. И., Тимофеева Т. С. Численное решение методом конечных элементов задач диффузионного и конвективного переноса в сильно гетерогенных пористых средах // Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физико-математические науки. 2016. Т. 158, № 2. С. 243–261.
6. Васильев В. И., Васильева М. В., Никифоров Д. Я. Решение задач однофазной фильтрации методом конечных элементов на вычислительном кластере // Вестн. Северо-Восточн. федерал. ун-та им. М. К. Аммосова. 2016. № 6. С. 8–17.
7. Akkutlu I. Y., Efendiev Y., Vasilyeva M., Wang Y. Multiscale model reduction for transport and flow problems in perforated domains. Multiscale model reduction for shale gas transport in poroelastic fractured media // J. Comput. Physics. 2018. V 353. P. 356–376.
8. Васильев В. И., Попов В. В., Тимофеева Т. С. Вычислительные методы в разработке месторождений нефти и газа. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
9. Вабищевич П. Н. Явно-неявные вычислительные алгоритмы для задач многофазной фильтрации // Мат. моделирование. 2010. Т. 22, № 4. С. 118–128.
10. Vabishchevich P. N., Vasil'eva M. Iterative solution of the pressure problem for the multiphase filtration // Math. Modell. Anal. 2012. V. 17, N 4. P. 532–549.
11. Васильева М. В. Численное моделирование фильтрации на многопроцессорных системах // Мат. заметки ЯГУ. 2010. Т. 17, вып. 2. С. 105–112.
12. Афанасьева Н. М., Васильева М. В., Захаров П. Е. Параллельное численное моделирование процесса заводнения нефтяного месторождения // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18,

- вып. 1. С. 159–172.
13. *Chung E. T., Leung W. T., Vasilyeva M.* Mixed GMsFEM for second order elliptic problem in perforated domains // *J. Comput. Appl. Math.* 2016. V. 304. P. 84–99.
 14. *Brezzi F., Fortin M.* Mixed and hybrid finite element methods. Berlin: Springer-Verl., 1991.
 15. *Raviart P. A., Thomas J. M.* A mixed finite element method for 2-nd order elliptic problems // *Mathematical aspects of finite element methods*. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1977. P. 292–315.
 16. *Carstensen C.* A posteriori error estimate for the mixed finite element method // *Math. Comput. Amer. Math. Soc.* 1997. V. 66, N 218. С. 465–476.
 17. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н.* Численные методы решения задач конвекции-диффузии. М.: Едиториал УРСС, 2004.
 18. *Donea J. Huerta A.* Finite element methods for flow problems. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2003.
 19. *Brooks A. N.* A Petrov–Galerkin finite element formulation for convection dominated flows: PhD Thes. California Institute of Technology, 1981.
 20. *Алексеев В. Н., Васильева М. В., Степанов С. П.* Итерационные методы решения для задачи течения и переноса в перфорированных областях // *Вестн. Северо-Восточн. федерал. ун-та им. М. К. Аммосова*. 2016. № 5. С. 67–79.
 21. *Christie M. A., M. J. Blunt.* Tenth SPE comparative solution project: A comparison of upscaling techniques / *SPE Reservoir Simulation Symposium*. Society of Petroleum Engineers, 2001.
 22. *Logg A., Mardal K.-A., Wells G. N.* Automated solution of differential equations by the finite element method. The FEniCS Book. 2011.
 23. Software GMSH. (<http://geuz.org/gmsh/>).
 24. Software package PARAVIEW. (<http://www.paraview.org/>).

Статья поступила 20 марта 2017 г.

Васильева Мария Васильевна, Прокопьев Григорий Анатольевич
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики,
ул. Кулаковского 42, Якутск 677891
vasilyevadotmdotv@gmail.com, reilroot@gmail.com

NUMERICAL SOLUTION TO THE PROBLEM
OF TWO-PHASE FILTRATION
WITH HETEROGENEOUS COEFFICIENTS
BY THE FINITE ELEMENT METHOD
M. V. Vasilyeva and G. A. Prokopiev

Abstract. We consider the process of filtration of a two-phase fluid in a porous, heterogeneous medium. This process is described by a coupled system of equations for saturation, filtration rate, and pore pressure. We consider mathematical models with and without capillary forces, in the presence of which, for saturation, we have a nonstationary convection-diffusion equation. Since this process is characterized by a significant predominance of the convective term in the equation for saturation, counter-current approximations are used by adding non-uniform artificial diffusion. Speed and pressure are approximated using a mixed finite element method. The results of numerical calculations for a two-dimensional case with strongly heterogeneous permeability coefficients of a porous medium are presented. Several cases of relative fluid permeability associated with linear and nonlinear coefficients and the presence of capillary forces are considered.

DOI 10.25587/SVFU.2017.2.9245

Keywords: porous medium, two phase filtration, finite elements method, Galerkin method, numerical simulation.

REFERENCES

1. Aziz K. and Settari A., Petroleum Reservoir Simulation, Appl. Sci. Publ. (1979).
2. Bear J., Dynamics of Fluids in Porous Media, Dover Publ. (1988).
3. Chen Z., Huan G., and Ma Y., Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media, Soc. Ind. Math. (2006).
4. Vasil'ev V. I., Popov V. V., and Timofeeva T. S., Vychislitel'nye Metody v Razrabotke Mestorozhdenij Nefti i Gaza [in Russian], Izdat. SO RAN, Novosibirsk (2000).
5. Vabishhevich P. N., Explicit-implicit computational algorithms for multiphase filtration problems," Math. Models Comput. Simul., **22**, No. 4, 118–128 (2010).
6. Vabishhevich P. N. and Vasilyeva M. V., "Iterative solution to the pressure problem for the multiphase filtration," Math. Modelling Anal., **17**, No. 4, 532–549 (2012).
7. Vasilyeva M. V., "Numerical modelling of filtration at multiprocessor systems," Mat. Zametki YaGU, **17**, No. 2, 105–112 (2010).
8. Afanas'eva N. M., Vasil'eva M. V., and Zaharov P. E., "Parallel'noe chislennoe modelirovanie processa zavodnenija neftjanogo mestorozhdenija," Mat. Zametki YaGU, **18**, No. 1, 159–172 (2011).

The work was supported by the grant from the Russian Scientific Foundation (code 17–71–20055).

9. Chung E. T., Leung W. T., and Vasilyeva M., "Mixed GMsFEM for second order elliptic problem in perforated domains," J. Comput. Appl. Math., **304**, 84–99 (2016).
10. Akkuthlu I. Y., Efendiev Y., Vasilyeva M., and Wang Y., "Multiscale model reduction for transport and flow problems in perforated domains," J. Comput. Phys., **353**, 356–376 (2018).
11. Vasilyeva M. V., Vasilyev V. I., and Timofeeva T. S., "Numerical solution by the finite elements method to the problems of transfer by diffusion and convection in strongly heterogeneous media," Uchen. Zap. Kazan. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki, **158**, No. 2, 243–261 (2016).
12. Alekseev V. N., Vasilyeva M. V., and Stepanov S. P., "Iterative methods for solving the problems of flow and transfer in perforated domains," Vestn. Severo-Vostoch. Federal. Univ., No. 5, 67–79 (2016).
13. Vasil'ev V. I., Vasilyeva M. V., and Nikiforov D. Ya., "Solution to the problems of one-phase filtration by the finite elements method on the computation cluster," Vestn. Severo-Vostoch. Federal. Univ., No. 6 (2016).
14. Brezzi F. and Fortin M., *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer, Berlin (1991).
15. Raviart P. A. and Thomas J. M., "A mixed finite element method for second order elliptic problems," in: *Mathematical Aspects of Finite Element Methods*, Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 292–315 (1977).
16. Carstensen C., "A posteriori error estimate for the mixed finite element method," Math. Comput. Amer. Math. Soc., **66**, No. 218, 465–476 (1997).
17. Samarskij A. A. and Vabishhevich P. N. *Methods for Convection-Diffusion Problems* [in Russian], Editorial URSS, Moscow (2004).
18. Donea J. and Huerta A., *Finite Element Methods for Flow Problems*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester (2003).
19. Brooks A. N., *A Petrov–Galerkin Finite Element Formulation for Convection Dominated Flows*, Calif. Inst. Technology (1981).
20. Christie M. A. and Blunt M. J., *Tenth SPE Comparative Solution Project: A Comparison of Upscaling Techniques*, SPE Reservoir Simulation Symp., Soc. Petroleum Engineers (2001).
21. Logg A., Mardal K.-A., and Wells G. N. (eds.), *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method. The FEniCS Book*, Springer, Heidelberg (2011).
22. Software GMSH. (<http://geuz.org/gmsh/>)
23. Software package PARAVIEW. (<http://www.paraview.org/>)

Submitted March 20, 2017

Maria V. Vasilyeva and Grigorii A. Prokopiev
M. K. Ammosov North-Eastern Federal University,
Institute of Mathematics and Informatics,
42, Kulakovskiy St., Yakutsk 677000, Russia
vasilyeva_mv@mail.ru, reilroot@gmail.com

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ
ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ
В ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПЕРЕНОСА
А. М. Ефимова

Аннотация. Граничные обратные задачи теплопереноса имеют важное прикладное значение, и их численным методам решения посвящены работы многих авторов. В работе рассматривается такой прямой метод решения граничных обратных задач для одномерного параболического уравнения, что на каждом временном слое производится декомпозиция конечно-разностного аналога поставленной задачи. С помощью предлагаемого численного метода решены граничные обратные задачи: с фиксированной границей, с подвижной границей и задача Стефана. Обсуждаются результаты численных расчетов.

DOI 10.25587/SVFU.2017.2.9246

Ключевые слова: граничная обратная задача, граничная обратная задача Стефана, метод конечных разностей, алгоритм прогонки, прогонка по параметру.

1. Введение

В научном мире принято делить задачи на два основных типа: прямые и обратные. Главное их отличие кроется в причинно-следственных связях, в первом случае нужно найти следствие по известным причинам, а во втором случае причины по следствиям. В последние десятилетия существенно возрос интерес к обратным задачам. В первую очередь это связано с быстрым ростом производительности вычислительной техники. Решение обратных задач позволяет сократить расходы ресурсов или сделать доступной информацию для исследований в различных областях науки. Примером могут служить эксперименты по изучению внутреннего строения Земли, целью которого является прогнозирование места и времени землетрясений [1]. С точки зрения важных прикладных исследований большое значение имеют граничные обратные задачи теплопереноса.

В данной работе внимание сконцентрировано на основном механизме теплопереноса — кондуктивной теплопроводности. Этот процесс возникает при неравномерно распределенной температуре, что приводит к обмену энергией между частицами при их непосредственном прикосновении друг к другу. В общей классификации уравнение теплопроводности относится к параболическим

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-01-00732).

уравнениям. Методы, используемые для решения таких задач, обобщены в монографиях [2–7]. Стоит отметить, что среди обратных задач важную роль играют коэффициенты обратных задачи, для их решения применяются различные методы, например, в работах [8–11] линейные задачи на отдельном слое по времени решаются на основе разбиения основной задачи на две стандартные эллиптические задачи. Подход, рассматриваемый в предлагаемой статье, подразумевает применение прямого метода решения граничных обратных задач для одномерного параболического уравнения, основанного на декомпозиции конечно-разностного аналога поставленной задачи на каждом временном слое. С помощью предлагаемого численного метода решены граничные обратные задачи: с фиксированной границей, с подвижной границей и задача Стефана.

2. Постановка задачи

Рассмотрим обратную граничную задачу для уравнения параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad x \in [0, l], \quad t \in (0, T]. \quad (1)$$

где $T > 0$ — финальный момент времени, заданная фиксированная положительная величина.

Опишем вычислительный алгоритм на примере задачи с фиксированной границей.

В начальный момент времени задано начальное условие

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, l]. \quad (2)$$

На правой границе заданы граничное условие первого рода

$$u(l, t) = 0, \quad t \in (0, T], \quad (3)$$

и условие переопределения

$$k(l, t) \frac{\partial u}{\partial x} = \mu(t), \quad t \in (0, T]. \quad (4)$$

Коэффициент $k(x, t)$ является положительной, ограниченной и гладкой функцией, удовлетворяющей условиям

$$0 < k(x, t) < \infty, \quad x \in [0, l], \quad t \in (0, T]. \quad (5)$$

Расчеты будем проводить на модельной задаче с точным решением

$$u(x, t) = \frac{e^{\frac{-x^2}{1+4t}}}{\sqrt{1+4t}}. \quad (6)$$

Найдем решение задачи во всей области, в том числе и на левой границе

$$u(0, t) = g(t), \quad t \in (0, T]. \quad (7)$$

3. Разностный аналог

Перейдем к построению дискретного аналога поставленной задачи. Численное решение граничной обратной задачи проведем с помощью конечно-разностного метода. Введем прямоугольную сетку в рассматриваемом прямоугольнике с шагами h, τ по пространственной переменной и времени соответственно. Чисто неявный конечно-разностный аналог исходного уравнения (1) на каждом временном слое представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей

$$\frac{y_i - \check{y}_i}{\tau} = \frac{1}{h} \left(a_{i+1}(t) \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i(t) \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad t \in \omega_\tau, \quad (8)$$

Аппроксимируем начальные и граничные условия (2)–(4):

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = \overline{0, n}, \quad (9)$$

$$y_n = 0, \quad t \in \omega_\tau, \quad (10)$$

$$\frac{y_n - \check{y}_n}{\tau} = \frac{2}{h} \left(\mu(t) - a_n(t) \frac{y_n - y_{n-1}}{h} \right), \quad t \in \omega_\tau. \quad (11)$$

Разностная схема (8)–(11) на решении исходной дифференциальной задачи (1)–(4) обладает вторым порядком аппроксимации по h и первым по τ .

4. Вычислительный алгоритм

После дискретизации по пространству и времени граничной обратной задачи переходим к численной реализации полученных на каждом временном слое систем линейных алгебраических уравнений. Ее целесообразно проводить с помощью декомпозиции двух вспомогательных сеточных функций

$$y_i = v_i + y_0 \cdot w_i, \quad i = \overline{0, n}. \quad (12)$$

Подставляя выражения (12) в (8), приходим к системе линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, решая которую, получаем значение вспомогательных неизвестных v_i и w_i :

$$\begin{cases} \frac{h^2}{2\tau}(v_n - \check{y}_n) = h\mu(t) - a_n(t)(v_n - v_{n-1}), \\ \frac{h^2}{\tau}(v_i - \check{y}_i) = a_{i+1}(t)(v_{i+1} - v_i) - a_i(t)(v_i - v_{i-1}), \quad i = \overline{1, N-1}, \\ v_0 = 0, \quad v_n = 0, \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \frac{h^2}{2\tau}w_n = -a_n(t)(w_n - w_{n-1}), \\ \frac{h^2}{\tau}w_i = a_{i+1}(t)(w_{i+1} - w_i) - a_i(t)(w_i - w_{i-1}), \quad i = \overline{1, N-1}, \\ w_0 = 1, \quad w_n = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Из уравнений (11) и (12) определим искомое значение решения на левой границе y_0 :

$$y_0 = \frac{\check{y}_n - v_n + \frac{2}{h}(\mu(t) + a_n(t)\frac{v_n - v_{n-1}}{h})}{\frac{1}{\tau} + 2a_n(t)\frac{1 - w_{n-1}}{h^2}}. \quad (15)$$

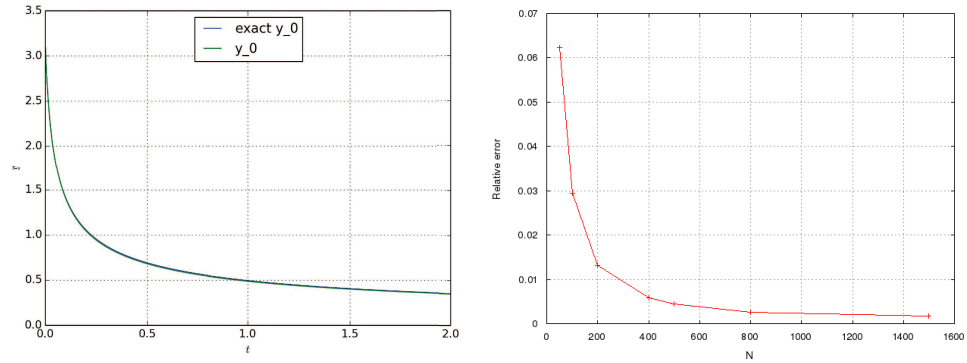


Рис. 1. Графики сравнения решений на левой границе для задачи с фиксированной границей при $N=200$ (слева) и зависимость относительной погрешности решения от количества узлов (справа)

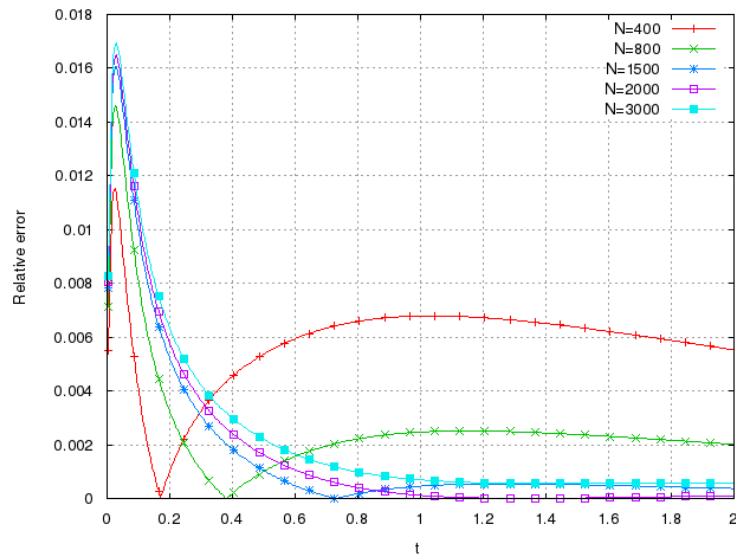


Рис. 2. График зависимости относительной погрешности решения от t при разных количествах узлов N

На рис. 1, 2 представлены результаты для задачи с фиксированной границей. На рис. 1 проиллюстрированы графики искомой левой границы и точного решения. Из их сравнения видно, что идентификация неизвестной границы прошла с достаточной точностью.

Из рис. 1 и 2 следует, что эффективность метода для данной задачи зависит от количества узлов, для наилучшего результата рекомендуется выбирать значения ближе к $N = 2000$.

5. Вычислительный эксперимент

Рассмотрим работу [12], где авторы решили задачу с подвижной границей и задачу Стефана методом фундаментальных решений. Для вычислительного эксперимента произведем расчеты на представленных ими модельных задачах, используя наш метод, вычислительный алгоритм которого изложен выше.

5.1. Задача с подвижной границей. В области, представленной на рис. 3, требуется найти значение на левой границе.

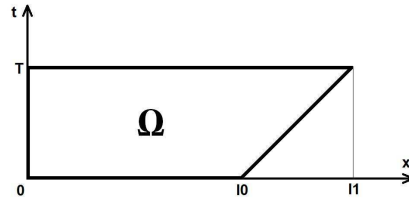


Рис. 3. Геометрия задачи

Рассмотрим следующую нелинейную функцию:

$$s(t) = 2 - \sqrt{3 - 2t}, \quad x \in (0, T \approx l]. \quad (16)$$

Точное решение:

$$u(x, t) = -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2} - t, \quad (x, t) \in [0, s(t)] \times [0, T]. \quad (17)$$

Начальные условия:

$$u(x, 0) = -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2}, \quad x \in [0, s(0)], \quad s(0) = 2 - \sqrt{3}. \quad (18)$$

В качестве граничного условия первого рода примем формулу (3), второго рода —

$$\frac{\partial u}{\partial x}(s(t), t) = \sqrt{3 - 2t}, \quad t \in (0, T]. \quad (19)$$

Ниже представлен алгоритм вычисления шага по времени τ_j :

$$s_j - s_{j-1} = h. \quad (20)$$

Подставив в (20) выражение (16), получим

$$2 - \sqrt{3 - 2t_j} - 2 + \sqrt{3 - 2t_{j-1}} = h. \quad (21)$$

Выразим t_j и найдем τ_j :

$$t_j = \frac{2t_{j-1} + 2h\sqrt{3 - 2t_{j-1}} - h^2}{2}, \quad (22)$$

$$\tau_j = t_j - t_{j-1}. \quad (23)$$

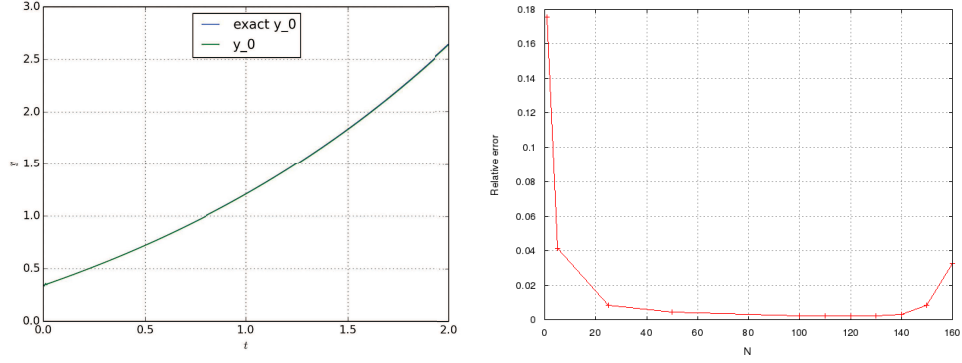


Рис. 6. Графики сравнения решений на левой границе для задачи Стефана при $N=100$ (слева) и зависимость относительной погрешности решения от количества узлов (справа)

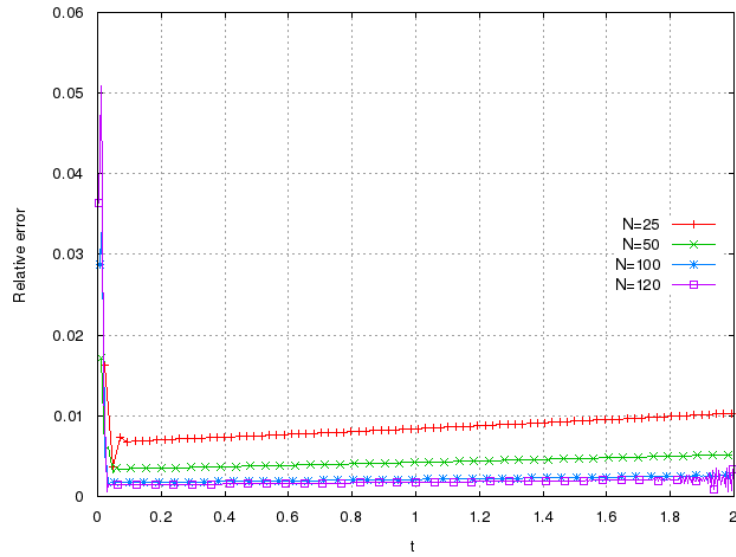


Рис. 7. График зависимости относительной погрешности решения от t при разных количествах узлов N

После замены дифференциальных операторов получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\frac{y_i - \tilde{y}_i}{\tau} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}, \quad i = \overline{1, n+j-1}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (24)$$

Произведем аппроксимацию начальных и граничных условий:

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = \overline{0, n}, \quad (25)$$

$$y_{n+j} = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (26)$$

$$\frac{y_{n+j} - y_{n+j-1}}{h} = \sqrt{3 - 2t}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (27)$$

Для дальнейших вычислений введем вспомогательные переменные

$$r = \frac{h^2}{\tau}, \quad (28)$$

$$r2 = 2 + r. \quad (29)$$

Из формул (12) и (27) получаем

$$y_{i+1} - r2y_i + y_{i-1} + r\ddot{y}_i, \quad i = \overline{1, n+j-1}. \quad (30)$$

Распишем (30) отдельно по компонентам v и w :

$$\begin{cases} v_{i+1} - r2 \cdot v_i + v_{i-1} + r\ddot{y}_i = 0, & i = \overline{1, n+j-1}. \\ w_{i+1} - r2 \cdot w_i + w_{i-1} = 0, & i = \overline{1, n+j-1}. \end{cases} \quad (31)$$

$$v_{n+j} - v_{n+j-1} + y_0(w_{n+j} - w_{n+j-1}) - h\sqrt{3 - 2t} = 0. \quad (32)$$

Перегруппируем слагаемые и через предварительно найденные v и w методом прогонки найдем решение на искомой левой границе:

$$y_0 = \frac{h\sqrt{3 - 2t} + v_{n+j-1} - v_{n+j}}{w_{n+j} - w_{n+j-1}}. \quad (33)$$

На рис. 4, 5 приведены результаты для задачи с подвижной границей. Графики решений прямой и обратной задач говорят об эффективной работе метода.

Из полученных результатов можно сделать вывод, что используемый метод в задаче с подвижной границей имеет определенный диапазон значений N . Рекомендуется выбирать достаточно небольшое количество узлов, например, в пределах 110.

5.2. Задача Стефана. Расчетную область примем такую же, как в предыдущей задаче, представленную на рис. 4. Для проверки работы метода в задаче Стефана выберем следующую функцию:

$$s(t) = \sqrt{2} - 1 + \frac{t}{\sqrt{2}}, \quad t \in (0, T = 2]. \quad (34)$$

Точное решение:

$$u(x, t) = -1 + \exp\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{t}{2} - \frac{x}{\sqrt{2}}\right), \quad (x, t) \in [0, s(t)] \times [0, T]. \quad (35)$$

Начальное условие:

$$u(x, 0) = -1 + \exp\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}}\right), \quad x \in [0, s(0)], \quad s(0) = \sqrt{2} - 1. \quad (36)$$

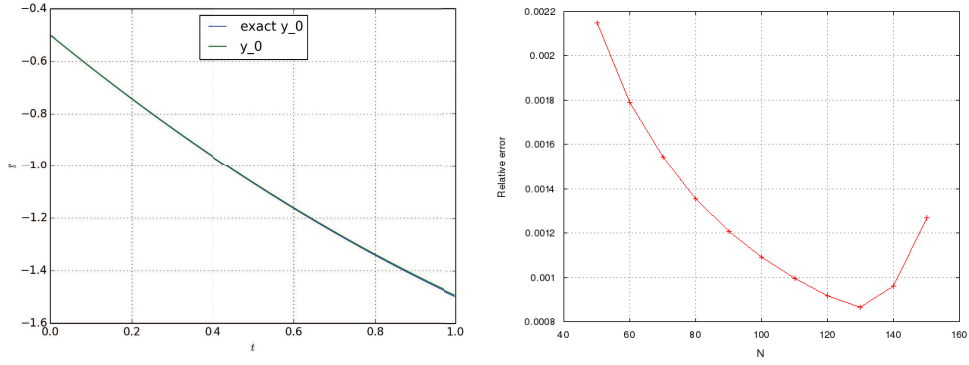


Рис. 4. Графики сравнения решений на левой границе
для задачи с подвижной границей при $N=50$ (слева)
и зависимость относительной погрешности решения от количества узлов (справа)

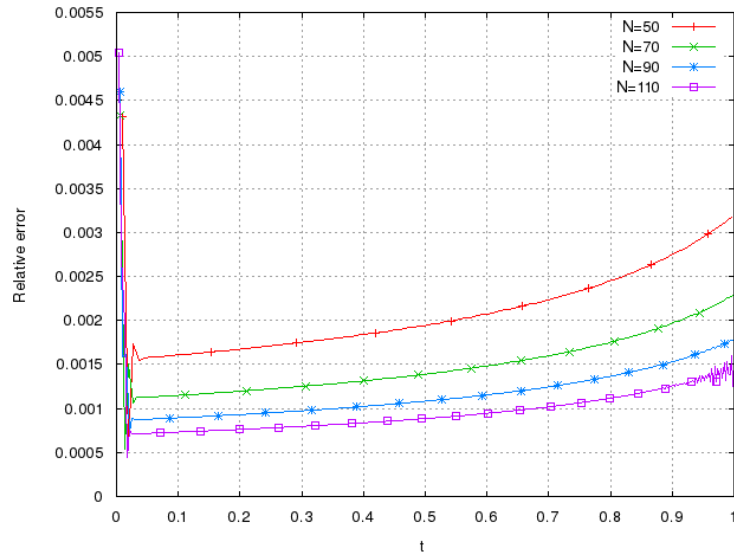


Рис. 5. График зависимости относительной погрешности решения от t
при разных количествах узлов N

Граничное условие первого рода такое же, как в уравнении (3). Второго рода:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(s(t), t) = -\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad t \in (0, T], \quad (37)$$

$$\frac{y_{n+j} - y_{n+j-1}}{h} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (38)$$

Произведем операции, аналогичные проделанным в предыдущей задаче, и

получим искомое решение на левой границе:

$$y_0 = \frac{v_{n+j-1} - v_{n+j} - \frac{h}{\sqrt{2}}}{w_{n+j} - w_{n+j-1}}. \quad (39)$$

На рис. 6, 7 приведены результаты для задачи Стефана. Сравнение полученного решения с точным позволяет увидеть, насколько действенно работает данный метод.

Результаты эксперимента свидетельствуют о том, что предложенный метод декомпозиции конечно-разностного аналога позволяет достаточно точно определить неизвестную границу при условии правильного выбора количества узлов в задаче. Для задачи Стефана N рекомендуется выбирать в промежутке от 50 до 120.

6. Заключение

Решены обратные задачи по восстановлению граничного условия задач теплопереноса методом, основанным на декомпозиции сеточных функций. В ходе работы представлен алгоритм идентификации граничного условия. Численно решены три обратные задачи: с фиксированной границей, подвижной границей и задача Стефана. Построены графики сравнения полученного численным методом решения с точными решениями и зависимости относительной погрешности от количества узлов пространственной сетки и числа слоев по времени. Из полученных результатов можно сделать вывод, что данный метод весьма эффективен.

Благодарности. Автор выражает искреннюю благодарность профессору В. И. Васильеву за поддержку и помощь при работе над рукописью, а также многочисленные полезные советы, которые были учтены при ее доработке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Методы решения прямых и обратных задач сейсмологии, электромагнетизма и экспериментальные исследования в проблемах изучения геодинамических процессов в коре и верхней мантии Земли / А. С. Алексеев, В. С. Белоносов, Б. М. Глинский и др. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2010.
2. Алифанов О. В. Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988.
3. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
4. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: СНИ, 2009.
5. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: ЛКИ, 2009.
6. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
7. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
8. Вабищевич П. Н., Васильев В. И., Васильева М. В. Вычислительная идентификация правой части параболического уравнения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2015. Т. 55, № 6. С. 1020–1027.
9. Вабищевич П. Н., Васильев В. И. Вычислительная идентификация младшего коэффициента параболического уравнения // Докл. АН. 2014. Т. 455, № 3. С. 258–260.
10. Vabishchevich P. N., Vasil'ev V. I. Computational algorithms for solving the coefficient inverse problem for parabolic equations // Inverse Probl. Sci. Engin. 2016. V. 24, Issue 1. P. 42–59.

11. Vasil'ev V. I., Vasilyeva M. V., Kardashevsky A. M. The numerical solution of the boundary inverse problem for a parabolic equation // AIP Conf. Proc. 2016. V. 1773. 100010.
12. Johansson B. T., Lesnic D., Reeve T. A method of fundamental solutions for the one-dimensional inverse Stefan problem // Appl. Math. Modell. 2011. V. 35, N 9. P. 4367–4378.

Статья поступила 31 марта 2017 г.

Ефимова Айма Михайловна
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова
Институт математики и информатики
ул. Кулаковского 42, Якутск 677891
`aima.efimova@yandex.ru`

COMPUTATIONAL IDENTIFICATION OF THE BOUNDARY CONDITION IN THE HEAT TRANSFER PROBLEMS

A. M. Efimova

Abstract. The inverse boundary-value problems of heat transfer are of great practical importance, and the work of many authors is devoted to the numerical methods of their solution. We consider a direct method for solving inverse boundary-value problems for a one-dimensional parabolic equation that decomposes a finite-difference analogue of the problem at each time layer. With the help of the proposed numerical solution, we solve the inverse boundary-value problems with a fixed boundary, with a moving boundary, and the Stefan problem. The results of numerical calculations are discussed.

DOI 10.25587/SVFU.2017.2.9246

Keywords: inverse boundary problem, inverse Stefan problem, finite difference method, marching method.

REFERENCES

1. Alekseev A. S., Belonosov V. S., and Glinsky B. M., Methods for Solving Direct and Inverse Problems of Seismology, Electromagnetism, and Experimental Studies in the Problems of Studying Geodynamic Processes in the Crust and Upper Mantle of the Earth [in Russian], Izdat. Vychisl. Tsentra SO RAN, Novosibirsk (2010).
2. Alifanov O. M., Heat Exchange Inverse Problems [in Russian], Eurasia, Moscow, (1988).
3. Tikhonov A. N. and Arsenin V. Yu., Solutions of Ill Posed Problems [in Russian], Nauka, Moscow (1986).
4. Kabanikhin S. I., Inverse and Ill-posed Problems [in Russian], Novosibirsk, Sib. Sci. Publ. House (2009).
5. Samarskiy A. A. and Vabishchevich P. N., Numerical Methods of Solution of Inverse Problems of Mathematical Physics [in Russian], Izdat. LKI, Moscow (2009).
6. Kalitkin N. N., Numerical Methods [in Russian], Nauka, Moscow (1978).
7. Samarskiy A. A., The Theory of Difference Schemes [in Russian], Nauka, Moscow, (1977).
8. Vabishchevich P. N., Vasil'ev V. I., and Vasilyeva M. V., "Computational identification of the right-hand side of a parabolic equation," *Comput. Math. Math. Phys.*, **55**, No. 6, 1015–1021 (2015).
9. Vabishchevich P. N. and Vasil'ev V. I., "Computational determination of the lowest order coefficient in a parabolic equation," *Dokl. Math.*, **89**, No. 2, 179–181 (2014).
10. Vabishchevich P. N. and Vasil'ev V. I., "Computational algorithms for solving the coefficient inverse problem for parabolic equations," in: *Inverse Problems in Science and Engineering*, **24**, No. 1, 42–59 (2016).
11. Vasil'ev V. I., Vasilyeva M. V., and Kardashevsky A. M., "The numerical solution of the boundary inverse problem for a parabolic equation," in: *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*, AIP Conf. Proc., AIP Publ., **1773**, No. 1, 100010 (2016).

Russian Foundation for Basic Research (project code 17-01-00732).

- 12.** Johansson B. T., Lesnic D., and Reeve T., “A method of fundamental solutions for the one-dimensional inverse Stefan problem,” Appl. Math. Model., **35**, No. 9, 4367–4378 (2011).

Submitted March 31, 2017

Aima M. Efimova
M. K. Ammosov North-Eastern Federal University,
Institute of Mathematics and Informatics,
42, Kulakovsky St., Yakutsk 677000, Russia
`aima.efimova@yandex.ru`

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ЭФФЕКТИВНОГО КОЭФФИЦИЕНТА В ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТИ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА

П. Е. Захаров, П. В. Сивцев

Аннотация. Рассмотрен численный расчет эффективного коэффициента задачи линейной упругости композитного материала на отдельном представительном элементе, имеющем аналогичную объемную долю фибр. Полученный эффективный коэффициент используют для решения полной задачи на грубой сетке. В качестве примера рассматривается задача расчета деформации бетонного блока с включением стальных фибр под действием трехточечного изгиба. Вычислительная реализация задачи проводится методом конечных элементов с использованием вычислительной платформы FEniCS.

DOI 10.25587/SVFU.2017.2.9247

Ключевые слова: численное усреднение, линейная упругость, композитный материал, математическое моделирование, эффективный коэффициент.

1. Введение

Композитные материалы широко применяются в большинстве отраслей промышленности: автомобилестроении, судостроении, производстве авиационной и космической техники, а также в различных областях, связанных с сельским хозяйством, обороной и нефтепереработкой. Причиной тому является низкая стоимость и высокая устойчивость к различным видам воздействий, например механическим, температурным или химическим.

Рассматривается стационарная задача линейной упругости композитных материалов, состоящих из основного материала с включением случайно распределенных фибр. Ярким примером подобных композитов являются бетонные блоки и конструкции с включенными стальными и полипропиленовыми фибрами. Такое изделие обладает большой прочностью, повышенным сопротивлением к образованию трещин и имеет большой срок службы.

При расчете напряженно-деформированного состояния композита возникает необходимость учета измененных свойств материала. При решении задачи с учетом всех включений возрастает вычислительная сложность задачи за счет

Работа была выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 17-01-00732А (Захаров П. Е.) и за счет Российского научного фонда, грант № 17-71-20055 (Сивцев П. В.).

применения очень подробной сетки. Для некоторого типа подзадач вместо учета всех включений можно обойтись решением задачи на более грубой сетке с использованием эффективных коэффициентов.

Для вычисления эффективных коэффициентов могут быть использованы аналитические [1, 2] или численные [3–5] методы. Аналитические методы ограничены самыми простыми вариантами геометрий фибр и предназначены для изотропных композитных материалов.

В этой статье рассматриваем численное усреднение коэффициентов задачи на отдельном представительном элементе, имеющем аналогичную объемную долю фибр. Полученные эффективные коэффициенты используются для решения полной задачи на грубой сетке. В качестве примера рассматривается двумерная задача расчета деформации бетонного блока с включением стальных фибр под действием трехточечного изгиба [6–8]. Численная реализация задачи проводится методом конечных элементов с использованием вычислительной платформы FEniCS [9].

2. Постановка задачи

Рассмотрим математическую модель, описывающую напряженно-деформированное состояние в расчетной области, содержащей железобетонную плиту, зажатую между прессом и рельсами:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжения, ρ — плотность материала, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ — вектор объемных сил в точке $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Здесь область состоит из четырех подобластей: $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$, где Ω_1 — бетонная подобласть плиты, Ω_2 — подобласть стальных фибр в бетоне, Ω_3 — пресс, Ω_4 — рельсы. Отметим, что плотность материала ρ зависит от подобласти и определяется следующим образом:

$$\rho = \rho_i, \quad \mathbf{x} \in \Omega_i, \quad i = 1, \dots, 4.$$

Уравнение (1) дополняется соотношениями между вектором перемещений $\mathbf{u}$, тензором напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и тензором деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$. Для удобства воспользуемся записью тензоров второго порядка в виде векторов, именуемой *нотацией Фойгга*:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon},$$

где $\mathbf{C}$ — тензор упругости, который имеет вид

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2212} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1212} \end{pmatrix}.$$

В случае изотропного материала тензор упругости принимает вид

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix},$$

где λ, μ — параметры Ламе, которые в нашей задаче также зависят от подобласти и задаются как

$$\mu = \mu_i, \quad \lambda = \lambda_i, \quad \mathbf{x} \in \Omega_i, \quad i = 1, \dots, 4.$$

Для упрощения считается, что арматура, пресс и рельсы выполнены из одинаковой стали и соответственно $\rho_2 = \rho_3 = \rho_4$, $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$.

Уравнение твердого тела дополняется граничными условиями, которые связаны с фиксацией рельс и давлением прессы. Фиксация рельс определяется граничным условием первого рода:

$$\mathbf{u} = (0, 0), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D, \quad (2)$$

которое задает нулевые перемещения на нижней границе области рельс. Отметим также условие второго рода:

$$\boldsymbol{\sigma}_n = (0, -P), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_N, \quad (3)$$

закрывающееся в том, что на верхней границе прессы действует поверхностное давление P .

Для аппроксимации по пространству используется метод конечных элементов. Исходная дифференциальная задача сводится к дискретной вариационной задаче. Численная реализация выполнена с использованием вычислительной платформы FEniCS.

3. Численное усреднение коэффициентов

Для генерации геометрии используется алгоритм случайного последовательного заполнения (random sequential adsorption) однонаправленными фибрами с учетом минимального расстояния между ними и периодичного заполнения области. Ограничение с минимальным расстоянием между фибрами связано с генерацией адекватной сетки для метода конечных элементов. Фибры генерируются как одинаковые прямоугольники размером 0.04×0.004 . Для используемого алгоритма максимальная объемная доля таких фибр приблизительно равна 25%. В качестве примера приведена геометрия области с фибрами на рис. 1.

Для вычисления эффективных коэффициентов используется метод численного усреднения на представительной квадратной области. Основной идеей численного усреднения является нахождение однородной среды, эквивалентной исходному композитному материалу, т. е. нужно найти, при каких коэффициентах однородной среды она может приблизительно показывать такое же поведение,

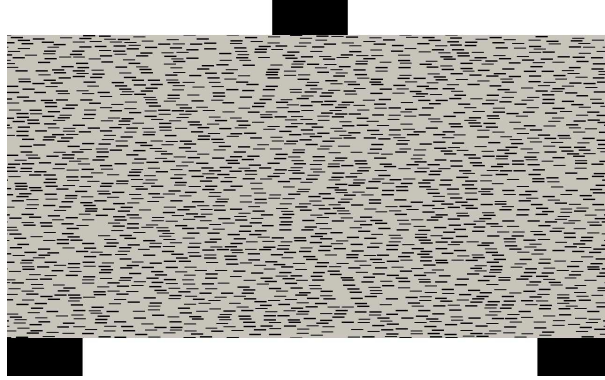


Рис. 1. Область с фибрами, объемная доля 16%

как и композитный материал. Это означает, что при одинаковых средних значениях тензора деформации получаем эквивалентные средние значения тензора напряжения.

Используются следующие обозначения для среднего значения функции ψ :

$$\langle \psi \rangle = \frac{\int_{\omega} \psi d\mathbf{x}}{\int_{\omega} d\mathbf{x}},$$

где ω — представительная область. Таким образом, ранее описанное утверждение относительно усредненного коэффициента может быть записано в следующем виде:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \langle \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{C}^* \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle,$$

где $\mathbf{C}^*$ — эффективный коэффициент. Для вычисления компонент эффективного коэффициента рассматриваются три задачи со следующими граничными условиями:

- 1) $\mathbf{u} = (x_1, 0)$, $\mathbf{x} \in \partial\omega$,
- 2) $\mathbf{u} = (0, x_2)$, $\mathbf{x} \in \partial\omega$,
- 3) $\mathbf{u} = (0.5x_1, 0.5x_2)$, $\mathbf{x} \in \partial\omega$.

При данных граничных условиях средние значения тензора напряжения определяют соответствующие компоненты эффективного коэффициента:

- 1) $C_{ij11}^* = \langle \sigma_{ij} \rangle$, $ij = 11, 22, 12$,
- 2) $C_{ij22}^* = \langle \sigma_{ij} \rangle$, $ij = 11, 22, 12$,
- 3) $C_{ij12}^* = \langle \sigma_{ij} \rangle$, $ij = 11, 22, 12$.

4. Расчеты

В качестве примера рассматривается бетонный блок с включением односторонних стальных фибр. Параметры упругости для бетона и стали, а также давление пресса определены в табл. 1. Коэффициенты Ламе определяются через модуль Юнга и коэффициент Пуассона

$$\lambda_i = \frac{\nu_i E_i}{(1 + \nu_i)(1 - 2\nu_i)}, \quad \mu_i = \frac{E_i}{2(1 + \nu_i)}, \quad i = 1, 2.$$

Погрешность найденного эффективного коэффициента проверяется разницей решения однородной задачи на грубой сетке и решения исходной неоднородной задачи на подробной сетке

$$\mathbf{e} = \mathbf{u}_c - \mathbf{u}_f,$$

где $\mathbf{u}_c$ — решение на грубой сетке, $\mathbf{u}_f$ — решение на подробной сетке. В качестве величины относительной погрешности возьмем отношение нормы погрешности к норме решения исходной задачи

$$\epsilon = \frac{\|\mathbf{e}\|_{L_2}}{\|\mathbf{u}_f\|_{L_2}}.$$

На рис. 4 изображена величина перемещения и тензора деформации исходной мелкой задачи с фибрами. Влияние фибр визуально не отображается на решении, но на погрешности грубой задачи хорошо замечаются включения фибр (рис. 5). Основная погрешность при решении задачи с эффективным коэффициентом распределена по всей области, а в областях с большим тензором деформации локализуются максимальные значения погрешности.

Все вычислительные сетки представительных областей и исходной неоднородной задачи имеют приблизительно одинаковые размеры треугольных элементов 0.002. Размер треугольного элемента однородной задачи на грубой сетке в 10 раз больше и равен 0.02, а количество узлов в среднем в 100 раз меньше. Были рассмотрены пять различных представительных областей с размерами сторон $l = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$. Объемная доля фибр варьировалась в следующем диапазоне значений: $\varphi = 3.2\%, 6.4\%, 9.6\%, 12.8\%, 16\%, 19.2\%, 22.4\%$. В табл. 2 записаны относительные погрешности для данных значений l и φ .

Таблица 2. Относительная погрешность ϵ при различных объемных долях фибр φ и размерах представительных областей l

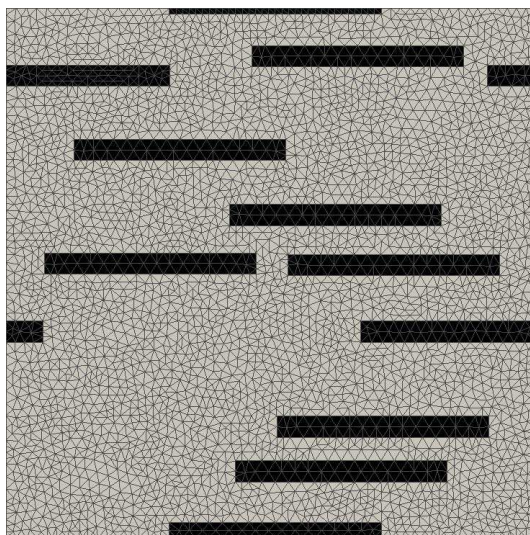
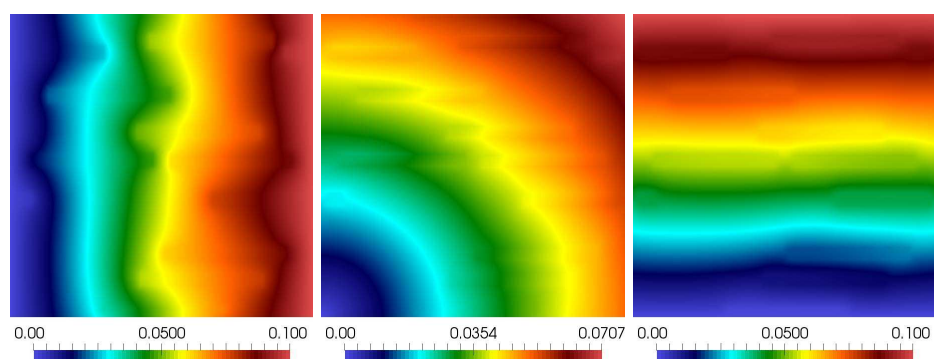
$l \setminus \varphi$	3.2%	6.4%	9.6%	12.8%	16%	19.2%	22.4%
0.1	0.0219	0.0323	0.0296	0.0324	0.0355	0.0317	0.0290
0.2	0.0233	0.0288	0.0277	0.0271	0.0321	0.0268	0.0227
0.3	0.0229	0.0288	0.0234	0.0253	0.0297	0.0229	0.0193
0.4	0.0228	0.0291	0.0228	0.0239	0.0289	0.0219	0.0176
0.5	0.0223	0.0288	0.0225	0.0229	0.0276	0.0210	0.0170

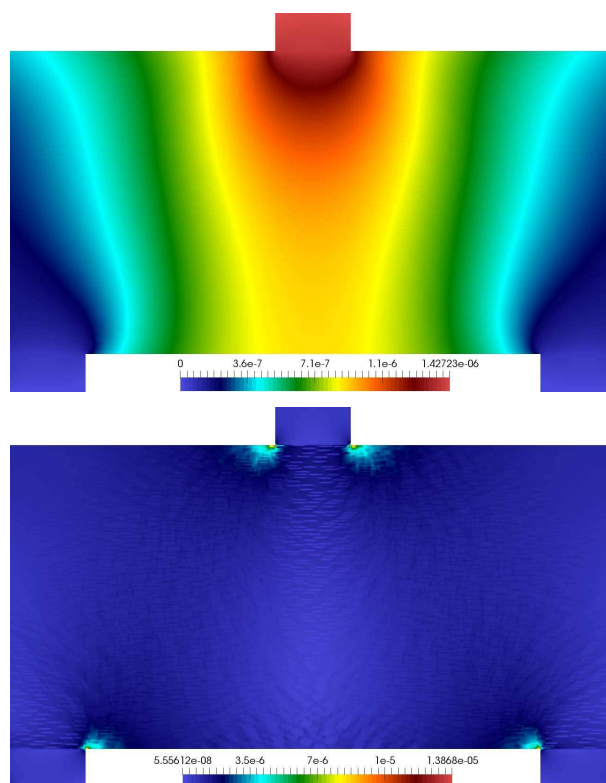
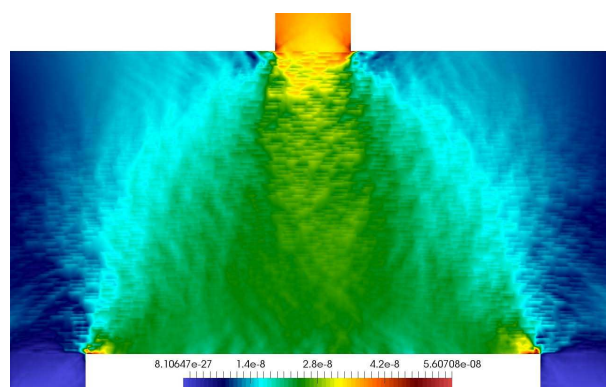
5. Заключение

В данной работе рассмотрен численный расчет эффективного коэффициента и оценка погрешности решения усредненной задачи с данным коэффициентом. Сравниваются относительные погрешности эффективного коэффициента при различных размерах представительной области и объемной доли фибр. Из проведенных расчетов можно сделать вывод, что относительная погрешность

Таблица 1. Параметры задачи

Символ	Название	Значение	Ед. изм.
E_1	модуль Юнга бетона	$4 \cdot 10^{10}$	Па
ν_1	коэффициент Пуассона бетона	0.15	-
E_2	модуль Юнга стали	$2 \cdot 10^{11}$	Па
ν_2	коэффициент Пуассона стали	0.3	-
P	давление прессы	10^5	Па

Рис. 2. Сетка представительной области с размером $l = 0.1$ и объемной долей фибр $\varphi = 16\%$ Рис. 3. Величины решений задач для определения эффективного коэффициента при $l = 0.1$ и $\varphi = 16\%$

Рис. 4. Величина перемещения и деформации при $\varphi = 16\%$ Рис. 5. Величина погрешности при $\varphi = 16\%$, $l = 0.5$

уменьшается при увеличении размера представительной области, но до определенного минимума. Влияние объемной доли фибр на погрешность усредненного решения незначительна. При численном исследовании для рассмотренного диапазона параметров относительная погрешность не превышала 4% и показывала хорошую точность эффективного коэффициента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Christensen R. M., Lo K. H. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models // J. Mechanics and Physics of Solids. 1979. V. 27, N 4. P. 315–330.
2. Li L. X., Wang T. J. A unified approach to predict overall properties of composite materials // Materials Characterization. 2005. V. 54. N 1. P. 49–62.
3. Gusev A. A. Representative volume element size for elastic composites: a numerical study // J. Mechanics and Physics of Solids. 1997. V. 45, N 9. P. 1449–1459.
4. Kari S., Berger H., Gabbert U. Numerical evaluation of effective material properties of randomly distributed short cylindrical fibre composites // Comput. Materials Sci. 2007. V. 39, N 1. P. 198–204.
5. Theocaris P. S., Stavroulakis G. E., Panagiotopoulos P. D. Calculation of effective transverse elastic moduli of fiber-reinforced composites by numerical homogenization // Composites Sci. Technol. 1997. V. 57, N 5. P. 573–586.
6. Kolesov A. E. et al. Numerical analysis of reinforced concrete deep beams // Intern. Conf. Numer. Analysis Appl. Cham: Springer-Verl., 2016. P. 414–421.
7. Smarzewski P., Porba J., Rentfleysz A. Badania doświadczalne tarcz żelbetowych z betonu wysokowartościowego z dodatkiem włókien // Budownictwo i Architektura. 2012. V. 10, N 1. P. 15–26.
8. Сивцев П. В. Численное моделирование задачи упругости железобетонных плит // Вестн. Северо-Восточ. федерал. ун-та им. М. К. Аммосова. 2015. № 4. С. 98–109.
9. Logg A., Mardal K. A., Wells G. eds. Automated solution of differential equations by the finite element method: The FEniCS book. Springer Sci. & Business Media, 2012. V. 84.

Статья поступила 10 апреля 2017 г.

Захаров Петр Егорович, Сивцев Петр Васильевич
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова
Международная научно-исследовательская лаборатория
«Многомасштабное математическое моделирование и компьютерные вычисления»
ул. Кулаковского, 42, Якутск 677891
zapetch@gmail.com, sivkapetr@mail.ru

NUMERICAL CALCULATION OF THE EFFECTIVE COEFFICIENT IN THE PROBLEM OF LINEAR ELASTICITY OF A COMPOSITE MATERIAL

P. E. Zakharov and P. V. Sivtsev

Abstract. We consider the numerical calculation of the effective coefficient of the linear elasticity problem on a representative volume element having a similar volume fraction of fibers. The obtained effective coefficient is used to solve the complete problem on a coarse grid. As an example, the problem of calculating the deformation of a concrete block with the inclusion of steel fibers under the action of a three-point bending is considered. The computational implementation of the problem is carried out by the finite element method using the FEniCS computing platform.

DOI 10.25587/SVFU.2017.2.9247

Keywords: numerical homogenization, linear elasticity, composite material, mathematical modeling, effective coefficient.

REFERENCES

1. Christensen R. M. and Lo K. H., "Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models," *J. Mech. Phys. Solids*, **27**, No. 4, 315–330 (1979).
2. Li L. X. and Wang T. J., "A unified approach to predict overall properties of composite materials," *Materials Characterization*, **54**, No. 1, 49–62 (2005).
3. Gusev A. A., "Representative volume element size for elastic composites: a numerical study," *J. Mech. Phys. Solids*, **45**, No. 9, 1449–1459 (1997).
4. Kari S., Berger H., and Gabbert U., "Numerical evaluation of effective material properties of randomly distributed short cylindrical fibre composites," *Comput. Materials Sci.*, **39**, No. 1, 198–204 (2007).
5. Theocaris P. S., Stavroulakis G. E., and Panagiotopoulos P. D., "Calculation of effective transverse elastic moduli of fiber-reinforced composites by numerical homogenization," *Composites Sci. Technology*, **57**, No. 5, 573–586 (1997).
6. Kolesov A. E. et al. "Numerical analysis of reinforced concrete deep beams," in: *Int. Conf. Numerical Analysis and Its Applications*, Springer-Verl., Cham, 414–421 (2016).
7. Smarzewski P., Poręba J., and Rentflejsz A., "Badania doświadczalne tarcz żelbetowych z betonu wysokowartościowego z dodatkiem włókien," *Budownictwo i Architektura*, **10**, No. 1, 15–26 (2012).
8. Sivtsev P. V., "Numerical simulation of the elasticity problem of reinforced concrete slabs," *Vestn. Severo-Vost. Feder. Univ.*, No. 4 (2015).

The work was supported by the grant from the Russian Foundation for Basic Research (project code 17-01-00732A) and by the grant from the Russian Scientific Foundation (code 17-71-20055).

9. Logg A., Mardal K. A., and Wells G. (eds.), Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method: The FEniCS book, **84**, Springer, Heidelberg (2012).

Submitted April 10, 2017

Petr V. Sivtsev and Petr E. Zakharov
M. K. Ammosov North-Eastern Federal University,
Institute of Mathematics and Informatics,
42, Kulakovsky St., Yakutsk 677000, Russia
sivkapetr@mail.ru, zapetch@gmail.com

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОМЕРЗАНИЯ ГРУНТА

В. В. Попов

Аннотация. Дано сравнение двух математических моделей процесса промерзания влажного грунта, насыщенного водным раствором соли. Для математической модели с постоянными коэффициентами в уравнении теплопроводности в двухфазной области показана возможность непрерывного перехода к нулю водонасыщенности на границе, разделяющей двухфазную зону от мерзлой.

DOI 10.25587/SVFU.2017.2.9248

Ключевые слова: фазовый переход, термодинамическое равновесие, автомодельное решение, диффузия, температуропроводность, водонасыщенность, влажность.

Введение

В работе [1] разработана математическая модель процесса промерзания грунта, насыщенного водным раствором соли, с образованием протяженной области фазового перехода в условиях их термодинамического равновесия. В [2, 3] разработаны алгоритмы численной реализации этой модели, основанные на методе ловли фронта в узел сетки. В [4, 5] данная задача решалась методом сквозного счета. В [6] дано сравнение результатов численного решения с автомодельным решением, полученным путем усреднения коэффициентов эффективной теплоемкости и теплопроводности.

1. Формулировка задачи

Предлагается следующая математическая модель для описания процесса промерзания пористой среды. Уравнение теплопроводности со слагаемым, учитывающим скрытую теплоту фазового перехода:

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) - m \rho_w q_w \frac{\partial \nu}{\partial t}, \quad 0 < x < S(t), \quad t > 0. \quad (1)$$

Здесь с учетом изменения объема воды при замерзании коэффициенты уравнения определяются по формулам

$$C = (1-m)C_s \rho_s + m \nu C_w + m(1-\nu)C_i \rho_i \rho_w / \rho_i, \quad \lambda = (1-m)\lambda_s + m \nu \lambda_w + m(1-\nu)\lambda_i,$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17.01.00732).

где m — пористость; C_s, ρ_s, λ_s соответственно удельная теплоемкость, плотность, теплопроводность скелета пористой среды; C_i, ρ_i, λ_i те же теплофизические свойства для льда; C_w, ρ_w, λ_w то же самое для воды; C_m, λ_m и C_t, λ_t соответственно объемная теплоемкость и теплопроводность мерзлого и талого грунтов; q_w — теплота фазового перехода вода — лед; T — температура.

В области фазовых переходов имеем уравнение диффузии

$$\frac{\partial \nu c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \nu \frac{\partial c}{\partial x} \right), \quad 0 < x < S(t), \quad t > 0, \quad (2)$$

где D — коэффициент молекулярной диффузии, c — концентрация, а также уравнение термодинамического равновесия фаз:

$$c = -T/\alpha, \quad 0 < x < S(t). \quad (3)$$

В талой области имеем

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad S < x < l, \quad t > 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad S < x < l, \quad t > 0. \quad (5)$$

На границе раздела талой и двухфазной областей $x = S(t)$ поддерживается неразрывность потоков тепла и массы и неразрывность искомых функций $T(x, t)$, $c(x, t)$:

$$\left[\frac{\partial T}{\partial x} \right] = 0, \quad T_- = T_+ = T_*, \quad (6)$$

$$\left[\frac{\partial c}{\partial x} \right] = 0, \quad c_- = c_+ = c_* = -T^*/\alpha. \quad (7)$$

Система уравнений замыкается граничными и начальными условиями:

$$T(0, t) = T_g, \quad t > 0, \quad (8)$$

$$T(l, t) = T_n, \quad c(l, t) = c_0, \quad t > 0, \quad (9)$$

$$T(x, 0) = T_n, \quad c(x, 0) = c_0, \quad x \in [0, l]. \quad (10)$$

2. Задача с точным решением температурного поля

Ниже будем сравнивать численное решение задачи (1)–(10) (при малых временах, так как l — конечное число) с решением следующей задачи:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < S, \quad t > 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad S < x < +\infty, \quad t > 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \nu c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \nu \frac{\partial c}{\partial x} \right), \quad 0 < x < S, \quad t > 0, \quad (13)$$

$$c = -T/\alpha, \quad 0 < x < S, \quad t > 0, \quad (14)$$

$$\left[\frac{\partial T}{\partial x} \right] = 0, \quad x = S, \quad t > 0, \quad (15)$$

$$T_- = T_+ = -\alpha c_*, \quad c_- = c_+ = c_*, \quad x = S, \quad t > 0, \quad (16)$$

$$T(0, t) = T_g, \quad t > 0, \quad (17)$$

$$T(+\infty, t) = T_n, \quad c(+\infty, t) = c_0, \quad t > 0, \quad (18)$$

$$T(x, 0) = T_n, \quad c(x, 0) = c_0, \quad x > 0. \quad (19)$$

При такой постановке данной задачи нет прямой зависимости температуры от водонасыщенности. Задачу (11)–(19) будем решать, используя автомодельную переменную $\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$. Уравнение диффузии с учетом условия термодинамического равновесия выразим через температуру:

$$\frac{d(\nu T)}{d\xi} \frac{\xi}{2} + \frac{d}{d\xi} \left(D\nu \frac{dT}{d\xi} \right) = 0, \quad \xi > 0, \quad (20)$$

или в более компактном виде:

$$(\nu T)' \frac{\xi}{2} + (D\nu T')' = 0, \quad \xi > 0. \quad (21)$$

Раскроем скобки:

$$\nu' T \frac{\xi}{2} + \nu T' \frac{\xi}{2} + D\nu T'' + D\nu' T' = 0, \quad \xi > 0. \quad (22)$$

Перепишем в виде

$$\nu'(T\xi + 2DT') = -\nu(T'\xi + 2DT''), \quad \xi > 0. \quad (23)$$

Сгруппируем по искомым функциям:

$$\frac{\nu'}{\nu} = -\frac{(T'\xi + 2DT'')}{(T\xi + 2DT')}, \quad \xi > 0. \quad (24)$$

Левая часть данного уравнения — это производная от логарифма водонасыщенности:

$$(\ln(\nu))' = -\frac{T'\xi + 2DT''}{T\xi + 2DT'}, \quad \xi > 0. \quad (25)$$

Проинтегрируем левую и правую части уравнения от ξ_0 до β :

$$\int_{\xi_0}^{\beta} (\ln(\nu))' d\xi = - \int_{\xi_0}^{\beta} \frac{T'\xi + 2DT''}{T\xi + 2DT'} d\xi, \quad (26)$$

где ξ_0 — произвольно взятая точка между 0 и β , определяемая как

$$\beta = \frac{S}{\sqrt{t}}.$$

Левая часть легко интегрируется:

$$\ln(\nu(\beta)) - \ln(\nu(\xi_0)) = - \int_{\xi_0}^{\beta} \frac{T'\xi + 2DT''}{T\xi + 2DT'} d\xi. \quad (27)$$

Так как на границе $\xi = \beta$ водонасыщенность равна начальному значению ($\nu = \nu_0$), получим

$$\ln(\nu_0) - \ln(\nu(\xi_0)) = - \int_{\xi_0}^{\beta} \frac{T'\xi + 2DT''}{T\xi + 2DT'} d\xi. \quad (28)$$

Приходим к выражению для логарифма водонасыщенности:

$$\ln(\nu(\xi_0)) = \ln(\nu_0) + \int_{\xi_0}^{\beta} \frac{T'\xi + 2DT''}{T\xi + 2DT'} d\xi. \quad (29)$$

Таким образом, для вычисления водонасыщенности получим формулу

$$\nu(\xi_0) = \nu_0 e^I, \quad (30)$$

где

$$I = \int_{\xi_0}^{\beta} \frac{T'\xi + 2DT''}{T\xi + 2DT'} d\xi. \quad (31)$$

Из формулы (30) видно, что если интеграл I расходится, то водонасыщенность в этой точке равна нулю, а если сходится, то водонасыщенность больше нуля.

Температура в протяженной области фазовых переходов вычисляется по формуле

$$T = T_g + (T_z - T_g) \frac{\operatorname{erf}(\xi/2\sqrt{a_1})}{\operatorname{erf}(\beta/2\sqrt{a_1})}. \quad (32)$$

В талой зоне

$$T = T_n + (T_z - T_n) \frac{1 - \operatorname{erf}(\xi/2\sqrt{a_2})}{1 - \operatorname{erf}(\beta/2\sqrt{a_2})}. \quad (33)$$

Первая производная температуры равна

$$T' = \frac{1}{\sqrt{\pi a_1}} \frac{T_z - T_g}{\operatorname{erf}(\beta/2\sqrt{a_1})} e^{-\xi^2/4a_1}. \quad (34)$$

Вторая производная температуры

$$T'' = \frac{\xi}{2a_1\sqrt{\pi a_1}} \frac{T_z - T_g}{\operatorname{erf}(\beta/2\sqrt{a_1})} e^{-\xi^2/4a_1}, \quad (35)$$

где

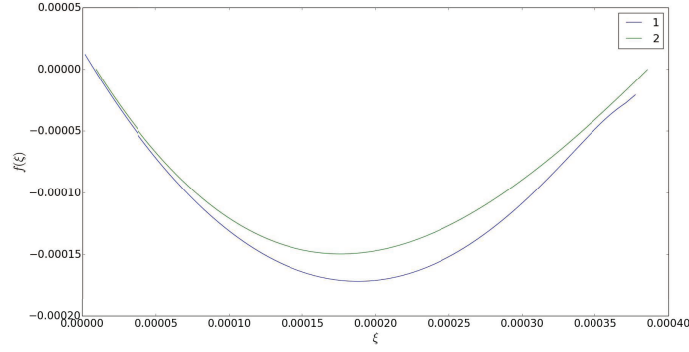
$$k_1 = \frac{(1 - D/a_1)}{\sqrt{\pi a_1}} \frac{T_z - T_g}{\operatorname{erf}(\beta/2\sqrt{a_1})}. \quad (36)$$

Отсюда в числителе подинтегральной функции имеем

$$T'\xi + 2DT'' = k_1 \xi e^{-\xi^2/4a_1}. \quad (37)$$

Здесь

$$k_2 = 2D \frac{1}{\sqrt{\pi a_1}} \frac{T_z - T_g}{\operatorname{erf}(\beta/2\sqrt{a_1})}. \quad (38)$$

Рис. 1. График функции $f(\xi)$

Знаменатель подинтегральной функции имеет вид

$$T\xi + 2DT' = \xi T + k_2 e^{-\xi^2/4a_1}. \quad (39)$$

Введем обозначения

$$f(\xi) = T\xi + 2DT' = \xi T + k_2 e^{-\xi^2/4a_1}. \quad (40)$$

$$p(\xi) = \frac{\xi e^{-\xi^2/4a_1}}{f(\xi)}. \quad (41)$$

Перепишем интеграл I в следующем виде:

$$I = k_1 \int_{\xi_0}^{\beta} p(\xi) d\xi, \quad \xi \geq 0. \quad (42)$$

Проведем качественное исследование функции $f(\xi)$. Вторая производная имеет вид

$$f''(\xi) = \frac{k_2}{2D} e^{-\xi^2/4a_1} \left(2 - \frac{D}{a_1} - \left(\frac{1}{2a_1} - \frac{D}{2a_1^2} \right) \xi^2 \right). \quad (43)$$

Заметим, что a_1 больше чем D . Видно, что в интервале

$$0 \leq \xi < \xi^* = \sqrt{\frac{2 - \frac{D}{a_1}}{\frac{1}{2a_1} - \frac{D}{2a_1^2}}} \quad (44)$$

будет $f''(\xi) > 0$, т. е. кривая, определяемая этой функцией, вогнута вверх (рис. 1).

Допустим, что в интервале $(0, \xi^*)$ существует точка $\xi = \xi_*$, где $f(\xi)$ обращается в нуль

$$f(\xi_*) = 0, \quad 0 < \xi_* < \xi^*. \quad (45)$$

Если $\xi_* < \xi^*$, то в интервале $\xi_* \leq \xi \leq \xi^*$ функция $\psi(\xi)$, определяемая формулой

$$\psi(\xi) = f'(\xi_*)(\xi - \xi_*), \quad (46)$$

будет не больше чем $f(\xi)$.

На рис. 5–8 приведены аналогичные результаты при $T_g = -4C$, $T_n = 4C$, $c_0 = 0.035$, $v_0 = 1$, $T_* = -c_0\alpha - 0.04$, $a = 1.76273 \cdot 10^{-7}$. В этом примере мерзлая область находится в $(0.000003789082490396234, 0.000003789082490396235)$, а граница, разделяющая двухфазную и талую зоны, соответствует $\beta = 0.000328598$.

Введем еще одну функцию

$$p_2(\xi) = e^{-\beta^2/4a_1} \frac{\xi}{\psi(\xi)}. \quad (47)$$

Поскольку в интервале $\xi_* \leq \xi \leq \xi^*$ будет $\psi(\xi) \leq f(\xi)$, подынтегральная функция $p(\xi)$ не больше функции $p_2(\xi)$.

Если $\xi^* < \beta$ то интеграл $\int_{\xi_*}^{\beta} p(\xi) d\xi$ можно представить в виде суммы

$$\int_{\xi_*}^{\beta} p(\xi) d\xi = \int_{\xi_*}^{\xi^*} p(\xi) d\xi + \int_{\xi^*}^{\beta} p(\xi) d\xi. \quad (48)$$

Интеграл $\int_{\xi_*}^{\beta} p(\xi) d\xi$ конечный, а интеграл $\int_{\xi_*}^{\xi^*} p(\xi) d\xi$ равен $-\infty$, так как

$$\int_{\xi_*}^{\xi^*} p_2(\xi) d\xi = \frac{e^{-\beta^2/4a_1}}{f'(\xi_*)} \int_{\xi_*}^{\xi^*} \frac{\xi}{\xi - \xi_*} d\xi = -\infty$$

(признак сравнения с учетом знака). Если $\xi^* \geq \beta$, то

$$\int_{\xi_*}^{\beta} p(\xi) d\xi < \int_{\xi_*}^{\beta} p_2(\xi) d\xi = -\infty. \quad (49)$$

Следовательно,

$$\int_{\xi_*}^{\beta} p(\xi) d\xi = -\infty. \quad (50)$$

Таким образом, при выполнении условий (44), (45) или если (более мягкое условие) в интервале $(0, \beta)$ существует единственная точка, где функция $f(\xi)$ равна нулю, предел водонасыщенности справа в точке $\xi = \xi_*$ равен нулю.

Приведем два примера. Расчеты проведены на сетке с количеством узлов $n = 4000$ при значениях параметров:

$$C_s = 920 \text{ Дж/кг К}; \rho_s = 2000 \text{ кг/м}^3; C_i = 2 \cdot 10^3 \text{ Дж/кг К}; \rho_i = 900 \text{ кг/м}^3;$$

$$C_w = 4.19 \cdot 10^3 \text{ Дж/кг К}; \rho_w = 1000 \text{ кг/м}^3; \lambda_s = 2 \text{ Вт/м К};$$

$$\lambda_i = 2.23 \text{ Вт/м К}; \lambda_w = 0.58 \text{ Вт/м К}; q_w = 3.34 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг};$$

$$\alpha = 66.7; m = 0.1; D = 1.45 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}; \nu_0 = 0.001, 0.035; v_0 = 1.$$

На всех рисунках линии 1 соответствуют численному расчету, 2 — модели с постоянными коэффициентами в уравнении теплопроводности.

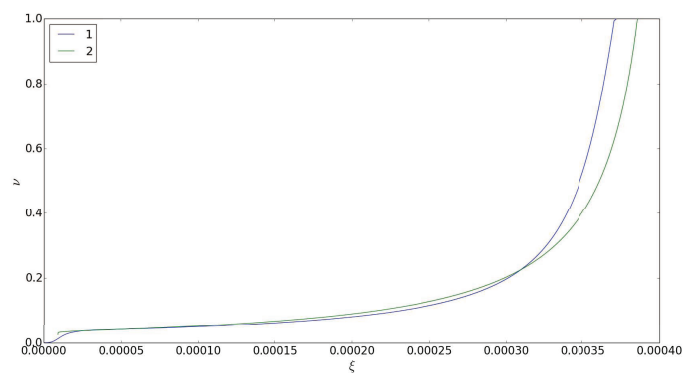


Рис. 2. Распределение водонасыщенности

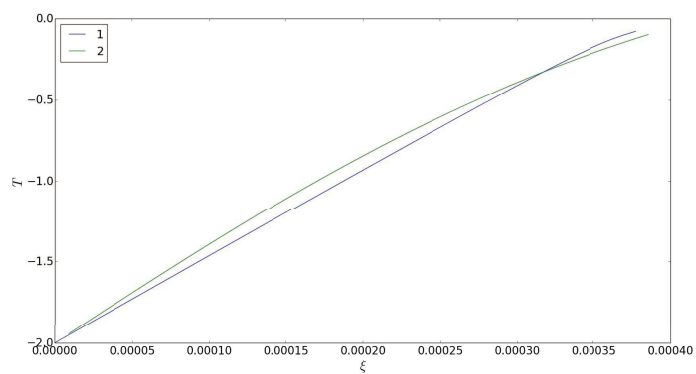


Рис. 3. Распределение температуры

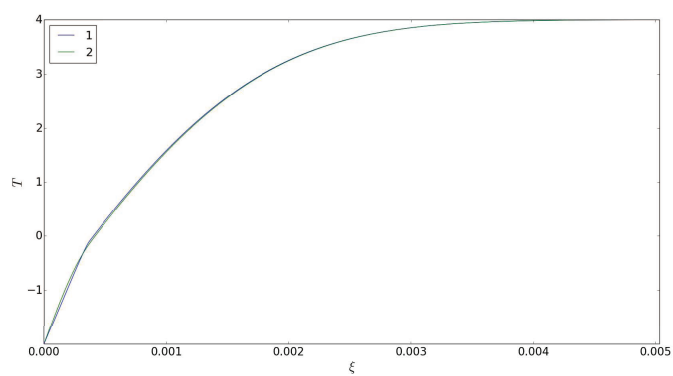


Рис. 4. Распределение температуры

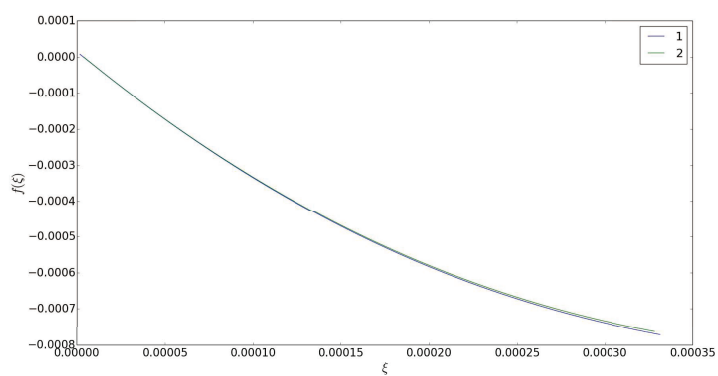
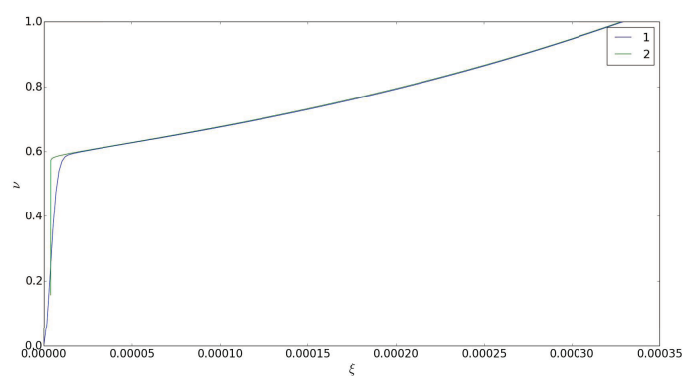
Рис. 5. График функции $f(\xi)$ 

Рис. 6. Распределение водонасыщенности

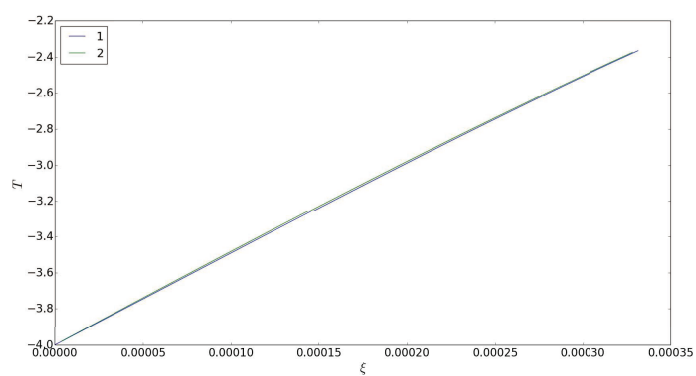


Рис. 7. Распределение температуры

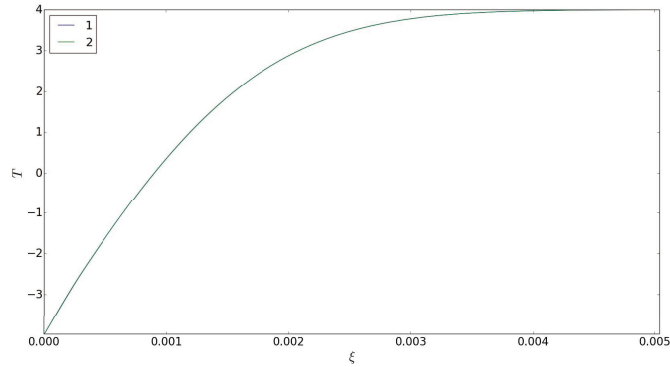


Рис. 8. Распределение температуры

На рис. 2–4 приведены результаты расчетов, проведенных при граничных и начальных условиях $T_g = -2C$, $T_n = 4C$, $c_0 = 0.001$, $T_* = -c_0\alpha - 0.03$ и коэффициенте $a = 5.06266 \cdot 10^{-8}$. По результатам численного расчета точка, где водонасыщенность равна нулю, лежит между точками $\xi_* = 00.000009197372406967679$ и $\xi = 0.000009197372406967680$, а граница раздела талой и двухфазной областей находится в точке $\beta = 0.000385802$. На рис. 1 приведены графики функции $f(\xi)$, где для численного метода ее производная заменена разностным аналогом.

На рис. 2 дано сравнение распределения водонасыщенности. На рис.3, 4 показаны распределения температуры.

Заключение

Результаты вычислительных расчетов показали существование в протяженной области фазовых переходов точки, где выражение $(T \frac{x}{\sqrt{t}} + 2D\sqrt{t} \frac{\partial T}{\partial x})$ обращается в нуль как для исходной задачи (задача (1)–(10)), так и для задачи с точным решением температуры в полубесконечной области. Также следует отметить хорошую согласованность полученных распределений температуры и водонасыщенности в большей части двухфазной области при высоких концентрациях воды, насыщающей пористую среду. Разница вблизи границы мерзлой области обусловлена большим градиентом водонасыщенности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ентов В. М., Максимов А. М., Цыпкин Г. Г. Образование двухфазной зоны при промерзании пористой среды. Препринт № 269. М., 1986.
2. Васильев В. И., Максимов А. М., Петров Е. Е., Цыпкин Г. Г. Тепломассоперенос в промерзающих и протаивающих грунтах. М.: Наука, 1996.
3. Васильев В. И., Максимов А. М., Цыпкин Г. Г. Математическая модель замораживания засоленного мерзлого грунта // Прикл. механика техн. физика. 1995. Т. 36, № 5. С. 57–66.

4. Васильев В. И., Попов В. В. Численное решение задачи промерзания грунта // Мат. моделирование. 2008. Т. 20, № 7. С. 119–128.
5. Попов В. В. Двумерная математическая модель промерзания засоленного влажного грунта // Вестн. Северо-Вост. федерал. ун-та. 2014. Т.11, № 5. С 9–23.
6. Попов В. В. Автомоделное решение задачи о промерзании пористой среды, насыщенной раствором соли // Наука и образование. 1998. № 1. С. 92–95.

Статья поступила 28 марта 2017 г.

Попов Василий Васильевич
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
ул. Белинского, 58, Якутск 677000;
Институт проблем нефти и газа СО РАН,
ул. Октябрьская, 1, Якутск 677000
`imi.pm.pvvl@mail.ru`

MATHEMATICAL MODEL OF SOIL FREEZING

V. V. Popov

Abstract. We compare two mathematical models of the freezing process of a moist soil saturated with an aqueous solute of salt. For the mathematical model with constant coefficients in the heat equation in a two-phase domain, the possibility of a continuous transition of water saturation to zero at the interface between two-phase and frozen domains is shown.

DOI 10.25587/SVFU.2017.2.9248

Keywords: phase transition, thermodynamic equilibrium, self-similar solution, diffusion, thermal diffusivity, water saturation, moisture.

REFERENCES

1. Entov V. M., Maximov A. M., and Tsyppin G. G., "Formation of two-phase domain during the freezing process in a porous medium," Preprint No. 269, Moscow (1986).
2. Vasil'ev V. I., Maximov A. M., Petrov E. E., and Tsyppin G. G., *Teplomassoperenos v Promerzauschih i Protaivaushih Gruntah* [in Russian], Nauka, Moscow (1996).
3. Vasil'ev V. I., Maximov A. M., Petrov E. E., and Tsyppin G. G., "A mathematical model for the freezing–thawing of a saline frozen soil," *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **36**, No. 5, 57–66 (1995).
4. Vasil'ev V. I. and Popov V. V., "Numerical solution of the soil freezing problem," *Mat. Modelir.*, **20**, No. 7, 119–128 (2008).
5. Popov V. V., "Two-dimensional mathematical model of the freezing process of a moist soil saturated with a solute of salt," *Vestn. Severo-Vostoch. Federal. Univ.*, **11**, No. 5 19–23 (2014).
6. Popov V. V., "Automodel solution to the problem of the freezing process of a potous medium saturated with an aqueous solute of salt," *Nauka Obrazov.*, No. 1, 92–95 (1998).

Submitted March 28, 2017

Vasily V. Popov
M. K. Ammosov North-Eastern Federal University,
Institute of Oil and Gas problem SB RAS,
58, Belinsky St., Yakutsk 677000, Russia
imi.pm.pvv1@mail.ru

The work was supported by the grant from the Russian Foundation for Basic Research (project code 17.01.00732).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОМЕРЗАНИЯ НЕНАСЫЩЕННОГО ГРУНТА ПРИ НАЛИЧИИ КАПИЛЛЯРНЫХ СИЛ

Г. Г. Цыпкин

Аннотация. Сформулирована математическая модель промерзания грунта, насыщенного гетерогенной смесью воды и воздуха, при наличии капиллярного давления. Представлен вывод уравнения диффузии влаги, следующий из законов сохранения масс и импульса, позволяющий выразить коэффициент диффузии через параметры среды. Выведены балансовые соотношения и предложено замыкающее соотношение на фронте кристаллизации воды. В линейном приближении получено автомодельное решение задачи.

DOI 10.25587/SVFU.2017.2.9249

Ключевые слова: ненасыщенные грунты, капиллярное давление, фильтрация, фазовые переходы, лед.

В задачах механики мерзлых грунтов первостепенную роль играет механизм перераспределения влаги при фазовых переходах. Натурные наблюдения и лабораторные эксперименты показали, что поверхностные силы оказывают существенное влияние на эти процессы. Для описания поверхностных сил были предложены различные теории миграции влаги (теория пленочной миграции, теория осмотических давлений и т. д.), основанные на эффективном уравнении переноса влаги [1, 2]. В простейшем случае уравнение диффузии влаги в ненасыщенных грунтах можно записать в виде [3]

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D(\vartheta) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right]. \quad (1)$$

Здесь ϑ — влажность грунта или масса воды, отнесенная к единице массы сухого образца, D — коэффициент диффузии влажности, определяемый из эксперимента. Подход, основанный на эффективных уравнениях, широко распространен и использовался в большом числе работ (например, [4–6]).

Другой подход к описанию процессов переноса в ненасыщенных пористых средах развивается в рамках механики гетерогенных сред и базируется на основных законах сохранения. В работе [7] сделана попытка в рамках фронтальной модели сформулировать задачу кристаллизации воды в ненасыщенной среде. Приведена система законов сохранения, учитывающая движение твердых,

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 16–01–00363.

жидких и газообразных компонент. Однако представленная система уравнений оказалась незамкнутой, поэтому решения задач не были представлены. Предложенная модель не получила продолжения, так как она оказалась слишком трудной для исследования. В работе [8] использовался аналогичный подход и была сформулирована замкнутая математическая модель промерзания ненасыщенного грунта, учитывающая сжимаемость воздуха, что позволило замкнуть систему основных уравнений и получить нетривиальное решение. Капиллярные силы при этом не учитывались и уравнение для функции содержания влаги было первого порядка.

В [9] сформулирована задача о плавлении льда в мерзлом грунте при наличии капиллярного давления в области вода — воздух. Выведена полная система граничных условий на фронте фазового перехода. В [10] рассмотрена задача о плавлении льда в грунте, изначально насыщенном льдом и воздухом. В нелинейном случае проведено численное исследование зависимости водонасыщенности от вида функции Леверетта, величины капиллярного давления и внешних градиентов давления и температуры.

В настоящей работе рассматривается задача замораживания ненасыщенного грунта с учетом капиллярных сил. Предполагается, что при отсутствии приложенных градиентов давления давление в воздухе можно считать постоянным, а функция водонасыщенности удовлетворяет нелинейному уравнению диффузии. Коэффициент диффузии явно выражается через производную капиллярного давления, пористость, проницаемость и вязкость. В смачиваемой среде коэффициент диффузии является положительным, а для несмачиваемых сред — отрицательным, что приводит к некорректной задаче для диффузионного уравнения. Выведены балансовые условия на поверхности фазового перехода. Для замыкания системы граничных условий предложено дополнительное условие, предполагающее полное смачивание образующегося льда жидкой фазой. Для одномерного случая дан анализ найденного автомодельного решения.

1. Основные уравнения. В положительном диапазоне температур будем моделировать грунт недеформируемой пористой средой, насыщенной гетерогенной смесью воды и воздуха. Предположим равенство температур компонент в областях их совместного существования. С учетом сделанных предположений уравнения неразрывности для газа и воды, обобщенный закон Дарси для каждой из компонент и уравнение состояния газа имеют вид [10]

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v}_w = 0, \quad (1.1)$$

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} \rho_g (1 - S_w) + \operatorname{div}(\rho_g \mathbf{v}_g) = 0, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{v}_j = - \frac{k f_j(S_j)}{\mu_j} \operatorname{grad} P_j, \quad j = g, w, \quad (1.3)$$

$$P_g = \rho_g R T. \quad (1.4)$$

Здесь P — давление, T — температура, R — газовая постоянная, $\mathbf{v}$ — вектор скорости фильтрации, ρ — плотность, S — насыщенность, k — проницаемость, ϕ — пористость, μ — вязкость, f — относительная фазовая проницаемость. Индексы: g — газ (воздух), w — вода.

Рассмотрим влияние капиллярного давления на движение смеси газ — вода в пористой среде. Капиллярное давление по определению равно разности давлений между газом и водой:

$$P_c = P_w - P_g. \quad (1.5)$$

В случае смачиваемой среды $P_c < 0$.

После суммирования уравнений сохранения энергии, выписанных для каждой компоненты, и использования термодинамических соотношений получаем закон сохранения энергии с учетом капиллярных сил для смеси газ — вода, насыщающей пористую среду

$$(\rho C)_m \frac{\partial T}{\partial t} - \phi P_c \frac{\partial S_w}{\partial t} - \phi(1 - S_w) \frac{\partial P_g}{\partial t} + (C_p \rho_g \mathbf{v}_g + C_w \rho_w \mathbf{v}_w) \text{grad } T + \mathbf{v}_w \text{grad } P_w = \text{div}(\lambda_m \text{grad } T). \quad (1.6)$$

Исключая плотность газа и скорости фильтрации воды и газа, в области воздух — вода получаем систему четырех уравнений для неизвестных S_w , T , P_w и P_g :

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} - \frac{k}{\phi \mu_w} \text{div} [f_w(S_w) \text{grad } P_w] = 0, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} - (1 - S_w) \frac{1}{P_g} \frac{\partial P_g}{\partial t} + (1 - S_w) \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{k}{\phi \mu_g} \frac{T}{P_g} \text{div} \left[\frac{P_g}{T} f_g(S_w) \text{grad } P_g \right] = 0,$$

$$\begin{aligned} (\rho C)_m \frac{\partial T}{\partial t} - \phi P_c(S) \frac{\partial S_w}{\partial t} - \phi(1 - S_w) \frac{\partial P_g}{\partial t} - \text{div}(\lambda_m \text{grad } T) \\ = k \left[\rho_w C_w \frac{f_w(S_w)}{\mu_w} \text{grad } P_w + \frac{C_p}{R} \frac{P_g}{T} \frac{f_g(S_w)}{\mu_g} \text{grad } P_g \right] \text{grad } T \\ - \frac{k}{\mu_w} f_w(S_w) (\text{grad } P_w)^2, \end{aligned}$$

$$P_w = P_g + P_c(S_w),$$

$$\lambda_m = \phi S_w \lambda_w + \phi(1 - S_w) \lambda_g + (1 - \phi) \lambda_s,$$

$$(\rho C)_m = \phi S_w \rho_w C_w + \phi(1 - S_w) \rho_g C_p + (1 - \phi) \rho_s C_s.$$

В пористой среде, насыщенной гетерогенной смесью воды и газа, капиллярное давление зависит от водонасыщенности и определяется соотношением Леверетта [11]:

$$P_c(S_w) = \chi \sqrt{\frac{\phi}{k}} J(S_w). \quad (1.8)$$

Параметр χ зависит от смачиваемости пород, $J(S_w)$ — функция Леверетта.

Физический смысл параметра χ становится ясным, если выражение для капиллярного давления на границе двух несмешивающихся жидкостей вывести из формулы Лапласа:

$$P_c = -2 \frac{\sigma}{r} \cos \theta. \quad (1.9)$$

Здесь σ — коэффициент поверхностного натяжения, θ — контактный угол, r — радиус кривизны капиллярного мениска.

Величина среднего капиллярного давления в пористой среде следует из оценки характерного размера (диаметра) поры: $d = \sqrt{\phi/k}$. Радиус капиллярного мениска совпадает с радиусом поры и равен половине диаметра $r = d/2$.

В случае гетерогенной смеси, когда в пористой среде сосуществуют две несмешивающиеся компоненты, в соотношение (1.9) для капиллярного давления вводится функция Леверетта, которая учитывает влияние насыщенности компонент на величину среднего капиллярного давления. В результате выражение для капиллярного давления имеет вид

$$P_c = -4\sigma \cos \theta \sqrt{\frac{\phi}{k}} J(S_w). \quad (1.10)$$

Поскольку измерение контактного угла представляет трудности, зачастую при расчетах в качестве параметра задается величина капиллярного давления или значение параметра χ , который, как следует из (1.10), $\chi = -4\sigma \cos \theta$. Для смачиваемой среды $\chi < 0$ [12, 13].

Положим, что капиллярное давление по величине не превосходит атмосферного давления и давления в жидкости и газе являются величинами одного порядка: $P_w \sim P_g \sim |P_c|$.

2. Формулировка задачи. Упростим задачу, используя существенную разницу физических свойств воды и воздуха. Поскольку вязкость газа на два порядка меньше вязкости воды, то скорость фильтрации газа значительно выше, если различие в фазовых проницаемостях невелико. Тогда можно положить, что давление в газе устанавливается мгновенно по отношению к характерному времени перераспределения функции водонасыщенности и в первом приближении считать его постоянным: $P_g = \text{const}$. В этом случае из соотношения (1.5) следует $\text{grad } P_w = \text{grad } P_c$ и скорость перераспределения давления в жидкости совпадает со скоростью перераспределения капиллярного давления, т. е. функции водонасыщенности. Тогда функция водонасыщенности удовлетворяет нелинейному уравнению диффузии вида

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} - \frac{k}{\phi \mu_w} \text{div} \left[f_w(S_w) \frac{dP_c}{dS_w} \text{grad } S_w \right] = 0, \quad (2.1)$$

а уравнение энергии принимает вид

$$\begin{aligned} & (\rho C)_m \frac{\partial T}{\partial t} - \phi P_c(S) \frac{\partial S_w}{\partial t} - \text{div}(\lambda_m \text{grad } T) \\ & = -\rho_w C_w \frac{k f_w(S_w)}{\mu_w} \frac{dP_c}{dS_w} \text{grad } S_w \cdot \text{grad } T - \frac{k}{\mu_w} f_w(S_w) \left(\frac{dP_c}{dS_w} \right)^2 (\text{grad } S_w)^2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Уравнение (2.1) можно записать в виде

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} = \operatorname{div} \left[\chi \sqrt{\frac{k}{\phi}} \frac{f_w(S_w)}{\mu_w} \frac{dJ}{dS_w} \operatorname{grad} S_w \right]. \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) по форме совпадает с уравнением (1), если положить, что эффективный коэффициент влагопереноса определяется выражением

$$\kappa = \chi \sqrt{\frac{k}{\phi}} \frac{f_w(S_w)}{\mu_w} \frac{dJ(S_w)}{dS_w}.$$

Поскольку производная функции Леверетта всегда отрицательна: $J'_S < 0$, то для смачиваемой пористой среды ($\chi < 0$) коэффициент диффузии влаги κ всегда положителен. В случае несмачиваемой среды, когда $\chi > 0$, коэффициент диффузии отрицателен и уравнение переноса влаги сводится к некорректному уравнению диффузии.

Уравнение диффузии влажности (2.3) для движения двухкомпонентной смеси вода — воздух, выведенное из закона сохранения массы, закона Дарси и выражения для функции капиллярного давления, аналогично эффективному уравнению диффузии влаги. Уравнение (2.3) получено в предположении, что градиент давления в газовой компоненте мал и относительные фазовые проницаемости различаются незначительно. Если учесть движение воздуха, то в этом случае задача сводится к системе двух нелинейных уравнений, и уже одно уравнение диффузии не будет адекватно описывать процесс.

Пусть в начальном состоянии часть грунта содержит гетерогенную смесь воды и воздуха. Если температура на некоторой неподвижной границе опускается ниже температуры фазового перехода вода — лед, то возникает фронт образования льда. В общем случае можно полагать, что образующийся лед не заполняет поровое пространство целиком, но сосуществует с воздухом. Тогда, после пренебрежения малыми слагаемыми, в мерзлой области справедливо уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_1 \Delta T, \quad a_1 = \frac{\lambda_f}{(\rho C)_f}, \quad (2.4)$$

$$\lambda_f = \phi S_i \lambda_i + \phi(1 - S_i) \lambda_g + (1 - \phi) \lambda_s,$$

$$(\rho C)_f = \phi S_i \rho_i C_i + \phi(1 - S_i) \rho_g C_p + (1 - \phi) \rho_s C_s,$$

В талой области перед фронтом кристаллизации перераспределение воды описывается уравнением диффузии влаги (2.3). Рассмотрим задачу в линейном приближении, когда отклонение функции водонасыщенности от невозмущенного состояния невелико. Невозмущенным является состояние, когда вода неподвижна и начальная водонасыщенность равна S_{w0} , а для невозмущенного состояния за фронтом насыщенность льда определяется выражением $\rho_{i0} = S_{w0} \rho_w / \rho_i$.

Для простоты аппроксимируем функцию относительной фазовой проницаемости и функцию Леверетта линейными функциями: $f_w = S_w$ и $J(S_w) = 1 - S_w$. Тогда в области смеси вода — воздух уравнение диффузии влаги принимает вид

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} = \kappa \Delta S_w, \quad \kappa = \frac{k S_{w0}}{\phi \mu_w} \frac{dP_c}{dS_w} = 4\sigma \cos \theta \sqrt{\frac{k}{\phi}} \frac{S_{w0}}{\mu_w}. \quad (2.5)$$

Если капиллярное давление меньше атмосферного: $|P_c| < P_a = 10^5$ Па, то второе слагаемое в левой части уравнения (2.2) много меньше первого слагаемого и в линейном приближении в области вода — воздух уравнение энергии сводится к обычному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_2 \Delta T, \quad a_2 = \frac{\lambda_m}{(\rho C)_m}, \quad (2.6)$$

$$\lambda_m = \phi S_{w0} \lambda_w + \phi(1 - S_{w0}) \lambda_g + (1 - \phi) \lambda_s,$$

$$(\rho C)_m = \phi S_{w0} \rho_w C_w + \phi(1 - S_{w0}) \rho_g C_p + (1 - \phi) \rho_s C_s.$$

Граничные условия на подвижной поверхности образования льда состоят из условий сохранения энергии и массы H_2O при известной температуре кристаллизации $T_* = 273.15$ К в предположении, что капиллярные силы не изменяют температуру фазового перехода.

Уравнение баланса энергии имеет вид

$$\phi S_i \rho_i q V_n = \lambda_f (\text{grad } T)_{n+} - \lambda_m (\text{grad } T)_{n-}. \quad (2.7)$$

Здесь теплота фазового перехода лед — вода $q = h_w - h_i$, а $V = \dot{X}(t)$ — скорость фронта плавления. Индексы плюс и минус — значения величин соответственно перед и за фронтом кристаллизации, n — нормаль.

Из баланса массы H_2O следует соотношение

$$\left(S_i \frac{\rho_i}{\rho_w} - S_{w+} \right) V_n = \frac{k}{\phi \mu_w} f_w(S_{w+}) (\text{grad } P_w)_{n+}.$$

Используя выражения для капиллярного давления, получаем

$$\left(S_i \frac{\rho_i}{\rho_w} - S_{w+} \right) V_n = \kappa \frac{S_{w+}}{S_{w0}} (\text{grad } S_w)_{n+}. \quad (2.8)$$

Естественно задать в качестве начальных условий температуру T_0 и исходную водонасыщенность S_{w0} , и граничное условие, представляющее собой значение температуры T^0 на неподвижной охлаждающей поверхности.

Сформулированная задача содержит три неизвестных параметра: скорость подвижной границы фазового перехода V , насыщенность льда S_i и значение водонасыщенности S_{w+} на поверхности раздела. Для их определения имеется два соотношения на границе кристаллизации — (2.7), (2.8), и задача является недоопределенной. Для замыкания системы соотношений на подвижной границе требуется выставить дополнительное условие, связывающее искомые параметры. Естественно предположить, что весь растущий кристалл льда должен

омываться водой. В той части, где кристалл не контактирует с водой, а контактирует с воздухом, лед формироваться не будет. Из этих соображений следует дополнительное условие равенства насыщенностей воды и льда $S_{i-} = S_{w+} \equiv S_*$, которое замыкает систему соотношений на поверхности кристаллизации.

3. Автомоделное решение. Рассмотрим задачу в одномерном приближении. Пусть в начальном состоянии талый грунт занимает полупространство $x > 0$ с начальной водонасыщенностью S_{w0} . Если температура на неподвижной стенке $x = 0$ опускается ниже температуры фазового перехода вода — лед, то вправо распространяется фронт кристаллизации,двигающийся по закону $x = X(t)$. Если начальная температура и водонасыщенность, а также температура охлаждающей стенки являются постоянными величинами, то сформулированная задача имеет автомоделное решение вида

$$T = T(\xi), \quad S_w = S_w(\xi), \quad X(t) = \beta\sqrt{t}, \quad \xi = x/\sqrt{t}.$$

В области перед фронтом решения уравнения теплопроводности и диффузии водонасыщенности имеют вид

$$x > X(t): \quad T = T_0 + (T_* - T_0) \frac{\operatorname{erfc}(\xi/2\sqrt{a_1})}{\operatorname{erfc}(\beta/2\sqrt{a_1})}, \quad (3.1)$$

$$S_w = S_{w0} + (S_* - S_{w0}) \frac{\operatorname{erfc}(\xi/2\sqrt{\kappa})}{\operatorname{erfc}(\beta/2\sqrt{\kappa})}. \quad (3.2)$$

В области за фронтом распределение температуры и водонасыщенности определяется выражениями

$$0 < x < X(t): \quad T = T^0 + (T_* - T^0) \frac{\operatorname{erf}(\xi/2\sqrt{a_2})}{\operatorname{erf}(\beta/2\sqrt{a_2})}. \quad (3.3)$$

Подставляя решения (3.1), (3.2) в соотношения (2.7) и (2.8), получаем трансцендентные уравнения для определения безразмерной автомоделной скорости фронта образования льда $\gamma = \beta/2\sqrt{a_1}$ ($\zeta = \xi/2\sqrt{a_1}$) и значения насыщенности S_* :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\pi}\phi S_* \rho_i q a_1}{T_0} \gamma - \lambda_f \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \left(\frac{T_*}{T_0} - 1 \right) \frac{\exp(-\gamma^2 a_1/a_2)}{\operatorname{erf}(\gamma) \sqrt{a_1/a_2}} \\ - \lambda_m \left(\frac{T_*}{T_0} - \frac{T^0}{T_0} \right) \frac{\exp(-\gamma^2)}{\operatorname{erfc}(\gamma)} = 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\left(1 - \frac{\rho_i}{\rho_w} \right) \sqrt{\frac{a_1}{\kappa}} \gamma - \frac{S_* - S_{w0}^0}{\sqrt{\pi} S_{w0}} \frac{\exp(-\gamma^2 a_1/\kappa)}{\operatorname{erfc}(\gamma \sqrt{a_1/\kappa})} = 0. \quad (3.5)$$

Система (3.4), (3.5) решалась численно при следующих значениях параметров:

$$\begin{aligned} \phi &= 0.25, \quad \rho_s = 2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad \rho_i = 0.91 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad \rho_w = 10^3 \text{ кг/м}^3, \\ \lambda_s &= 2 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, \quad \lambda_i = 2.23 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, \quad \lambda_w = 0.58 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, \\ C_s &= 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, \quad C_i = 2 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, \\ C_w &= 4.2 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, \quad q = 3.34 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}, \quad \mu_w = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}. \end{aligned}$$

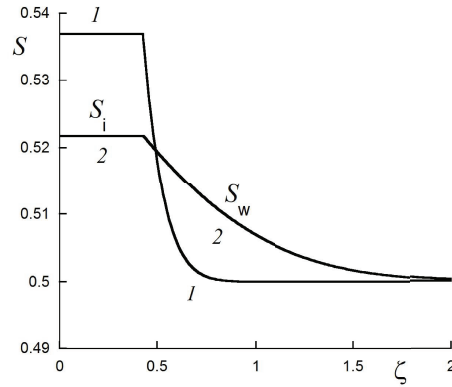


Рис. 1. Характерные распределения водонасыщенности воды и льда в зависимости от величины капиллярного давления. $T_0 = 280 \text{ K}$, $T^0 = 260 \text{ K}$, $S_{w0} = 0.5$.
Кривые 1 и 2 соответствуют коэффициентам диффузии $\kappa = 10^{-7}$ и $\kappa = 10^{-6}$

Для простоты при расчетах будем варьировать значения коэффициента диффузии κ , хотя можно в отдельности исследовать зависимости от параметров, входящих в κ .

Поскольку при кристаллизации объем H_2O возрастает, то значение водонасыщенности на фронте должно быть больше, чем начальное значение водонасыщенности. Отсюда следует, что согласно диффузионному уравнению (2.5) жидкая фаза должна оттекать от фронта и наибольшая водонасыщенность не должна превосходить невозмущенного значения насыщенности льда S_{i0} , которое определяется из условия неподвижности воды. В противном случае должен реализовываться подток влаги к фронту, что не обеспечивается уравнением (2.5) при условии максимального значения S_w на фронте кристаллизации.

Численные эксперименты показали, что представленная модель адекватна и удовлетворяет этим требованиям, а водонасыщенность S_{w+} , равная насыщенности льда S_i , изменяется в пределах от начального значения S_{w0} до значения $S_{i0} = S_{w0}\rho_w/\rho_i$. При больших значениях коэффициента κ , соответствующего высокой проницаемости грунта, характерное время перераспределения воды перед фронтом существенно меньше характерного времени перераспределения температуры и водонасыщенность на фронте лишь немного превышает начальную водонасыщенность. Так, например, при $\kappa = 10^5 \text{ м}^2/\text{с}$ будет $S_* = 0.509$ при $S_{w0} = 0.5$. При уменьшении коэффициента диффузии влажный отток от фронта замедляется и значение водонасыщенности на фронте возрастает (рис. 1), приближаясь к невозмущенному значению объемной доли льда.

Соответственно изменяется скорость поверхности кристаллизации. Скорость возрастает вместе с коэффициентом диффузии, поскольку уменьшается количество кристаллизующейся воды.

Рис. 2 иллюстрирует зависимость образующегося льда от температуры охлаждающей стенки. Кривая 1 свидетельствует, что в случае небольшого ка-

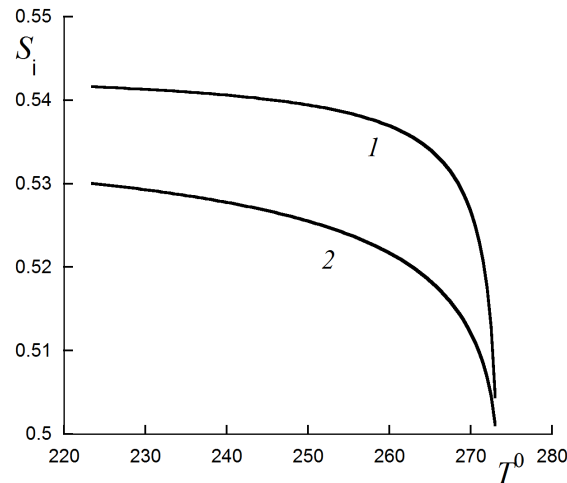


Рис. 2. Влияние температуры охлаждающей стенки на количество образовавшегося льда: $T_0 = 280$ К, $S_{w0} = 0.5$. Кривые 1 и 2 соответствуют коэффициентам диффузии $\kappa = 10^{-7}$ и $\kappa = 10^{-6}$

капиллярного давления масса образующегося льда резко возрастает с уменьшением температуры и при незначительном охлаждении близко к максимальному значению. Если капиллярные силы велики, то количество образующегося льда с падением температуры возрастает незначительно и медленно стремится к предельному максимальному значению. Это объясняется тем, что при росте капиллярных сил перераспределение воды происходит на меньших масштабах времени, обеспечивая более интенсивный отток жидкой фазы от фронта и уменьшение массы образующегося льда.

Заключение. Основная цель работы состояла в построении замкнутой модели образования льда в ненасыщенном грунте при наличии капиллярных сил. Для описания двухфазного течения вода — воздух перед фронтом фазового перехода представлен вывод уравнения диффузии, основанный на основных законах сохранения. Система граничных условий на фронте замыкалась соотношением равенства насыщенностей льда и воды. Предположение о равенстве насыщенностей основано на том, что условие роста кристалла льда состоит в наличии воды, контактирующей со льдом. Представлено автомодельное решение задачи. Показано, что рост капиллярных сил уменьшает количество образующегося льда, а более интенсивный режим замораживания, наоборот, приводит к росту льдонасыщенности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Цытович Н. А. Механика мерзлых грунтов. М.: Высшая школа, 1973.
2. Жесткова Т. Н. Формирование криогенного строения грунтов. М.: Наука, 1982.
3. Hoekstra P. Moisture movement in soils under temperature gradient with the cold-side temperature below freezing // Water Resources Res. 1966. V. 2. N 2. P. 241–250.

4. Zhang Y., Carey S. K., Quinton W. L. Evaluation of the algorithms and parametrizations for ground thawing and freezing simulation in permafrost regions // J. Geophys. Res. 2008. V. 113. D17116.
5. Li Q., Sun S., Dai Q. The numerical scheme development of a simplified frozen soil model // Adv. Atmosph. Sci. 2009. V. 26. N 5. P. 940–950.
6. Akbari G., Tabrizi H. B., Damangir E. Numerical and experimental investigation of variable phase transformation number effect in porous media during freezing process // Heat Mass Transfer. 2009. V. 45. N 4. P. 407–416.
7. Menot J. M. Equations of frost propagation in unsaturated porous media // Eng. Geology. 1979. V. 13. N 1–4. P. 101–109.
8. Цыпкин Г. Г. Линейная задача о фазовых переходах вода — лед в ненасыщенных грунтах // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1990. № 3. С. 68–73.
9. Цыпкин Г. Г. Влияние капиллярных сил на распределение влагонасыщенности при протаивании мерзлого грунта // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2010. № 6. С. 130–140.
10. Васильев В. И., Попов В. В., Цыпкин Г. Г. Нелинейная задача протаивания ненасыщенного мерзлого грунта при наличии капиллярных сил // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2012. № 1. С. 132–141.
11. Leverett M. C. Capillary behavior in porous solids // Trans. AIME. 1941. V. 142. N 1. P. 152–169.
12. Bear J. Dynamics of Fluids in Porous Media. New York: Acad. Press, 1972.
13. Pruess K., O'Sullivan M. Effect of capillarity and vapor adsorption in the depletion of vapor-dominated geothermal reservoirs // Proc., 17th Workshop on Geothermal Reservoir Engineering. Stanford, CA. USA: 1992. P. 165–174.

Статья поступила 12 марта 2017 г.

Цыпкин Георгий Геннадьевич
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,
пр. Вернадского, 101-1, Москва 119526
tsyarkin@ipmnet.ru

A MATHEMATICAL MODEL
OF FREEZING OF UNSATURATED SOILS
IN THE PRESENCE OF CAPILLARY PRESSURE

G. G. Tsypkin

Abstract. A mathematical model of freezing of soils saturated with a heterogeneous mixture of water and air in the presence of capillary pressure is proposed. The derivation of the diffusion equation for the redistribution of moisture from the laws of conservation of mass and momentum is given. This allows us to define the diffusion coefficient through the parameters of the porous medium and fluids. Balance relations through the water crystallization front is derived. A self-similar solution of the problem in the linear approximation is obtained. It is shown that the growth of capillary forces reduces the amount of ice formed, and a more intensive freezing regime leads to an increase in the saturation with ice.

DOI 10.25587/SVFU.2017.2.9249

Keywords: unsaturated soil, capillary pressure, filtration, freezing, ice.

REFERENCES

1. Tsytovich N. A., The Mechanics of Frozen Ground, McGraw-Hill, New York. 1975.
2. Zhestkova T. N., Formation of the Cryogenic Structure of Soils [in Russian], Nauka, Moscow (1982).
3. Hoekstra P., "Moisture movement in soils under temperature gradient with the cold-side temperature below freezing," Water Resources Res., **2**, No. 2, 241–250 (1966).
4. Zhang Y., Carey S. K., and Quinton W. L., "Evaluation of the algorithms and parametrizations for ground thawing and freezing simulation in permafrost regions," J. Geophys. Research, **113**, D17116 (2008).
5. Li Q., Sun S., and Dai Q., "The numerical scheme development of a simplified frozen soil model," Adv. Atmosph. Sci., **26**, No. 5, 940–950 (2009).
6. Akbari G., Tabrizi H. B., and Damangir E., "Numerical and experimental investigation of variable phase transformation number effect in porous media during freezing process," Heat Mass Transfer, **45**, No. 4, 407–416 (2009).
7. Menot J. M., "Equations of frost propagation in unsaturated porous media," Eng. Geology, **13**, No. 1–4, 101–109 (1979).
8. Tsypkin G. G., "Linear problem of water-ice phase transitions in unsaturated soils," Fluid dynamics, **25**, No. 3, 384–389 (1990).
9. Tsypkin G. G., "Effect of the capillary forces on the moisture saturation distribution during the thawing of a frozen soil," Fluid dynamics, **45**, No. 6, 942–951 (2010).
10. Vasil'ev V. I., Popov V. V., Tsypkin G. G., "Nonlinear problem of unsaturated frozen soil thawing in the presence of capillary forces," Fluid dynamics, **47**, No. 1, 106–113 (2012).

The work was supported by the grant from the Russian Foundation for Basic Research (project code 16-01-00363).

-
11. Leverett M. C., "Capillary behavior in porous solids," Trans. AIME, **142**, No. 1, 152–169 (1941).
 12. Bear J., Dynamics of Fluids in Porous Media, Acad. Press, New York (1972).
 13. Pruess K., O'Sullivan M., "Effect of capillarity and vapor adsorption in the depletion of vapor-dominated geothermal reservoirs," Proc., 17th Workshop on Geothermal Reservoir Engineering. Stanford, CA. USA, 165–174 (1992).

Submitted March 12, 2017.

Georgii G. Tsypkin
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics
of the Russian Academy of Sciences,
pr. Vernadskogo 101-1, Moscow 119526, Russia
`tsypkin@ipmnet.ru`

NUMERICAL METHOD FOR SOLVING
BOUNDARY INVERSE PROBLEM
FOR ONE-DIMENSIONAL PARABOLIC EQUATION

V. I. Vasil'ev and Ling-De Su

Abstract. We consider a numerical method for solving boundary inverse problem using the implicit difference scheme for approximation by time and finite difference method for the boundary inverse problem. A numerical solution to the boundary inverse problem is determined by special decomposition which transforms the problem into two standard problems. We present the results of numerical experiments, including those with random errors in the input data, which confirm the capabilities of the proposed computational algorithms for solving this boundary inverse problem.

DOI 10.25587/SVFU.2017.2.9250

Keywords: boundary inverse problem, finite difference method, numerical solution, parabolic partial differential equation.

1. Introduction

Boundary value problems for partial differential equations are often considered in some applied problems [1, 2]. It is very important to develop and examine some numerical methods for boundary value problems in the field of mathematical physics [3, 4]. Usually solutions to boundary value problems are found from the equations and some additional conditions. For time-independent problems, the boundary conditions are given [5], and for time-dependent equations, initial conditions are needed as well [6]. These boundary value problems are known as the traditional direct problems.

In this paper, we do not consider the direct problem; instead we focus on the inverse problem. Inverse problems are different from the direct ones. In the inverse problem, the master equation, initial and boundary conditions are not fully specified, but some additional information is available [7]. We find the unknown values by using the additional information.

There are many kinds of inverse problems, such as evolutionary inverse problems in which initial conditions are unknown [8], boundary inverse problems in which boundary conditions are unknown [9] and coefficient inverse problems in which the equation is not specified completely as some equation coefficients are unknown

This work is supported by RFBR (project 17-01-00732).

[10, 11]. The inverse problem which we concentrate on in this article is a boundary inverse problem.

Boundary inverse problems play an important role among the inverse problems of mathematical physics. They are related to diagnosing problems where one needs to restore the boundary regime on some border by using additional measurements on some part of the borders or inside the computation domain. The boundary inverse problem is studied in many works [12, 13].

Inverse problems in mathematical physics are often considered to be a class of classic ill-posed problems due to the lack of dependency of the solution on the input data [14–16]. So most standard numerical methods cannot provide good accuracy; therefore, their numerical solution requires development of special computational algorithms.

In this paper, we consider the boundary inverse problems for the one-dimensional second order parabolic partial differential equation, which is called heat conduction equation, of the following form:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (1)$$

In this problem, we need to reconstruct the boundary condition from the measurements which are taken inside the calculation domain. This problem belongs to the class of conditionally well-posed problems [7, 17, 18].

To solve the boundary inverse problem for the heat conduction equation, space approximation is performed with the use of standard finite difference, while linearized time approximations are constructed by the fully implicit scheme. Linear problems at a particular time level are solved by a special decomposition.

2. The Problem Formulation

We consider the problem on domain $[0, l]$. The boundary inverse problem is formulated as follows

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad x \in [0, l], \quad (2)$$

with the initial condition

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in [0, l], \quad (3)$$

In the inverse problem, not all boundary conditions are known; instead, we have the solution at some internal point x^* and the boundary condition on the left boundary, while the conditions are given as

$$u(0, t) = q(t), \quad t \in (0, T], \quad u(x^*, t) = g(t), \quad x^* \in (0, l), \quad t \in (0, T]. \quad (4)$$

The boundary inverse problem is to find solution $u(l, t)$ to the problems (2)–(4). There are many works that study the boundary inverse problems. Some monographs summarize the construction and justification of numerical methods to solve the boundary inverse problems [7, 19]. In this paper, we consider only the numerical solution to the boundary inverse problem of the second order in the heat conduction problem without some theoretical issues.

3. The computational algorithm

We consider the inverse problem (2)–(4) with $\overline{\Omega} = [0, l]$. To solve the parabolic problem numerically, we introduce the grid on domain Ω

$$\omega_h = \{x_i \mid x_i = ih, i = 1, 2, \dots, m, \dots, M-1, mh = x^*, Mh = l\},$$

where M is a positive integer. For the time we have

$$\overline{\omega}_\tau = \{t^n \mid t^n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N, N\tau = T\}.$$

Using the notation $u^n(x) = u(x, t^n)$ and backward difference for approximation in time, we get

$$u_t(x, t^n) \approx \frac{u^n(x) - u^{n-1}(x)}{\tau}, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

By employing finite difference approximations in space with the new notation $u_i(t) = u(x_i, t)$, we obtain

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t) \approx \frac{u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)}{h^2}, \quad i = 1, 2, \dots, M-1.$$

Introducing symbols $u_i^n = u(x_i, t^n)$, for the equation (2) we have

$$\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\tau} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}, \quad (5)$$

where $n = 1, 2, \dots, N$ and $i = 1, 2, \dots, M-1$. Simplifying (5), we get

$$u_{i+1}^n - \left(2 + \frac{h^2}{\tau}\right)u_i^n + u_{i-1}^n + \frac{h^2}{\tau}u_i^{n-1} = 0, \quad (6)$$

with $u_0^n = q^n$.

We use the following decomposition for the solution u^n at the new time level

$$u_i^n = v_i^n + u_M^n w_i^n, \quad i = 0, 1, \dots, M, \quad (7)$$

where $v_0^n = q^n$, $v_M^n = 0$ and $w_0^n = 0$, and $w_M^n = 1$. Substituting (7) in (6), we employ the following equations

$$v_{i+1}^n - \left(2 + \frac{h^2}{\tau}\right)v_i^n + v_{i-1}^n + \frac{h^2}{\tau}u_i^{n-1} = 0, \quad (8)$$

$$w_{i+1}^n - \left(2 + \frac{h^2}{\tau}\right)w_i^n + w_{i-1}^n = 0. \quad (9)$$

To calculate u_M^n , we find v^n and w^n from (8) and (9). For the solutions v_i^n and w_i^n , we use the following decompositions

$$v_i^n = \alpha_i^n v_{i+1}^n + \beta_i^n, \quad i = M-1, M-2, \dots, 0, \quad (10)$$

with $\alpha_0^n = 0$, $\beta_0^n = q^n$ and

$$w_i^n = \alpha_i^n w_{i+1}^n + \gamma_i^n, \quad i = M-1, M-2, \dots, 0, \quad (11)$$

with $\gamma_0^n = 0$.

Applying (10) to (8), we obtain

$$\alpha_i^n = \frac{1}{2 + \kappa - \alpha_{i-1}^n}, \quad (12)$$

$$\beta_i^n = \frac{\kappa u_i^{n-1} + \beta_{i-1}^n}{2 + \kappa - \alpha_{i-1}^n}, \quad (13)$$

where $\kappa = \frac{h^2}{\tau}$, $i = 1, 2, \dots, M-1$ and $n = 1, 2, \dots, N$. Using (11) in (9), we have

$$w_i^n = \alpha_i^n w_{i+1}^n, \quad \gamma_i^n = 0, \quad (14)$$

with $w_M^n = 1$ and $i = M-1, M-2, \dots, 1$. From (12)–(14), we can obtain all coefficients α , β and γ , so we get all the solutions of v and w .

To evaluate u_M^n , the additional condition $u(x^*, t) = g(t)$ is used. Applying (7) to this additional condition, we have

$$g^n = v^n(x^*) + u_M^n w^n(x^*), \quad (15)$$

where $x^* = mh \in (0, l)$. Thus we get

$$u_M^n = (g^n - v_m^n)/w_m^n, \quad (16)$$

to solve this equation. We assume that $w_m^n \neq 0$ and v^n and w^n are determined from (8), (9).

To guarantee the correctness of the computational algorithm for solving this inverse problem, the focus of the algorithm is related to the condition $w_m^n \neq 0$. Taking note of that, all the values w_i^n are determined by the system (9), (12) and (14). From (12) we can easily find that $0 < \alpha_1^n < 1$. By the use of mathematical induction we can easily get all $w_i \in (0, 1]$, i. e. all the $w_i > 0$, and guarantee the condition $w_m^n \neq 0$. It should be noted that the value α is associated with $\kappa = \frac{h^2}{\tau}$ and w_i is also affected. So we can control the value of w_m by choosing the appropriate time and space step size in order to make sure that the value of w_m is not too small.

4. Numerical examples

In this section we present numerical results to test the efficiency of the computational algorithm mentioned previously for solving the boundary inverse problems for one-dimensional second order parabolic equations.

To evaluate the numerical errors, we adopt the errors $\epsilon(t)$ which are defined as follows:

$$\epsilon(t) = \tilde{u}(l, t) - u(l, t),$$

where $\tilde{u}(l, t)$ is the numerical solution of $u(l, t)$ at time t , $u(l, t)$ is the exact boundary solution.

EXAMPLE 1. We consider the boundary inverse problem from the monograph [7] with $l = 1$ and $T = 1$. The initial condition is given as

$$u^0(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l.$$

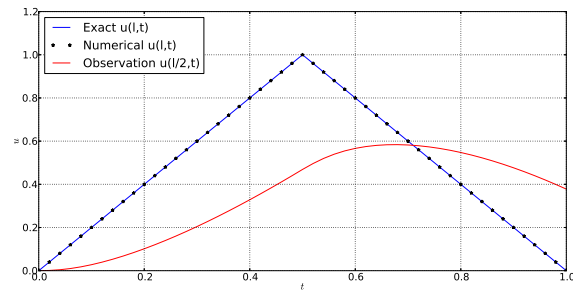
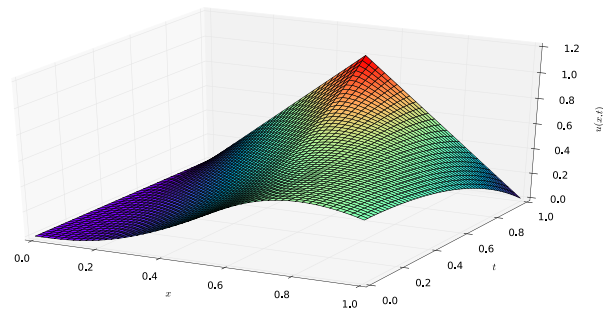
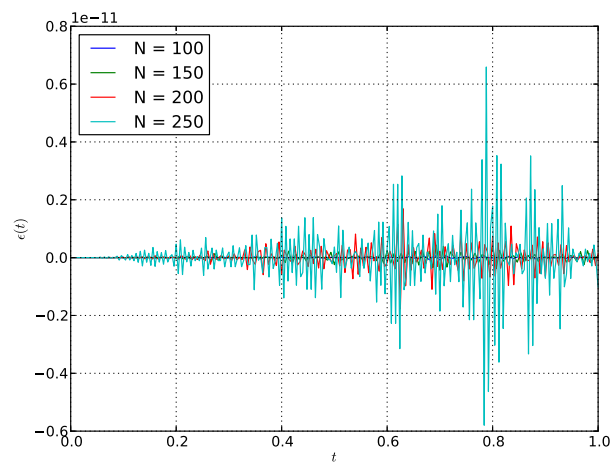


Fig. 1. The exact solution, numerical and the observation solutions

Fig. 2. The space-time figure of numerical solutions $u(x,t)$ Fig. 3. The errors of $\epsilon(t)$ with different N

The boundary solutions $u(1, t)$ have the following forms:

$$u(1, t) = \begin{cases} \frac{2t}{T}, & 0 \leq t < \frac{T}{2}, \\ \frac{2(T-t)}{T}, & \frac{T}{2} \leq t \leq T. \end{cases}$$

In the computation, we choose $x^* = 0.5$, $N = 50$, and $M = 50$. The exact and numerical solutions $u(l, t)$ and the observation solution at $x^* = 0.5$ with $T = 1.0$ are presented in Fig. 1. The space-time figure of numerical solutions $u(x, t)$ are presented in Fig. 2.

We consider this boundary inverse problem with the observation point $x^* = 0.5$ and $M = 50$ for different N . The dependence of the errors $\epsilon(t)$ on different N is given in Fig. 3.

In this numerical results, we also pay attention to the errors for different M . In the computation, we choose $N = 100$ and the observation point to be $x^* = 0.5$. The dependence of the errors $\epsilon(t)$ on different M is given in Fig. 4.

Finally, we consider the errors $\epsilon(t)$ with different observation points choosing $M = 50$ and $N = 100$. The dependence of the errors $\epsilon(t)$ with different observation points is given in Fig. 5.

EXAMPLE 2. This test case is taken from [12, 14]. We also put $x \in [0, 1]$ with the conditions

$$u^0(x) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

The boundary solutions $u(1, t)$ take the form

$$u(1, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 0.25 \text{ and } 1 \geq t > 0.75, \\ 1, & 0.25 \leq t \leq 0.75. \end{cases}$$

We consider the inverse problem with $M = 50$ and $N = 50$. The exact and numerical solutions $u(1, t)$ with different observation solutions at x^* are presented in Fig. 6. The space-time dependence of numerical solutions $u(x, t)$ is presented in Fig. 7.

In the numerical algorithm for the inverse problem, the focal point is disturbance of the input data. Much attention is paid to the cases in which input data is given with an error. In our boundary inverse problem while observing the solution at an interior point $u(x^*, t) = g(t)$, $0 < t \leq T$, the fundamental problem is to study the influence of inaccuracies in the specified function $g(t)$ on the accuracy of the identification of the boundary solutions.

To illustrate the effectiveness of the numerical method with noisy input data, we introduce the error in the values of the function $g(t)$ at the points of the time grid. We put

$$g_\delta(t^n) = g(t^n) + \delta\sigma, \quad t^n = n\tau, \quad n = 1, 2, \dots, N_1,$$

where δ is the tolerated noise level and σ is a random variable uniformly distributed on the interval $[-0.5, 0.5]$.

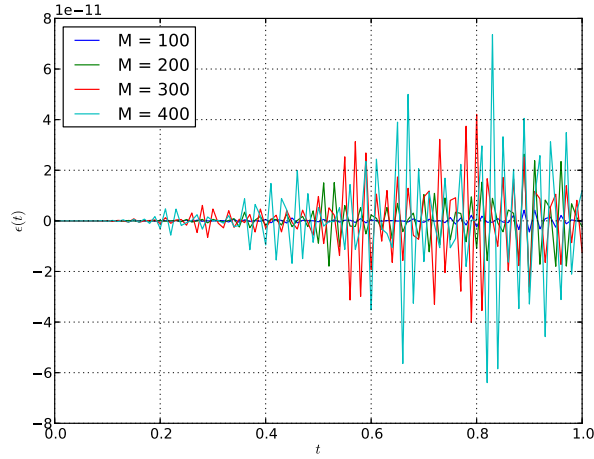
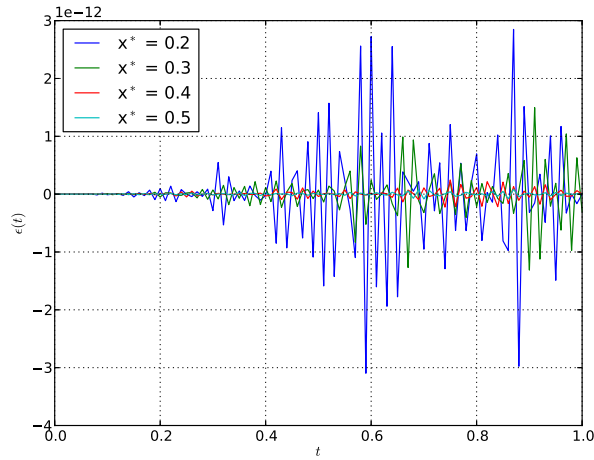
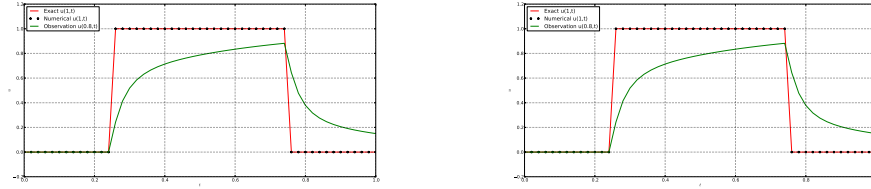
Fig. 4. The errors of $\epsilon(t)$ with different M Fig. 5. The errors of $\epsilon(t)$ with different observation points x^*

Fig. 8 shows the exact, numerical solutions of the boundary solutions and the solution with noisy data for solving the boundary inverse problem with $\delta = 0.01$. For smoothing the function $g_\delta(t^n)$, $n = 1, 2, \dots, N_1$, we use the cubic-splines interpolation. In the computation, we choose $M = 50$ and $N_1 = 10$.

We also consider the solutions of the boundary inverse problem with different observation points x^* and $\delta = 0.01$. The dependence of the solution to the boundary on different observation points x^* is given in Fig. 9.

Finally, we consider solutions with different tolerated noise level δ . The solutions with different δ are given in Fig. 10. In this computation, the observation point is



(a) Solutions with observation point $x^* = 0.5$ (b) Solutions with observation point $x^* = 0.8$

Fig. 6. The exact and numerical solutions $u(1, t)$ and observation solutions $u(x^*, t)$

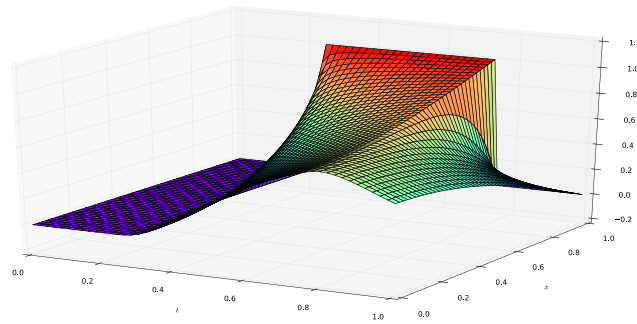


Fig. 7. The space-time figure of numerical solutions $u(x, t)$

chosen to be $x^* = 0.5$. From Fig. 10 we see that when the noisy reaches 10^{-1} , the difference between the exact and numerical solutions increases.

5. Conclusions

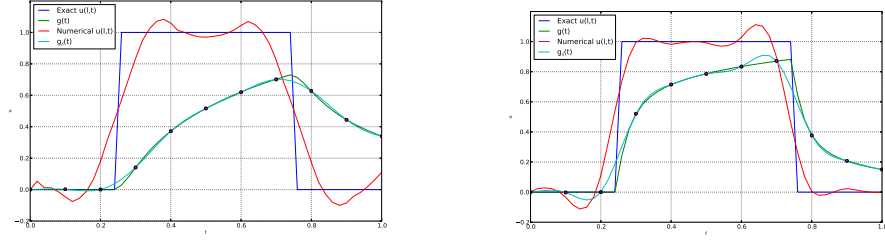
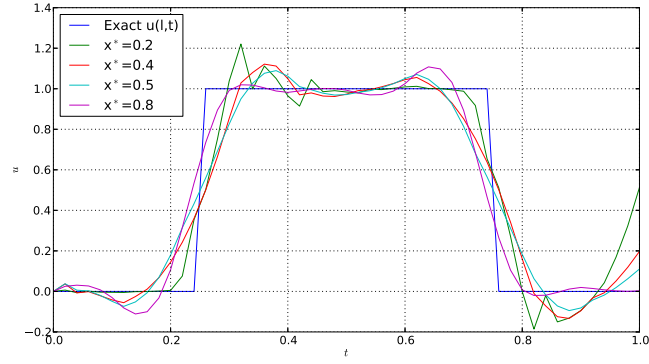
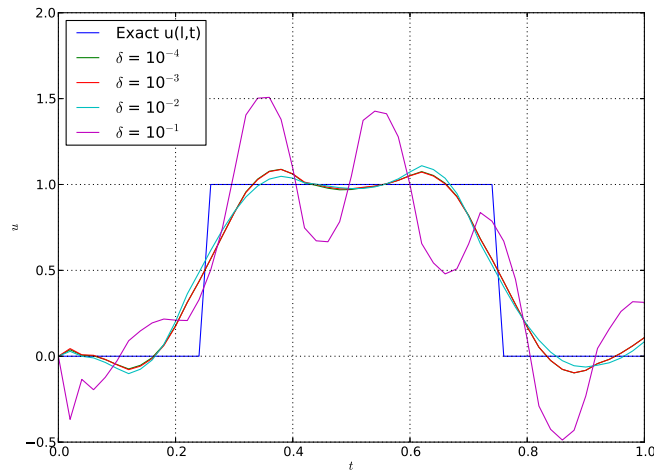
We proposed a numerical scheme to solve the inverse problems by the means of the finite difference method. The numerical implementation used the linearized approximations in time and standard finite difference procedures in space based on a decomposition of the approximate solution. Numerical solutions to the model problem demonstrate the convergence of the approximate solutions to the inverse problem.

6. Acknowledgments

The authors would like to express their deep gratitude to professor P. N. Vabishchevich for his helpful and constructive remarks.

REFERENCES

1. Olver P., Introduction to Partial Differential Equations, Springer, Cham (2014).
2. Guenther R. B. and Lee J. W., Partial Differential Equations of Mathematical Physics and Integral Equations, Dover Publ., New York (2012).

(a) Solutions with observation point $x^* = 0.5$ (b) Solutions with observation point $x^* = 0.8$ Fig. 8. The exact and numerical solutions $u(1,t)$ and noisy data $g_\delta(t)$ Fig. 9. The solutions with different observation point x^* Fig. 10. The exact and numerical solution with different δ

3. Tikhonov A. N. and Samarskii A. A., Equations of Mathematical Physics, Dover Publ., New York (2011).
4. Evans L. C., Partial Differential Equations, Amer. Math. Soc., Washington (2010).
5. Gilbarg D. and Trudinger N. S., Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer, Berlin, Heidelberg (2001).
6. Jiang Z. W., "A meshfree method for numerical solution of nonhomogeneous time dependent problems," Abstract Appl. Anal., Article ID 978310 (2014).
7. Samarskii A. A. and Vabishchevich P. N., Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics, Walter de Gruyter, Berlin (2007).
8. Jiang T. S., Li M., and Chen C. S., "The method of particular solutions for solving inverse problems for a nonhomogeneous convection diffusion equation with variable coefficients," Numer. Heat Transfer, P. A: Applications, **61**, 338–352 (2012).
9. Kang H., "A uniqueness theorem for an inverse boundary value problem in two dimensions," J. Math. Anal. Appl., **270**, No. 1, 291–302 (2002).
10. Vabishchevich P. N. and Vasil'ev V. I., "Computational algorithms for solving the coefficient inverse problem for parabolic equations," Inverse Probl. Sci. Engin., **24**, No. 1, 42–59 (2016).
11. Vabishchevich P. N., "Iterative computational identification of a spacewise dependent the source in a parabolic equations," Inverse Probl. Sci. Engin., **25**, No. 8, 1168–1190 (2017).
12. Vasil'ev V. V., Vasilyeva M. V., and Kardashevsky A. M., "The numerical solution of the boundary inverse problem for a parabolic equation," in: Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences, AIP Conf. Proc., AIP Publ., **1773**, No. 1, 100010 (2016).
13. Colaço M. J., Orlande H. R. B., and Dulikravich G. S., "Inverse and optimization problems in heat transfer," J. Braz. Soc. Mech. Sci. Engin., **28**, No. 1/1 (2006).
14. Kamynin V. L., "On the solvability of the inverse problem for determining the right hand side of a degenerate parabolic equation with integral observation," Math. Notes, **98**, No. 5, 765–777 (2015).
15. Kamynin V. L., "The inverse problem of the simultaneous determination of the right hand side and the lowest coefficient in parabolic equations with many space variables," Math. Notes, **97**, No. 3, 349–361 (2015).
16. Vabishchevich P. N., Vasil'ev V. I., and Vasil'eva M. V., "Computational identification of the right hand side of a parabolic equation," Comput. Math. Math. Phys., **55**, No. 9, 1015–1021 (2015).
17. Kabanikhin S. I., Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications, Walter de Gruyter, (2011).
18. Jonas P. and Louis A. K., "Approximate inverse for a one-dimensional inverse heat conduction problem," Inverse Problems, **16**, 175–185 (2000).
19. Alifanov O. M., Inverse Heat Transfer Problems. Springer-Verl., Heidelberg (1994). (Int. Ser. Heat Mass Transfer. Springer Ser. Chem. Phys.)

Submitted March 10, 2017

Vasily I. Vasil'ev and Ling-De Su
 M. K. Ammosov North-Eastern Federal University,
 Institute of Mathematics and Informatics,
 42, Kulakovsky St., Yakutsk 677000, Russia
 vasvasil@mail.ru, sulingde@gmail.com