

Редакционный совет

Главный редактор: Егоров И. Е., д.ф.-м.н., профессор, СВФУ

Зам. главного редактора: Кожанов А. И., д.ф.-м.н., профессор, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Зам. главного редактора: Попов С. В., д.ф.-м.н., профессор, СВФУ

Ответственный секретарь: Евсеев З. И., СВФУ

Члены редакционного совета:

Бородин О. В., д.ф.-м.н., профессор, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Вабищев П. Н., д.ф.-м.н., профессор, Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН

Васильев В. И., д.ф.-м.н., профессор, СВФУ

Григорьев Ю. М., д.ф.-м.н., доцент, СВФУ

Зикиров О. С., д.ф.-м.н., профессор, Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Узбекистан

Морозов А. С., д.ф.-м.н., профессор, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Пятков С. Г., д.ф.-м.н., профессор, Югорский государственный университет

Хлуднев А. М., д.ф.-м.н., профессор, Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

Itou H., Ph.D., Professor, Tokyo University of Science, Japan

Ruzhansky M., Professor, Ghent University, Belgium

Tani A., Professor, Keio University, Japan

Xin-Lin Gao, Professor, Southern Methodist University, USA

СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М. К. АММОСОВА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ СВФУ

ОСНОВАН В 1994 ГОДУ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ВЫХОДИТ 4 РАЗА В ГОД

Том 30, № 3 (119)

Июль—сентябрь, 2023

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Абулов М. О. Нелокальная задача для одного класса уравнений третьего порядка	3
М. О. Abulov Nonlocal problem for a class of third-order equations ...	10
Варламова Г. А., Кожанов А. И. Нелокальные задачи с интегральными условиями для гиперболических уравнений с двумя временными переменными	12
G. A. Varlamova, A. I. Kozhanov Nonlocal problems with integral conditions for hyperbolic equations with two time variables	24
Волокитин Е. П. Кубические системы типа Дарбу с неэлементарной особой точкой на экваторе Пуанкаре	27
Е. Р. Volokitin Cubic Darboux systems with a non-elementary singular point at the Poincaré equator	36
Лазарев Н. П., Романова Н. А. Оптимальное управление углом между двумя тонкими жесткими включениями в двумерном неоднородном теле	38
N. P. Lazarev, N. A. Romanova Optimal control of the angle between two rigid inclusions in an inhomogeneous 2D body	55
Николаев О. Ю. Разрешимость линейной обратной задачи для псевдо-параболического уравнения	58
O. Yu. Nikolaev Solvability of the linear inverse problem for the pseudoparabolic equation	66

Ройтенберг В. Ш. Бифуркация полицикла, образованного сепаратрисами седла с нулевой седловой величиной динамической системы с центральной симметрией	67
V. Sh. Roitenberg Bifurcations of a polycycle formed by separatrices of a saddle with zero saddle value of a dynamical system with central symmetry	76
R. Shamoyan, O. Mihić Some remarks on Blaschke type products in large area Nevanlinna spaces in the unit disk	78
Математическое моделирование	
Асфандияров Д. Г., Сороковикова О. С. Численный метод решения уравнений мелкой воды повышенной точности на основе модифицированной схемы КАБАРЕ	91
D. G. Asfandiyarov, O. S. Sorokovikova A high-resolution numerical method for solving the shallow water equations based on the modified CABARET scheme	111
X Международная конференция по математическому моделированию, посвященная 30-летию Академии наук Республики Саха (Якутия) (16–20 июля 2023 г.)	113
Григорьев Юрий Михайлович (18.07.1959–22.09.2023)	116
Памяти Николая Андреевича Ларькина	117

АДРЕС ИЗДАТЕЛЯ:

СВФУ, ул. Белинского, 58, Якутск, 677000

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

СВФУ, ул. Кулаковского, 48, каб. 543, Якутск, 677000

Телефон: 8(4112)32-14-99, Факс: 8(4112)36-43-47;

<http://mzsvfu.ru>

e-mail: prokopevav85@gmail.com; yktmatzam@gmail.com;

ivanegorov51@mail.ru

УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

М. О. Абулов

Аннотация. Рассматривается нелокальная задача в цилиндрической области для уравнения третьего порядка смешанно-составного типа вида

$$u_{ttt} - \mu(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta u - a(x, t) \Delta u = f(x, t),$$

где $x_1 \mu(x_1) > 0$ при $x_1 \neq 0$, $\mu(0) = 0$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$. С помощью метода Галеркина доказывается, что нелокальная краевая задача при некоторых условиях на коэффициенты и правую часть этого уравнения имеет единственное решение в пространствах Соболева. Доказательство основано на методе Галеркина с выбором специального базиса и априорных оценок. Доказаны также новые теоремы существования и единственности решения нелокальной краевой задачи, которые позволяют расширить круг решаемых проблем в теории краевых задач для неклассических уравнений математической физики.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.45.27.001

Ключевые слова: нелокальная задача, цилиндрическая область, смешанно-составной тип, обобщенное решение, уравнение третьего порядка.

Введение

Работы [1, 2] положили начало целому направлению в исследовании постановок корректных задач для уравнений смешанно-составного типа третьего порядка. В них предложен и исследован ряд задач для модельного уравнения смешанно-составного типа. В. Н. Врагов [3] поставил и исследовал ряд задач для уравнения смешанно-составного типа третьего порядка

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x} + \alpha(x, y)\right) (k(x, y)u_{xx} + u_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u) = f(x, y).$$

В дальнейшем в работах М. С. Салахитдинова [4], Т. Д. Джураева, У. О. Рахманова [5], Л. А. Бобылова, М. М. Смирнова [6], С. Г. Пяткова [7], автора данной статьи [8] и других были поставлены и исследованы краевые задачи для уравнения смешанно-составного и составного типа. Отметим, что в работе И. Е. Егорова, В. Е. Федорова [9] исследованы краевые задачи для широких классов неклассических уравнений математической физики высокого порядка, в частности, для уравнения смешанно-составного типа.

Нелокальные задачи в настоящее время являются интенсивно развивающимся разделом теории дифференциальных уравнений. Интерес к нелокальной задаче (кроме теоретического значения) вызван возможностью ее физической интерпретации: если дифференциальное уравнение описывает некоторый физический процесс, то нелокальные краевые условия являются некоторыми алгебраическими выражениями, связывающими искомое решение и его производные в двух и более точках наблюдения физического процесса. Проблемы современной науки и техники выдвинули более реальные практические задачи, связанные с исследованием разнообразных классов математических моделей. Известно, что математическое моделирование многих биологических и технологических процессов приводит к изучению нелокальных краевых задач для различных классов дифференциальных уравнений. Поэтому изучение нелокальных задач для различных классов дифференциальных уравнений привлекало внимание многих математиков. Библиографию вопроса можно найти, например, в монографиях [10, 11]. Среды работ по этой задаче можно отметить [12–19].

В области

$$Q = \{(x, t) : -1 \leq x_1 \leq 1, (x_2, x_3, \dots, x_n) \in D, 0 \leq t \leq T\} \\ = [-1, 1] \times D \times [0, T] = \Omega \times [0, T]$$

рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{ttt} - \mu(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta u - a(x, t) \Delta u = f(x, t), \quad (1)$$

где $x_1 \mu(x_1) > 0$ при $x_1 \neq 0$, $\mu(0) = 0$, и будем предполагать, что $\mu(x_1) \in C^3[-1, 1]$, $a(x, t) \in C^3(\bar{Q})$, D — ограниченная область в R^{n-1} с гладкой (для простоты бесконечно дифференцируемой) границей Γ , $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

1. Нелокальная задача. Найти в области Q решение уравнения (1), удовлетворяющее следующим условиям:

$$u|_{t=0} = \gamma u|_{t=T}, \quad u_t|_{t=0} = \gamma u_t|_{t=T}, \quad u_{tt}|_{t=0} = \gamma u_{tt}|_{t=T}, \quad (2)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3)$$

где $\gamma = e^{\frac{\lambda T}{2}}$, $\lambda > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Обозначим через $H(Q)$ пространство функций, полученное замыканием множества функций в $C^3(Q)$, удовлетворяющих условиям (2), (3), по норме

$$\|u\|_{H(Q)}^2 = \int_Q \left(u_{ttt}^2 + \mu^2 (\Delta u_{x_1})^2 + u_{tt}^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}^2 + \sum_{i=1}^n u_{t x_i}^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u_t^2 + u^2 \right) dQ. \quad (4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функцию $u \in H(Q)$ будем называть *обобщенным решением задачи* (1)–(3), если она удовлетворяет уравнению (1) п.в. в Q .

Теорема. Пусть выполнены условия

$$a(x, 0) = a(x, T), \quad a_t(x, 0) = a_t(x, T), \quad (5)$$

$$a(x, t) - \frac{3}{2}|\mu_{x_1}| \geq \delta > 0, \quad (6)$$

$$f(x, 0) = \gamma f(x, T). \quad (7)$$

Тогда для любой функции $f(x, t)$ такой, что $f, f_t \in L_2(Q)$, существует единственное решение задачи (1)–(3) из $H(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решение задачи (1)–(3) будем искать методом Галеркина:

$$u_m(x, t) = \sum_{i=1}^m g_i(t) \varphi_i(x),$$

где функции $\varphi_i(x)$ являются решениями задачи

$$-\Delta \varphi_i = \lambda_i \varphi_i \quad (i = 1, 2, \dots), \quad \varphi_i = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad (8)$$

а коэффициенты $g_i(t)$ находятся из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(u_{mttt}, \varphi_i)_0 - (\mu \Delta u_{mx_1}, \varphi_i)_0 - (a \Delta u_m, \varphi_i)_0 = (f_m, \varphi_i), \quad (9)$$

$$g_i(0) = \gamma g_i(T), \quad g_{it}(0) = \gamma g_{it}(T), \quad g_{itt}(0) = \gamma g_{itt}(T), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (10)$$

Теоремы существования для систем обыкновенных дифференциальных уравнений гарантируют разрешимость задачи (9), (10). По предположению граница области $\Omega = [-1, 1] \times D$ достаточно гладкая, так что $\varphi_i(x) \in W_2^3(\Omega)$. Получим равномерные по m оценки для галеркинских приближений. Через C, C_1, C_2 и C_3 будем обозначать различные положительные постоянные, не зависящие от m .

Лемма 1. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда для решения задачи (9), (10) верна оценка

$$\int_Q (u_{mt}^2 + u_{mx}^2 + u_m^2) dQ \leq C \int_Q f^2 dQ. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая уравнение (9) на $e^{\lambda t} u_m$ и интегрируя по области Q , с учетом условий (2), (3) и неравенства Коши получим

$$\begin{aligned} \int_Q e^{\lambda t} \left[\frac{3\lambda}{2} u_{mt}^2 + \left(a - \frac{3}{2} \mu_{x_1} \right) u_{mx_1}^2 + \left(a - \frac{1}{2} \mu_{x_1} \right) u_{mx_2}^2 + \dots \right. \\ \left. + \left(a - \frac{1}{2} \mu_{x_1} \right) u_{mx_n}^2 \right] dQ \leq C_1 \int_Q f^2 dQ + C_2 \int_Q u_m^2 dQ. \end{aligned} \quad (12)$$

В силу граничных условий (3) нетрудно видеть, что для решения верна оценка

$$\int_Q u_m^2 dQ \leq C \int_Q u_{mx}^2 dQ. \quad (13)$$

Из (12) ввиду (13) и условий теоремы для решения задачи (9), (10) следует, что верна оценка (11). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда для решения задачи (9), (10) верна оценка

$$\int_Q (u_{mxt}^2 + (\Delta u_m)^2) dQ \leq C \int_Q f^2 dQ. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая уравнение (9) на $-e^{\lambda t} \Delta u_m$ и интегрируя по области Q , в силу условий (2), (3) и неравенства Коши получим

$$\begin{aligned} \int_Q e^{\lambda t} \left[\frac{3\lambda}{2} u_{mxt}^2 + \left(a - \frac{1}{2} \mu_{x_1} \right) (\Delta u_m)^2 \right] dQ \\ \leq C_1 \int_Q f^2 dQ + C_2 \int_Q (\Delta u_m)^2 dQ + C_3 \int_Q (u_{mt}^2 + u_{mx}^2) dQ. \end{aligned}$$

Отсюда в силу условий теоремы и леммы 1 для решения задачи (9), (10) получим оценку (14), где, например, $C_2 = \frac{\delta}{2}$. Тогда коэффициент $(\Delta u_m)^2$ будет строго положительным, так что $(a - \frac{1}{2} \mu_{x_1} - C_2) > 0$. Лемма 2 доказана.

Из (11), (14) вытекает, что

$$u_m \in W_2^{2,1}(Q). \quad (15)$$

Лемма 3. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда для решения задачи (9), (10) верна оценка

$$\int_Q (u_{mtt}^2 + u_{mxt}^2) dQ \leq C \int_Q f^2 dQ. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая уравнение (9) на $-e^{\lambda t} u_{mtt}$ и интегрируя по области Q , в силу условий (2), (3) и неравенства Коши получим

$$\begin{aligned} \int_Q e^{\lambda t} \left[\frac{\lambda}{2} u_{mtt}^2 + \left(a - \frac{3}{2} \mu_{x_1} \right) u_{mtx_1}^2 \right. \\ \left. + \left(a - \frac{1}{2} \mu_{x_1} \right) u_{mtx_2}^2 + \dots + \left(a - \frac{1}{2} \mu_{x_1} \right) u_{mtx_n}^2 \right] dQ \\ \leq C_1 \int_Q f^2 dQ + C_2 \int_Q (u_{mx_1x}^2 + u_{mxt}^2) dQ + C_3 \int_Q (u_{mx}^2 + u_{mt}^2) dQ. \end{aligned}$$

Отсюда в силу условия теоремы и (11), (14) для решения задачи (9), (10) получим оценку (16).

В силу условий на коэффициенты и правую часть уравнения (1) из этого уравнения следует, что

$$u_{ttt}|_{t=0} = \gamma u_{ttt}|_{t=T}. \quad (17)$$

Лемма 4. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда для решения задачи (9), (10) верна оценка

$$\int_Q (u_{mxtt}^2 + (\Delta u_t)^2) dQ \leq C \int_Q (f^2 + f_t^2) dQ. \quad (18)$$

Доказательство. Дифференцируя уравнения (9) по t , умножая полученное уравнение на $-e^{\lambda t} \Delta u_{mt}$ и интегрируя по области Q , в силу условий (2), (3), (17) и неравенства Коши получим

$$\begin{aligned} \int_Q e^{\lambda t} \left[\frac{3\lambda}{2} u_{mxtt}^2 + \left(a - \frac{1}{2} \mu' \right) (\Delta u_{mt})^2 \right] dQ \\ \leq C_1 \int_Q f_t^2 dQ + C_2 \int_Q (\Delta u_{mt})^2 dQ + C_3 \int_Q (\Delta u_m)^2 dQ. \end{aligned}$$

Отсюда в силу условий теоремы и (16) для решения задачи (9), (10) получим оценку (18). где, например, $C_2 = \frac{\delta}{2}$, т. е. $C_2 < \delta$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда для решения задачи (9), (10) верна оценка

$$\int_Q (u_{mttt}^2 + u_{mxtt}^2) dQ \leq C \int_Q (f^2 + f_t^2) dQ \quad (19)$$

Доказательство. Дифференцируя уравнения (9) по t , умножая полученное уравнение на $-e^{\lambda t} u_{mttt}$ и интегрируя по области Q , в силу условий (2), (3), (17) и неравенства Коши получим

$$\begin{aligned} \int_Q e^{\lambda t} \left[\frac{\lambda}{2} u_{mttt}^2 + \left(a - \frac{3}{2} \mu_{x_1} \right) u_{mx_1tt}^2 \right. \\ \left. + \left(a - \frac{1}{2} \mu_{x_1} \right) u_{mx_2tt}^2 + \dots + \left(a - \frac{1}{2} \mu_{x_1} \right) u_{mx_n tt}^2 \right] dQ \\ \leq C_1 \int_Q f_t^2 dQ + C_2 \int_Q (u_{mxt}^2 + u_{mxx}^2 + u_{mt}^2 + u_{mx}^2) dQ. \end{aligned}$$

Отсюда в силу условий теоремы и (11), (14), (16), (18) для решения задачи (9), (10) получим оценку (19).

В силу условий теоремы и (14), (16), (18), (19) из уравнения (9) следует, что

$$\mu(x_1) \Delta u_{mx_1} \in L_2(Q). \quad (20)$$

Из оценок (11), (14), (16), (18), (19) и (20) следует ограниченность последовательности приближенных решений $\{u_m(x, t)\}$ в пространстве $H(Q)$. Из этих оценок следует, что задача (9), (10) разрешима. Из последовательностей

$\{u_m(x, t)\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{u_{m_k}(x, t)\}$ и перейти к пределу по $m_k \rightarrow \infty$ в системе (9). Покажем, что предельная функция u удовлетворяет уравнению (1), т. е. $Lu = f$. Действительно, так как последовательность $\{u_m(x, t)\}$ слабо сходится в пространстве $H(Q)$, а оператор L линейный, последовательность функций $\{Lu_m(x, t)\}$ слабо сходится в пространстве $L_2(Q)$ к функции Lu .

Из принадлежности решения задача (1)–(3) пространству $H(Q)$ и теорем вложения [20] следует, что условия (2), (3) имеют смысл.

Докажем, что решение задачи (1)–(3) единственно.

Если u, v — два решения задачи (1)–(3), то $w = u - v$ удовлетворяет уравнению

$$w_{ttt} - \mu(x_1)w_{xxx} - a(x, t)w_{xx} = 0$$

и условиям (2), (3). Аналогично, как в лемме 1, для $w(x, t)$ получим

$$\int_Q (w_t^2 + w_x^2 + w^2) dQ \leq 0.$$

Отсюда следует, что $w = 0$ в Q .

Теорема доказана.

В данной работе доказаны новые теоремы существования и единственности решения нелокальной задачи (1)–(3), которые позволяют расширить круг решаемых проблем в теории краевых задач для неклассических уравнений математической физики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А. В., Салахитдинов М. С. К теории уравнений смешанно-составного типа // Сиб. мат. журн. 1961. Т. 2, № 1. С. 7–19.
2. Бицадзе А. В. Об уравнениях смешанно-составного типа // Некоторые проблемы математики и механики (к шестидесятилетию академика М. А. Лаврентьева). Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1961. С. 47–49.
3. Врагов В. Н. Об одном уравнении смешанно-составного типа // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, № 1. С. 169–171.
4. Салахитдинов М. С. Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент: Фан, 1974.
5. Джураев Т. Д., Рахманов У. О корректных краевых задачах для уравнений смешанно-составного типа // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, № 1. С. 32–40.
6. Бобылова Л. А., Смирнов М. М. Об одной краевой задаче для уравнения смешанно-составного типа 4-го порядка // Изв. вузов. Математика. 1972. № 5. С. 15–21.
7. Пятков С. Г. Об одном уравнении составного типа // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 1. С. 117–123.
8. Абулов М. А. Краевая задача для смешанно-составного типа третьего порядка. Новосибирск: НГУ, 1989. 5 с. Деп. в ВИНТИ, №1436, В89 (1989).
9. Егоров И. Е., Федоров В. Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Наука, 1995.
10. Мамедов И. Г. Решение многомерных локальных и нелокальных краевых задач для гиперболических уравнений высокого порядка с негладкими коэффициентами и их применение к задачам оптимального управления. Баку, 2015.
11. Тахиров Ж. О. Неклассические нелинейные задачи и задачи со свободной границей. Ташкент, 2014.

12. Балкизов Ж. А. Нелокальная краевая задача для уравнения парабола-гиперболического типа третьего порядка с вырождением типа и порядка в области его гиперболичности. Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. М.: ВИНТИ, 2018. Т. 149. С. 14–24.
13. Кожанов А. И. Нелокальная по времени краевая задача для линейных параболических уравнений // Сиб. журн. индустр. математики. 2004. Т. 7, № 1. С. 51–60.
14. Абдурахманов А. М., Кожанов А. И. Задача с нелокальным граничным условием для одного класса уравнений нечетного порядка // Изв. вузов. Математика. 2007. № 5. С. 3–12.
15. Пятков С. Г. О некоторых классах нелокальных краевых задач для сингулярных параболических уравнений // Мат. заметки. 2019. Т. 106, вып. 4. С. 578–594.
16. Алимов Ш. А., Пулатов А. К. Об одной нелокальной задаче Бицадзе — Самарского // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1986. № 1. С. 8–11.
17. Зикиров О. С. О разрешимости нелокальной задачи для гиперболического уравнения третьего порядка // Сиб. журн. чистой и прикл. математики. 2016. Т. 16, вып. 2. С. 16–26.
18. Артюшин А. Н. О регулярной разрешимости краевой задачи для уравнения третьего порядка с меняющимся направлением эволюции в весовых пространствах Соболева // Сиб. электрон. мат. изв. 2019. Т. 16. С. 2003–2012.
19. Абулов М. О. Нелокальная задача для одного класса уравнений третьего порядка. КарДУ Хабарлари. 2022. Т. 3, № 1. С. 12–16.
20. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.

Поступила в редакцию 25 января 2023 г.

После доработки 28 апреля 2023 г.

Принята к публикации 04 сентября 2023 г.

Абулов Мумин Орзикулович
Каршинский государственный университет,
Кучабаг, 17, Карши 180003, Узбекистан
abulov1959@mail.ru

NONLOCAL PROBLEM FOR A CLASS OF THIRD-ORDER EQUATIONS

M. O. Abulov

Abstract: This article considers a nonlocal problem in a cylindrical domain for the third-order mixed-composite type equation of the form

$$u_{ttt} - \mu(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta u - a(x, t) \Delta u = f(x, t),$$

where $x_1 \mu(x_1) > 0$ for $x_1 \neq 0$, $\mu(0) = 0$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Using the Galerkin method, it is proved that this nonlocal problem, under certain conditions on the coefficients and the right side of the equation, has a unique solution in Sobolev spaces. The proof is based on the Galerkin method with the choice of a special basis and a priori estimates. New theorems are also proved regarding the existence and uniqueness of the solution of the nonlocal problem, which allow expanding the range of solvable problems in the theory of boundary value problems for nonclassical equations of mathematical physics.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.45.27.001

Keywords: nonlocal problem, cylindrical domain, mixed-composite type, generalized solution, third-order equation.

REFERENCES

1. Bitsadze A. V. and Salakhitdinov M. S., “On the theory of equations of mixed-composite type [in Russian],” *Sib. Mat. Zh.*, **2**, No. 1, 7–19 (1961).
2. Bitsadze A. V., “On equations of mixed-composite type,” in: *Some Problems of Mathematics and Mechanics* [in Russian], pp. 47–49, Izdat. Sib. Otdel. Akad. Nauk SSSR, Novosibirsk (1961).
3. Vragov V. N., “On one equation of mixed-composite type [in Russian],” *Differ. Uravn.*, **9**, No. 1, 169–171 (1973).
4. Salakhitdinov M. S., *Equations of Mixed-Composite Type* [in Russian], Fan, Tashkent (1974).
5. Djuraev T. D. and Rakhmanov U., “On well-posed boundary value problems for equations of mixed-composite type [in Russian],” *Differ. Uravn.*, **9**, No. 1, 32–40 (1973).
6. Bobylova L. A. and Smirnov M. M., “On a boundary value problem for an equation of mixed-composite type of the 4th order [in Russian],” *Izv. VUZov, Mat.*, No. 5, 15–21 (1972).
7. Pyatkov S. G., “On one equation of composite type [in Russian],” *Differ. Uravn.*, **16**, No. 1, 117–123 (1980).
8. Abulov M. A., “Boundary value problem for a mixed-composite type of the third order [in Russian],” *Novosib. Gos. Univ., Novosibirsk* (1989). 5 p. (Dep. VINITI, No. 1436, **89**).
9. Egorov I. E. and Fedorov V. E., *Non-Classical Equations of Mathematical Physics of High Order* [in Russian], Nauka, Novosibirsk (1995).
10. Mamedov I. G., *Solution of Multidimensional Local and Nonlocal Boundary Value Problems for High Order Hyperbolic Equations with Nonsmooth Coefficients and Their Application to Optimal Control Problems* [in Russian], Baku (2015).

11. *Takhirov J. O.*, Non-Classical Nonlinear Problems and Problems with a Free Boundary [in Russian], Tashkent (2014).
12. *Balkizov Zh. A.*, “A non-local boundary value problem for an equation of parabolic-hyperbolic type of the third order with degeneration of type and order in the region of its hyperbolicity [in Russian],” *Itogi Nauki i Tekhniki, Sovrem. Mat. Pril.*, **149**, 14–24 (2018).
13. *Kozhanov A. I.*, “Time-nonlocal boundary value problem for linear parabolic equations,” *Sib. J. Ind. Math.*, **7**, No. 1, 51–60 (2004).
14. *Abdurakhmanov A. M. and Kozhanov A. I.*, “Problem with a nonlocal boundary condition for a class of odd-order equations [in Russian],” *Izv. VUZov, Mat.*, No. 5, 3–12 (2007).
15. *Pyatkov S. G.*, “On some classes of nonlocal boundary value problems for singular parabolic equations [in Russian],” *Mat. Zamet.*, **106**, No. 4, 578–594 (2019).
16. *Alimov Sh. A. and Pulatov A. K.*, “On a nonlocal Bitsadze–Samarskii problem [in Russian],” *Izv. Akad. Nauk Uzbek. SSR, Fiz.-Mat. Nauki*, No. 1, 8–11 (1986).
17. *Zikirov O. S.*, “On the solvability of a nonlocal problem for a third-order hyperbolic equation [in Russian],” *Sib. Zh. Chist. Prikl. Mat.*, **16**, No. 2, 16–26 (2016).
18. *Artyushin A. N.*, “On the regular solvability of a boundary value problem for a third-order equation with a changing direction of evolution in weighted Sobolev spaces [in Russian],” *Sib. Electron. Math. Rep.*, **16**, 2003–2012 (2019).
19. *Abulov M. O.*, “Nonlocal problem for one class of third order equations [in Russian],” *Karshi, KarDU Khabarl.*, **3**, No. 1, 12–16 (2022).
20. *Sobolev S. L.*, Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics [in Russian], Izdat. Sib. Otdel. Akad. Nauk SSSR, Novosibirsk (1962).

Submitted January 25, 2023

Revised April 28, 2023

Accepted September 4, 2023

Mumin O. Abulov
Karshi state university,
Karshi, Uzbekistan
abulov1959@mail.ru

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ
С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ
ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
С ДВУМЯ ВРЕМЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Г. А. Варламова, А. И. Кожанов

Аннотация. Работа посвящена исследованию разрешимости краевых задач с нелокальными условиями интегрального вида для дифференциальных уравнений

$$u_{xt} - au_{xx} + c(x, t)u = f(x, t),$$

в которых $x \in \Omega = (0, 1)$, $t \in (0, T)$, $0 < T < +\infty$, $a \in \mathbb{R}$, $c(x, t)$ и $f(x, t)$ — известные функции. Особенностью таких уравнений является то, что в них как переменная t , так и переменная x могут считаться временной переменной, и в соответствии с этим для них могут быть предложены постановки краевых задач с разными носителями граничных условий. Для изучаемых задач в работе доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений, а именно решений, имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.99.74.002

Ключевые слова: гиперболические уравнения, нелокальные задачи, интегральные условия, регулярные решения, существование, единственность.

Памяти Николая Андреевича Ларькина

Введение

В работе изучаются нелокальные краевые задачи с интегральными условиями для нестационарных дифференциальных уравнений с двумя временными переменными, а именно для уравнений

$$u_{xt} - au_{xx} + c(x, t)u = f(x, t), \quad (*)$$

в которых a — заданное действительное число, $c(x, t)$ и $f(x, t)$ — заданные функции. Подобные уравнения можно назвать линейными аналогами уравнений Линя – Рейскера – Цзяня [1] (см. также [2–6]); различные локальные краевые и начально-краевые задачи для уравнений (*) представляются хорошо изученными).

С другой стороны, нелокальные краевые задачи с интегральными условиями для уравнений (*) ранее не изучались.

Задачи с интегральными условиями ранее активно изучались для классических уравнений второго порядка (см. [7–11]), для уравнений составного и соболевского типов [10, 12–17], для уравнений с кратными характеристиками [18, 19]. Как отмечено выше, задачи с интегральными условиями для уравнений (*) ранее не изучались.

Характерной особенностью уравнений (*) является то, что в них переменная t и переменная x могут играть роль временной переменной. Как показано в работах [2–4], наличие двух временных переменных позволяет изучать для уравнений (*) краевые задачи с принципиально различными носителями граничных условий. Применительно к задачам с интегральными условиями сказанное означает, что и интегральные условия могут задаваться по-разному в зависимости от того, какая из переменных x или t играет ведущую роль.

Уточним, что целью работы будет доказательство существования и единственности регулярных решений изучаемых задач — решений, имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение. Необходимые по ходу работы сведения о свойствах функций с обобщенными производными можно найти в монографиях [20–22].

1. Постановка задач

Пусть Q — прямоугольник $\Omega \times (0, T)$ переменных x и t , $\Omega = (0, 1)$, $0 < T < +\infty$. Далее пусть $c(x, t)$, $f(x, t)$, $N(x)$ и $M(x)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T]$, a — заданное действительное число, L — дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x, t)$ определяется равенством

$$Lv = v_{xt} - av_{xx} + c(x, t)v.$$

Нелокальная задача I. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$Lu = f(x, t) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(0, t) = \int_{\Omega} N(y)u(y, t) dy, \quad t \in (0, T), \tag{3}$$

$$u_x(0, t) = \int_{\Omega} M(y)u(y, t) dy, \quad t \in (0, T). \tag{4}$$

Нелокальная задача II. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2) и (3), а также условие

$$u_x(1, t) = \int_{\Omega} M(y)u(y, t) dy, \quad t \in (0, T). \tag{5}$$

Нелокальная задача I в случае $N(x) \equiv 0$, $M(x) \equiv 0$ является краевой задачей, предложенной и изученной в работах [2, 3]. Соответственно нелокальная задача II в случае $N(x) \equiv 0$, $M(x) \equiv 0$ будет краевой задачей, предложенной и изученной в [4]. Если же $N(x)$ и $M(x)$ не тождественно нулевые функции, то нелокальные задачи I и II представляют собой новые не изученные ранее задачи с интегральными условиями.

Уравнения (1) имеют модельный вид. О более общих уравнениях и о других задачах для таких уравнений будет сказано в конце работы.

2. Разрешимость нелокальной задачи I

Существование и единственность регулярных решений нелокальной задачи I будет установлена с помощью априорных оценок, метода регуляризации и метода продолжения по параметру.

Положим

$$N_1 = \int_{\Omega} N(x) dx.$$

Лемма 1. Пусть выполняются условия

$$a < 0,$$

$$c(x, t) \in C(\overline{Q}), \quad N(x) \in L_2(\Omega), \quad M(x) \in L_2(\Omega),$$

$$\|N\|_{L_2(\Omega)} < 1.$$

Тогда для регулярных решений выполняется оценка

$$\int_{\Omega} u_x^2(x, t) dx + \int_0^t u_x^2(1, \tau) d\tau \leq R_1 \int_Q f^2 dx dt, \quad (7)$$

в которой $t \in (0, T]$, R_1 — число, определяемое лишь функциями $c(x, t)$, $N(x)$ и $M(x)$, а также числами a и T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A — число из интервала $(1, +\infty)$ такое, что для него выполняется неравенство

$$A\|N\|_{L_2(\Omega)} < 1 \quad (8)$$

(существование такого числа A вытекает из свойств действительных чисел). Умножим уравнение (1) с временной переменной τ на функцию $(A - x)u_x(x, \tau)$ и проинтегрируем по прямоугольнику $\Omega \times (0, t)$. После несложных преобразований получим равенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} (A - x) u_x^2(x, t) dx + \frac{|a|}{2} \int_0^t \int_{\Omega} u_x^2(x, \tau) dx d\tau + \frac{|a|(A - 1)}{2} \int_0^t u_x^2(1, \tau) d\tau \\ &= \int_0^t \int_{\Omega} (A - x) f(x, \tau) u_x(x, \tau) dx d\tau - \int_0^t \int_{\Omega} (A - x) c(x, \tau) u(x, \tau) u_x(x, \tau) dx d\tau \end{aligned}$$

$$+ \frac{|a|A}{2} \int_0^t \left(\int_{\Omega} M(x)u(x, \tau) dx \right)^2 d\tau. \quad (9)$$

Определим функцию $\tilde{N}(x)$ как решение задачи

$$\frac{d\tilde{N}(x)}{dx} = N(x), \quad \tilde{N}(1) = 0.$$

Имеют место равенства

$$\begin{aligned} u(0, \tau) &= \int_{\Omega} \tilde{N}'(x)u(x, \tau) dx = - \int_{\Omega} \tilde{N}(x)u_x(x, \tau) dx - \tilde{N}(0)u(0, \tau) \\ &= - \int_{\Omega} \tilde{N}(x)u_x(x, \tau) dx + \int_{\Omega} N(x) dx \cdot u(0, \tau). \end{aligned}$$

Отсюда

$$u(0, \tau) = - \frac{1}{1 - N_1} \int_{\Omega} \tilde{N}(x)u_x(x, \tau) dx \quad (10)$$

(поскольку $|N_1| < 1$, это равенство корректно). Далее, представление

$$u(x, \tau) = \int_0^x u_y(y, \tau) dy + u(0, \tau)$$

и равенство (10) дают оценки

$$\int_0^t u^2(0, \tau) d\tau \leq K_1 \int_0^t \int_{\Omega} u_x^2(x, \tau) dx d\tau, \quad (11)$$

$$\int_0^t \int_{\Omega} u^2(x, \tau) dx d\tau \leq K_2 \int_0^t \int_{\Omega} u_x^2(x, \tau) dx d\tau, \quad (12)$$

постоянные K_1 и K_2 в которых определяются лишь функцией $N(x)$.

Используя оценки (11) и (12), применяя неравенства Юнга и Гёльдера, учитывая неравенство (8) и, наконец, используя лемму Гронуолла, получим, что следствием равенства (9) будет априорная оценка

$$\int_0^t \int_{\Omega} u_x^2(x, \tau) dx d\tau + \int_0^t u_x^2(1, \tau) d\tau \leq R_1 \|f\|_{L_2(Q)}^2,$$

в которой $t \in (0, T]$, R_1 — число, определяемое лишь функциями $c(x, t)$, $N(x)$, $M(x)$ и числами a , T .

Лемма доказана.

Определим линейное пространство V :

$$V = \{v(x, t) : v(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega)), v_{xt}(x, t) \in L_2(Q), v_x(1, t) \in W_2^1([0, T])\}.$$

Будем считать, что это пространство снабжено нормой

$$\|v\|_V = (\|v\|_{L_2(0, T; W_2^2(\Omega))}^2 + \|v_{xt}\|_{L_2(Q)}^2 + \|v_x(1, t)\|_{W_2^1([0, T])}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что таким образом нормированное пространство V банахово.

Теорема 1. Пусть выполняются условия леммы 1. Тогда нелокальная задача I не может иметь в пространстве V более одного решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для решений $u(x, t)$ нелокальной задачи из пространства V выполняется оценка (7). Эта оценка и означает, что нелокальная задача I в случае $f(x, t) \equiv 0$ имеет лишь тривиальное решение.

Теорема доказана.

Существование решений нелокальной задачи I будет доказано с помощью метода регуляризации.

Теорема 2. Пусть выполняются условия леммы 1, а также условие

$$c(x, t) \in C^1(\overline{Q}).$$

Тогда для любой функции $f(x, t)$ такой, что $f(x, t) \in W_2^1(Q)$, нелокальная задача I имеет в пространстве V решение $u(x, t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ε и ρ — положительные числа. Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $v(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$Lv + \rho v_x - \varepsilon v_{xtt} = g(x, t) \quad (13)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2)–(5), а также условие

$$v_t(x, T) = 0, \quad x \in \Omega \quad (14)$$

($g(x, t)$ — заданная функция).

Покажем прежде всего, что при фиксированном ε и при принадлежности функции $g(x, t)$ пространству $L_2(Q)$ можно указать число ρ_0 такое, что при $\rho > \rho_0$ краевая задача (13), (2)–(5), (14) будет иметь решение $v(x, t)$, принадлежащее пространству V и такое, что $v_{xtt}(x, t) \in L_2(Q)$. Воспользуемся методом продолжения по параметру.

Пусть λ — число из отрезка $[0, 1]$. Рассмотрим задачу: найти функцию $v(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (13) и такую, что для нее выполняются условия (2), (3) и (14), а также условия

$$v(0, t) = \lambda \int_{\Omega} N(x) v(x, t) dx, \quad t \in (0, T), \quad (15)$$

$$v_x(0, t) = \lambda \int_{\Omega} M(x) v(x, t) dx, \quad t \in (0, T). \quad (16)$$

Уравнение (13) является «псевдогиперболическим» [23–28] уравнением с временной переменной x . В случае $\lambda = 0$ задача с условиями (2), (3), (14)–(16) представляет собой начально-краевую задачу со смешанными по переменной t условиями (переменная t в данном случае является пространственной переменной); существование регулярных решений такой задачи доказано в работах [23–28]. Для того чтобы показать существование регулярных решений данной

задачи при всех λ , достаточно показать, что для всевозможных регулярных решений задачи (13), (2), (3), (14)–(16) при $\rho > \rho_0$ имеет место равномерная по λ априорная оценка

$$\|v\|_V^2 + \|v_{xtt}\|_{L_2(Q)}^2 \leq R_0 \|g\|_{L_2(Q)}^2 \quad (17)$$

с постоянной R_0 , определяемой лишь функциями $c(x, t)$, $N(x)$, $M(x)$, а также числами a , T и, быть может, ε (см. [26, гл. III, § 14]).

Заметим прежде всего, что, повторяя доказательство леммы 1, но вместо леммы Гронуолла используя возможность выбора числа ρ большим, нетрудно установить справедливость для регулярных решений $u(x, t)$ краевой задачи (13), (2), (3), (14)–(16) априорной оценки

$$\int_{\Omega} v_x^2(x, T) dx + \int_Q v_x^2(x, t) dx dt + \int_0^T v_x^2(1, t) dt + \varepsilon \int_Q v_{xt}^2(x, t) dx dt \leq \tilde{R}_1 \|g\|_{L_2(Q)}^2, \quad (18)$$

постоянная \tilde{R}_1 в которой определяется лишь функциями $c(x, t)$, $N(x)$, $M(x)$, а также числами a и T .

Умножим уравнение (13) на функцию $-(A - x)v_{xtt}(x, t)$ и проинтегрируем по прямоугольнику Q . Повторяя рассуждения, которые привели к оценке (7), нетрудно получить, что для регулярных решений $v(x, t)$ краевой задачи (13), (2), (3), (14)–(16) выполняется вторая априорная оценка

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v_{xt}^2(x, 0) dx + \int_Q v_{xt}^2(x, t) dx dt + \int_0^T v_{xt}^2(1, t) dt \\ + \varepsilon \int_Q v_{xtt}^2(x, t) dx dt \leq \tilde{R}_2 \|g\|_{L_2(Q)}^2 \end{aligned} \quad (19)$$

с постоянной \tilde{R}_2 , определяемой лишь функциями $c(x, t)$, $N(x)$, $M(x)$, числами a , T и ε .

Из оценок (18) и (19) очевидным образом вытекает, что для регулярных решений $v(x, t)$ краевой задачи (13), (2), (3), (14)–(16) выполняется третья априорная оценка

$$\int_Q v_{xx}^2(x, t) dx dt \leq \tilde{R}_3 \|g\|_{L_2(Q)}^2 \quad (20)$$

с постоянной \tilde{R}_3 , определяемой лишь функциями $c(x, t)$, $N(x)$, $M(x)$, а также числами a , T и ε .

Полученные оценки (18)–(20) означают, что для функции $v(x, t)$ выполняется требуемая оценка (17). Следовательно, краевая задача (13), (2), (3), (14)–(16) имеет регулярное решение при всех λ из отрезка $[0, 1]$.

Покажем теперь, что для регулярных решений краевой задачи (13), (2), (3), (14)–(16) имеет место априорная оценка, которая позволит построить последовательность, сходящуюся к регулярному решению нелокальной задачи I.

Вновь умножим уравнение (13) на функцию $-(A-x)v_{xtt}(x,t)$ и проинтегрируем по прямоугольнику Q . Используя формулу интегрирования по частям по переменной t по отношению к функции $g(x,t)$ и повторяя все остальные выкладки, которые привели к оценке (19), получим, что существует число ρ_0 такое, что при $\rho > \rho_0$ для регулярных решений $v(x,t)$ краевой задачи (13), (2), (3), (14)–(16) будет выполняться равномерная по ε априорная оценка

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v_{xt}^2(x,0) dx + \int_Q v_{xt}^2(x,t) dxdt + \int_0^T v_{xt}^2(1,t) dt \\ + \varepsilon \int_Q v_{xtt}^2(x,t) dxdt \leq \tilde{R}_4(\|g\|_{L_2(Q)}^2 + \|g_t\|_{L_2(Q)}^2), \end{aligned} \quad (21)$$

постоянная \tilde{R}_4 в которой определяется лишь функциями $c(x,t)$, $N(x)$, $M(x)$, числами a и T .

Из оценки (21) вытекает равномерная по ε априорная оценка в пространстве $L_2(Q)$ производной $v_{xx}(x,t)$.

Суммируя, получим, что для регулярных решений $v(x,t)$ краевой задачи (13), (2), (3), (14)–(16) выполняется оценка

$$\|v\|_V^2 + \varepsilon \int_Q v_{xtt}^2(x,t) dxdt \leq R_0(\|g\|_{L_2(Q)}^2 + \|g_t\|_{L_2(Q)}^2), \quad (22)$$

постоянная R_0 в которой определяется лишь функциями $c(x,t)$, $N(x)$, $M(x)$, числами a и T .

Оценка (22), свойство рефлексивности гильбертова пространства и стандартные рассуждения о возможности выбора слабо сходящейся последовательности из ограниченного в гильбертовом пространстве семейства означают, что при наличии включений $g(x,t) \in L_2(Q)$, $g_t(x,t) \in L_2(Q)$ существуют последовательности $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ положительных чисел и решений $\{v_k(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ краевой задачи (13), (2), (3), (14)–(16) с $\varepsilon = \varepsilon_k$, $\lambda = 1$ такие, что при $k \rightarrow \infty$ имеют место сходимости

$$\varepsilon_k \rightarrow 0,$$

$$v_k(x,t) \rightarrow v(x,t) \quad \text{слабо в пространстве } V,$$

$$\varepsilon v_{kxtt}(x,t) \rightarrow 0 \quad \text{слабо в пространстве } L_2(Q).$$

Очевидно, что предельная функция $v(x,t)$ будет решением из пространства V уравнения

$$v_{xt} - av_{xx} + \rho v_x + c(x,t)v = g(x,t)$$

(здесь ρ — фиксированное число из промежутка $(\rho_0, +\infty)$). По изначально заданной функции $f(x,t)$ определим функцию $g(x,t)$: $g(x,t) = e^{-\rho t}f(x,t)$. Далее, положим $u(x,t) = e^{\rho t}v(x,t)$. Функция $u(x,t)$ и будет требуемым решением нелокальной задачи I, причем единственным.

Теорема доказана.

3. Разрешимость нелокальной задачи II

Исследование разрешимости нелокальной задачи II будет проведено с помощью метода, предложенного в работах [7, 8].

Выполним вначале некоторые вспомогательные построения.

Положим

$$N_2 = \int_{\Omega} xN(x) dx, \quad M_1 = \int_{\Omega} M(x) dx, \quad M_2 = \int_{\Omega} xM(x) dx,$$

$$\mathfrak{R}(x, y) = xM(y) + N(y), \quad d = (1 - N_1)(1 - M_2) - M_1N_2$$

(напомним, что число N_1 определено при доказательстве разрешимости нелокальной задачи I). По заданной функции $v(x, t)$ определим функцию $w(x, t)$:

$$w(x, t) = v(x, t) - \int_{\Omega} \mathfrak{R}(x, y)v(y, t) dy,$$

где

$$\mathfrak{R}_1(x, y) = [x(1 - N_1) + N_2]M(y) + [xM_1 + 1 - M_2]N(y), \quad r_1 = \left(\int_{\Omega} \mathfrak{R}_{1x}^2(x, y) dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 3. Пусть выполняются условия

$$a > 0,$$

$$c(x, t) \in C(\overline{Q}), \quad c_t(x, t) \in C(\overline{Q}),$$

$$N(x) \in L_2(\Omega), \quad M(x) \in L_2(\Omega),$$

$$|d| - 2r_1 > 0.$$

Тогда для любой функции $f(x, t)$ такой, что $f(x, t) \in L_2(Q)$, $f_t(x, t) \in L_2(Q)$, $f(x, 0) = 0$ при $x \in \Omega$, нелокальная задача II имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству V , и притом ровно одно.

Доказательство. Пусть ε — положительное число. Рассмотрим задачу: найти функцию $w(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$w_{xt} - aw_{xx} + c(x, t)w - \varepsilon w_{xxt} = f(x, t) - \frac{1}{d} \int_{\Omega} \mathfrak{R}_{1x}(x, y)w_t(y, t) dy \quad (23)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$w(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (24)$$

$$w(0, t) = w_x(1, t) = 0, \quad t \in (0, T). \quad (25)$$

Разрешимость этой задачи в классе регулярных решений при фиксированном ε при выполнении условий теоремы и при принадлежности функции $f(x, t)$ пространству $L_2(Q)$ установлена в работе [4]. Покажем, что для этих решений

имеют место априорные оценки, которые позволят организовать процедуру предельного перехода.

Умножим уравнение (23) с временной переменной τ на функцию $(A-x)w_\tau(x, \tau)$ с числом A из промежутка $(1, +\infty)$ и проинтегрируем по прямоугольнику $\Omega \times (0, 1)$.

После несложных преобразований с использованием условий (24) и (25) получим равенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^t \int_\Omega w_\tau^2(x, \tau) dx d\tau + \frac{A-1-\varepsilon}{2} \int_0^t w_\tau^2(1, \tau) d\tau + \frac{a}{2} \int_\Omega (A-x)w_x^2(x, t) dx \\ & + \varepsilon \int_0^t \int_\Omega (A-x)w_{x\tau}^2(x, \tau) dx d\tau = a \int_0^t \int_\Omega w_x(x, \tau)w_\tau(x, \tau) dx d\tau \\ & + \int_0^t \int_\Omega (A-x)f(x, \tau)w_\tau(x, \tau) dx d\tau \\ & - \frac{1}{d} \int_0^t \int_\Omega \left(\int_\Omega \mathfrak{R}_{1x}(x, y)w_\tau(y, \tau) dy \right) (A-x)w_\tau(x, \tau) dx d\tau \\ & - \int_0^t \int_\Omega (A-x)c(x, \tau)w(x, \tau)w_\tau(x, \tau) dx d\tau. \quad (26) \end{aligned}$$

Заметим, что число ε можно изначально считать настолько малым, что будет выполняться неравенство $A-1-\varepsilon > 0$. Учитывая этот факт, применяя в правой части (26) неравенства Гёльдера и Юнга, используя неравенство $|d| - 2r_1 > 0$ и, наконец, применяя лемму Гронуолла, получим, что для решений $w(x, t)$ краевой задачи (23)–(25) выполняется оценка

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_\Omega w_\tau^2(x, \tau) dx d\tau + \int_0^t w_\tau^2(1, \tau) d\tau + \int_\Omega w_x^2(x, t) dx + \varepsilon \int_0^t \int_\Omega w_{x\tau}^2(x, \tau) dx d\tau \\ & \leq \tilde{R}_5 \int_Q f^2 dx dt \quad (27) \end{aligned}$$

с постоянной \tilde{R}_5 , определяемой лишь функциями $c(x, t)$, $N(x)$ и $M(x)$, а также числами a и T .

На следующем шаге умножим уравнение (23) с временной переменной τ на функцию $-w_{xx\tau}(x, \tau)$ и проинтегрируем по прямоугольнику $\Omega \times (0, t)$. Интегрируя по частям, в том числе и в интеграле с функцией $f(x, \tau)$, используя краевые условия, оценку (27) и применяя лемму Гронуолла, получим, что для решений

$w(x, t)$ краевой задачи (23)–(25) выполняется вторая априорная оценка

$$\int_{\Omega} w_{xx}^2(x, t) dx + \int_0^t w_{x\tau}^2(0, \tau) d\tau + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} w_{xx\tau}^2(x, \tau) dx d\tau \leq \tilde{R}_6 \int_Q (f^2 + f_t^2) dx dt, \quad (28)$$

постоянная \tilde{R}_6 в которой определяется лишь функциями $c(x, t)$, $N(x)$, $M(x)$ и числами a , T .

Последняя оценка

$$\int_0^t \int_{\Omega} w_{x\tau}^2(x, \tau) dx d\tau \leq \tilde{R}_7 \int_Q (f^2 + f_t^2) dx dt \quad (29)$$

с постоянной \tilde{R}_7 , определяемой вновь лишь функциями $c(x, t)$, $N(x)$ и $M(x)$ и числами a , T , очевидным образом вытекает из оценок (27) и (28).

Оценок (27)–(29) вполне достаточно для организации процесса перехода к пределу. Собственно этот процесс основан на свойстве рефлексивности гильбертова пространства, а именно на возможности выбора из семейства функций $\{w_{\varepsilon}(x, t)\}$ последовательности, слабо сходящейся в пространстве V к такой, что последнее слагаемое сходится в пространстве $L_2(Q)$ к нулевой функции.

Итак, из всего сказанного выше следует, что существует функция $w(x, t)$, принадлежащая пространству V и являющаяся решением краевой задачи (23)–(25) при $\varepsilon = 0$. Определим по этой функции $w(x, t)$ функцию $u(x, t)$:

$$u(x, t) = w(x, t) + \frac{1}{d} \int_{\Omega} \mathfrak{R}_1(x, y) w(y, t) dy.$$

Эта функция и будет искомым решением нелокальной задачи II.

Единственность решений нелокальной задачи II очевидна (вытекает, например, из оценки (27), справедливой и при $\varepsilon = 0$).

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из оценки (28) следует, что для решения $u(x, t)$ нелокальной задачи II имеет место дополнительное включение $u(x, t) \in L_{\infty}(0, T; W_2^2(\Omega))$.

4. Заключение

В работе представлены новые результаты о разрешимости в классе регулярных решений нелокальных краевых задач с интегральными условиями для гиперболических уравнений с двумя временными переменными. Полученные результаты легко переносятся на более общие уравнения — уравнения с переменными коэффициентами в старшей части, уравнения с дополнительными слагаемыми, в том числе и интегродифференциальными. Функции $N(x)$ и $M(x)$ в нелокальных условиях задач I и II могут зависеть и от переменной t , условие (5) нелокальной задачи II можно заменить условием

$$u_x(1, t) + \gamma(t)u(1, t) = \int_{\Omega} M(x)u(x, t) dx$$

($\gamma(t)$ — заданная функция) и т. д. Суть представленных в статье результатов не изменится, добавятся лишь некоторые условия и выкладки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lin C. C., Reissner E., Tsien H. S. On two-dimensional nonsteady motion of a slender body in a compressible fluid // J. Math. Phys. 1948. V. 27, N 3. P. 220–231.
2. Ларькин Н. А. К теории линеаризованного уравнения Линя — Рейсснера — Цзяня // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1980. С. 126–131.
3. Ларькин Н. А. О линеаризованном уравнении нестационарной газовой динамики // Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа. Новосибирск: Ин-т математики, 1983. С. 107–118.
4. Кожанов А. И. О постановке и разрешимости краевой задачи для одного класса уравнений, не разрешенных относительно временной производной // Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: Ин-т математики, 1987. С. 84–98.
5. Глазатов С. Н. Задача с данными на характеристике для линеаризованного уравнения трансзвуковой газовой динамики // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 5. С. 1019–1029.
6. Глазатов С. Н. О разрешимости пространственно-периодической задачи для уравнения Линя — Рейсснера — Цзяня трансзвуковой газовой динамики // Мат. заметки. 2010. Т. 87, вып. 1. С. 137–140.
7. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 9. С. 1166–1179.
8. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. О разрешимости некоторых граничных задач со смещением для линейных гиперболических уравнений // Мат. журн. (Казахстан). 2009. Т. 9, № 2. С. 78–92.
9. Кожанов А. И. О разрешимости краевых задач с нелокальными и интегральными условиями для параболических уравнений // Нелинейные граничные задачи. 2010. Т. 20. С. 54–76.
10. Пулькина Л. С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений // Самара: Изд. Самарск. ун-та, 2012.
11. Kozhanov A. I. Nonlocal problems with integral conditions for elliptic equations // Complex Variables Elliptic Equ. 2019. V. 64, N 5. P. 741–752.
12. Артюшин А. Н. Интегральные уравнения Вольтерры и эволюционные уравнения с интегральным условием // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53, № 7. С. 867–881.
13. Солдатов А. П., Шхануков М. Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием А. А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297, № 3. С. 547–552.
14. Юсубов Ш. Ш., Мамедова Дж. Дж. О разрешимости уравнения с доминирующей смешанной производной с интегральными граничными условиями // Вестн. Бакинск. ун-та. Сер. Математика. 2012. № 3. С. 57–62.
15. Попов Н. С. Разрешимость краевой задачи для псевдогиперболического уравнения с нелокальными интегральными условиями // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 3. С. 359–372.
16. Попов Н. С., Кожанов А. И. О разрешимости некоторых задач со смещением для псевдопараболических уравнений // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, № 3. С. 63–75.
17. Попов Н. С. О разрешимости пространственно нелокальных краевых задач для одномерных псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений // Вестн. СамГУ. 2015. Т. 125, № 3. С. 29–42.
18. Лукина Г. А. Краевые задачи с интегральными граничными условиями для линеаризованного уравнения Кортевега де Фриза // Вестн. Южно-Урал. ун-та. Сер. Мат. моделир. и программир. 2011. Вып. 8, № 17. С. 53–62.

19. Кожанов А. И., Лукина Г. А. Нелокальные краевые задачи с частично интегральными условиями для вырождающихся дифференциальных уравнений с кратными характеристиками // Сиб. журн. чистой и прикл. математики. 2017. Т. 17, № 3. С. 37–51.
20. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1973.
21. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
22. Triebel H. Interpolation theory. Function spaces. Differential operators. Berlin: VEB Deutscher-Verl. Wiss., 1978.
23. Якубов С. Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985.
24. Kozhanov A. I. Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
25. Larkin N. A. Existence theorems for quasilinear pseudohyperbolic equations // Sov. Math., Dokl. 1982. V. 26. P. 260–263.
26. Ларькин Н. А., Новиков В. А., Яненко Н. Н. Нелинейные уравнения переменного типа. Новосибирск: Наука, 1983.
27. Liu Y., Li H. H1-Galerkin mixed finite element methods for pseudo-hyperbolic equations // Appl. Math. Comput. 2009. V. 212, N 2. P. 446–457.
28. Худавердиев К. И., Велиев А. А. Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью. Баку: Чашноглу, 2010.
29. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998.
30. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию 25 июля 2023 г.

После доработки 23 августа 2023 г.

Принята к публикации 4 сентября 2023 г.

Варламова Галина Александровна
Политехнический институт (филиал) ФГАОУ ВО «Северо-Восточный
федеральный университет им. М.К. Аммосова» в г. Мирном,
ул. Тихонова, 5/1, Мирный 678175, Республика Саха (Якутия)
lukina-g@mail.ru

Кожанов Александр Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Академия наук Республики Саха (Якутия),
ул. Ленина, 33, Якутск 677007
kozhanov@math.nsc.ru

NONLOCAL PROBLEMS WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR HYPERBOLIC EQUATIONS WITH TWO TIME VARIABLES

G. A. Varlamova and A. I. Kozhanov

Abstract: The work is devoted to the study of solvability of boundary value problems with nonlocal conditions of integral form for the differential equations

$$u_{xt} - au_{xx} + c(x, t)u = f(x, t),$$

in which $x \in \Omega = (0, 1)$, $t \in (0, T)$, $0 < T < +\infty$, $a \in \mathbb{R}$, and $c(x, t)$ and $f(x, t)$ are known functions. The peculiarity of these equations is that any of variables t and x can be considered a temporary variable, and in accordance with this, for these equations, formulations of boundary value problems with different carriers of boundary conditions can be proposed. For the problems under study, the work proves existence and uniqueness theorems for regular solutions; namely, solutions that have all derivatives generalized according to S. L. Sobolev and included in the equation.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.99.74.002

Keywords: hyperbolic equation, nonlocal problem, integral condition, regular solution, existence, uniqueness.

REFERENCES

1. Lin C. C., Reissner E., and Tsien H. S., “On two-dimensional nonsteady motion of a slender body in a compressible fluid,” *J. Math. Phys.*, **27**, No. 3, 220–231 (1948).
2. Larkin N. A., “On the theory of the linearized Lin–Reissner–Tsien equation,” in: *Correct Boundary Value Problems for Non-Classical Equations of Mathematical Physics*, pp. 126–131, *Inst. Math., Novosibirsk* (1980).
3. Larkin N. A., “On the linearized equation of non-stationary gas dynamics,” in: *Non-Classical Equations and Equations of Mixed Type*, pp. 107–118, *Inst. Math., Novosibirsk* (1983).
4. Kozhanov A. I., “On the formulation and solvability of a boundary value problem for one class of equations not resolved with respect to the time derivative,” in: *Boundary Value Problems for Non-Classical Equations of Mathematical Physics*, pp. 84–98, *Inst. Math., Novosibirsk* (1987).
5. Glazatov S. N., “Problem with data on the characteristic for linearized equations of transonic gas dynamics,” *Sib. Math. J.*, **37**, No. 5, 1019–1029 (1996).
6. Glazatov S. N., “On the solvability of a spatially periodic problem for the Lin–Reissner–Tsien equation of transonic gas dynamics,” *Math. Notes*, **87**, No. 1, 137–140 (2010).
7. Kozhanov A. I. and Pulkina L. S., “On the solvability of a boundary value problem with nonlocal boundary condition of integral form for multidimensional hyperbolic equations,” *Differ. Equ.*, **42**, No. 9, 1166–1179 (2006).
8. Kozhanov A. I. and Pulkina L. S., “On the solvability of some boundary conditions problems with displacement for linear hyperbolic equations,” *Math. J. (Kazakhstan)*, **9**, No. 2, 78–92 (2009).

9. Kozhanov A. I., "On the solvability of boundary value problems with nonlocal and integral conditions for parabolic equations," *Nonlinear Boundary Probl.*, **20**, 54–76 (2010).
10. Pulkina L. S., *Problems with Nonclassical Conditions for Hyperbolic Equations*, Izdat. Samar. Univ., Samara (2012).
11. Kozhanov A. I., "Nonlocal problems with integral conditions for elliptic equations," *Complex Variables Elliptic Equ.*, **64**, No. 5, 741–752 (2019).
12. Artyushin A. N., "Volterra's integral and evolutionary equations equations with integral condition," *Differ. Equ.*, **53**, No. 7, 867–881 (2017).
13. Soldatov A. P. and Shkhanukov M. Kh., "Boundary value problems with a general nonlocal A. A. Samarsky's condition for pseudoparabolic equations of high order," *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **297**, No. 3, 547–552 (1987).
14. Yusubov Sh. Sh. and Mamedova J. J., "On the solvability of the equation with dominant mixed derivative with integral boundary conditions," *Bull. Baku State Univ., Ser. Math.*, No 3, 57–62 (2012).
15. Popov N. S., "Solvability of a boundary value problem for a pseudohyperbolic equations with nonlocal integral conditions," *Differ. Equ.*, **51**, No. 3, 359–372 (2015).
16. Popov N. S. and Kozhanov A. I., "On the solvability of some problems with displacement for pseudoparabolic equations," *Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat., Mekh. Inform.*, **10**, No. 3, 63–75 (2010).
17. Popov N. S., "On the solvability of spatially nonlocal boundary conditions problems for one-dimensional pseudoparabolic and pseudohyperbolic equations," *Vestn. Samar. Gos. Univ.*, **125**, No. 3, 29–42 (2015).
18. Lukina G. A., "Boundary value problems with integral boundary conditions for the linearized Korteweg-de Vries equation," *Vestn. Yuzh.-Ural. Gos. Univ., Ser. Mat. Model., Program.*, **8**, No. 17, 53–62 (2011).
19. Kozhanov A. I. and Lukina G. A., "Nonlocal boundary value problems with partially integral conditions for degenerate differential equations with multiple characteristics," *Sib. J. Pure Appl. Math.*, **17**, No. 3, 37–51 (2017).
20. Sobolev S. L., *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1991) (Transl. Math. Monogr.; vol. 90).
21. Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., and Uraltseva N. N., *Linear and Quasilinear Parabolic Equations* [in Russian], Nauka, Moscow (1967).
22. Triebel H., *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, VEB Deutcher Verl. Wiss., Berlin (1978).
23. Yakubov S. Ya., *Linear Operator-Differential Equations and Their Applications* [in Russian], Ehlm, Baku (1985).
24. Kozhanov A. I., *Composite Type Equations and Inverse Problems*, VSP, Utrecht (1999).
25. Larkin N. A., "Existence theorems for quasilinear pseudohyperbolic equations," *Sov. Math., Dokl.*, **26**, 260–263 (1982).
26. Larkin N. A., Novikov V. A., and Yanenko N. N., *Nonlinear Equations of Variable Type* [in Russian], Nauka, Novosibirsk (1983).
27. Liu Y. and Li H., "H1-Galerkin mixed finite element methods for pseudo-hyperbolic equations," *Appl. Math. Comput.*, **212**, No. 2, 446–457 (2009).
28. Khudaverdiyev K. I. and Veliyev A. A., *Investigation of a One-Dimensional Mixed Problem for a Class of Pseudohyperbolic Equations of Third Order with Non-Linear Operator Right-Hand Side* [in Russian], Chashyogly, Baku (2010).
29. Demidenko G. V. and Uspenskii S. V., *Equations and Systems Not Resolved with Respect to the Highest Derivative* [in Russian], Nauch. Kniga, Novosibirsk (1998).

- 30.** *Trenogin V. A.*, Functional Analysis, Nauka, Moscow (1980).

Submitted July 25, 2023

Revised August 23, 2023

Accepted September 4, 2023

Galina A. Varlamova
Ammosov North-Eastern Federal University,
Mirny Polytechnic Institute,
5/1 Tikhonov Street, Mirny 678175, Russia
`lukina-g@mail.ru`

Aleksandr I. Kozhanov
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia
`kozhanov@math.nsc.ru`

УДК 517.925

КУБИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ТИПА ДАРБУ
С НЕЭЛЕМЕНТАРНОЙ ОСОБОЙ
ТОЧКОЙ НА ЭКВАТОРЕ ПУАНКАРЕ
Е. П. Волокитин

Аннотация. Исследовано глобальное поведение траекторий полиномиальной системы $\dot{x} = x - x^2y + pxy^2 + y^3$, $\dot{y} = y + py^3$, $p \in \mathbb{R}$. Данное исследование примыкает к работе arXiv:2106/07516v2 [math.DS].

DOI: 10.25587/SVFU.2023.68.43.004

Ключевые слова: полиномиальные системы, особые точки, экватор Пуанкаре, фазовые портреты, рациональные интегралы.

Введение

Рассмотрим плоскую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = x + P_n(x, y), \quad \dot{y} = y + Q_n(x, y), \quad (1)$$

где $P_n(x, y)$, $Q_n(x, y)$ — однородные многочлены n -й степени. Будем называть такую систему *системой типа Дарбу*.

Системы вида (1) рассматривались различными авторами (см. [1–6] и процитированную там литературу). В этих работах изучались традиционные для качественной теории дифференциальных уравнений вопросы такие, как интегрируемость, наличие или отсутствие предельных циклов, локальные и глобальные фазовые портреты и т. д.

В [6] исследовались общие свойства систем вида (1) и в качестве примера применения полученных результатов были рассмотрены кубические системы типа Дарбу. Для них авторы получили полный по их мнению список глобальных фазовых портретов (с точностью до топологической эквивалентности). Однако вопреки утверждению авторов этот список не является полным. Для оправдания этого утверждения рассмотрим однопараметрическое семейство кубических систем типа Дарбу вида

$$\dot{x} = x - x^2y + pxy^2 + y^3, \quad \dot{y} = y + py^3, \quad p \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

и предъявим фазовые портреты систем этого семейства, не содержащиеся в списке, полученном в [6].

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0005).

Одной из причин допущенной авторами [6] ошибки является тот факт, что они не учли возможности существования у систем вида (1) неэлементарной особой точки на экваторе Пуанкаре с равной нулю матрицей линейного приближения («линейный нуль»). В этом случае возможно строение окрестности этой точки, которое имеет более сложную структуру по сравнению с традиционно возникающими и учтенными в [6] негиперболическими точками типа узел и седло-узел. Сходные ситуации рассматривались в [5, 7]. В настоящей работе проведем соответствующее исследование с помощью более прозрачного и простого метода, применяя алгебраическое раздутие без использования трансцендентных уравнений. Кроме того, найдем интеграл системы (2) и обсудим его свойства.

Основная часть

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = x - x^2y + pxy^2 + y^3, \quad \dot{y} = y + py^3, \quad p \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Теорема 1. 1. Фазовые портреты системы (2) приведены на рис. 3 (см. ниже).

2. Если $p \neq 0$, то система (2) имеет интеграл

$$H(x, y) = (x - y)^p (x + y)^{-p} (1 + py^2),$$

который рационален, если $p \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

3. Если $p = 0$, то система (2) имеет интеграл

$$H(x, y) = \frac{x - y}{x + y} e^{y^2}.$$

Если $p = 0$, то система (2) не имеет рационального интеграла.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для изучения системы (2) применим более прозрачные и простые по сравнению с [5, 7] методы исследования. Для разрешения особенностей будем использовать алгебраическое раздутие, что позволяет не использовать трансцендентные функции. Кроме того, это дает возможность оценить асимптотику траекторий. К тому же в дополнение к [5] найдем интегралы системы (2) и укажем их интересные на наш взгляд свойства.

Система (1) детально исследовалась в [1, 4, 6]. В частности, там получено, что поведение в целом траекторий системы (2) определяется поведением ее траекторий вблизи экватора Пуанкаре.

Экватор Пуанкаре отвечает оси $\{z = 0\}$ системы

$$\dot{u} = Q_3(1, u) - uP_3(1, u), \quad \dot{z} = -z(z^2 + P_3(1, u)), \quad (3)$$

которая является результатом компактификации Пуанкаре системы (2) и получается из нее с использованием замены

$$u = \frac{y}{x}, \quad z = \frac{1}{x}.$$

Подробнее см. [8, 9].

В нашем случае компактификация системы (2) дает систему

$$\dot{u} = u^2(1 - u^2), \quad \dot{z} = -z(z^2 - u + pu^2 + u^3). \quad (4)$$

Система (4) имеет на экваторе три особые точки $O_0(0, 0)$, $O_1(1, 0)$, $O_2(-1, 0)$. Матрицы линейного приближения в этих точках суть

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -p \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -p \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Видно, что начало координат $u = 0, z = 0$ является неэлементарной особой точкой: матрица линейной части нулевая. Такие точки были упущены из рассмотрения в [6].

Для изучения особой точки $O_0(0, 0)$ сделаем замену координат (раздутие) [10, 11]

$$u = u, \quad w = \begin{cases} \frac{z}{\sqrt{u}}, & u > 0, \\ \frac{z}{\sqrt{-u}}, & u < 0. \end{cases} \quad (6)$$

После применения раздутия получим

$$\dot{u} = u^2(1 - u^2), \quad \dot{w} = \frac{1}{2}uw - uw^3 - pu^2w - \frac{1}{2}u^3w, \quad u > 0, \quad (7)$$

$$\dot{u} = u^2(1 - u^2), \quad \dot{w} = \frac{1}{2}uw + uw^3 - pu^2w - \frac{1}{2}u^3w, \quad u < 0. \quad (8)$$

Введем новое время $d\tau = u dt$. Получим системы с теми же траекториями:

$$\dot{u} = u(1 - u^2), \quad \dot{w} = \frac{1}{2}w - w^3 - puw - \frac{1}{2}u^2w, \quad u > 0, \quad (9)$$

$$\dot{u} = u(1 - u^2), \quad \dot{w} = \frac{1}{2}w + w^3 - puw - \frac{1}{2}u^2w, \quad u < 0. \quad (10)$$

Дифференцирование по новой переменной по-прежнему обозначено точкой.

Система (9) имеет на оси $\{u = 0\}$ три гиперболические особые точки $\bar{O}_0(0, 0)$, $\bar{O}_1(0, 1/\sqrt{2})$, $\bar{O}_2(0, -1/\sqrt{2})$, у которых матрицы линейной части имеют вид

$$\bar{J}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \bar{J}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -p/\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{J}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p/\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Точка $\bar{O}_0(0, 0)$ будет неустойчивым узлом, оставшиеся две — седлами.

Система (10) имеет на оси $\{u = 0\}$ единственную особую точку — гиперболический устойчивый узел.

На рис. 1 изображены траектории систем (7), (8) в окрестности оси $\{u = 0\}$.

Обратная замена координат (сжатие) позволяет изобразить поведение траекторий системы (4) в окрестности неэлементарной особой точки $O_0(0, 0)$. Эта окрестность содержит два узловых и два седловых сектора (рис. 2).

Особые точки $O_1(1, 0)$, $O_2(-1, 0)$ системы (4) имеют следующий характер (см. (5)):

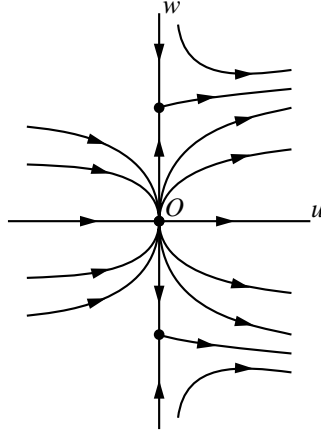
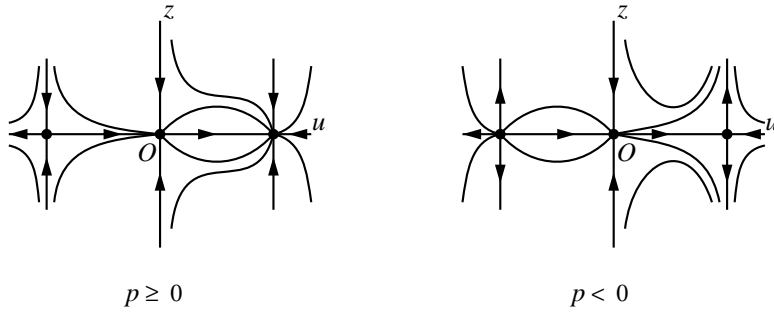
Рис. 1. Траектории систем (7), (8) в окрестности оси $\{u = 0\}$.

Рис. 2. Бесконечно удаленные особые точки системы.

$p > 0$, $O_1(1, 0)$ — гиперболический устойчивый узел, $O_2(-1, 0)$ — гиперболическое седло;

$p < 0$, $O_1(1, 0)$ — гиперболическое седло, $O_2(-1, 0)$ — гиперболический неустойчивый узел.

В случае $p = 0$ точки $O_1(1, 0)$, $O_2(-1, 0)$ будут элементарными полугиперболическими точками. Применяя разработанные для таких точек методы исследования, предложенные в [8, 9], получаем, что $O_1(1, 0)$ будет устойчивым узлом, $O_2(-1, 0)$ — седлом.

На рис. 2 изображены варианты поведения траекторий системы (4) в окрестности оси $\{z = 0\}$, отвечающей экватору Пуанкаре, в зависимости от значений параметра p . Системы с таким поведением траекторий в окрестности экватора не попали в поле зрения авторов [6].

Охарактеризуем поведение траекторий системы (2) в конечной части плоскости. Будем опираться на результаты [4, 6].

Система имеет три инвариантные кривые $y = 0$, $y = x$, $y = -x$.

Напомним, что стационары системы (2) могут располагаться только на инвариантных прямых.

Вдоль прямой $y = 0$ (2) принимает вид

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y,$$

и видно, что точки покоя, отличающиеся от начала координат, на этой прямой отсутствуют.

Вдоль прямой $y = x$ (2) принимает вид

$$\dot{x} = x + px^3, \quad \dot{y} = x + px^3.$$

Если $p \geq 0$, на прямой отсутствуют точки покоя, отличающиеся от начала координат. Если $p < 0$, на прямой имеются две точки покоя $(\pm 1/\sqrt{-p}, \pm 1/\sqrt{-p})$, которые являются устойчивыми гиперболическими узлами.

Вдоль прямой $y = -x$ (2) принимает вид

$$\dot{x} = x + px^3, \quad \dot{y} = -x - px^3.$$

Как и в предыдущем случае, если $p \geq 0$, то на прямой отсутствуют точки покоя, отличающиеся от начала координат. Если $p < 0$, то на прямой имеются две точки покоя $(\pm 1/\sqrt{-p}, \mp 1/\sqrt{-p})$, которые являются гиперболическими седлами.

Предельные циклы в системе (2), очевидно, отсутствуют.

Суммируя полученную информацию, строим фазовые портреты системы (2) на диске Пуанкаре (рис. 3).

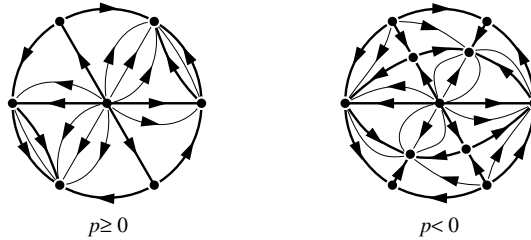


Рис. 3. Фазовые портреты системы (4).

Как уже отмечалось, такие фазовые портреты не могли быть обнаружены в процессе исследования в [6]¹⁾

П. 1 теоремы доказан.

Используя метод Дарбу интегрирования систем ОДУ с помощью инвариантов (см. например, [12]), можно найти интеграл (2).

Функция $L(x, y)$ называется *инвариантом системы*

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y),$$

если она удовлетворяет условию

$$DL \equiv \frac{\partial L(x, y)}{\partial x} P(x, y) + \frac{\partial L(x, y)}{\partial y} Q(x, y) = k(x, y)L(x, y),$$

¹⁾В [5] приведены также другие варианты глобальных фазовых портретов кубических систем типа Дарбу, которых нет в [6].

где $k(x, y)$ — многочлен от переменных x, y , который называется *кофактором инварианта* $L(x, y)$.

Если система имеет инварианты L_1, L_2, \dots, L_s с кофакторами k_1, k_2, \dots, k_s и $\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \dots + \alpha_s k_s = 0$, то функция $H = L_1^{\alpha_1} L_2^{\alpha_2} \dots L_s^{\alpha_s}$ является интегралом системы.

Система (2) имеет инвариантами многочлены $L_1 = y, L_2 = x - y, L_3 = x + y, L_4 = 1 + py^2$ и экспоненциальный множитель $L_5 = e^{y^2}$ с кофакторами $k_1 = 1 + py^2, k_2 = 1 - xy - y^2 + py^2, k_3 = 1 - xy + y^2 + py^2, k_4 = 2py^2, k_5 = 2y^2(1 + py^2)$.

Имеем $pk_2 - pk_3 + k_4 = 0$. В таком случае

$$H(x, y) = L_2^p L_3^{-p} L_4 = (x - y)^p (x + y)^{-p} (1 + py^2), \quad p \neq 0, \quad (11)$$

является первым интегралом системы (2).

Очевидно, что при рациональных значениях $p \neq 0$ интеграл (11) рационален и $h_1 = 0, h_2 = \infty$ будут его замечательными значениями.

П. 2 теоремы доказан.

Если $p = 0$, то $H(x, y) \equiv 1$. При $p = 0$ имеем $k_2 - k_3 + k_5 = 0$ и

$$H_0(x, y) = \frac{x - y}{x + y} e^{y^2} \quad (12)$$

является первым интегралом системы (2), когда $p = 0$:

$$\dot{x} = x - x^2 y + y^3, \quad \dot{y} = y. \quad (13)$$

Интеграл (12), очевидно, не является рациональным. Более того, можно показать, что система (13) вообще не имеет рационального интеграла.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим кривую, которая является линией уровня $H_0(x, y) = 1$:

$$\Gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} : \frac{x - y}{x + y} e^{y^2} = 1, \quad y > 0 \right\}.$$

Кривая Γ — сепаратриса бесконечно удаленной неэлементарной особой точки, лежащей на конце оси Ox (рис. 4).

Пусть Γ является ветвью алгебраической кривой $F(x, y) = 0$ степени n . Следуя Эйлеру [13], запишем эту кривую в виде

$$F(x, y) \equiv P(x, y) + Q(x, y) + R(x, y) + \dots = 0, \quad (14)$$

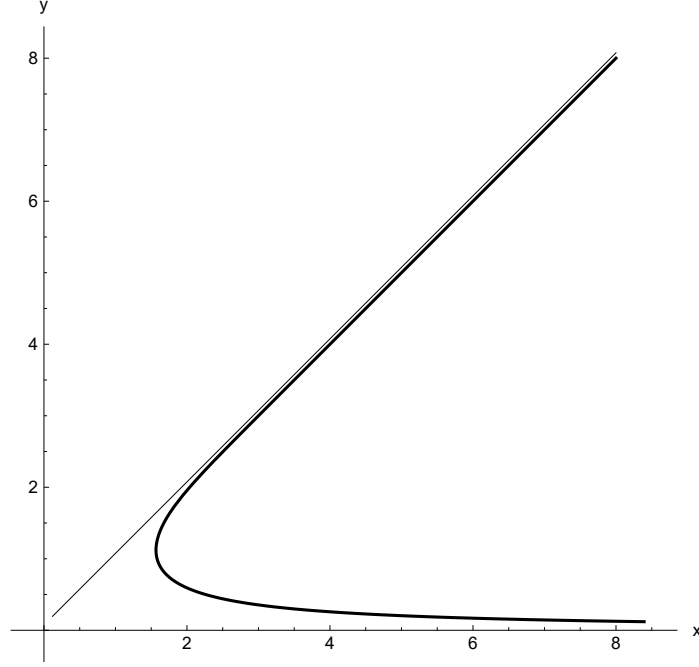
где P — высший член, содержащий в себе все члены степени n , Q — второй член, содержащим члены степени $n - 1$, и т. д.

Кривая $F(x, y) = 0$ является инвариантной кривой системы (13). Согласно п. 1 теоремы 1 неограниченные ветви могут иметь асимптотами только прямые $y = 0, x - y = 0, x + y = 0$. В таком случае согласно Эйлеру [13]

$$P(x, y) = y^k (x - y)^l (x + y)^m P_r(x, y), \quad k + l + m + r = n,$$

где многочлен

$$P_r(x, y) \equiv \alpha x^r + \beta x^{r-1} y + \dots + \gamma y^r$$

Рис. 4. Кривая $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R} : H_0(x, y) = 1, y > 0\}$.

не имеет линейных множителей. Иными словами, уравнение $P_r(1, s) = 0$ не имеет действительных корней. В частности,

$$P_r(1, -1) \equiv \alpha - \beta + \dots + \gamma \neq 0. \quad (15)$$

Вдоль Γ имеем

$$x = \frac{e^{y^2} + 1}{e^{y^2} - 1} y.$$

Обозначим $z = e^{y^2}$. Тогда вдоль Γ

$$x = \frac{z+1}{z-1} y, \quad \frac{x}{y} = \frac{z+1}{z-1}. \quad (16)$$

Подстановка (16) в (14) после очевидных преобразований приводит к равенству вида

$$\mathcal{F}(y, z) = \mathcal{P}(y, z) + \mathcal{Q}(y, z) + \dots = 0. \quad (17)$$

Здесь $\mathcal{F}(y, z)$, $\mathcal{P}(y, z)$, $\mathcal{Q}(y, z)$ — многочлены, при этом

$$\begin{aligned} P &= y^k (x - y)^l (x + y)^m (\alpha x^r + \beta x^{r-1} y + \dots + \gamma y^r) \\ &= y^n \left(\left(\frac{x}{y} - 1 \right)^l \left(\frac{x}{y} + 1 \right)^m \left(\alpha \left(\frac{x}{y} \right)^r + \beta \left(\frac{x}{y} \right)^{r-1} + \dots + \gamma \right) \right) \\ &= y^n \left(\left(\frac{2}{z-1} \right)^l \left(\frac{2z}{z-1} \right)^m \left(\alpha \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^r + \beta \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^{r-1} + \dots + \gamma \right) \right) \end{aligned}$$

$$= 2^{l+m} y^n z^m \frac{\alpha(z+1)^r + \beta(z+1)^{r-1}(z-1) + \dots + \gamma(z-1)^r}{(z-1)^{l+m+r}},$$

$$\mathcal{P} = 2^{l+m} y^n z^m (\alpha(z+1)^r + \beta(z+1)^{r-1}(z-1) + \dots + \gamma(z-1)^r)(z-1)^{n-l-m-r},$$

$$\mathcal{Q} = y^{n-1} q(z), \dots$$

Коэффициент p_{nm} при мономе $y^n z^m$ в многочлене \mathcal{P} имеет вид

$$p_{nm} = (-1)^{n-l-m-r} 2^{l+m} (\alpha - \beta + \dots - \gamma). \quad (18)$$

В силу (15) $p_{nm} \neq 0$, поэтому многочлен \mathcal{F} не является тождественно нулевым. В таком случае равенство (17) означает, что система функций $\{y^r e^{sy^2}\}_{r,s \in \mathbb{Z}}$ линейно зависима на промежутке $y > 0$, что, очевидно, неверно.

Итак, кривая Γ не алгебраическая. В таком случае система (13) не имеет рационального интеграла, поскольку при наличии рационального интеграла все траектории системы должны быть алгебраическими кривыми.

П. 3 теоремы доказан. \square

Отметим, что рациональный интеграл

$$H(x, y) = \frac{(x-y)(1+y^2)}{x+y},$$

полученный из (11) при $p = 1$, и интеграл

$$H(x, y) = \frac{(x-y)e^{y^2}}{x+y}$$

из (12), не являющийся рациональным, отвечают топологически эквивалентным фазовым портретам соответствующих систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bendjeddou A., Llibre J., Salhi T. Dynamics of the polynomial differential systems with homogeneous nonlinearities and a star node // J. Differ. Equ. 2013. V. 254, N 8. P. 3530–3537.
2. Берлинский А. Н. Качественное исследование дифференциального уравнения $dy/dx = (y + a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2)/(x + b_0x^2 + b_1xy + b_2y^2)$ // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2. С. 353–360.
3. Yan Qian Ye, et al. Theory of limit cycles. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1986. (Transl. Math. Monogr.; V. 66).
4. Волокитин Е. П., Чересиз В. М. Качественное исследование плоских полиномиальных систем типа Дарбу // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 1170–1186.
5. Волокитин Е. П., Чересиз В. М. Динамика кубических систем типа Дарбу // Сиб. электрон. мат. изв. 2017. Т. 14. С. 889–902.
6. Alarcon B., Castro S. B. S. D., Labouriau I. S. Global planar dynamics with star nodes: beyond Hilbert's 16th problem // arXiv:2106/07516v2 [math.DS].
7. Volokitin E. P. Singular points of polynomial Darboux systems // Qual. Theory Dyn. Syst. 2019. V. 18, N 3. P. 909–930.
8. Андронов А. А. и др. Качественная теория динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1956.
9. Dumortier F., et al. Qualitative theory of planar differential systems. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 2006.

10. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
11. Березовская Ф. С., Крейцер Г. П. Сложные особые точки системы двух дифференциальных уравнений. Пущино: ОНТИ НЦБИ АН СССР, 1975.
12. García A., Grau M. A survey on the inverse integrating factor // Qual. Theory Dyn. Syst. 2010. V. 9. P. 115–166.
13. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечно малых. Т. II. М.: Физматгиз, 1961.

Поступила в редакцию 13 июня 2023 г.

После доработки 13 июня 2023 г.

Принята к публикации 4 сентября 2023 г.

Волокитин Евгений Павлович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
volok@math.nsc.ru

CUBIC DARBOUX SYSTEMS
WITH A NON-ELEMENTARY SINGULAR
POINT AT THE POINCARÉ EQUATOR

E. P. Volokitin

Abstract: We study the global behavior of the trajectories of the polynomial system $\dot{x} = x - x^2y + pxy^2 + y^3$, $\dot{y} = y + py^3$, $p \in \mathbb{R}$. Our study is related to the paper arXiv:2106/07516v2 [math.DS].

DOI: 10.25587/SVFU.2023.68.43.004

Keywords: polynomial systems, singular points, Poincaré equator, phase portraits, rational integrals.

REFERENCES

1. Bendjeddou A., Llibre J., and Salhi T., “Dynamics of the polynomial differential systems with homogeneous nonlinearities and a star node,” J. Differ. Equ., **254**, No. 8, 3530–3537 (2013).
2. Berlinskii A. N., “The qualitative study of the differential equation $dy/dx = (y + a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2)/(x + b_0x^2 + b_1xy + b_2y^2)$ [in Russian],” Differ. Uravn., **2**, 353–360 (1966).
3. Yan Qian Ye, et al., Theory of Limit Cycles, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1986) (Transl. Math. Monogr.; vol. 66).
4. Volokitin E. P. and Cheresiz V. M., “The qualitative analysis of the plane polynomial Darboux systems [in Russian],” Sib. Electron. Math. Rep., **13**, 1170–1186 (2016).
5. Volokitin E. P. and Cheresiz V. M., “Dynamics of the cubic Darboux systems [in Russian],” Sib. Electron. Math. Rep., **14**, 889–902 (2017).
6. Alarcon B., Castro S. B. S. D., and Labouriau I. S., “Global planar dynamics with star nodes: beyond Hilbert’s 16th problem,” arXiv:2106/07516v2 [math.DS]
7. Volokitin E. P., “Singular points of polynomial Darboux systems,” Qual. Theory Dyn. Syst., **18**, No. 3, 909–930 (2019).
8. Andronov A. A., et al., The Qualitative Theory of Dynamical Systems in a Plane [in Russian], Nauka, Moscow (1956).
9. Dumortier F., et al., Qualitative Theory of Planar Differential Systems, Springer, Berlin; Heidelberg; New York (2006).
10. Arnol’d V. I., Additional Chapters on the Theory of Ordinary Differential Equations [in Russian], Nauka, Moscow (1978).
11. Berezovskaya F. S. and Kreutzer G. P., Complex Singular Points of the System of Two Differential Equations [in Russian], ONTI NTsBI AN SSSR, Pushchino (1985).
12. García A. and Grau M., “A survey on the inverse integrating factor,” Qual. Theory Dyn. Syst., **9**, 115–166 (2010).

- 13.** Euler L., Introduction to Infinitesimal Analysis [in Russian], vol. II, Fizmatgiz, Moscow (1961).

Submitted June 13, 2023

Revised June 13, 2023

Accepted September 4, 2023

Evgenii P. Volokitin
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia
`volok@math.nsc.ru`

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ УГЛОМ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОНКИМИ ЖЕСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ В ДВУМЕРНОМ НЕОДНОРОДНОМ ТЕЛЕ

Н. П. Лазарев, Н. А. Романова

Аннотация. Исследована нелинейная математическая модель о равновесии двумерного упругого тела с двумя тонкими жесткими включениями. Предполагается, что два жестких включения имеют одну общую точку соединения. Кроме того, связь между двумя включениями в данной точке характеризуется положительным параметром повреждаемости. Прямолинейные включения расположены под заданным углом к друг другу в исходном состоянии. На части внешней границы задаются нелинейные условия Синьорини, описывающие контакт с препятствием, на другой части — однородные условия Дирихле. Сформулирована задача оптимального управления параметром, задающим угол между включениями. Функционал качества задается с помощью произвольного непрерывного функционала, определенного на пространстве Соболева. Доказана разрешимость задачи оптимального управления. Установлена непрерывная зависимость решений от угла между включениями.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.21.94.005

Ключевые слова: вариационная задача, жесткие включения, непроникание, оптимальное управление.

1. Введение

Изучение нелинейных моделей, описывающих деформирование неоднородных тел с включениями, представляет собой активно развивающееся направление прикладной математики. В ряде моделей нелинейность обусловлена граничными условиями типа Синьорини, описывающими непроникание контактирующих поверхностей. Исследование подобных математических моделей предполагает применение методов вариационного исчисления. Широкий класс задач со свободными границами, продиктованных инженерными, физическими и математическими вопросами, привлекает внимание многих ученых с 1960-х гг. в силу ясной физической интерпретации налагаемых граничных условий (см. [1–7] и др.). Задачи для моделей упругих тел с включениями исследованы в ряде работ (например, см. [8–13]). Для таких моделей зависимость от изменения формы объектов (в том числе структурных элементов) изучалась в [14–19], зависимость от физических параметров исследована в [20–23], численные методы

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания проект No. FSRG-2023-0025.

решений представлены в работах [24–26]. Для задачи о равновесии двумерного изотропного упругого тела с прямолинейным жестким включением, рассмотренной в [27], получено асимптотическое разложение функции перемещений в окрестности вершины. При этом были рассмотрены случаи как с отслоением, т. е. при наличии трещины, так и без отслоения. В [28] анализируется влияние на поле деформаций взаимного расположения двух жестких прямолинейных включений, встроенных в двумерную упругую матрицу. В этой работе проведено сравнение с экспериментальными данными в соответствии с методами фотоупругости. В качестве выводов было получено, что значения деформаций вблизи вершины включений уменьшаются в случае параллельного расположения включений; в случае коллинеарного расположения включений взаимодействие локально усиливает поле деформации; радиальная конфигурация также усиливает поле деформации, причем величина усиления зависит от взаимной угловой ориентации включений. Метод исследования взаимодействия системы трещин и включений на основе интегральных уравнений предложен в [29]. Задача оптимального управления формой включения для эллиптической системы уравнений, описывающей равновесие пластины Кирхгофа — Лява с отслоившимся тонким жестким включением, исследована в [30]. При этом предполагалось, что включение одно и его форма описывается достаточно гладкой функцией класса $H^3(0, 1)$. В статье [31] рассматривается обратная задача о расположении тонкого упругого включения в упругом теле.

В работе исследована зависимость модели о равновесии двумерного упругого тела с двумя тонкими жесткими включениями от изменения геометрии объектов. А именно, проведен анализ соответствующей задачи о равновесии при варьировании угла между включениями, которые имеют одну общую точку соединения. Семейство вариационных задач зависит от параметра, задающего угол между включениями. Множество допустимых перемещений определяется в подходящем пространстве Соболева с учетом нелинейного условия непроникания Синьорини, однородного условия Дирихле и условий на перемещения в точках обоих включений. Для этого семейства задач формулируется задача оптимального управления параметром, задающим угол между включениями. Функционал качества задается с помощью произвольного непрерывного функционала, определенного на пространстве Соболева. Доказана разрешимость задачи оптимального управления. Установлена непрерывная зависимость решений от изменения угла между включениями в пространстве искомых решений.

1. Вариационная задача о равновесии двумерного тела

Рассмотрим область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с липшицевой границей Γ , которая состоит из двух кривых $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\text{meas}(\Gamma_0) > 0$. Рассмотрим две кривые, состоящие из внутренних точек прямолинейных отрезков:

$$\gamma = \{(x_1, x_2) \mid -1 < x_1 < 1, x_2 = 0\},$$

$$\beta_\alpha = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = t \cos \alpha, x_2 = t \sin \alpha, -1 < t < 1\},$$

где $\alpha \in [a, b]$, $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$. Предположим, что γ, β_α содержатся строго внутри области Ω , т. е. $\bar{\gamma} \subset \Omega, \bar{\beta}_\alpha \subset \Omega$ для любых $\alpha \in [a, b]$. Для того чтобы описать дополнительные свойства геометрических объектов задачи введем следующие множества:

$$\omega_\varphi^\psi = \bigcup_{\alpha=\varphi}^{\alpha=\psi} \beta_\alpha, \quad a \leq \varphi < \psi \leq b.$$

Предположим, что при фиксированных значениях φ, ψ таких, что $a \leq \varphi < \psi \leq b$, продолжением кривых γ, β_ψ с обоих концов можно разбить область $\Omega \setminus (\gamma \cup \beta_\psi \cup \omega_\varphi^\psi)$ для любых $a \leq \varphi < \psi \leq b$ на четыре подобласти $\Omega_i, i = \overline{1, 4}$, с липшицевыми границами $\partial\Omega_i, i = \overline{1, 4}$. Для определенности положим, что Ω_1 ограничена частью кривой γ с неотрицательной абсциссой и ее продолжением, а также частью кривой β_ψ с неотрицательной ординатой и ее продолжением. Область Ω_2 ограничена частью кривой γ с неотрицательной абсциссой и ее продолжением, а также частью кривой β_ψ с неположительной ординатой. Область Ω_3 ограничена частью кривой γ с неположительной абсциссой и ее продолжением, границей области ω_φ^ψ , а также частью кривой β_ψ с неположительной ординатой. Наконец, $\Omega_4 = \Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3)$.

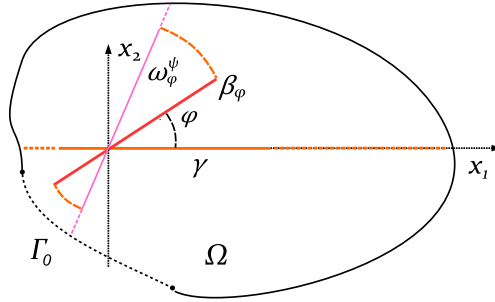


Рис. 1. Геометрические объекты задачи.

Введем следующие обозначения для пространств Соболева:

$$H_{\Gamma_0}^{1,0}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ на } \Gamma_0\}, \quad H(\Omega) = H_{\Gamma_0}^{1,0}(\Omega)^2.$$

Обозначим через $W = (w_1, w_2)$ вектор перемещений. Введем обозначения для тензоров, описывающих соотношения теории упругости [5]:

$$\varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{j,i}), \quad i, j = 1, 2,$$

$$\sigma_{ij}(W) = c_{ijkl}\varepsilon_{ij}(W), \quad i, j = 1, 2,$$

где нижние индексы после запятой обозначают дифференцирование по соответствующей координате, c_{ijkl} — заданный тензор коэффициентов упругости, обладающий свойствами симметрии и положительной определенности:

$$c_{ijkl} = c_{klij} = c_{jikl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, \quad c_{ijkl} = \text{const},$$

$$c_{ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl} \geq c_0|\xi|^2 \quad \forall \xi, \quad \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \quad c_0 = \text{const}, \quad c_0 > 0.$$

Предположения, сделанные относительно возможности разбиения негладкой области Ω , позволяют применять следующее неравенство Корна:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(W) dx \geq c \|W\|_{H(\Omega)}^2 \quad \forall W \in H(\Omega) \quad (1)$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от W [6].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Неравенство (1) обеспечивает эквивалентность стандартной нормы в пространстве $H(\Omega)$ и полунормы, заданной левой частью неравенства (1).

Для произвольного подмножества \mathcal{O} области Ω определим следующее пространство инфинитезимальных жестких перемещений [9]:

$$R(\mathcal{O}) = \{ \rho(x_1, x_2) = (\rho_1(x_2), \rho_2(x_1)) \mid \rho(x_1, x_2) = b(x_2, -x_1) + (c_1, c_2); b, c_1, c_2 \in \mathbb{R}, (x_1, x_2) \in \mathcal{O} \}.$$

Для того чтобы задать тонкие жесткие включения, соответствующие γ , β_α , следуя подходу [9], потребуем специальную структуру перемещений на этих кривых так, чтобы $W|_\gamma = \hat{\rho}$, где $\hat{\rho} \in R(\gamma)$, $W|_{\beta_\alpha} = \rho$, где $\rho \in R(\beta_\alpha)$. Отметим, что поскольку кривые γ и β_α пересекаются в одной точке $(0, 0)$, значения для постоянных, входящих в представления аффинных функций $\rho = b(x_2, -x_1) + (c_1, c_2)$ и $\hat{\rho} = \hat{b}(x_2, -x_1) + (\hat{c}_1, \hat{c}_2)$, связаны соотношениями

$$\hat{c}_1 = c_1, \quad \hat{c}_2 = c_2.$$

Поскольку, вообще говоря, $\hat{b} \neq b$, можно интерпретировать характер связи включений как шарнирное соединение (см., например, [32, 33]).

Условие непроникания, описывающее контакт с жестким препятствием, имеет вид

$$W\nu \leq 0 \quad \text{на } \Gamma_s,$$

где $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ — единичная нормаль к Γ , а кривая Γ_s — некоторая часть кривой Γ_1 [34]. Отметим, что условия закрепления на границе Γ_0 заданы в виде однородных граничных условий Дирихле, их выполнение гарантируется принадлежностью искомых функций пространству $H(\Omega)$. Введем функционал энергии

$$\Pi(W) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(W) dx - \int_{\Omega} FW dx + \frac{1}{2G} (\hat{\rho}_{2,1}(0) - \tilde{\rho}_{2,1}(0))^2, \quad (2)$$

где $F = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega)^2$ — заданный вектор внешних сил, $\tilde{\rho} = (\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2)$ — продолжение на Ω аффинным образом функции $\rho \in R(\beta_\alpha)$, параметр повреждаемости $G > 0$ характеризует связь между включениями β_α и γ в точке пересечения. В [22] применяется похожий подход при описании связи между жестким и упругим включениями с помощью аналогичного слагаемого в функционале энергии, зависящего от параметра повреждаемости.

Семейство задач о равновесии композитных тел с жесткими тонкими включениями, зависящих от параметра $\alpha \in [a, b]$, сформулируем в вариационном виде:

$$\text{найти } U_\alpha \in K_\alpha \text{ такое, что } \Pi(U_\alpha) = \inf_{W \in K_\alpha} \Pi(W), \quad (3)$$

где множество допустимых перемещений

$$K_\alpha = \{W \in H(\Omega) \mid W\nu \leq 0 \text{ на } \Gamma_s, \ W|_\gamma = \rho, \text{ где } \rho \in R(\gamma), \\ W|_{\beta_\alpha} = \hat{\rho}, \text{ где } \hat{\rho} \in R(\beta_\alpha)\}.$$

Следуя подходу из [10] для задачи о равновесии упругого тела с жестким включением, методами вариационного исчисления [6, 34] можно показать, что задача (3) имеет единственное решение $U_\alpha \in K_\alpha$, которое удовлетворяет вариационному неравенству

$$U_\alpha \in K_\alpha, \quad \int_{\Omega} \sigma_{ij}(U_\alpha) \varepsilon_{ij}(W - U_\alpha) dx \geq \int_{\Omega} F(W - U_\alpha) dx \\ - \frac{1}{G} (\hat{\rho}_{\alpha 2,1}(0) - \tilde{\rho}_{\alpha 2,1}(0)) ((\hat{\rho}_{2,1}(0) - \tilde{\rho}_{2,1}(0)) - (\hat{\rho}_{\alpha 2,1}(0) - \tilde{\rho}_{\alpha 2,1}(0))) \quad \forall W \in K_\alpha, \quad (4)$$

где $\hat{\rho}_{\alpha 2}, \tilde{\rho}_{\alpha 2}$ — компоненты аффинных функций $\hat{\rho}_\alpha = (\hat{\rho}_{\alpha 1}, \hat{\rho}_{\alpha 2})$, $\tilde{\rho}_\alpha = (\tilde{\rho}_{\alpha 1}, \tilde{\rho}_{\alpha 2})$, определяющих структуру U_α на γ и β_α соответственно; так же $\hat{\rho}_2, \tilde{\rho}_2$ — вторые компоненты аффинных функций $\hat{\rho}, \tilde{\rho}$, определяющих структуру W на γ и β_α соответственно.

Цель дальнейших рассуждений состоит в выявлении свойств решений задачи (3), характеризующих зависимость от изменения параметра $\alpha \in [a, b]$. С физической точки зрения проводится исследование свойств математической модели при варьировании угла между тонкими жесткими включениями.

2. Задача оптимального управления

Определим функционал качества $J : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ задачи оптимального управления с помощью равенства

$$J(\alpha) = G(U_\alpha),$$

где U_α — решение задачи (3) и $G : H(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольный непрерывный функционал.

В качестве примеров функционалов, мотивированных физическим смыслом, можно привести функционал $G_1(W) = \|W - W_0\|_{H(\Omega)}$, характеризующий отклонение вектора перемещений от заданной функции $W_0 \in H(\Omega)$. Сформулируем следующую задачу оптимального управления:

$$\text{найти } \alpha^* \in [a, b] \text{ такое, что } J(\alpha^*) = \sup_{\alpha \in [a, b]} J(\alpha). \quad (5)$$

Это означает, что ищется оптимальный угол между двумя тонкими жесткими включениями, который доставляет максимальное значение для функционала качества J .

Теорема 1. Существует решение задачи оптимального управления (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\alpha_n\}$ — максимизирующая последовательность. Ограниченность замкнутого интервала $[a, b]$ позволяет выделить сходящуюся подпоследовательность $\{\alpha_{n_k}\} \subset \{\alpha_n\}$ такую, что

$$\alpha_{n_k} \rightarrow \alpha^* \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty, \quad \alpha^* \in [a, b].$$

Можно считать, не нарушая общности, что $\alpha_{n_k} \neq \alpha^*$ для достаточно больших k . В противном случае найдется последовательность $\{\alpha_{n_l}\}$, удовлетворяющая равенству $\alpha_{n_l} \equiv \alpha^*$. Очевидно, что в таком случае α^* будет доставлять решение задачи (5). Поэтому рассмотрим случай, когда $\{\alpha_{n_k}\}$ удовлетворяет соотношению $\alpha_{n_k} \neq \alpha^*$ для всех достаточно больших k . Используя утверждение доказанной ниже леммы 2, последовательность решений $\{U_k\}$ задач (3), соответствующих значениям α_{n_k} , сходится к решению U_{α^*} сильно в $H(\Omega)$ при $k \rightarrow \infty$. Отсюда в силу непрерывности функционала нетрудно установить следующую сходимостъ:

$$J(\alpha_{n_k}) \rightarrow J(\alpha^*).$$

Это влечет, что

$$J(\alpha^*) = \sup_{\alpha \in [a, b]} J(\alpha).$$

Теорема доказана.

3. Вспомогательные леммы

В этом разделе установлены вспомогательные результаты, использованные при доказательстве теоремы 1. Для удобства они формулируются в виде двух лемм.

Лемма 1. Пусть $\alpha^* \in [a, b]$ — произвольное фиксированное число и $\{\alpha_n\} \subset [a, b]$ — последовательность вещественных чисел, сходящаяся к α^* при $n \rightarrow \infty$. Тогда для любой функции $W \in K_{\alpha^*}$ найдутся подпоследовательность $\{\alpha_k\} = \{\alpha_{n_k}\} \subset \{\alpha_n\}$ и последовательность функций $\{W_k\}$ такие, что $W_k \in K_{\alpha_k}$, $k \in \mathbb{N}$, и $W_k \rightarrow W$ сильно в $H(\Omega)$ при $k \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что если найдется подпоследовательность $\{\alpha_{n_k}\}$ такая, что $\alpha_{n_k} = \alpha^*$, то утверждение леммы будет выполнено для последовательности $\{W_k\}$, удовлетворяющей равенству $W_k \equiv W$, $k \in \mathbb{N}$. Не нарушая общности, предположим, что $\{\alpha_n\}$ является строго монотонно убывающей последовательностью такой, что

$$\alpha^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n.$$

Обозначим через $\rho^* = (b^*x_2 + c_1^*, -b^*x_1 + c_2^*)$ аффинную функцию, описывающую инфинитезимальные жесткие перемещения W на β_{α^*} , т. е. $\rho^* = W$ на β_{α^*} , а также через $\rho_\gamma = (b_\gamma x_2 + c_{\gamma 1}, -b_\gamma x_1 + c_{\gamma 2})$ — функцию, описывающую

перемещения W на γ . Доопределим функцию ρ^* на всей области Ω с помощью равенства

$$\rho^* = (b^*x_2 + c_1^*, -b^*x_1 + c_2^*), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega.$$

В соответствии с предположениями существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $\alpha \in [a, b] \cap (\alpha^*, \alpha^* + \delta)$ множество $\omega_{\alpha^*}^\alpha$ имеет липшицеву границу. Зафиксируем параметр $\alpha \in [a, b] \cap (\alpha^*, \alpha^* + \delta)$ и рассмотрим следующее семейство вспомогательных задач:

$$\text{найти } Q_\alpha \in K'_\alpha \text{ такое, что } p(Q_\alpha) = \inf_{\chi \in K'_\alpha} p(\chi), \quad (6)$$

где

$$p(\chi) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\chi - W) \varepsilon_{ij}(\chi - W) dx,$$

$$K'_\alpha = \{\chi \in H(\Omega) \mid \chi = W \text{ на } \Gamma, \chi|_\gamma = \rho_\gamma, \chi|_{\omega_{\alpha^*}^\alpha} = \rho^*\}.$$

Легко заметить, что функционал $p(\chi)$ является коэрцитивным и слабо полунепрерывным снизу на пространстве $H(\Omega)$. Кроме того, очевидно, что множество K'_α является выпуклым и замкнутым в рефлексивном пространстве $H(\Omega)$. Указанные свойства $p(\chi)$ и K'_α обеспечивают существование решения задачи (6) [6]. Кроме того, задача (6) эквивалентна вариационному неравенству

$$Q_\alpha \in K'_\alpha, \quad \int_{\Omega} \sigma_{ij}(Q_\alpha - W) \varepsilon_{ij}(\chi - Q_\alpha) dx \geq 0 \quad \forall \chi \in K'_\alpha. \quad (7)$$

Единственность решения Q_α вариационного неравенства (7) следует стандартными рассуждениями [6]. Таким образом, семейству вариационных неравенств (7), зависящих от параметра $\alpha \in [a, b] \cap (\alpha^*, \alpha^* + \delta)$, соответствует семейство решений $\{Q_\alpha\}$. Заметим, что $\{Q_\alpha\} \in K_\alpha$ для всех $\alpha \in [\alpha^*, \alpha^* + \delta)$. Для того чтобы установить ограниченность $\{Q_\alpha\}$, используем (7) с подходящей тестовой функцией $\hat{\chi}$, которая принадлежит K'_α для всех $\alpha \in [a, b] \cap [\alpha^*, \alpha^* + \delta)$. Такую функцию $\hat{\chi} \in H(\Omega)$ можно построить применением оператора поднятия (см. [6]) для четырех липшицевых областей Ω_i , $i = \overline{1, 4}$, со следующими значениями на границах областей:

$$\text{для } \Omega_1: \quad \hat{\chi} = \rho^* \text{ на } \partial\omega_a^b, \quad \hat{\chi} = W \text{ на } \partial(\Omega_1 \setminus \omega_a^b), \quad \hat{\chi} = W \text{ на } \partial\Omega_2,$$

$$\text{для } \Omega_3: \quad \hat{\chi} = \rho^* \text{ на } \partial\omega_a^b, \quad \hat{\chi} = W \text{ на } \partial(\Omega_3 \setminus \omega_a^b), \quad \hat{\chi} = W \text{ на } \partial\Omega_4.$$

Построенная указанным образом функция $\hat{\chi}$ принадлежит множествам допустимых перемещений K'_α для всех $\alpha \in [a, b] \cap (\alpha^*, \alpha^* + \delta)$ и поэтому ее можно подставлять в качестве тестовой функции в (7). В результате имеем

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(Q_\alpha - W) \varepsilon_{ij}(\hat{\chi}) dx + \int_{\Omega} \sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(Q_\alpha) dx \geq \int_{\Omega} \sigma_{ij}(Q_\alpha) \varepsilon_{ij}(Q_\alpha) dx \quad \forall \alpha \in [a, b].$$

Отсюда, используя неравенство Корна, получаем следующую равномерную оценку сверху:

$$\|Q_\alpha\| \leq c \quad \forall \alpha \in [a, b] \cap (\alpha^*, \alpha^* + \delta).$$

Благодаря этой оценке можем извлечь из последовательности $\{Q_{\alpha_n}\}$ слабо сходящуюся в $H(\Omega)$ к \widetilde{W} подпоследовательность $\{Q_l\}$, $l \in \mathbb{N}$ (здесь и далее для удобства будем использовать следующее обозначение для элементов подпоследовательностей: $\alpha_l = \alpha_{n_l}$, $Q_l = Q_{\alpha_{n_l}}$). Покажем, что $\widetilde{W} = W$. В самом деле, поскольку $(Q_l - W) \in H_0^1(\Omega \setminus (\overline{\gamma \cup \beta_{\alpha^*}}))^2$, в силу замкнутости пространства $H_0^1(\Omega \setminus (\overline{\gamma \cup \beta_{\alpha^*}}))^2$ выявляем, что $(\widetilde{W} - W) \in H_0^1(\Omega \setminus (\overline{\gamma \cup \beta_{\alpha^*}}))^2$. Рассмотрим тестовые функции вида $\chi_l^\pm = Q_l \pm \zeta$, где ζ — гладкая функция, которая построена продолжением нулем в Ω произвольной функции $\tilde{\zeta} \in C_0^\infty(\Omega \setminus (\overline{\gamma \cup \beta_{\alpha^*}}))^2$. Заметим, что для достаточно больших l справедливо включение $\chi_l^\pm \in K'_{\alpha_l}$. Подставляя последовательно обе функции χ_l^+ и χ_l^- в качестве пробных в (7), находим, что

$$Q_l \in K'_{\alpha_l}, \quad \int_{\Omega} \sigma_{ij}(Q_l - W) \varepsilon_{ij}(\zeta) dx = 0. \quad (8)$$

Далее зафиксируем функцию ζ и перейдем к пределу в (8) при $l \rightarrow \infty$. В результате получим

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(\widetilde{W} - W) \varepsilon_{ij}(\zeta) dx = \int_{\Omega \setminus \beta_{\alpha^*}} \sigma_{ij}(\widetilde{W} - W) \varepsilon_{ij}(\zeta) dx = 0 \quad \forall \alpha \in C_0^\infty(\Omega \setminus (\overline{\gamma \cup \beta_{\alpha^*}}))^2.$$

Это означает ввиду плотности $C_0^\infty(\Omega \setminus (\overline{\gamma \cup \beta_{\alpha^*}}))$ в $H_0^1(\Omega \setminus (\overline{\gamma \cup \beta_{\alpha^*}}))$, что выполнено тождество $\widetilde{W} - W = 0$ в $H_0^1(\Omega \setminus (\overline{\gamma \cup \beta_{\alpha^*}}))^2$. Таким образом, $\widetilde{W} = W$ в $H(\Omega)$. Тем самым установлено существование последовательности $\{Q_l\}$ такой, что $Q_l \in K'_{\alpha_l}$, $l \in \mathbb{N}$, и $Q_l \rightarrow W$ слабо в $H(\Omega)$ при $l \rightarrow \infty$.

Целью дальнейших рассуждений является построение на основе $\{Q_l\}$ сильно сходящейся последовательности. По теореме Мазура существуют функция $N : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ и последовательность множеств вещественных чисел $\{z(n)_i \mid i = n, \dots, N(n)\}$, удовлетворяющая $z(n)_i \geq 0$ и $\sum_{i=n}^{N(n)} z(n)_i = 1$, такие, что последовательность $\{\widehat{Q}_n\}$, определенная выпуклой комбинацией

$$\widehat{Q}_n = \sum_{i=n}^{N(n)} z(n)_i Q_i,$$

сходится сильно к W в пространстве $H(\Omega)$. Поэтому искомую последовательность $\{W_{n_k}\}$ можем определить с помощью равенств

$$W_{n_1} = \widehat{Q}_{N(1)}, \quad W_{n_2} = \widehat{Q}_{N(N(1))}, \dots, \quad W_{n_k} = \widehat{Q}_{N^k(1)}, \dots$$

Как нетрудно проверить, элементы построенной последовательности функций W_{n_k} , $k = 1, 2, \dots$, принадлежат подходящим множествам $K_{\alpha_{N^k(1)}}$ с параметрами $\alpha_{N^k(1)}$, которые являются элементами подпоследовательности $\{\alpha_l\} \subset \{\alpha_n\}$.

Возвращаясь к исходным предположениям, сделанным относительно $\{\alpha_n\}$ в начале рассуждений настоящего доказательства, заметим следующее. В том случае, если сделанное предположение не выполняется, а именно, если последовательность $\{\alpha_n\}$ строго монотонно возрастающая, то выкладки проводятся

относительно множеств K'_α , которые определены с помощью множеств вида ω_α^* , где $\alpha \in [a, b] \cap (\alpha^* - \delta, \alpha^*)$. Лемма доказана.

С помощью леммы 1 доказывается следующее утверждение, использованное при доказательстве теоремы.

Лемма 2. Пусть $\alpha^* \in [a, b]$ — фиксированное число, $\alpha \in [a, b]$. Тогда $U_\alpha \rightarrow U_{\alpha^*}$ сильно в $H(\Omega)$ при $\alpha \rightarrow \alpha^*$, где U_α, U_{α^*} являются решениями задачи (3), соответствующими параметрам $\alpha \in [a, b]$, $\alpha^* \in [a, b]$.

Доказательство. Проведем рассуждения от противного, т. е. предположим, что существуют $\epsilon_0 > 0$ и последовательность $\{\alpha_n\} \subset [a, b]$ такие, что $\alpha_n \rightarrow \alpha^*$, $\|U_n - U_{\alpha^*}\| \geq \epsilon_0$, где $U_n = U_{\alpha_n}$, $n \in \mathbb{N}$, являются решениями (3), соответствующими параметрам $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$.

Ввиду включения $W^0 \equiv 0 \in K_\alpha$ для всех $\alpha \in [a, b]$ можно подставить $W = W^0$ в (4) для фиксированных $\alpha \in [a, b]$. Это дает

$$U_\alpha \in K_\alpha, \quad \int_{\Omega} \sigma_{ij}(U_\alpha) \varepsilon_{ij}(U_\alpha) dx \leq \int_{\Omega} F U_\alpha dx - \frac{1}{G} (\hat{\rho}_{\alpha 2,1}(0) - \tilde{\rho}_{\alpha 2,1}(0))^2 \quad \forall \alpha \in [a, b].$$

Отсюда вытекает, что для всех $\alpha \in [a, b]$ имеет место равномерная оценка

$$\|U_\alpha\| \leq c \quad (9)$$

с некоторой постоянной $c > 0$, не зависящей от α . Поэтому, заменяя $\{U_n\}$, если нужно, ее подпоследовательностью, считаем, что U_n сходится к некоторой функции \dot{U} слабо в $H(\Omega)$.

Установим, что $\dot{U} \in K_{\alpha^*}$. В соответствии с теоремами вложения Соболева [6] имеют место сходимости

$$U_n|_{\beta_{\alpha^*}} \rightarrow \dot{U}|_{\beta_{\alpha^*}} \quad \text{сильно в } L_2(\beta_{\alpha^*})^2 \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (10)$$

$$U_n|_{\Gamma} \rightarrow \dot{U}|_{\Gamma} \quad \text{сильно в } L_2(\Gamma)^2 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Следы на β_{α^*} и β_{α_n} связаны соотношениями

$$v \left(x_1 \frac{\cos \alpha_n}{\cos \alpha^*}, x_2 \frac{\sin \alpha_n}{\sin \alpha^*} \right) \Big|_{\beta_{\alpha^*}} = v \left(x_1 \frac{\cos \alpha_n}{\cos \alpha^*}, x_1 \frac{\sin \alpha_n}{\cos \alpha^*} \right) \Big|_{\beta_{\alpha^*}} = v(y_1, y_2) \Big|_{\beta_{\alpha_n}},$$

$$(y_1, y_2) = \left(x_1 \frac{\cos \alpha_n}{\cos \alpha^*}, x_1 \frac{\sin \alpha_n}{\cos \alpha^*} \right), \quad (y_1, y_2) \in \beta_{\alpha_n}, \quad (x_1, x_2) \in \beta_{\alpha^*}.$$

При необходимости осуществляя замену на полярные координаты, можно показать, что для произвольной функции v из $H^1(\Omega)$ справедлива следующая оценка, выражающая свойство непрерывности следов (см. [35, свойство 3 на с. 141]):

$$\left\| v(x_1, x_2) \Big|_{\beta_{\alpha^*}} - v \left(x_1 \frac{\cos \alpha_n}{\cos \alpha^*}, x_1 \frac{\sin \alpha_n}{\cos \alpha^*} \right) \Big|_{\beta_{\alpha^*}} \right\|_{L_2(\beta_{\alpha^*})} \leq C_1 \sqrt{|\alpha_n - \alpha^*|} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad (12)$$

где постоянная $C_1 > 0$ не зависит от v . На основе неравенства (12) и оценки (9) имеем оценку

$$\left\| U_n|_{\beta_{\alpha^*}} - U_n \left(x_1 \frac{\cos \alpha_n}{\cos \alpha^*}, x_1 \frac{\sin \alpha_n}{\cos \alpha^*} \right) \right\|_{\beta_{\alpha^*}} \Big|_{L_2(\beta_{\alpha^*})^2} \leq C_1 \sqrt{|\alpha_n - \alpha^*|} \|U_n\|_{H^1(\Omega)^2} \leq C_2 \sqrt{|\alpha_n - \alpha^*|} \quad (13)$$

с постоянной $C_2 > 0$, не зависящей от U_n . Поскольку по построению

$$U_n \left(x_1 \frac{\cos \alpha_n}{\cos \alpha^*}, x_1 \frac{\sin \alpha_n}{\cos \alpha^*} \right) \Big|_{\beta_{\alpha^*}} = U_n|_{\beta_{\alpha_n}} = \rho_n \in R(\beta_{\alpha_n}),$$

$$U_n \left(x_1 \frac{\cos \alpha_n}{\cos \alpha^*}, x_1 \frac{\sin \alpha_n}{\cos \alpha^*} \right) \Big|_{\beta_{\alpha^*}} = \left(b_n \left(x_1 \frac{\sin \alpha_n}{\cos \alpha^*} \right) + c_1^n, -b_n \left(x_1 \frac{\cos \alpha_n}{\cos \alpha^*} \right) + c_2^n \right) \Big|_{\beta_{\alpha^*}},$$

переходя к пределу в (13), с учетом равенства $x_2 = t \sin \alpha^*$ для $(x_1, x_2) \in \beta_{\alpha^*}$ и $t \in (-1, 1)$, сходимости (10) и соотношений $\alpha_n \rightarrow \alpha^*$, при $n \rightarrow \infty$ получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n x_2 + c_1^n, -b_n x_1 + c_2^n) = \dot{U} \quad \text{п.в. на } \beta_{\alpha^*}.$$

Это, в свою очередь, влечет, что последовательности $\{b_n\}$, $\{c_1^n\}$, $\{c_2^n\}$, задающие ρ_n , сходятся соответственно к некоторым числам \dot{b} , \dot{c}_1 , \dot{c}_2 . Значит, найдется аффинная функция $\dot{\rho} \in R(\beta_{\alpha^*})$ такая, что $\dot{U} = \dot{\rho} = (\dot{b}x_2 + \dot{c}_1, -\dot{b}x_1 + \dot{c}_2)$ п.в. на β_{α^*} . Аналогично можно установить существование $\hat{\rho} \in R(\gamma)$, $\dot{U} = \hat{\rho}$ п.в. на γ .

Покажем, что имеет место неравенство $\dot{U}\nu \leq 0$ на Γ_s . Сходимость (11) позволяет выделить подпоследовательность (с прежним обозначением), для которой $U_n|_{\Gamma_s} \rightarrow \dot{U}|_{\Gamma_s}$ п.в. на Γ_s . Этот факт обеспечивает возможность предельного перехода при $n \rightarrow \infty$ в неравенстве

$$U_n \nu \leq 0 \quad \text{на } \Gamma_s.$$

В результате получаем требуемое соотношение $\dot{U}\nu \leq 0$ на Γ_s . Поэтому заключаем, что \dot{U} принадлежит множеству K_{α^*} .

Покажем выполнение тождества $\dot{U} \equiv U_{\alpha^*}$ и установим существование последовательности решений $\{U_n\}$, $U_n = U_{\alpha_n}$, $n = 1, 2, \dots$, сходящейся к U_{α^*} в $H(\Omega)$. Для этого рассмотрим вариационные неравенства (4), соответствующие разным параметрам α_n , $n = 1, 2, \dots$, а также предельный случай при $n \rightarrow \infty$. По утверждению леммы 1 для любого $W \in K_{\alpha^*}$ найдутся подпоследовательность $\{\alpha_k\} = \{\alpha_{n_k}\} \subset \{\alpha_n\}$ и последовательность функций $\{W_k\}$ такие, что $W_k \in K_{\alpha_k}$ и $W_k \rightarrow W$ сильно в $H(\Omega)$ при $k \rightarrow \infty$.

Свойства сходящихся последовательностей $\{W_k\}$ и $\{U_n\}$ обеспечивают возможность осуществления предельного перехода при $k \rightarrow \infty$ в следующих неравенствах, полученных из (4) для значений $\alpha = \alpha_k$ и тестовых функций W_k :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(U_{n_k}) \varepsilon_{ij}(W_{n_k} - U_{n_k}) dx &\geq \int_{\Omega} F(W_{n_k} - U_{n_k}) dx \\ &- \frac{1}{G} (\hat{\rho}_{\alpha_k 2,1}(0) - \tilde{\rho}_{\alpha_k 2,1}(0)) ((\hat{\rho}_{n_k 2,1}(0) - \tilde{\rho}_{n_k 2,1}(0)) - (\hat{\rho}_{\alpha_k 2,1}(0) - \tilde{\rho}_{\alpha_k 2,1}(0))). \end{aligned}$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\dot{U}) \varepsilon_{ij}(W - \dot{U}) dx &\geq \int_{\Omega} F(W - \dot{U}) dx \\ &- \frac{1}{G} (\hat{\rho}_{2,1}(0) - \tilde{\rho}_{2,1}(0)) ((\hat{\rho}_{2,1}(0) - \tilde{\rho}_{2,1}(0)) - (\hat{\rho}_{2,1}(0) - \tilde{\rho}_{2,1}(0))) \quad \forall W \in K_{\alpha^*}. \end{aligned}$$

Произвольность $W \in K_{\alpha^*}$ означает, что последнее неравенство является вариационным. Поэтому в силу его однозначной разрешимости заключаем, что $\dot{U} = U_{\alpha^*}$.

Остается установить сильную сходимость $U_n \rightarrow U_{\alpha^*}$. Подставив $W = 2U_{\alpha}$ и $W = 0$ в вариационные неравенства (4) при $\alpha \in [a, b]$, находим

$$U_{\alpha} \in K_{\alpha}, \quad \int_{\Omega} \sigma_{ij}(U_{\alpha}) \varepsilon_{ij}(U_{\alpha}) dx = \int_{\Omega} F U_{\alpha} dx - \frac{1}{G} (\hat{\rho}_{\alpha 2,1}(0) - \tilde{\rho}_{\alpha 2,1}(0))^2 \quad \forall \alpha \in [a, b]. \quad (14)$$

Равенства (14) вместе со слабой сходимостью $U_n \rightarrow U_{\alpha^*}$ в $H(\Omega)$ при $n \rightarrow \infty$ влекут

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(U_n) \varepsilon_{ij}(U_n) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F U_n dx - \frac{1}{G} (\hat{\rho}_{\alpha_n 2,1}(0) - \tilde{\rho}_{\alpha_n 2,1}(0))^2 \\ &= \int_{\Omega} F U_{\alpha^*} dx - \frac{1}{G} (\hat{\rho}_{\alpha^* 2,1}(0) - \tilde{\rho}_{\alpha^* 2,1}(0))^2 = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(U_{\alpha^*}) \varepsilon_{ij}(U_{\alpha^*}) dx. \end{aligned}$$

Вспоминая эквивалентность норм (см. замечание 1), выявляем, что $U_n \rightarrow U_{\alpha^*}$ сильно в $H(\Omega)$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, получено противоречие. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Заметим, что в том случае, когда имеет место жесткая связь обоих тонких включений, в постановке задачи необходимо задавать условия таким образом, чтобы линейные аффинные функции на γ , β_{α} зависели от одних и тех же постоянных, или же потребовать структуру перемещений $\rho \in R(\gamma \cup \beta_{\alpha})$ на объединении $\gamma \cup \beta_{\alpha}$. В этом случае функционал энергии Π не будет иметь последнего слагаемого. Кроме того, для этого более легкого случая можно доказать аналогичным способом разрешимость задачи оптимального управления параметром, задающим угол между включениями.

4. Задача оптимального управления в случае, когда $a = 0$

В случае, когда $a = 0$, получаем, что β_{α} в точности совпадает с γ , при этом окажется, что соответствующая задача будет описывать модель с одним жестким включением. Это приводит к тому, что функционал энергии будет задаваться другим выражением, без слагаемого, учитывающего взаимодействие включений:

$$\Pi_0(W) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(W) dx - \int_{\Omega} F W dx. \quad (15)$$

Можно заметить, что формально функционал (2) переходит в функционал (15) в том случае, когда мы считаем, что для одного жесткого включения функции инфинитезимальных жестких перемещений совпадают и как следствие имеет место равенство $\widehat{\rho}_{2,1}(0) = \widetilde{\rho}_{2,1}(0)$.

Для формулировки задачи оптимального управления наряду с задачей минимизации (3) требуется рассмотреть задачу

$$\text{найти } U_0 \in K_0 \text{ такое, что } \Pi_0(U_0) = \inf_{W \in K_0} \Pi_0(W), \quad (16)$$

где множество допустимых перемещений задается множеством

$$K_0 = \{W \in H(\Omega) \mid W\nu \leq 0 \text{ на } \Gamma_s, \ W|_\gamma = \rho, \text{ где } \rho \in R(\gamma)\}.$$

Задача (16) имеет единственное решение $U_0 \in K_\alpha$, которое удовлетворяет вариационному неравенству [10]

$$U_0 \in K_0, \quad \int_{\Omega} \sigma_{ij}(U_0) \varepsilon_{ij}(W - U_0) dx \geq \int_{\Omega} F(W - U_0) dx. \quad (17)$$

Определим, как и ранее, функционал качества $J : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ задачи оптимального управления с помощью равенства

$$J(\alpha) = G(U_\alpha),$$

где U_α — решение задачи (3) при $\alpha \neq 0$ и U_0 — решение задачи (16), как и прежде, $G : H(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольный непрерывный функционал.

Задача оптимального управления примет вид

$$\text{найти } \alpha^* \in [0, b] \text{ такое, что } J(\alpha^*) = \sup_{\alpha \in [0, b]} J(\alpha). \quad (18)$$

Это означает, что ищется оптимальный ненулевой угол между двумя тонкими жесткими включениями либо оптимальное решение будет соответствовать одному включению γ , что соответствует нулевому углу между включениями.

При доказательстве разрешимости задачи (18), очевидно, нас будет интересовать тот случай, когда максимизирующая последовательность $\{\alpha_n\}$ стремится к нулю, в противном случае доказательство разрешимости задачи оптимального управления сводится к уже рассмотренному случаю. Далее докажем, что имеют место утверждения, аналогичные леммам 1 и 2, для случая сходимости $\{\alpha_n\}$ к нулю. Это факт позволяет применить доказательство теоремы 1 без изменений. Приступим к обоснованию вспомогательных лемм, аналогичных леммам 1 и 2.

Лемма 3. Пусть $\{\alpha_n\} \subset [0, b]$ — последовательность чисел, сходящаяся к 0 при $n \rightarrow \infty$. Тогда для любой функции $W \in K_0$ найдутся подпоследовательность $\{\alpha_k\} = \{\alpha_{n_k}\} \subset \{\alpha_n\}$ и последовательность функций $\{W_k\}$ такие, что $W_k \in K_{\alpha_k}$, $k \in \mathbb{N}$, и $W_k \rightarrow W$ сильно в $H(\Omega)$ при $k \rightarrow \infty$.

Доказательство леммы 3 во многом повторяет доказательство леммы 1, поэтому приведем лишь некоторые базовые отличия. Обозначим через $\rho_\gamma =$

$(b_\gamma x_2 + c_{\gamma 1}, -b_\gamma x_1 + c_{\gamma 2})$ функцию, описывающую перемещения W на γ . Доопределим функцию ρ_γ на всей области Ω с помощью равенства

$$\rho_\gamma = (b_\gamma x_2 + c_{\gamma 1}, -b_\gamma x_1 + c_{\gamma 2}), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega.$$

В соответствии с предположениями существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $\alpha \in [0, b] \cap (0, \delta)$ множество ω_0^α имеет липшицеву границу. Зафиксируем параметр $\alpha \in [0, b] \cap (0, \delta)$ и рассмотрим следующее семейство вспомогательных задач:

$$\text{найти } Q_\alpha \in K'_\alpha \text{ такое что } p(Q_\alpha) = \inf_{\chi \in K'_\alpha} p(\chi), \quad (19)$$

где

$$p(\chi) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\chi - W) \varepsilon_{ij}(\chi - W) dx,$$

$$K'_\alpha = \{\chi \in H(\Omega) \mid \chi = W \text{ на } \Gamma, \chi|_{\omega_0^\alpha} = \rho_\gamma\}.$$

Далее рассуждения следуют схеме доказательства леммы 1. Следующая лемма 4 аналогична лемме 2.

Лемма 4. *Имеет место сильная сходимостъ $U_\alpha \rightarrow U_0$ в $H(\Omega)$ при $\alpha \rightarrow 0$, где U_α являются решениями задачи (3), соответствующими параметрам $\alpha \in (0, b]$, U_0 — решение (16).*

Доказательство. Проведем рассуждения от противного, т. е. предположим, что существуют $\epsilon_0 > 0$ и последовательность $\{\alpha_n\} \subset [0, b]$ такие, что $\alpha_n \rightarrow 0$, $\|U_n - U_0\| \geq \epsilon_0$, где $U_n = U_{\alpha_n}$, $n \in \mathbb{N}$, являются решениями (3), соответствующими параметрам α_n .

Тем же способом, который был применен в доказательстве леммы 2, получим равномерную оценку

$$\|U_\alpha\| \leq c \quad (20)$$

с некоторой постоянной $c > 0$, не зависящей от α . Поэтому, заменяя $\{U_n\}$, если нужно, ее подпоследовательностью, считаем, что U_n сходится к некоторой функции \dot{U} слабо в $H(\Omega)$.

Установим, что $\dot{U} \in K_0$. В соответствии с теоремами вложения Соболева [6] имеют место сходимости

$$\begin{aligned} U_n|_\gamma &\rightarrow \dot{U}|_\gamma \quad \text{сильно в } L_2(\gamma)^2 \text{ при } n \rightarrow \infty, \\ U_n|_\Gamma &\rightarrow \dot{U}|_\Gamma \quad \text{сильно в } L_2(\Gamma)^2 \text{ при } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (21)$$

Заметим, что поскольку $(t \cos \alpha_n, t \sin \alpha_n)$ при $t \in (-1, 1)$ задает β_{α_n} , а $\gamma = \{(t, 0) : t \in (-1, 1)\}$, имеем

$$v(x_1 \cos \alpha_n, x_1 \sin \alpha_n)|_\gamma = v(y_1, y_2)|_{\beta_{\alpha_n}}.$$

При необходимости осуществляя замену на полярные координаты, можно показать, что для произвольной функции v из $H^1(\Omega)$ справедлива следующая

оценка, выражающая свойство непрерывности следов (см. [35, свойство 3 на с. 141]):

$$\|v(x_1, x_2)|_\gamma - v(x_1 \cos \alpha_n, x_1 \sin \alpha_n)|_{\beta_{\alpha_n^*}}\|_{L_2(\beta_{\alpha_n^*})} \leq C_1 \sqrt{\alpha_n} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad (22)$$

где постоянная $C_1 > 0$ не зависит от v . На основе неравенства (22) и оценки (20) имеем оценку

$$\|U_n|_\gamma - U_n(x_1 \cos \alpha_n, x_1 \sin \alpha_n)|_\gamma\|_{L_2(\gamma)^2} \leq C_1 \sqrt{\alpha_n} \|U_n\|_{H^1(\Omega)^2} \leq C_2 \sqrt{\alpha_n} \quad (23)$$

с постоянной $C_2 > 0$, не зависящей от U_n . Поскольку по построению

$$U_n(x_1 \cos \alpha_n, x_1 \sin \alpha_n)|_\gamma = U_n|_{\beta_{\alpha_n}} = \rho_n \in R(\beta_{\alpha_n}),$$

$$U_n(x_1 \cos \alpha_n, x_1 \sin \alpha_n)|_\gamma = (b_n(x_1 \sin \alpha_n) + c_1^n, -b_n(x_1 \cos \alpha_n) + c_2^n)|_\gamma,$$

переходя к пределу в (23), с учетом $\sin 0 = x_2 = 0$, (21) и соотношений $\alpha_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n(x_1 \sin \alpha_n) + c_1^n, -b_n(x_1 \cos \alpha_n) + c_2^n) = \dot{U} \quad \text{п.в. на } \gamma.$$

Это, в свою очередь, влечет, что последовательности $\{b_n\}$, $\{c_1^n\}$, $\{c_2^n\}$, задающие ρ_n , сходятся соответственно к некоторым числам \dot{b} , \dot{c}_1 , \dot{c}_2 . Значит, $\dot{U} = (\dot{b}x_2 + \dot{c}_1, -\dot{b}x_1 + \dot{c}_2)$ п.в. на γ . Следовательно, $\dot{U} \in R(\gamma)$. Отметим соотношение

$$b_n \rightarrow \dot{b}, \quad (24)$$

где b_n — число-коэффициент, участвующий в описании аффинной функции на β_{α_n} , а \dot{b} — число, участвующее в выражении для функции $\dot{\rho} \in R(\gamma)$.

Доказательство того, что $\dot{U}\nu \leq 0$ на Γ_s , проводится дословным повторением ранее приведенных рассуждений. Поэтому заключаем, что \dot{U} принадлежит множеству K_0 . Покажем выполнение тождества $\dot{U} \equiv U_0$ и установим сильную сходимость последовательности $\{U_n\}$ к U_0 в $H(\Omega)$. По утверждению леммы 3 для любого $W \in K_0$ найдутся подпоследовательность $\{\alpha_k\} = \{\alpha_{n_k}\} \subset \{\alpha_n\}$ и последовательность функций $\{W_k\}$ такие, что $W_k \in K_{\alpha_k}$ и $W_k \rightarrow W$ сильно в $H(\Omega)$ при $k \rightarrow \infty$.

Свойства сходящихся последовательностей $\{W_k\}$ и $\{U_n\}$ обеспечивают возможность осуществления предельного перехода при $k \rightarrow \infty$ в следующих неравенствах, полученных из (4) для значений $\alpha = \alpha_k$ и тестовых функций W_k :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(U_{n_k}) \varepsilon_{ij}(W_{n_k} - U_{n_k}) dx \geq \int_{\Omega} F(W_{n_k} - U_{n_k}) dx + \frac{1}{G} (\hat{\rho}_{\alpha_k 2,1}(0) - \tilde{\rho}_{\alpha_k 2,1}(0))^2. \quad (25)$$

Заметим, что при выводе (25) использовано равенство $\hat{\rho}_{n_k 2,1}(0) - \tilde{\rho}_{n_k 2,1}(0) = 0$ для W_k , $k = 1, 2, \dots$. В результате предельного перехода получаем, что

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(\dot{U}) \varepsilon_{ij}(W - \dot{U}) dx \geq \int_{\Omega} F(W - \dot{U}) dx \quad \forall W \in K_0.$$

Произвольность $W \in K_0$ означает, что последнее неравенство вариационное. Поэтому в силу его однозначной разрешимости заключаем, что $\dot{U} = U_0$.

Перейдем к доказательству сильной сходимости. Подставив $W = 2U_0$ и $W = 0$ в вариационные неравенства (4) при $\alpha \in (0, b]$, находим

$$U_\alpha \in K_\alpha, \quad \int_{\Omega} \sigma_{ij}(U_\alpha) \varepsilon_{ij}(U_\alpha) dx = \int_{\Omega} F U_\alpha dx - \frac{1}{G} (\hat{\rho}_{\alpha 2,1}(0) - \tilde{\rho}_{\alpha 2,1}(0))^2 \quad \forall \alpha \in (0, b]. \quad (26)$$

Сначала заметим, что в силу (24)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{G} (\hat{\rho}_{\alpha_n 2,1}(0) - \tilde{\rho}_{\alpha_n 2,1}(0))^2 = 0.$$

Как следствие, переходя к пределу в равенствах вида (26) для α_n , $n = 1, 2, \dots$, с учетом слабой сходимости $U_n \rightarrow U_0$ в $H(\Omega)$ получим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(U_n) \varepsilon_{ij}(U_n) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F U_n dx - \frac{1}{G} (\hat{\rho}_{\alpha_n 2,1}(0) - \tilde{\rho}_{\alpha_n 2,1}(0))^2 \\ &= \int_{\Omega} F U_0 dx = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(U_0) \varepsilon_{ij}(U_0) dx. \end{aligned}$$

Вспоминая здесь эквивалентность норм (см. замечание 1), выявляем, что $U_n \rightarrow U_0$ сильно в $H(\Omega)$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, получено противоречие. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Можно заметить, что доказательства вспомогательных лемм 1 и 3 использует один и тот же метод, однако в лемме 1 строятся такие пробные функции, которые учитывают две функции инфинитезимальных жестких перемещений, тогда как в лемме 3 — одну. Поэтому, несмотря на один и тот же метод доказательства, в доказательстве леммы 3 привносятся некоторые отличающиеся технические детали. Некоторые отличия есть также в доказательстве лемм 2 и 4. Указанные обстоятельства приводят к необходимости отдельного рассмотрения двух задач оптимального управления, т. е. (5) для случая, когда $a > 0$, и (18) при $a = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Itou H., Kovtunen V. A., Rajagopal K. R. Nonlinear elasticity with limiting small strain for cracks subject to non-penetration // Math. Mech. Solids. 2017. V. 22, N 6. P. 1334–1346.
2. Kazarinov N. A., Rudoy E. M., Slesarenko V. Y., Shcherbakov V. V. Mathematical and numerical simulation of equilibrium of an elastic body reinforced by a thin elastic inclusion // Comput. Math. Math. Phys. 2018. V. 58, N 5. P. 761–774.
3. Itou H., Kovtunen V. A., Rajagopal K. R. Nonlinear elasticity with limiting small strain for cracks subject to nonpenetration // Math. Mech. Solids. 2017. V. 22, N 6. P. 1334–1346.
4. Furtsev A., Itou H., Rudoy E. Modeling of bonded elastic structures by a variational method: theoretical analysis and numerical simulation // Int. J. Solids Struct. 2020. V. 182–183. P. 100–111.
5. Хлуднев А. М. Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
6. Khludnev A. M., Kovtunen V. A. Analysis of cracks in solids. Southampton: WIT-Press, 2000.

7. *Khudnev A. M.* On modeling thin inclusions in elastic bodies with a damage parameter // *Math. Mech. Solids*. 2019. V. 24, N 9. P. 2742–2753.
8. *Неустроева Н. В., Лазарев Н. П.* Оптимальное управление углом наклона трещины в задаче о равновесии пластины Тимошенко с упругим включением // *Мат. заметки СВФУ*. 2021. Т. 28, № 4. P. 58–70.
9. *Khudnev A. M.* Optimal control of crack growth in elastic body with inclusions // *Eur. J. Mech., A, Solids*. 2010. V. 29, N 3. P. 392–399.
10. *Khudnev A., Leugering G.* On elastic bodies with thin rigid inclusions and cracks // *Math. Methods Appl. Sci.* 2010. V. 33. P. 1955–1967.
11. *Khudnev A.* Non-coercive problems for Kirchhoff–Love plates with thin rigid inclusion // *Z. Angew. Math. Phys.* 2022. V. 73, N 2. Paper No. 54.
12. *Fankina I. V., Furtsev A. I., Rudoy E. M., Sazhenkov S. A.* Asymptotic modeling of curvilinear narrow inclusions with rough boundaries in elastic bodies: case of a soft inclusion // *Sib. Electron. Math. Rep.* 2022. V. 19, N 2. P. 935–948.
13. *Furtsev A. I.* On contact between a thin obstacle and a plate containing a thin inclusion // *J. Math. Sci.* 2019. V. 237, N 4. P. 530–545.
14. *Lazarev N., Rudoy E.* Optimal location of a finite set of rigid inclusions in contact problems for inhomogeneous two-dimensional bodies // *J. Comput. Appl. Math.* 2022. V. 403. Paper No. 113710.
15. *Kovtunen V. A., Kunisch K.* Shape derivative for penalty-constrained nonsmooth-nonconvex optimization: cohesive crack problem // *J. Optim. Theory Appl.* 2022. V. 194. P. 597–635.
16. *Lazarev N. P., Semenova G. M., Romanova N. A.* On a limiting passage as the thickness of a rigid inclusions in an equilibrium problem for a Kirchhoff–Love plate with a crack // *J. Sib. Fed. Univ., Math. Phys.* 2021. V. 14, N 1. P. 28–41.
17. *Rudoy E. M., Shcherbakov V. V.* First-order shape derivative of the energy for elastic plates with rigid inclusions and interfacial cracks // *Appl. Math. Optim.* 2021. V. 84. P. 2775–2802.
18. *Lazarev N. P., Rudoy E. M.* Optimal size of a rigid thin stiffener reinforcing an elastic plate on the outer edge // *Z. Angew. Math. Mech.* 2017. Bd 97, Heft 9. S. 1120–1127.
19. *Shcherbakov V. V.* Shape optimization of rigid inclusions for elastic plates with cracks // *Z. Angew. Math. Phys.* 2016. V. 67, N 3. Paper No. 71.
20. *Khudnev A. M.* Junction problem for thin elastic and volume rigid inclusions in elastic body // *Phil. Trans. R. Soc., A*. 2022. V. 380, N 2236. Paper No. 20210360.
21. *Khudnev A., Esposito A. C., Faella L.* Optimal control of parameters for elastic body with thin inclusions // *J. Optim. Theory Appl.* 2020. V. 184, N 1. P. 293–314.
22. *Khudnev A. M., Popova T. S.* On junction problem with damage parameter for Timoshenko and rigid inclusions inside elastic body // *Z. Angew. Math. Mech.* 2020. V. 100, N 8. Paper No. e202000063.
23. *Lazarev N., Neustroeva N.* Optimal control of rigidity parameter of elastic inclusions in composite plate with a crack // *Mathematics and Computing ICMC* (D. Ghosh, D. Giri, R. Mohapatra, K. Sakurai, E. Savas, T. Som, eds.). Singapore: Springer, 2018. P. 67–77. (Springer Proc. Math. Stat.; V. 253).
24. *Popova T. S.* Numerical solution of the equilibrium problem for a two-dimensional elastic body with a thin semirigid inclusion // *Мат. заметки СВФУ*. 2021. Т. 28, № 1. С. 51–66.
25. *Rudoy E. M., Shcherbakov V. V.* Domain decomposition method for a membrane with a delaminated thin rigid inclusion // *Sib. Electron. Math. Rep.* 2016. V. 13, N 1. P. 395–410.
26. *Hintermüller M., Kovtunen V. A., Kunisch K.* A Papkovitch–Neuber-based numerical approach to cracks with contact in 3D // *IMA J. Appl. Math.* 2009. V. 74, N 3. P. 325–343.
27. *Itou H., Khudnev A. M., Rudoy E. M., Tani A.* Asymptotic behaviour at a tip of a rigid line inclusion in linearized elasticity // *Z. Angew. Math. Mech.* 2012. Bd 92, Heft 9. S. 716–730.
28. *Jobin T. M., Ramji M., Khaderi S. N.* Numerical evaluation of the interaction of rigid line inclusions using strain intensity factors // *Int. J. Mech. Sci.* 2019. V. 153–154. P. 10–20.
29. *Hu K. X., Chandra A.* Interactions among general systems of cracks and anticracks: an integral equation approach // *J. Appl. Mech.* 1993. V. 60, N 4. P. 920–928.
30. *Shcherbakov V. V.* Existence of an optimal shape of the thin rigid inclusions in the Kirchhoff–Love plate // *J. Appl. Ind. Math.* 2014. V. 8, N 1. P. 97–105.

31. Карнаев В. М. Оптимальное управление тонким упругим включением в упругом теле // Сиб. электрон. мат. изв. 2022. Т. 19, № 1. С. 187–210.
32. Лазарев Н. П., Шарин Е. Ф., Семенова Г. М. Оптимальное управление расположением точки шарнирного соединения жестких включений в задаче о равновесии пластины Тимошенко // Челяб. физ.-мат. журн. 2021. Т. 6, № 3. С. 278–288.
33. Lazarev N. Inverse problem for cracked inhomogeneous Kirchhoff–Love plate with two hinged rigid inclusions // Bound. Value Probl. 2021. V. 2021. Paper No. 88.
34. Байocchi К., Капело А. Вариационные и квазивариационные неравенства. М.: Наука, 1988.
35. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.

Поступила в редакцию 13 марта 2023 г.

После доработки 15 мая 2023 г.

Принята к публикации 4 сентября 2023 г.

Лазарев Нюргун Петрович
Северо-Восточный федеральный университет,
Научно-исследовательский институт математики,
ул. Кулаковского 48, Якутск 677000
nyurgun@ngs.ru

Романова Наталья Анатольевна
Институт математики и информатики,
Северо-Восточный федеральный университет,
ул. Кулаковского 48, Якутск 677000
nan.romanova@s-vfu.ru

OPTIMAL CONTROL OF THE ANGLE
BETWEEN TWO RIGID INCLUSIONS
IN AN INHOMOGENEOUS 2D BODY
N. P. Lazarev and N. A. Romanova

Abstract: A nonlinear mathematical model describing equilibrium of a two-dimensional elastic body with two thin rigid inclusions is investigated. It is assumed that two rigid inclusions have one common connection point. Moreover, a connection between two inclusions at a given point is characterized by a positive damage parameter. Rectilinear inclusions are located at a given angle to each other in an initial state. Nonlinear Signorini conditions are imposed, which describe the contact with the obstacle, as well as a homogeneous Dirichlet condition is set on corresponding parts of the outer boundary of the body. An optimal control problem for the parameter that specifies the angle between inclusions is formulated. The quality functional is given by an arbitrary continuous functional defined on the Sobolev space. The solvability of the optimal control problem is proved. A continuous dependence of solutions on varying angle parameter between the inclusions is established.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.21.94.005

Keywords: variational problem, rigid inclusion, non-penetration, optimal control problem.

REFERENCES

1. Itou H., Kovtunen V. A., and Rajagopal K. R., “Nonlinear elasticity with limiting small strain for cracks subject to non-penetration,” *Math. Mech. Solids*, **22**, No. 6, 1334–1346 (2017).
2. Kazarinov N. A., Rudoy E. M., Slesarenko V. Y., and Shcherbakov V. V., “Mathematical and numerical simulation of equilibrium of an elastic body reinforced by a thin elastic inclusion,” *Comput. Math. Math. Phys.*, **58**, No. 5, 761–774 (2018).
3. Itou H., Kovtunen V. A., and Rajagopal K. R., “Nonlinear elasticity with limiting small strain for cracks subject to nonpenetration,” *Math. Mech. Solids*, **22**, No. 6, 1334–1346 (2017).
4. Furtsev A., Itou H., and Rudoy E., “Modeling of bonded elastic structures by a variational method: theoretical analysis and numerical simulation,” *Int. J. Solids Struct.*, **182–183**, 100–111 (2020).
5. Khludnev A. M., *Elasticity Problems in Nonsmooth Domains* [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2010).
6. Khludnev A. M. and Kovtunen V. A., *Analysis of Cracks in Solids*, WIT-Press, Southampton (2000).
7. Khludnev A. M., “On modeling thin inclusions in elastic bodies with a damage parameter,” *Math. Mech. Solids*, **24**, No. 9, 2742–2753 (2019).
8. Neustroeva N. V. and Lazarev N. P., “Optimal control of the crack angle in the equilibrium problem for a Timoshenko plate with elastic inclusion [in Russian],” *Mat. Zametki SVFU*, **28**, No. 4, 58–70 (2021).

9. Khludnev A. M., "Optimal control of crack growth in elastic body with inclusions," *Eur. J. Mech., A, Solids*, **29**, No. 3, 392–399 (2010).
10. Khludnev A. and Leugering G., "On elastic bodies with thin rigid inclusions and cracks," *Math. Methods Appl. Sci.*, **33**, 1955–1967 (2010).
11. Khludnev A., "Non-coercive problems for Kirchhoff–Love plates with thin rigid inclusion," *Z. Angew. Math. Phys.*, **73**, No. 2, paper No. 54 (2022).
12. Fankina I. V., Furtsev A. I., Rudoy E. M., and Sazhenkov S. A., "Asymptotic modeling of curvilinear narrow inclusions with rough boundaries in elastic bodies: case of a soft inclusion," *Sib. Electron. Math. Rep.*, **19**, No. 2, 935–948 (2022).
13. Furtsev A. I., "On contact between a thin obstacle and a plate containing a thin inclusion," *J. Math. Sci.*, **237**, No. 4, 530–545 (2019).
14. Lazarev N. and Rudoy E., "Optimal location of a finite set of rigid inclusions in contact problems for inhomogeneous two-dimensional bodies," *J. Comput. Appl. Math.*, **403**, paper No. 113710 (2022).
15. Kovtunenkov V. A. and Kunisch K., "Shape derivative for penalty-constrained nonsmooth-nonconvex optimization: cohesive crack problem," *J. Optim. Theory Appl.*, **194**, 597–635 (2022).
16. Lazarev N. P., Semenova G. M., and Romanova N. A., "On a limiting passage as the thickness of a rigid inclusions in an equilibrium problem for a Kirchhoff–Love plate with a crack," *J. Sib. Fed. Univ., Math., Phys.*, **14**, No. 1, 28–41 (2021).
17. Rudoy E. M. and Shcherbakov V. V., "First-order shape derivative of the energy for elastic plates with rigid inclusions and interfacial cracks," *Appl. Math. Optim.*, **84**, 2775–2802 (2021).
18. Lazarev N. P. and Rudoy E. M., "Optimal size of a rigid thin stiffener reinforcing an elastic plate on the outer edge," *Z. Angew. Math. Mech.*, **97**, No. 9, 1120–1127 (2017).
19. Shcherbakov V. V., "Shape optimization of rigid inclusions for elastic plates with cracks," *Z. Angew. Math. Phys.*, **67**, No. 3, paper No. 71 (2016).
20. Khludnev A. M., "Junction problem for thin elastic and volume rigid inclusions in elastic body," *Phil. Trans. R. Soc. A.*, **380**, No. 2236, paper No. 20210360 (2022).
21. Khludnev A., Esposito A. C. and Faella L., "Optimal control of parameters for elastic body with thin inclusions," *J. Optim. Theory Appl.*, **184**, No. 1, 293–314 (2020).
22. Khludnev A. M. and Popova T. S., "On junction problem with damage parameter for Timoshenko and rigid inclusions inside elastic body," *Z. Angew. Math. Mech.*, **100**, No. 8, paper No. e202000063 (2020).
23. Lazarev N. and Neustroeva N., "Optimal control of rigidity parameter of elastic inclusions in composite plate with a crack," in: *Mathematics and Computing ICMC* (D. Ghosh, D. Giri, R. Mohapatra, K. Sakurai, E. Savas, T. Som, eds.), pp. 67–77, Springer, Singapore (2018). (*Springer Proc. Math. Stat.*; vol. 253).
24. Popova T. S., "Numerical solution of the equilibrium problem for a two-dimensional elastic body with a thin semirigid inclusion," *Mat. Zametki SVFU*, **28**, No. 1, 51–66 (2021).
25. Rudoy E. M. and Shcherbakov V. V., "Domain decomposition method for a membrane with a delaminated thin rigid inclusion," *Sib. Electron. Math. Rep.*, **13**, No. 1, 395–410 (2016).
26. Hintermüller M., Kovtunenkov V. A., and Kunisch K., "A Papkovitch–Neuber-based numerical approach to cracks with contact in 3D," *IMA J. Appl. Math.*, **74**, No. 3, 325–343 (2009).
27. Itou H., Khludnev A. M., Rudoy E. M., and Tani A., "Asymptotic behaviour at a tip of a rigid line inclusion in linearized elasticity," *Z. Angew. Math. Mech.*, **92**, No. 9, 716–730 (2012).
28. Jobin T. M., Ramji M., and Khaderi S. N., "Numerical evaluation of the interaction of rigid line inclusions using strain intensity factors," *Int. J. Mech. Sci.*, **153–154**, 10–20 (2019).
29. Hu K. X. and Chandra A., "Interactions among general systems of cracks and anticracks: an integral equation approach," *J. Appl. Mech.*, **60**, No. 4, 920–928 (1993).
30. Shcherbakov V. V., "Existence of an optimal shape of the thin rigid inclusions in the Kirchhoff–Love plate," *J. Appl. Ind. Math.*, **8**, No. 1, 97–105 (2014).
31. Karnev V. M., "Optimal control of thin elastic inclusion in an elastic body," *Sib. Electron. Math. Rep.*, **19**, No. 1, 187–210 (2022).
32. Lazarev N. P., Sharin E. F., and Semenova G. M., "Optimal control of the location of the hinge point of rigid inclusions in an equilibrium problem of a Timoshenko plate," *Chelyab. Fiz.-Mat. Zh.*, **6**, No. 3, 278–288 (2021).

-
- 33.** Lazarev N., “Inverse problem for cracked inhomogeneous Kirchhoff-Love plate with two hinged rigid inclusions,” *Bound. Value Probl.*, **2021**, No. 1, paper No. 88 (2021).
- 34.** Baiocchi C. and Capello A., *Variational and Quasivariational Inequalities: Application to Free Boundary Problems*, Wiley, New York (1984).
- 35.** Mikhailov V. P. *Partial Differential Equations* [in Russian], Mir, Moscow (1978).

Submitted March 13, 2023

Revised May 13, 2023

Accepted September 4, 2023

Nyurgun P. Lazarev
Ammosov North-Eastern Federal University,
Scientific Research Institute of Mathematics,
58 Belinsky Street, Yakutsk 677891, Russia
`nyurgun@ngs.ru`

Nataliya A. Romanova
Ammosov North-Eastern Federal University,
Scientific Research Institute of Mathematics,
58 Belinsky Street, Yakutsk 677891, Russia
`nan.romanova@s-vfu.ru`

РАЗРЕШИМОСТЬ ЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДО–ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

О. Ю. Николаев

Аннотация. Исследуется разрешимость обратных задач определения вместе с решением $u(x, t)$ псевдопараболического уравнения также неизвестной функции источника. Подобные задачи рассматриваются при изучении волновых процессов, фильтрации в пористых средах, процессов теплопередачи. Доказывается теорема существования регулярного решения. Обратные задачи для псевдопараболического уравнения с неизвестным внешним воздействием, зависящим от x , и финальным переопределением ранее не рассматривались.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.85.20.006

Ключевые слова: обратная задача, псевдопараболическое уравнение, финальное переопределение, существование.

Введение

Задачи, в которых вместе с решением того или иного дифференциального уравнения требуется определить также коэффициент (коэффициенты) самого уравнения или правую часть уравнения, в математике и в математическом моделировании называют обратными задачами. Теория обратных задач для дифференциальных уравнений представляет собой активно развивающееся направление современной математики.

В данной статье рассматривается обратная задача для псевдопараболического уравнения

$$u_t - \alpha \Delta u_t + \beta \Delta^2 u = f(x, t) + q(x)h(x, t), \quad (1)$$

где неизвестными являются решение $u(x, t)$ и функция $q(x)$. Для однозначной разрешимости подобных задач требуется дополнительное условие. В работе дополнительное условие, называемое условием переопределения, будем задавать на временном слое $t = T$. Обратную задачу с таким условием переопределения принято называть *задачей с финальным переопределением*.

Математическое моделирование процессов теплопереноса, фильтрации в пористых средах, волновых процессов, квазистационарных процессов в кристаллических полупроводниках приводит к исследованию разрешимости краевых задач для псевдопараболических уравнений

$$(u + L_1 u)_t + L_2 u = f \quad (2)$$

с дифференциальными операторами L_1 и L_2 четного порядка по пространственным переменным. Подробный обзор литературы по моделированию указанных процессов дан в [1].

Нужно отметить, что исследование обратных задач для псевдопараболических уравнений началось в 1980-х гг. Полученный Ранделлом [2] результат относится к обратным задачам идентификации неизвестной функции источника в уравнении (1) с линейными операторами $L_1, L_2, L_1 = L_2$. Ранделл рассмотрел задачи определения функции источника, зависящей только от x или от t . В нашем случае $L_1 \neq L_2$.

В работах [3–5] оператор L_1 был оператором второго порядка, а оператор L_2 имел вид $k(x)L_1$, где коэффициент $k(x)$ считался неизвестным. Отметим также работы [6, 7], в которых рассматривались коэффициентные обратные задачи для уравнения (2). Вместе с тем заметим, что обратные задачи для псевдопараболического уравнения вида (1) с неизвестным внешним воздействием, зависящим от x , и финальным переопределением ранее не рассматривались.

В настоящей работе исследуется разрешимость обратной задачи нахождения вместе с решением также неизвестной правой части. Будут получены достаточные условия существования решения.

1. Постановка задачи

Пусть Ω — ограниченная область из пространства R^n с гладкой границей Γ , $0 < T < +\infty$, Q — цилиндр $\Omega \times (0, T)$, $S = \partial\Omega \times (0, T)$ — боковая граница Q . Функции $f(x, t)$, $h(x, t)$ известны, α, β — заданные положительные постоянные.

Обратная задача. Найти функции $u(x, t)$, $q(x)$, связанные в области Q уравнением

$$u_t - \alpha \Delta u_t + \beta \Delta^2 u = f(x, t) + q(x)h(x, t), \quad (3)$$

при выполнении для функции $u(x, t)$ условий

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

$$u(x, t)|_S = 0, \quad \Delta u(x, t)|_S = 0, \quad (5)$$

$$u(x, T) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (6)$$

В этой задаче условия (4), (5) суть условия первой начально-краевой задачи для параболического уравнения, а (6) — условие переопределения, необходимое для нахождения неизвестной функции $q(x)$.

2. Разрешимость обратной задачи

Пусть функция $\psi(x)$ принадлежит пространству $W_2^1(\Omega)$ и обращается в нуль на границе Ω . Тогда имеет место неравенство

$$\int_{\Omega} \psi^2(x) dx \leq d_0 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \psi_{x_i}^2(x) dx, \quad (7)$$

в котором число d_0 определяется лишь областью Ω (см. [8, 9]. Это неравенство и само число d_0 будут использоваться ниже.

Обозначим

$$f_1(x, t) = f(x, t) - \frac{h(x, t)}{h(x, T)} f(x, T),$$

$$h_1(x, t) = \frac{h(x, t)}{h(x, T)}, \quad h_0 = \max_{\overline{Q}} |h_{1t}(x, t)|,$$

$$V = \{u(x, t) : u(x, t) \in L_2(0, T; W_2^4(\Omega)), u_t(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega))\}.$$

Теорема. Пусть выполняются условия

$$f(x, t) \in L_2(Q), \quad f_t(x, t) \in L_2(Q),$$

$$h(x, t) \in C^1(\overline{Q}), \quad h(x, T) \neq 0, \quad x \in \overline{\Omega},$$

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0,$$

$$1 - h_1^2(x, 0) \geq k > 0, \quad x \in \overline{\Omega},$$

$$h_0^2 T (d_0 + \alpha)^2 < 2\beta(1 - h_1^2(x, 0)), \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Тогда обратная задача (3)–(6) имеет решение $u(x, t) \in V$, $q(x) \in L_2(\Omega)$.

Доказательство. Рассмотрим следующую задачу относительно вспомогательной функции $v(x, t)$: найти функцию $v(x, t)$, являющуюся в области Q решением уравнения

$$v_t(x, t) - \alpha \Delta v_t(x, t) + \beta \Delta^2 v(x, t) = f_{1t}(x, t) + h_{1t}(x, t)[v(x, T) - \alpha \Delta v(x, T)], \quad (8)$$

с условиями

$$v(x, 0) - \alpha \Delta v(x, 0) = f_1(x, 0) + h_1(x, 0)[v(x, T) - \alpha \Delta v(x, T)], \quad (9)$$

$$v(x, t)|_S = 0, \quad (10)$$

$$\Delta v(x, t)|_S = 0. \quad (11)$$

Разрешимость данной краевой задачи докажем, используя метод продолжения по параметру. Далее с помощью решения данной краевой задачи будет построено решение исходной обратной задачи.

Пусть λ — число из отрезка $[0, 1]$. Рассмотрим следующую краевую задачу: найти функцию $v(x, t)$, являющуюся в области Q решением уравнения

$$v_t(x, t) - \alpha \Delta v_t(x, t) + \beta \Delta^2 v(x, t) = f_{1t}(x, t) + \lambda h_{1t}(x, t)[v(x, T) - \alpha \Delta v(x, T)] \quad (12)$$

и удовлетворяющую условиям

$$v(x, 0) - \alpha \Delta v(x, 0) = f_1(x, 0) + \lambda h_1(x, 0)[v(x, T) - \alpha \Delta v(x, T)], \quad (13)$$

$$v(x, t)|_S = 0, \quad (14)$$

$$\Delta v(x, t)|_S = 0. \quad (15)$$

При $\lambda = 0$ данная задача есть начально-краевая задача для линейного псевдо-параболического уравнения. Разрешимость ее в пространстве V известна (см. [10]). Для того чтобы получить разрешимость задачи (11)–(14) при всех λ , в том числе и при $\lambda = 1$, достаточно получить равномерную по λ априорную оценку возможных решений этой задачи в пространстве V .

Обозначим $w(x, t) = v(x, t) - \alpha \Delta v(x, t)$. Уравнение (11) перепишем в виде

$$w_t(x, t) + \beta \Delta^2 v(x, t) = f_{1t}(x, t) + \lambda h_{1t}(x, t)w(x, T).$$

Умножим уравнение на $w(x, t)$ и проинтегрируем по области Q :

$$\begin{aligned} \int_Q w_t(x, t)w(x, t) dxdt + \beta \int_Q \Delta^2 v(x, t)w(x, t) dxdt \\ = \int_Q f_{1t}(x, t)w(x, t) dxdt + \lambda \int_Q h_{1t}(x, t)w(x, T)w(x, t) dxdt. \end{aligned}$$

Используя начальные данные, получим

$$\begin{aligned} \int_Q w_t(x, t)w(x, t) dxdt &= \frac{1}{2} \int_Q (w^2(x, T) - w^2(x, 0)) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_Q (1 - h_1^2(x, 0))w^2(x, T) dx. \end{aligned}$$

Это следует из условия (8), в котором, не теряя общности, можно считать $f_1(x, 0) = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \beta \int_Q \Delta^2 v(x, t)w(x, t) dxdt &= \beta \int_Q \Delta^2 v(x, t)[v(x, t) - \alpha \Delta v(x, t)] dxdt \\ &= \beta \int_Q \Delta^2 v(x, t)v(x, t) dxdt - \alpha\beta \int_Q \Delta^2 v(x, t)\Delta v(x, t) dxdt \\ &= \beta \int_Q (\Delta v(x, t))^2 dxdt + \alpha\beta \sum_{i=1}^n \int_Q (\Delta v_{x_i}(x, t))^2 dxdt, \\ \left| \int_Q f_{1t}(x, t)w(x, t) dxdt \right| &\leq \frac{\delta_1^2}{2} \int_Q (w(x, t))^2 dxdt + \frac{1}{2\delta_1^2} \int_Q f_{1t}^2(x, t) dxdt, \\ \lambda \left| \int_Q h_{1t}(x, t)w(x, T)w(x, t) dxdt \right| &\leq \frac{\delta_2^2}{2} \int_Q w^2(x, t) dxdt + \frac{h_0^2 T}{2\delta_2^2} \int_Q w^2(x, T) dx. \end{aligned}$$

Проведем следующие рассуждения:

$$w(x, t) = v(x, t) - \alpha \Delta v(x, t),$$

$$w^2(x, t) = v^2(x, t) - 2\alpha v(x, t)\Delta v(x, t) + \alpha^2(\Delta v(x, t))^2,$$

$$\int_Q w^2(x, t) dx dt \leq \int_Q [v^2(x, t) - 2\alpha v(x, t)\Delta v(x, t) + \alpha^2(\Delta v(x, t))^2] dx dt.$$

Имеем следующие оценки:

$$\int_{\Omega} v^2(x, t) dx \leq d_0 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_{x_i}^2(x, t) dx$$

(см. [8]), а также

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_{x_i}^2(x, t) dx &= - \int_{\Omega} \Delta v(x, t) v(x, t) dx \leq \left| \int_{\Omega} \Delta v(x, t) v(x, t) dx \right| \\ &\leq \left(\int_{\Omega} v^2(x, t) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} (\Delta v(x, t))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq d_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_{x_i}^2(x, t) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} (\Delta v(x, t))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_{x_i}^2(x, t) dx &\leq d_0 \int_{\Omega} (\Delta v(x, t))^2 dx, \\ -2\alpha \int_{\Omega} v(x, t) \Delta v(x, t) dx &= 2\alpha \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_{x_i}^2(x, t) dx \leq 2\alpha d_0 \int_{\Omega} (\Delta v(x, t))^2 dx, \\ \int_{\Omega} v(x, t)^2 dx &\leq d_0 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_{x_i}^2(x, t) dx \leq d_0^2 \int_{\Omega} (\Delta v(x, t))^2 dx, \\ \int_Q w^2(x, t) dx dt &\leq l(d_0^2 + 2\alpha c_Q + \alpha^2) \int_Q (\Delta v(x, t))^2 dx dt. \end{aligned}$$

Непосредственно из этого следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[1 - h_1^2(x, 0) - \frac{h_0^2 T}{\delta_2^2} \right] \int_{\Omega} w^2(x, T) dx dt + \alpha \beta \sum_{i=1}^n \int_Q (\Delta v_{x_i}(x, t))^2 dx dt \\ + \left[\beta - \frac{1}{2}(d_0 + \alpha)^2(\delta_1^2 + \delta_2^2) \right] \int_Q (\Delta v(x, t))^2 dx dt \leq \frac{1}{2\delta_1^2} \int_Q f_{1t}^2(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Постоянную δ_1 всегда можно выбрать настолько малой, чтобы она не влияла на положительность множителя $\beta - \frac{1}{2}(d_0 + \alpha)^2(\delta_1^2 + \delta_2^2)$. Постоянную δ_2^2 выберем из интервала $(\frac{h_0^2 T}{1-h_1^2(x, 0)}, \frac{2\beta}{(d_0+\alpha)^2})$. Из условий теоремы все множители интегралов в левой части неотрицательны и можно получить первую априорную оценку:

$$\int_{\Omega} w^2(x, T) dx + \sum_{i=1}^n \int_Q (\Delta v_{x_i}(x, t))^2 dx dt + \int_Q (\Delta v(x, t))^2 dx dt \leq C_1, \quad (16)$$

где

$$C_1 = \frac{1}{2C} \int_Q f_{1t}^2(x, t) dxdt,$$

$$C = \min \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - h_1^2(x, 0) - \frac{h_0^2 T}{\delta_2^2} \right), \alpha\beta, \beta - \frac{1}{2}(d_0 + \alpha)^2 \delta_2^2 \right\}.$$

Умножим уравнение (11) на $v_t(x, t)$ и проинтегрируем по области Q :

$$\begin{aligned} \int_Q v_t^2(x, t) dxdt - \alpha \int_Q \Delta v_t(x, t) v_t(x, t) dxdt + \beta \int_Q \Delta^2 v(x, t) v_t(x, t) dxdt \\ = \int_Q f_{1t}(x, t) v_t(x, t) dxdt + \lambda \int_Q h_{1t}(x, t) w(x, T) v_t(x, t) dxdt. \end{aligned}$$

Применяя интегрирование по частям и неравенство Юнга, можно записать

$$\begin{aligned} \int_Q v_t^2(x, t) dxdt + \alpha \sum_{i=1}^n \int_Q (\Delta v_{x_{it}}(x, t))^2 dxdt + \frac{\beta}{2} \int_{\Omega} [(\Delta v(x, T))^2 - (\Delta v(x, 0))^2] dx \\ \leq \frac{\delta_3^2}{2} \int_Q v_t^2(x, t) dxdt + \frac{1}{2\delta_3^2} \int_Q f_{1t}^2(x, t) dxdt \\ + \frac{h_0^2 T}{2\delta_4^2} \int_{\Omega} w^2(x, T) dx + \frac{\delta_4^2}{2} \int_Q v_t(x, t)^2 dxdt, \\ \left(1 + \frac{\delta_3^2}{2} + \frac{\delta_4^2}{2} \right) \int_Q v_t^2(x, t) dxdt + \alpha \sum_{i=1}^n \int_Q (\Delta v_{x_{it}}(x, t))^2 dxdt \\ \leq \frac{1}{2\delta_3^2} \int_Q f_{1t}^2(x, t) dxdt + \frac{h_0^2 T}{2\delta_4^2} \int_{\Omega} w^2(x, T) dx + \frac{\beta}{2} \int_{\Omega} [(\Delta v(x, 0))^2 - (\Delta v(x, T))^2] dx. \end{aligned}$$

Используя оценку (15), получим вторую априорную оценку:

$$\int_Q v_t^2(x, t) dxdt + \sum_{i=1}^n \int_Q (\Delta v_{x_{it}}(x, t))^2 \leq C_2, \quad (17)$$

где C_2 явно выражается через C_1 .

Умножим уравнение (11) на $\Delta^2 v(x, t)$ и проинтегрируем по области Q :

$$\begin{aligned} \int_Q v_t(x, t) \Delta^2 v(x, t) dxdt - \alpha \int_Q \Delta v_t(x, t) \Delta^2 v(x, t) dxdt + \beta \int_Q (\Delta^2 v(x, t))^2 dxdt \\ = \int_Q f_{1t}(x, t) \Delta^2 v(x, t) dxdt + \lambda \int_Q h_{1t}(x, t) (v(x, T) - \alpha \Delta v(x, T)) \Delta^2 v(x, t) dxdt. \end{aligned}$$

Используя оценки (15), (16), можно получить оценку

$$\int_Q (\Delta^2 v(x, t))^2 dx dt \leq C_3, \quad (18)$$

где C_3 явно выражается через C_1 .

Наличие оценок (15)–(17) доказывает существование равномерной по λ априорной оценки решений задачи (11)–(14). Следовательно, задача (11)–(14) имеет при $\lambda = 1$ решение $v(x, t) \in V$ задачи (7)–(10).

Рассмотрим функцию $u_t(x, t) = v(x, t)$, $u(x, 0) = 0$. Выполнив интегрирование уравнения (7) по временной переменной от 0 до текущей точки и используя следующее представление для функции $q(x)$:

$$q(x) = \frac{1}{h(x, T)} [u_t(x, T) - \alpha \Delta u_t(x, T) - f(x, T)], \quad (19)$$

получим

$$u_t(x, t) - \alpha \Delta u_t(x, t) + \beta \Delta^2 u(x, t) = f(x, t) + q(x)h(x, t). \quad (20)$$

Следовательно, функции $u(x, t)$, $q(x)$ связаны в области Q уравнением (3).

Условие (5) выполняется в силу условий (9), (10).

Проинтегрируем уравнение (7) по временной переменной от 0 до T . После несложных преобразований получим $\beta \Delta^2 u(x, T) = 0$, $x \in \Omega$, что влечет за собой выполнение условия (6): $u(x, T) = 0$, $x \in \Omega$.

Учитывая выполнение для функции $u(x, t)$ условий (4)–(6) и принадлежность функций $u(x, t)$, $q(x)$ пространствам V , $L_2(Q)$ соответственно, получим, что функции $u(x, t)$, $q(x)$ представляют собой требуемое решение обратной задачи (3)–(6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
2. Rundell W. Determination of an unknown nonhomogeneous term in a linear partial differential equation from overspecified boundary data // Appl. Anal. 1980. V. 10. P. 231–242.
3. Lyubanova A. Sh. On the approximation of a parabolic inverse problem by pseudoparabolic one // Журн. Сиб. федер. ун-та. Сер. Математика и физика. 2012. Т. 5, № 3. С. 326–336.
4. Lyubanova A. Sh., Tani A. Inverse problems for the stationary and pseudoparabolic equation of diffusion // Appl. Anal. 2019. V. 98. P. 1997–2010.
5. Любанова А. III. Обратная задача для линейного псевдопараболического уравнения типа фильтрации // Образов. ресурсы и технологии. 2016. № 2. С. 357–363.
6. Мамаюсупов М. III. О задаче определения коэффициентов псевдопараболического уравнения // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Фрунзе: Илим, 1983. № 16. С. 290–297.
7. Kozhanov A. I. On the solvability of inverse coefficient problems for same Sobolev-type equations // Nauchn. Vedom. Belgorod. Univ. 2010. V. 18. P. 88–97.
8. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
9. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

-
10. Якубов С. Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения, Баку: Элм, 1985.

Поступила в редакцию 15 июня 2023 г.

После доработки 28 августа 2023 г.

Принята к публикации 4 сентября 2023 г.

Николаев Олег Юрьевич
Бурятский государственный университет,
ул. Смолина, 24а, Улан-Удэ 670000
nikolaev.oleg1@yandex.ru

SOLVABILITY OF THE LINEAR INVERSE PROBLEM FOR THE PSEUDOPARABOLIC EQUATION

O. Yu. Nikolaev

Abstract: We investigate the solvability of inverse problems of determination, along with the solution $u(x, t)$ to the pseudoparabolic equation, of the unknown source function. Similar problems are considered when studying wave processes, filtration in porous media, and heat transfer processes. A theorem for the existence of a regular solution is proved. Inverse problems for pseudoparabolic equations with an unknown external influence depending on x and a final redefinition have not been considered previously.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.85.20.006

Keywords: inverse problem, pseudoparabolic equation, final redefinition, existence.

REFERENCES

1. Sveshnikov A. G., Alshin A. B., Korpusov M. O., and Pletner U. D., Linear and Nonlinear Equations of Sobolev Type [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2007).
2. Rundell W., “Determination of an unknown nonhomogeneous term in a linear partial differential equation from overspecified boundary data,” *Appl. Anal.*, **10**, 231–242 (1980).
3. Lyubanova A. Sh., “On the approximation of a parabolic inverse problem by pseudoparabolic one,” *J. Sib. Fed. Univ., Ser. Math. Phys.*, **5**, No. 3, 326–336 (2012).
4. Lyubanova A. Sh. and Tani A., “Inverse problems for the stationary and pseudoparabolic equation of diffusion,” *Appl. Anal.*, **98**, 1997–2010 (2019).
5. Lyubanova A. Sh., “Inverse problem for a linear pseudo-parabolic equation of filtration type [in Russian],” *Obrazov. Resursy i Tekhnol.*, **2**, No. 14, 357–363 (2016).
6. Mamausupov M. Sh., “On the problem of determining the coefficients of a pseudoparabolic equation [in Russian],” in: *Research on Integro-Differential Equations*, vol. 16, pp. 290–297, Ilim, Frunse (1983).
7. Kozhanov A. I., “On the solvability of inverse coefficient problems for same Sobolev-type equations [in Russian],” *Nauch. Vedom. Belgorod. Univ.*, **18**, No. 52, 88–97 (2010).
8. Sobolev S. L., *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics* [in Russian], Nauka, Moscow (1988).
9. Ladyzhenskaya O. A., *Boundary Value Problems of Mathematical Physics* [in Russian], Nauka, Moscow (1973).
10. Jakubov S. Ja., *Linear Differential Operator Equations and Their Applications* [in Russian], Elm, Baku (1985).

Submitted June 15, 2023

Revised August 28, 2023

Accepted September 4, 2023

Oleg Yu. Nikolaev
Buryat State University,
24a Smolin Street, Ulan-Ude 670000, Russia
nikolaev.oleg1@yandex.ru

БИФУРКАЦИЯ ПОЛИЦИКЛА, ОБРАЗОВАННОГО СЕПАРАТРИСАМИ СЕДЛА С НУЛЕВОЙ СЕДЛОВОЙ ВЕЛИЧИНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

В. Ш. Ройтенберг

Аннотация. Рассматриваются двухпараметрические семейства векторных полей на плоскости с центральной симметрией. Пусть при нулевых значениях параметров векторное поле имеет гиперболическое седло в начале координат O и две симметричные петли сепаратрис этого седла. Седловая величина — след матрицы линейной части векторного поля в точке O — предполагается равной нулю. В работе описана бифуркационная диаграмма типичного семейства — разбиение окрестности нуля на плоскости параметров по классам топологической эквивалентности динамических систем, задаваемых этими векторными полями в фиксированной окрестности U полицикла, образованного петлями сепаратрис. В частности, для каждого элемента разбиения указаны число и тип предельных циклов, принадлежащих окрестности U .

DOI: 10.25587/SVFU.2023.86.26.007

Ключевые слова: векторное поле на плоскости, центральная симметрия, бифуркация, седло, сепаратриса, предельный цикл.

Введение

Поскольку динамические системы на плоскости, обладающие центральной симметрией, естественным образом появляются при математическом моделировании ряда процессов, представляет интерес изучение бифуркаций в типичных конечно-параметрических семействах таких систем. Описание нелокальных бифуркаций в однопараметрических семействах получается как следствие известного описания бифуркаций в типичных одно- и двухпараметрических семействах динамических систем без симметрии [1, 2]. В частности, бифуркационную диаграмму для типичного однопараметрического семейства систем с центральной симметрией в окрестности полицикла «гомоклиническая восьмерка», образованного двумя петлями сепаратрис грубого седла с ненулевой седловой величиной, можно получить из бифуркационной диаграммы типичного двухпараметрического семейства систем без симметрии [2, гл. 13]. Изучить аналогичным способом типичные двухпараметрические бифуркации систем с центральной симметрией в окрестностях полициклов уже нельзя из-за отсутствия полного описания бифуркаций полициклов в k -параметрических семействах систем без симметрии

при $k > 2$. Здесь исследованы бифуркации системы с центральной симметрией в окрестности гомоклинической восьмерки седла с нулевой седловой величиной. Первая сепаратрисная величина для петель предполагается отрицательной, вследствие чего полицикл является аттрактором. В пространстве всех систем с центральной симметрией такие системы образуют подмногообразие ко-размерности два и потому рассматриваются их типичные двухпараметрические деформации.

Отметим, что бифуркации в окрестности петли сепаратрисы седла с нулевой седловой величиной впервые были рассмотрены Е. А. Леонтович [3]. Ее результаты частично повторены Руссари в [4]. В случае петли с нулевой седловой величиной и ненулевой первой сепаратрисной величиной бифуркационная диаграмма для двухпараметрического семейства общего положения описана В. П. Ноздрачевой [5].

В работе [6] описаны бифуркации аттрактора из петель сепаратрис простейшего негрубого седла системы с центральной симметрией. При нулевых значениях параметров динамические системы в окрестностях аттракторов, рассматриваемых в настоящей работе и в [6], топологически эквивалентны, но их бифуркации принципиально различны, поскольку в [6] бифурцирует и негрубое седло.

1. Постановка задачи. Формулировка результатов

Рассмотрим семейство векторных полей $X_\varepsilon(z) = P_1(z, \varepsilon)\partial/\partial z_1 + P_2(z, \varepsilon)\partial/\partial z_2$ на плоскости, зависящее от двумерного параметра $\varepsilon \in \mathbb{R}^2$. Будем считать, что $P_1, P_2 \in C^r$ ($r \geq 3$), векторные поля X_ε инвариантны относительно преобразования $S: z \mapsto -z$, т. е. $X_\varepsilon(-z) = -X_\varepsilon(z)$, и удовлетворяют сформулированным ниже условиям У1–У4.

У1. Точка $O = (0, 0)$ является грубым седлом поля X_0 с седловой величиной $(P_1)'_{z_1}(0, 0) + (P_2)'_{z_2}(0, 0) = 0$.

У2. Выходящая сепаратриса L_0^+ седла O (пусть она задается уравнением $z = \zeta(t)$, $t \in \mathbb{R}$) совпадает с входящей сепаратрисой L_0^- , образуя петлю $\Gamma_0^+ := L_0^+ \cup \{O\} = L_0^- \cup \{O\}$. Соответственно совпадают и сепаратрисы SL_0^+ и SL_0^- , образуя петлю $\Gamma_0^- = S\Gamma_0^+$.

У3. Первая сепаратрисная величина

$$s_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} ((P_1)'_{z_1}(\zeta(t), 0) + (P_2)'_{z_2}(\zeta(t), 0)) dt < 0.$$

При всех ε , достаточно близких к нулю, точка O является седлом для поля X_ε , а собственные значения матрицы линейной части поля в точке O , $\lambda_1(\varepsilon) > 0$ и $\lambda_2(\varepsilon) < 0 - C^{r-1}$ -функции от ε . Обозначим через $\sigma(\varepsilon) := \lambda_1(\varepsilon) + \lambda_2(\varepsilon)$ седловую величину, $\lambda(\varepsilon) := -\lambda_2(\varepsilon)/\lambda_1(\varepsilon)$ — седловой индекс. Поскольку $\sigma(0) = 0$, то $\lambda(0) = 1$.

Пусть $\eta : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ — такое C^∞ -отображение, что $\eta(0) = \zeta(0)$, $\eta'(s) \neq 0 \forall s \in (-1, 1)$, а репер $(\eta'(0), \zeta'(0)) = (\eta'(0), X_0(\zeta(0)))$ положительно ориентирован. Так как инвариантные многообразия седла C^{r-1} -гладко зависят от параметра, то при ε , достаточно близких к нулю, седло O имеет выходящую (входящую) сепаратрису L_ε^+ (L_ε^-), трансверсально пересекающую дугу $\eta(-1, 1)$ в точке $\eta(u_+(\varepsilon))$ ($\eta(u_-(\varepsilon))$), где $u_\pm(\cdot) \in C^{r-1}$, $u_\pm(0) = 0$. Положим $u(\varepsilon) := u_+(\varepsilon) - u_-(\varepsilon)$.

У4. Производные $\lambda'(0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ и $u'(0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ линейно независимы.

Условие У4 не зависит от выбора параметризации сепаратрисы L_0^+ и отображения η .

При выполнении условий У1–У4 в окрестности нуля на плоскости параметров можно ввести C^{r-1} -координаты $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ так, что

$$\lambda(\varepsilon) = 1 - \varepsilon_1, \quad u(\varepsilon) = \varepsilon_2. \quad (1)$$

Далее будем отождествлять параметр ε с его координатной строкой: $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Опишем траектории векторных полей X_ε в окрестности полицикла $\Gamma_0 := \Gamma_0^+ \cup \Gamma_0^-$, гомеоморфного «восьмерке».

Теорема 1. Пусть векторное поле X_0 удовлетворяет условиям У1–У3. Тогда существуют окрестность U полицикла Γ_0 с границей ∂U , состоящей из трех непересекающихся между собой гладких простых замкнутых кривых γ_{int}^+ , $\gamma_{\text{int}}^- = S\gamma_{\text{int}}^+$ и $\gamma_{\text{ext}} = S\gamma_{\text{ext}}$, в точках которых поле X_0 направлено внутрь U , а все траектории поля X_0 , начинающиеся в кольцевой области между γ_{int}^+ и Γ_0^+ , γ_{int}^- и Γ_0^- , γ_{ext} и Γ_0 , ω -предельны соответственно к Γ_0^+ , Γ_0^- , Γ_0 и выходят из U при убывании времени соответственно в точках γ_{int}^+ , γ_{int}^- , γ_{ext} (рис. 1).

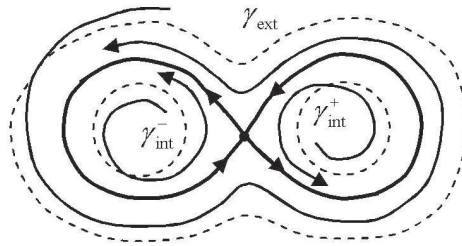


Рис. 1. Траектории поля X_0 в окрестности полицикла.

Теорема 2. Пусть семейство векторных полей X_ε удовлетворяет условиям У1–У4. Тогда окрестность U полицикла Γ_0 , о которой идет речь в теореме 1, и число $\delta > 0$ можно выбрать так, что имеют место следующие утверждения.

В точках ∂U векторные поля X_ε , $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$, направлены внутрь U .

Область параметров $(-\delta, \delta)^2$ разбивается на множества $B_0 = \{(0, 0)\}$, E_i , B_i , $i = 1, 2, 3, 4$, где (рис. 2)

$$B_1 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 = \beta_1(\varepsilon_2)\}, \beta_1 : (-\delta, 0) \rightarrow (0, \delta), \beta_1 \in C^1, \beta_1(-0) = \beta_1'(-0) = 0,$$

E_i — связная компонента $(-\delta, \delta)^2 \setminus \bigcup_{k=0}^4 B_k$, в границу которой входят B_i и B_{i+1} (здесь $B_6 = B_1$),

со следующими свойствами:

- (1) векторные поля X_ε при $\varepsilon \in E_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) грубые в U ;
- (2) векторные поля X_ε при $\varepsilon \in B_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) первой степени негрубости в U ;
- (3) векторные поля $X_\varepsilon|_U$ имеют следующие замкнутые траектории и петли сепаратрис:

при $\varepsilon \in B_1$ — двойной цикл, гомотопный γ_{ext} , и по устойчивому циклу, гомотопному соответственно γ_{int}^+ и γ_{int}^- ;

при $\varepsilon \in E_1$ — два цикла, устойчивый и неустойчивый, гомотопные γ_{ext} , и по устойчивому циклу, гомотопному соответственно γ_{int}^+ и γ_{int}^- ;

при $\varepsilon \in B_2$ — устойчивый цикл, гомотопный γ_{ext} , полицикл из двух петель сепаратрис и по устойчивому циклу, гомотопному соответственно γ_{int}^+ и γ_{int}^- ;

при $\varepsilon \in E_2$ — устойчивый цикл, гомотопный γ_{ext} , и по два цикла, устойчивому и неустойчивому, гомотопных соответственно γ_{int}^+ и γ_{int}^- ;

при $\varepsilon \in B_3$ — устойчивый цикл, гомотопный γ_{ext} , и по двойному циклу, гомотопному соответственно γ_{int}^+ и γ_{int}^- ;

при $\varepsilon \in E_3$ — единственный цикл, он устойчив и гомотопен γ_{ext} ;

при $\varepsilon \in B_4$ — устойчивый полицикл из двух петель сепаратрис;

при $\varepsilon \in E_4$ — по устойчивому циклу, гомотопному соответственно γ_{int}^+ и γ_{int}^- .

Траектории векторных полей $X_\varepsilon|_U$ для $\varepsilon \in E_i$ и $\varepsilon \in B_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) схематически изображены на рис. 2.

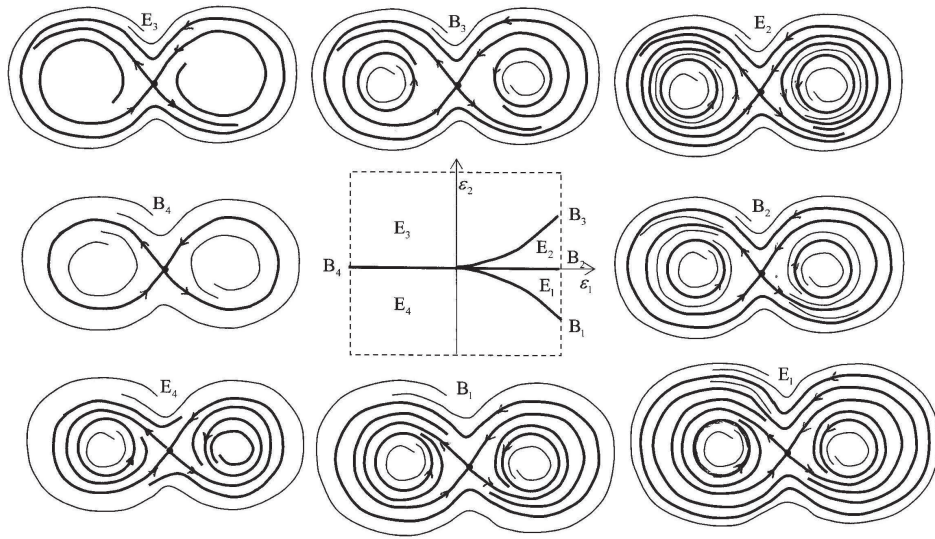


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма.

Доказательства теорем 1 и 2 приведены в разд. 2, 3.

2. Функции соответствия, функции последования и функции расхождения

Согласно теореме 2.17 из [7] в некоторой окрестности $V(O)$ точки O при достаточно малых ε существует замена координат

$$x = g_1(z_1, z_2, \varepsilon), \quad y = g_2(z_1, z_2, \varepsilon),$$

где функции g_i принадлежат классу C^{r-1} по переменным z_1, z_2 , а g_i и $(g_i)'_{z_j}$ — классу C^{r-2} по переменным z_1, z_2, ε , такая, что в координатах x, y поле X_ε имеет вид

$$X_\varepsilon = x(\lambda_1(\varepsilon) + p(x, y, \varepsilon))\partial/\partial x + y(\lambda_2(\varepsilon) + q(x, y, \varepsilon))\partial/\partial y, \quad (2)$$

где функции p и q являются C^{r-1} -гладкими относительно x, y и C^{r-2} -гладкими относительно x, y, ε ,

$$p(0, y, \varepsilon) = p(x, 0, \varepsilon) = q(0, y, \varepsilon) = q(x, 0, \varepsilon) = 0. \quad (3)$$

Из доказательства указанной теоремы видно, что при условии $X_\varepsilon(-z) = -X_\varepsilon(z)$ имеем $g_1(-z, \varepsilon) = -g_1(z, \varepsilon)$, $g_2(-z, \varepsilon) = -g_2(z, \varepsilon)$, т. е. симметричные точки z и $-z$ имеют противоположные координаты (x, y) и $(-x, -y)$. Поэтому

$$p(-x, -y, \varepsilon) \equiv p(x, y, \varepsilon), \quad q(-x, -y, \varepsilon) \equiv q(x, y, \varepsilon).$$

При фиксированном ε будем отождествлять точку $z \in V(O)$ с ее координатной строкой (x, y) . Без ограничения общности можно считать, что при $\varepsilon = 0$ дуги $y = 0$, $x > 0$ и $x = 0$, $y > 0$ принадлежат соответственно сепаратрисам L_0^+ и SL_0^- . При достаточно малых $d > 0$ и $\delta_1 > 0$ определены отображения $(x, d) \mapsto (d, \varphi_+(x, \varepsilon))$ и $(x, -d) \mapsto (d, \varphi_-(x, \varepsilon))$, $x \in (0, d)$, $\varepsilon \in (-\delta_1, \delta_1)^2$, по траекториям поля $X_\varepsilon|_{V(O)}$, где $\varphi_\pm(x, \varepsilon)$ и $(\varphi_\pm)'_x(x, \varepsilon) = C^{r-2}$ -функции (рис. 3). Из (1)–(3), лемм 13.1, 13.5 и замечаний к ним в [2] следует, что существуют такие числа $\bar{x} \in (0, d)$, $\delta_2 \in (0, \delta_1]$, что при всех $x \in (0, \bar{x}]$, $\varepsilon \in (-\delta_2, \delta_2)^2$

$$\varphi_\pm(x, \varepsilon) = \pm d^{1-\lambda(\varepsilon)} x^{\lambda(\varepsilon)} + r_\pm(x, \varepsilon) = \pm d^{\varepsilon_1} x^{1-\varepsilon_1} + r_\pm(x, \varepsilon), \quad (4)$$

где

$$|\partial^{i+j} r_\pm(x, \varepsilon) / \partial x^i \partial \varepsilon_k^j| \leq x^{1,5-\varepsilon_1-i}, \quad 0 \leq i+j \leq 2, \quad 0 \leq j \leq 1, \quad k = 1, 2. \quad (5)$$

При достаточно малых $\bar{u} > 0$, $\bar{y} > 0$ и $\delta_3 \in (0, \delta_1)$ определены отображение по траекториям поля X_ε , $\varepsilon \in [-\delta_3, \delta_3]^2$, переводящее точку $\eta(u_-(\varepsilon) + u)$ с $u \in [-\bar{u}, \bar{u}]$ в точку $(\psi(u, \varepsilon), -d)$, где $\psi(u, \varepsilon) \in (-\bar{x}, \bar{x})$, $\psi(0, \varepsilon) = 0$, $\psi \in C^{r-2}$ и $\psi'_u(u, \varepsilon) < 0$, и отображение по траекториям поля X_ε , $\varepsilon \in [-\delta_3, \delta_3]^2$, переводящее точку (d, y) с $y \in (-\bar{y}, \bar{y})$ в точку $\eta(u_-(\varepsilon) + \chi(y, \varepsilon))$, где $\chi \in C^{r-2}$, $\chi'_y(y, \varepsilon) > 0$, $\chi(0, \varepsilon) = u_+(\varepsilon) - u_-(\varepsilon) = \varepsilon_2$ (см. рис. 3). Траекторию поля X_ε , проходящую через точку $\eta(u_-(\varepsilon) + u)$, $u \in [-\bar{u}, \bar{u}]$, будем обозначать через $L_\varepsilon(u)$.

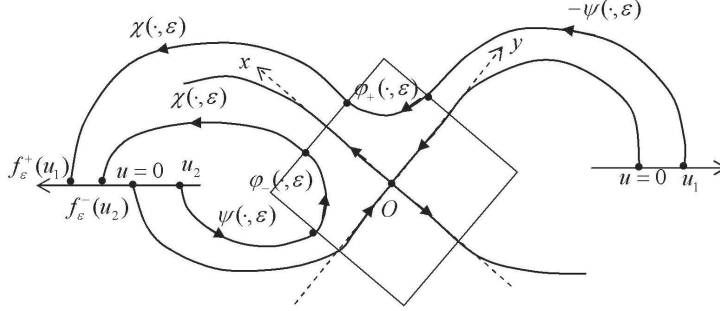


Рис. 3. Отображения соответствия по траекториям.

Пусть далее числа \bar{u} и \bar{u} фиксированы. При достаточно малых \bar{u} и δ_3 для любого $\varepsilon \in (-\delta_3, \delta_3)^2$ определены функции (см. рис. 3)

$$f_\varepsilon^-(u) := \chi(\varphi_-(\psi(u, \varepsilon), \varepsilon), \varepsilon), \quad u \in [-\bar{u}, 0),$$

$$f_\varepsilon^+(u) := \chi(\varphi_+(-\psi(u, \varepsilon), \varepsilon), \varepsilon), \quad u \in (0, \bar{u}].$$

Введем также функции расхождения $\Delta_\pm(u, \varepsilon) := f_\varepsilon^\pm(u) - u$ и функции $f_\varepsilon(u) := f_\varepsilon^+(f_\varepsilon^+(u))$.

Функция f_ε^- является функцией последования по траекториям поля X_ε на дуге $\eta(u_-(\varepsilon) - \bar{u}, u_-(\varepsilon))$. Поэтому $L_\varepsilon(u_*)$, $u_* \in [-\bar{u}, 0)$, — замкнутая траектория поля тогда и только тогда, когда u_* — неподвижная точка f_ε^- (нуль функции $\Delta_-(\cdot, \varepsilon)$). Эта траектория — устойчивый (неустойчивый) грубый предельный цикл, если $(\Delta_-)'_u(u_*, \varepsilon) < 0$ ($(\Delta_-)'_u(u_*, \varepsilon) > 0$), и двойной цикл, если $(\Delta_-)'_u(u_*, \varepsilon) = 0$, $(\Delta_-)''_{uu}(u_*, \varepsilon) \neq 0$.

Учитывая симметрию поля X_ε , получаем, что положительная полутраектория поля, начинающаяся в точке $\eta(u_-(\varepsilon) + u)$ ($S\eta(u_-(\varepsilon) + u)$) при $u \in (0, \bar{u}]$, пересекает дугу $S\eta(-1, 1)$ ($\eta(-1, 1)$) в точке $S\eta(u_-(\varepsilon) + f_\varepsilon^+(u))$ ($\eta(u_-(\varepsilon) + f_\varepsilon^+(u))$). Поэтому f_ε^+ — функция последования по траекториям поля. Траектория $L_\varepsilon(u_*)$, $u_* \in (0, \bar{u}]$, замкнута тогда и только тогда, когда она проходит и через точку $S\eta(u_-(\varepsilon) + u_*)$, при этом u_* — неподвижная точка как для f_ε^+ , так и для f_ε^- , и нуль для $\Delta_+(\cdot, \varepsilon)$. Так как $(f_\varepsilon)'(u_*) = [(f_\varepsilon^+)'(u_*)]^2$, то $L_\varepsilon(u_*)$ — устойчивый (неустойчивый) грубый предельный цикл, если $(f_\varepsilon^+)'(u_*) < 1$ (> 1), т. е. $(\Delta_+)'_u(u_*, \varepsilon) < 0$ (> 0). Если $L_\varepsilon(u_*)$ — негрубая замкнутая траектория, то $(f_\varepsilon^+)'(u_*) = 1$, $(f_\varepsilon)''(u_*) = 2(f_\varepsilon^+)''(u_*)$. Поэтому $L_\varepsilon(u_*)$ — двойной цикл, если $(\Delta_+)'_u(u_*, \varepsilon) = 0$, $(\Delta_+)''_{uu}(u_*, \varepsilon) \neq 0$.

Из (4), (5) и свойств функций ψ и χ получаем, что существует такое число $D > 0$, что для любого $\varepsilon \in [-\delta_3, \delta_3]^2$

$$f_\varepsilon^+(u) = \varepsilon_2 + c(\varepsilon)u^{1-\varepsilon_1} + R_+(u, \varepsilon) \quad \text{при } u \in (0, \bar{u}], \quad (6)$$

$$f_\varepsilon^-(u) = \varepsilon_2 - c(\varepsilon)(-u)^{1-\varepsilon_1} + R_-(u, \varepsilon) \quad \text{при } u \in [-\bar{u}, 0), \quad (7)$$

где $c(\varepsilon) > 0$, $c(\cdot) \in C^1$,

$$|\partial^{i+j} R_\pm(u, \varepsilon) / \partial u^i \partial \varepsilon_k^j| \leq D|u|^{1,5-\varepsilon_1-i}, \quad 0 \leq i+j \leq 2, \quad 0 \leq j \leq 1, \quad k = 1, 2. \quad (8)$$

При $\varepsilon = 0$ из (7), (8) находим $c(0) = (f_0^-)'(-0)$. Как известно [2, п. 13.1; 5], для петли с нулевой седловой величиной производная функции последования $(f_0^-)'(+0) = e^{s_1}$. Из условия УЗ и (6) получаем

$$(f_0^+)'(+0) = c(0) = (f_0^-)'(-0) < 1. \quad (9)$$

Поэтому можно считать \bar{u} столь малым, что

$$\Delta_+(u, 0) < 0, \quad (\Delta_+)'_u(u, 0) < 0 \quad \text{при всех } u \in (0, \bar{u}], \quad (10)$$

$$\Delta_-(u, 0) > 0 \quad \text{при всех } u \in [-\bar{u}, 0). \quad (11)$$

Из (6), (8)–(10) следует, что $u_0 \in (0, \bar{u})$ и $\delta_4 \in (0, \delta_3)$ можно выбрать так, что

$$\Delta_+(u_0, \varepsilon) < 0, \quad (\Delta_+)'_u(u_0, \varepsilon) < 0 \quad \text{при всех } \varepsilon \in [-\delta_4, \delta_4]^2, \quad (12)$$

$$(\Delta_+)'_u(u, \varepsilon) < 0 \quad \text{при всех } u \in (0, u_0], \quad \varepsilon \in [-\delta_4, 0] \times [-\delta_4, \delta_4], \quad (13)$$

$$(\Delta_+)'_{uu}(u, \varepsilon) < 0 \quad \text{при всех } u \in (0, u_0], \quad \varepsilon \in (0, \delta_4] \times [-\delta_4, \delta_4], \quad (14)$$

$$(\Delta_+)'_{\varepsilon_2}(u, \varepsilon) > 1/2 \quad \text{при всех } u \in (0, u_0], \quad \varepsilon \in [-\delta_4, \delta_4]^2, \quad (15)$$

$$\operatorname{sgn} \Delta_+(+0, \varepsilon) = \operatorname{sgn} \varepsilon_2 \quad \text{при всех } \varepsilon \in [-\delta_4, \delta_4]^2. \quad (16)$$

Пусть $\varepsilon \in (0, \delta_4] \times [-\delta_4, \delta_4]$. Из (6) и (8) получаем $(\Delta_+)'_u(+0, \varepsilon) = +\infty$. Отсюда, из (12) и (14) следует, что существует такая C^{r-2} -функция $m : (0, \delta_4] \times [-\delta_4, \delta_4] \rightarrow (0, u_0)$, что

$$\operatorname{sgn}(\Delta_+)'_u(u, \varepsilon) = \operatorname{sgn}(m(\varepsilon) - u) \quad \text{при } u \in (0, u_0]. \quad (17)$$

Выберем число q , $c(0) < q < 1$. Из (8) следует, что u_0 и δ_4 можно считать столь малыми, что при рассматриваемых ε справедливы неравенства

$$c(\varepsilon) < q, \quad 0 < c(\varepsilon)(1 - \varepsilon_1)/(1 - (R_+)'_u(m(\varepsilon), \varepsilon)) < q.$$

Из (6) и (17) получаем $m(\varepsilon) = (c(\varepsilon)(1 - \varepsilon_1)/(1 - (R_+)'_u(m(\varepsilon), \varepsilon)))^{1/\varepsilon_1}$ и потому

$$m(\varepsilon) \leq q^{1/\varepsilon_1}. \quad (18)$$

Обозначим $M(\varepsilon) := \Delta_+(m(\varepsilon), \varepsilon)$. Из (6), (8) и (18)

$$M(\varepsilon_1, -\varepsilon_1) \leq -\varepsilon_1 + q^{1/\varepsilon_1} + Dq^{(1, 5-\varepsilon_1)/\varepsilon_1}.$$

Поэтому найдется такое $\delta \in (0, \delta_4)$, что $M(\varepsilon_1, -\varepsilon_1) < 0$ при всех $\varepsilon_1 \in (0, \delta)$. Поскольку $\Delta_+(+0, \varepsilon)|_{\varepsilon_2=0} = 0$, из (17) получаем $M(\varepsilon_1, 0) > 0$. Из этих двух неравенств и (15) следует, что для любого $\varepsilon_1 \in (0, \delta)$ существует такое число $\beta_1(\varepsilon_1) \in (-\varepsilon_1, 0)$, что

$$\forall \varepsilon \in (0, \delta) \times (-\delta, 0) \quad \operatorname{sgn} M(\varepsilon) = \operatorname{sgn}(\varepsilon_2 - \beta_1(\varepsilon_1)). \quad (19)$$

Из (15) и (19) по теореме о неявной функции получаем $\beta_1(\cdot) \in C^1$. Ясно, что $\beta_1(+0) = 0$. Учитывая (17), имеем

$$\beta_1'(\varepsilon_1) = -\frac{M'_{\varepsilon_1}(\varepsilon)}{M'_{\varepsilon_2}(\varepsilon)} \Big|_{\varepsilon_2=\beta_1(\varepsilon_1)} = -\frac{(\Delta_+)'_{\varepsilon_1}(m(\varepsilon), \varepsilon)}{(\Delta_+)'_{\varepsilon_2}(m(\varepsilon), \varepsilon)} \Big|_{\varepsilon_2=\beta_1(\varepsilon_1)}. \quad (20)$$

Из (6) и (8) получаем, что существует такое число $K > 0$, что $|(\Delta_+)'_{\varepsilon_1}(u, \varepsilon)| \leq Ku^{1-\varepsilon_1}|\ln u|$ при $u \in (0, u_0)$, $\varepsilon \in (0, \delta) \times (-\delta, 0)$. Из этой оценки, из (15), (18) и (20) следует, что $\beta_1'(+0) = 0$.

3. Окрестность U . Перестройки фазовых портретов в U

Из (10) и (11) согласно [8, п. 3.14] следует, что через точку $\eta(f_0^+(u_0))$ (соответственно $\eta(f_0^-(-u_0))$) можно провести гладкую замкнутую трансверсаль $\gamma_{\text{ext}} = S\gamma_{\text{ext}}$ (соответственно γ_{int}^+) к полю X_0 , в точках z которой вектор $X_0(z)$ направлен внутрь ее отрицательной (положительной) полуокрестности. Обозначим через U окрестность полицикла Γ_0 , граница которой состоит из кривых γ_{ext} , γ_{int}^+ и $\gamma_{\text{int}}^- = S\gamma_{\text{int}}^+$. Вследствие (10), (11) любая траектория поля X_0 , начинающаяся в U и не принадлежащая Γ_0 , ω -предельна к Γ_0 и выходит из U при убывании времени. Отсюда следуют утверждения теоремы 1.

Считая δ выбранным достаточно малым, для любого $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$ будем иметь поле X_ε направленным внутрь U в точках ∂U и не имеющим в U особых точек, кроме O . Тогда любая траектория в U , отличная от седла O , пересекает одну из дуг $\eta(u_-(\varepsilon) - u_0, u_-(\varepsilon) + u_0)$ или $S\eta(u_-(\varepsilon) - u_0, u_-(\varepsilon) + u_0)$. Обозначим $T_\varepsilon^+ := \eta(u_-(\varepsilon), u_-(\varepsilon) + u_0)$, $T_\varepsilon^- := \eta(u_-(\varepsilon) - u_0, u_-(\varepsilon))$.

Ясно, что при $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$ входящие и выходящие сепаратрисы седла O совпадают тогда и только тогда, когда $\varepsilon_2 = 0$.

Из (12), (13), (16), (17) и (19) получаем следующие утверждения.

При $\varepsilon_2 = \beta_1(\varepsilon_1)$ $\Delta_+(\cdot, \varepsilon)$ имеет единственный (двукратный) нуль $m(\varepsilon)$, а двойной цикл $L_\varepsilon(m(\varepsilon))$ — единственная замкнутая траектория, пересекающая дугу T_ε^+ . При $\varepsilon \in (0, \delta) \times (-\delta, 0)$, $\varepsilon_2 > \beta_1(\varepsilon_1)$ $\Delta_+(\cdot, \varepsilon)$ имеет ровно два простых нуля $0 < u_2(\varepsilon) < u_1(\varepsilon) < u_0$, а поле X_ε имеет грубые замкнутые траектории, пересекающие T_ε^+ , устойчивую $L_\varepsilon(u_1(\varepsilon))$ и неустойчивую $L_\varepsilon(u_2(\varepsilon))$. При $\varepsilon \in (0, \delta) \times [0, \delta)$ и $\varepsilon \in (-\delta, 0] \times (0, \delta)$ $\Delta_+(\cdot, \varepsilon)$ имеет на $(0, u_0]$ единственный нуль $u_1(\varepsilon) < u_0$, причем $(\Delta_+)'_u(u_1(\varepsilon), \varepsilon) < 0$, а поле X_ε имеет единственную замкнутую траекторию, пересекающую дугу T_ε^+ , — устойчивый грубый предельный цикл $L_\varepsilon(u_1(\varepsilon))$. При $\varepsilon \in (-\delta, 0] \times (-\delta, 0]$ и $\varepsilon \in (0, \delta) \times (-\delta, 0)$, $\varepsilon_2 < \beta_1(\varepsilon_1)$ имеем $\Delta_+(u, \varepsilon) < 0 \forall u \in (0, u_0]$ и потому все траектории, пересекающие дугу T_ε^+ , незамкнутые.

Из (7), (8) следует, что если на дуге $\eta(-1, 1)$ параметр u заменить на $-u$, а ε_2 заменить на $-\varepsilon_2$, то отображение по траекториям, задаваемое функцией f_ε^- , будет иметь вид (6) с той же оценкой добавочного члена, что и в (8). Поэтому, как и выше, получаем следующие утверждения.

При $\varepsilon \in (0, \delta) \times (0, \delta)$, $\varepsilon_2 = \beta_2(\varepsilon_1)$, где $\beta_2 : (0, \delta) \rightarrow (0, \delta)$, $\beta_2 \in C^1$, $\beta_2(+0) = \beta_2'(+0) = 0$, поле X_ε имеет единственную замкнутую траекторию, пересекающую дугу T_ε^- (ST_ε^-), — двойной цикл. При $\varepsilon \in (0, \delta) \times (0, \delta)$, $\varepsilon_2 < \beta_2(\varepsilon_1)$ поле X_ε имеет две грубые замкнутые траектории, пересекающие T_ε^- (ST_ε^-), устойчивую и неустойчивую. При $\varepsilon \in (0, \delta) \times (-\delta, 0]$ и $\varepsilon \in (-\delta, 0] \times (-\delta, 0)$ поле X_ε имеет единственную замкнутую траекторию, пересекающую дугу T_ε^- (ST_ε^-), — устойчивый грубый предельный цикл. При $\varepsilon \in (-\delta, 0] \times [0, \delta)$ и $\varepsilon \in (0, \delta) \times (0, \delta)$, $\varepsilon_2 > \beta_2(\varepsilon_1)$ все траектории, пересекающие дугу T_ε^- (ST_ε^-), незамкнутые.

Определив теперь множества E_i , B_i , $i = 1, 2, 3, 4$, так, как это сделано в

формулировке теоремы 2, получим все утверждения теоремы о существовании петель сепаратрис и замкнутых траекторий. Отсюда и из выбора окрестности U следует, что поведение траекторий, отличных от замкнутых, такое, как указано на рис. 2.

Грубость векторных полей X_ε при $\varepsilon \in E_i$ и первая степень негрубости при $\varepsilon \in B_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) следует из достаточных условий грубости и первой степени негрубости [9].

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И., Афраимович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П. Теория бифуркаций // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы. Т. 5. М.: ВИНТИ, 1986. С. 5–218.
2. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 2. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2009.
3. Леонтович Е. А. О рождении предельных циклов от сепаратрис // Докл. АН СССР. 1951. Т. 28, № 4. С. 641–642.
4. Roussarie R. On the number of limit cycles which appear by perturbation of separatrix loop of planar vector fields // Bull. Brazil. Math. Soc. 1986. V. 17, N 2. P. 67–101.
5. Ноздрачева В. П. Бифуркации негрубой петли сепаратрисы // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 9. С. 1551–1558.
6. Ройтенберг В. Ш. Бифуркации полицикла, образованного двумя петлями сепаратрис негрубого седла динамической системы с центральной симметрией // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Физика. 2021. Т. 13, № 3. С. 39–46.
7. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 1. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2004.
8. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967.
9. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966.

Поступила в редакцию 13 июня 2023 г.

После доработки 26 августа 2023 г.

Принята к публикации 4 сентября 2023 г.

Ройтенберг Владимир Шлеймович

Ярославский государственный технический университет,

Московский пр., 88, Ярославль 150023

vroitenberg@mail.ru

BIFURCATIONS OF A POLYCYCLE FORMED
BY SEPARATRICES OF A SADDLE WITH ZERO
SADDLE VALUE OF A DYNAMICAL
SYSTEM WITH CENTRAL SYMMETRY

V. Sh. Roitenberg

Abstract: We consider two-parameter families of planar vector fields with central symmetry. Assume that for zero values of the parameters, the field has a hyperbolic saddle at the origin O and two symmetric loops of the separatrices of this saddle. The saddle value – the trace of the matrix of the linear part of the field at the point O – is assumed to be zero. We describe the bifurcation diagram of a generic family – a partition of a neighborhood of the origin on the parameter plane into topological equivalence classes of dynamical systems defined by these vector fields in a fixed neighborhood U of the polycycle formed by loops of separatrices. In particular, for each element of the partition, the number and type of the field belonging to U are indicated.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.86.26.007

Keywords: planar vector field, central symmetry, bifurcation, saddle, separatrix, limit cycle.

REFERENCES

1. Arnold V. I., Afraimovich V. S., Ilyashenko Y. S., and Shilnikov L. P., Bifurcation Theory, Dynamical Systems, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 5, Springer, Berlin (1994).
2. Shilnikov L. P., Shilnikov A. L., Turaev D. V., and Chua L., Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics, II, World Sci. Publ., River Edge, NJ (2001).
3. Leontovich E. A., “On birth of limit cycles from separatrices [in Russian],” Dokl. Akad. Nauk SSSR, **28**, No. 4, 641–644 (1951).
4. Roussarie R., “On the number of limit cycles which appear by perturbation of separatrix loop of planar vector fields,” Bull. Brazil. Math. Soc., **17**, No. 2, 67–101 (1986).
5. Nozdracheva V. P., “Bifurcations of non-rough separatrix loop [in Russian],” Differ. Uravn., **18**, No. 9, 1551–1558 (1982).
6. Roitenberg V. Sh., “Bifurcations of polycycle formed by two separatrix loops of a non-rough saddle of a dynamical system with central symmetry [in Russian],” Vestn. Yuzh.-Ural. Gos. Univ., Ser. Mat., Mekh., Fiz., **13**, No. 3, 39–46 (2021).
7. Shilnikov L. P., Shilnikov A. L., Turaev D. V., Chua L. Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part I, World Scientific Publishing, River Edge, New Jersey (1998).
8. Andronov A. A., Leontovich E. A., Gordon I. I., and Maier A. G., The Theory of Bifurcations of Dynamical Systems on a Plane [in Russian], Nauka, Moscow (1967).

-
9. Andronov A. A., Leontovich E. A., Gordon I. I., and Maier A. G., Qualitative Theory of Second-Order Dynamical Systems [in Russian], Nauka, Moscow (1967).

Submitted June 13, 2023

Revised August 28, 2023

Accepted September 4, 2023

Vladimir Sh. Roitenberg
Yaroslavl State Technical University,
88 Moscow Avenue, Yaroslavl 150023, Russia
`vroitenberg@mail.ru`

SOME REMARKS ON BLASCHKE
TYPE PRODUCTS IN LARGE AREA
NEVANLINNA SPACES IN THE UNIT DISK

R. Shamoyan and O. Mihić

Abstract: The intention of this paper is to introduce and study certain new analytic spaces in the disk and to show that certain Blaschke type products belong to new large Nevanlinna type classes in the unit disk. We also provide parametric representation of such classes. These results extend and complement some previously known assertions of this type obtained earlier by other authors. Our arguments are based on certain new embeddings which relate the well-known S_α^p area Nevanlinna spaces in the unit disk with our new large area Nevanlinna type spaces in the unit disk.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.13.41.008

Keywords: Blaschke type infinite products, area Nevanlinna type space, Nevanlinna characteristic, parametric representation, analytic function.

1. Introduction, basic definitions and history of problems

Assuming that $\mathbf{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ is the unit disk of the finite complex plane \mathbb{C} , \mathbf{T} is the boundary of \mathbf{D} , $\mathbf{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ and $H(\mathbf{D})$ is the space of all functions holomorphic in \mathbf{D} we introduce the following classes of functions

$$N_\alpha^\infty(\mathbf{D}) = \{f \in H(\mathbf{D}) : T(\tau, f) \leq C_f(1 - \tau)^{-\alpha}, 0 \leq \tau < 1, \alpha \geq 0\},$$

where $T(\tau, f)$ is the classical Nevanlinna characteristic defined by

$$T(\tau, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} \log^+ |f(\tau\xi)| d\xi,$$

where $a^+ = \max\{0, a\}$, $a \in \mathbb{R}$, (see [1]). It is obvious that if $\alpha = 0$ then $N_0^\infty(\mathbf{D}) = N(\mathbf{D})$, where $N(\mathbf{D})$ is the well known classical Nevanlinna class (see [2–4]).

Let $f \in H(\mathbf{D})$, then we define

$$M_p(f, r) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\mathbf{T}} |f(r\xi)|^p dm(\xi) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad r \in (0, 1), \quad p \in (0, \infty),$$

where by $m(\xi)$ we denote the normalized Lebesgue measure on \mathbf{T} . Also, by $m_2(\xi)$ we denote standard normalized Lebesgues area measure.

O. Mihić is supported by MNTR Serbia (Project 174017).

Everywhere below by $n_f(t) = n(t)$ we denote the quantity of zeros of an analytic function f in the unit disk $|z| \leq t < 1$ and by $Z(X)$ the zero set of an analytic class X , $X \subset H(\mathbf{D})$. By let $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ be a sequence of numbers from \mathbf{D} below we mean that $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ is an arbitrary sequence from unit disk enumerated by its growth $(|z_k| \leq |z_{k+1}| \leq \dots)$ according to its multiplicity.

By n_k we denote $n(1 - 2^{-k})$, i.e. $n_k = n(1 - 2^{-k})$, $k = 1, 2, \dots$, where n is a number of zeros in the appropriate disk (see definitions above) (see [2]).

In all our assertions below we assume in advance that our functions are not identically zero or infinity.

The following statement holds by Nevanlinna's classical result on the parametric representation of $N(\mathbf{D})$ (see [2–4]). $N(\mathbf{D})$ class coincides with the set of functions representable in the form

$$f(z) = C_\lambda z^\lambda B(z, \{z_k\}) \exp \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\mu(\theta)}{1 - ze^{-i\theta}} \right), \quad z \in \mathbf{D},$$

where C_λ is a complex number, λ is a nonnegative integer, $B(z, \{z_k\})$ is the classical Blaschke product with zeros $\{z_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbf{D}$ enumerated according to their multiplicities and satisfying the condition $\sum_{k=1}^\infty (1 - |z_k|) < \infty$, and $\mu(\theta)$ is a function of bounded variation in $[-\pi, \pi]$.

In [2, 3] the following proposition is established (see also [1]) for sequences $\{z_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbf{D}$ satisfying the greater density condition

$$\sum_{k=1}^\infty (1 - |z_k|)^{t+2} < \infty, \quad t > -1. \quad (1)$$

Proposition A (see [2]). *Let $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ be a sequence in the unit disc satisfying the density condition (1) for some $t > -1$. Then the Djrbashian infinite product*

$$\Pi_t(z, \{z_k\}) = \prod_{k=1}^\infty \left(1 - \frac{z}{z_k} \right) \exp \left(\frac{-(t+1)}{\pi} \int_{\mathbf{D}} \frac{(1 - |\xi|^2)^t \ln \left| 1 - \frac{\xi}{z_k} \right|}{(1 - \bar{\xi}z)^{t+2}} dm_2(\xi) \right), \quad z \in \mathbf{D}, \quad (2)$$

converges absolutely and uniformly inside \mathbf{D} , where it presents an analytic function with zeros $\{z_k\}_{k=1}^\infty$.

After the appearance of the classical Nevanlinna's parametric representation in Hayman's book (see [1]) which we mentioned above various new results of the same type appeared during past decades where Blaschke products were substituted by more general so called Djrbashian $\Pi_\alpha(z, \{z_k\})$ products (see [3]) and we will mention them partially below in Theorem A and Theorem B. In [5] it was shown that these $\Pi_\alpha(z, \{z_k\})$ products can be in their turn replaced by other infinite $B_\alpha(z, \{z_k\})$ products and some aspects of this last development will stand as one of the topics of this paper.

We denote by $B_\alpha^{p,q}(\mathbf{T})$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $\alpha > 0$, the classical Besov space on the unit circle \mathbf{T} (see [6]).

Theorem A (see [5]). Let $\alpha > 0$ and $\beta > \alpha - 1$. Then the class $N_\alpha^\infty(\mathbf{D})$ coincides with the set of functions representable in the form

$$f(z) = C_\lambda z^\lambda \Pi_\beta(z, \{z_k\}) \exp \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi(e^{i\theta}) d\theta}{(1 - ze^{-i\theta})^{\beta+2}} \right), \quad z \in \mathbf{D}, \quad (3)$$

where C_λ is a complex number, λ is a nonnegative integer, $\Pi_\beta(z, \{z_k\})$ is the Djrbashian infinite product (2), $\{z_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbf{D}$ is a sequence satisfying the condition

$$n(\tau) \leq \frac{c}{(1-\tau)^{\alpha+1}},$$

where $c > 0$ is a positive constant and $\psi(e^{i\theta})$ is a real function of $B_{\beta-\alpha+1}^{1,\infty}(\mathbf{T})$.

We also give below a theorem which is established in [7] and in a sense is similar to Theorem A.

Let $S_\alpha^p(\mathbf{D})$ be the class of analytic functions defined by

$$S_\alpha^p(\mathbf{D}) = \{f \in H(\mathbf{D}) : \|f\|_{S_\alpha^p}^p = \int_0^1 (1-\tau)^\alpha T^p(\tau, f) d\tau < \infty, \quad 0 < p < \infty, \quad \alpha > -1\}.$$

Theorem B (see [7]). For $p \geq 0$, $\beta > \frac{\alpha+1}{p}$, we have $f \in S_\alpha^p(\mathbf{D})$ if and only if $f(z)$ admits representation

$$f(z) = C_\lambda z^\lambda \Pi_\beta(z, \{z_k\}) \exp \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi(e^{i\theta}) d\theta}{(1 - ze^{-i\theta})^{\beta+1}} \right), \quad z \in \mathbf{D},$$

where C_λ is a complex number, λ is a nonnegative integer, $\{z_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbf{D}$ is a sequence for which

$$\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha+p} [n(\tau)]^p d\tau < \infty$$

and $\psi \in B_s^{1,p}(\mathbf{T})$, where $s = \beta - \frac{\alpha+1}{p}$.

Note that complete analogues of Theorem A and Theorem B were given also for $N_{\alpha,\beta}^p$ and $N_{\alpha,\beta}^{\infty,p}$. $N_{p,\gamma,\beta}^p$ area Nevanlinna spaces in the disk (see [8–10] and definitions below).

One can easily see that Theorem A gives the parametric representations of the spaces $N_\alpha^\infty(\mathbf{D})$ while Theorem B gives the parametric representations of $S_\alpha^p(\mathbf{D})$ analytic area Nevanlinna type spaces in the unit disk via same Djrbashian $\Pi_t(z, \{z_k\})$ infinite product.

The main goal of this paper is to obtain new parametric representations of the larger spaces via completely other infinite product.

Let further

$$N_{\alpha,\beta}^p(\mathbf{D}) = \left\{ f \in H(\mathbf{D}) : \int_0^1 \left(\int_{|z| \leq R} (\ln^+ |f(z)|) (1-|z|)^\alpha dm_2(z) \right)^p (1-R)^\beta dR < \infty \right\};$$

$$N_{\alpha, \beta_1}^{\infty, p}(\mathbf{D}) = \left\{ f \in H(\mathbf{D}) : \sup_{0 \leq R < 1} \left(\int_0^R \left(\int_{\mathbf{T}} \ln^+ |f(z)| d\xi \right)^p (1 - |z|)^\alpha d|z| \right) (1 - R)^{\beta_1} < \infty \right\},$$

where it is assumed that $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $\beta_1 \geq 0$ and $0 < p < \infty$, and let

$$N_{p, \gamma, \beta}(\mathbf{D}) = \left\{ f \in H(\mathbf{D}) : \int_0^1 (1 - |z|)^\beta \left(\sup_{0 < \tau < |z|} T(\tau, f) (1 - \tau)^\gamma \right)^p d|z| < \infty \right\},$$

where $\gamma \geq 0$, $\beta > -1$.

We refer for basic properties of these new large area Nevanlinna spaces to [10, 11]. We note in these papers various results on zero sets and parametric representations can also be seen. Note that similar, but less general results can be seen in various papers of various authors, we refer, for example, to [2, 3, 5, 7].

Note that various properties of $N_{\alpha, 0}^{\infty, p}(\mathbf{D})$ are studied in [7]. In particular, the works [2, 7] give complete descriptions of zero sets and parametric representations of $N_{\alpha, 0}^{\infty, p}(\mathbf{D})$ (in [2] for $p = 1$). Thus it is natural to consider the problem of extension of these important results to all $N_{\alpha, \beta_1}^{\infty, p}(\mathbf{D})$ analytic classes.

We remark that these analytic classes of area Nevanlinna type in the unit disk was considered by us in our recent paper (see [9–11]).

It is not difficult to verify that all the above mentioned area Nevanlinna analytic classes are topological vector spaces with complete invariant metric. We note that the mentioned problem of parametric representation have various applications and are important in function theory (see [2, 3, 12]).

Solution of many problems for example the existence of radial limits is based also on parametric representations. Parametric representations are used also in spectral theory of linear operators (see [3, 12]).

The next section will be devoted to study of certain infinite Blaschke type products $B_\alpha(z, \{z_k\})$ in new analytic area Nevanlinna classes we introduced above, then partially based on these results we will turn to the main topic of paper we mentioned above and we will provide some new parametric representations via these infinite Blaschke type products $B_\alpha(z, \{z_k\})$.

The main idea to get new results on infinite B_α products and parametric representations via such products in our large new Nevanlinna type spaces to use a group of new embeddings relating them to known Nevanlinna type spaces for which such results were provided by other authors, then apply these known results.

For this we use a simple idea. Namely, we analyze various known embeddings between mixed norm and Bergman spaces and then simply replace in these estimates $|f|^p$ by $(\log^+ |f|)^p$, since both are subharmonic functions for $p \geq 1$, and since the already known proof is based only on this fact.

Throughout the paper we write C (sometimes with indexes) to denote a positive constant which might be different at each occurrence (even in a chain of inequalities) but is independent of the functions or variables discussed.

The notation $A \asymp B$ means that there is a positive constant C , such that $\frac{B}{C} \leq A \leq CB$. We will write for two expressions $A \lesssim B$ if there is a positive constant C such that $A < CB$.

We formulated certain assertions below on Nevanlinna spaces after careful analysis of some already known proofs for mixed norm spaces, their proofs will be given below in a sketchy form, since new proofs are almost the same. We leave some arguments in proofs below to readers since they are easy to recover.

2. On some new theorems on canonical infinite products of Blaschke type in $N_{\alpha,\beta}^p$, $N_{\alpha,\beta}^{\infty,p}$ and $N_{p,\gamma,\beta}(\mathbf{D})$ classes in the unit disk

First we introduce a new Blaschke type canonical product and list some of its properties, then based on these properties we will find conditions on $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ sequence from \mathbf{D} such that our product belongs to mentioned above new analytic Nevanlinna classes in the unit disk. We remark that the $\Pi_t(z, \{z_k\})$ defined above and the product we are going to consider act as same kind of substitution for Blaschke product in classes with \log^+ . The problem of finding conditions on $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ sequences so that the classical Blaschke product belongs to analytic Bergman or Hardy or other spaces is well known and studied by many authors before (see, for example, [2, 3, 13] and the references there).

We would like to note that our results can be considered as analogues of mentioned assertions concerning Blaschke products. Note that similar results for $\Pi_t(z, \{z_k\})$ products are well known (see [2, 3, 7]).

We give one such type example.

Theorem C (see [2]). *Let $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ be a sequence from unit disk \mathbf{D} . Then if*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)^{\alpha+2} < \infty, \quad \alpha > -1,$$

then $\Pi_t(z, \{z_k\}) \in S_{\alpha}^1(\mathbf{D})$ for $t > \alpha$ that is

$$\int_{\mathbf{D}} \log^+ |\Pi_t(z, \{z_k\})| (1 - |z|)^{\alpha} dm_2(z) < \infty,$$

and the reverse is also true. Let (1) holds, then $\Pi_{\alpha}(z, \{z_k\}) \in S_t^1(\mathbf{D})$ if $\alpha > t$, where $n(r)$ sequence was defined above.

We introduce now another infinite product which is the main object of this note. It is known that (see [3]) the following assertion is true. The infinite Blaschke type product $B_{\alpha}(z, \{z_k\})$, $\alpha > -1$

$$B_{\alpha}(z, \{z_k\}) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp(-W_{\alpha}(z, z_k)),$$

and

$$W_\alpha(z, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + k + 2)}{\Gamma(\alpha + 2)\Gamma(k + 1)} \times \left((\bar{\xi}z)^k \int_{|\xi|}^1 \frac{(1-x)^\alpha dx}{x^{k+1}} - \left(\frac{z}{\xi}\right)^k \int_0^{|\xi|} (1-x)^\alpha x^{k-1} dx \right), \quad z, \xi \in \mathbf{D},$$

is converges uniformly within \mathbf{D} if and only if

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)^{\alpha+1} < \infty.$$

Moreover it represents an analytic function in \mathbf{D} .

REMARK 1. An interesting generalization of this product can be found in [12].

Our intention is to find conditions on $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ of this product, so that $B_\alpha(z, \{z_k\}) \in N_{\alpha, \beta}^p(\mathbf{D})$ or $N_{\alpha, \beta_1}^{\infty, p}(\mathbf{D})$ or $N_{p, \gamma, \beta}(\mathbf{D})$. We mention that the following result were given before. It puts in particular direct condition on $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ sequences so that $B_\alpha(z, \{z_k\}) \in S_\alpha^1(\mathbf{D})$.

Let Ω be a set of positive on $(0, 1)$ measurable functions w such that $m_w \leq \frac{w(\lambda x)}{w(r)} \leq M_w$, for all $x \in (0, 1)$, $\lambda \in [q_w, 1]$ and some fixed M_w , m_w , q_w such that $m_w, q_w \in (0, 1)$, $M_w > 0$, (see [2]).

We define general S_ω^p area Nevanlinna spaces similarly as S_α^p spaces by replacing $(1-r)^\alpha$ by $w(r)$.

Theorem D (see [5]). *Let $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ be a sequence from unit disk \mathbf{D} . Let $w \in \Omega$, $\alpha_w = \frac{\ln m_w}{\ln q_w}$, $\beta_w = \frac{\frac{1}{\ln M_w}}{\frac{1}{\ln q_w}}$, $0 < \beta_w < 1$ and one of the following two conditions holds:*

$$0 < p \leq 1, \quad p > \frac{\alpha_w + \beta_w}{2}, \quad \frac{\alpha_w + 1}{p} < \alpha < \frac{1 - \beta_w}{p} + 2,$$

or

$$1 < p < \infty, \quad p > \alpha_w + \beta_w - 1, \quad \frac{\alpha_w}{p} + 1 \leq \alpha < \frac{1 - \beta_w}{p} + 2.$$

Then if

$$\int_0^1 w(1-r) n^p(r) (1-r)^p dr < \infty,$$

then $B_\alpha(r\xi, \{\lambda_k\})$ uniformly converges within \mathbf{D} and belongs to S_ω^p that is

$$\int_0^1 \left(\int_{\mathbf{T}} \log^+ |B_\alpha(r\xi, \{\lambda_k\})| dm(\xi) \right)^p w(1-r) dr < \infty.$$

Corollary 1. Let $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$, $\{z_k\}_{k=1}^\infty \in \mathbf{D}$, $0 < |z_k| \leq |z_{k+1}|$, $k = 1, 2, \dots$, and

$$\int_0^1 (1-r)^{\alpha+p} n^p(r) dr < \infty.$$

Then $B_\beta(z, \{z_k\}) \in S_\alpha^p$ that is

$$\int_0^1 \left(\int_T \log^+ |B_\beta(r\xi, \{z_k\})| dm(\xi) \right)^p (1-r)^\alpha dr < \infty,$$

$$\begin{aligned} &\text{if } 0 < p \leq 1, \frac{\alpha+1}{p} < \beta < 2 + \frac{\alpha+1}{p} \\ &\text{if } 1 < p < \infty, 1 + \frac{\alpha}{p} \leq \beta < 2 + \frac{\alpha+1}{p}. \end{aligned}$$

We formulate below in Theorems 1 and 2 new results of such type on B_α infinite products in our new large area Nevanlinna type spaces.

Theorem 1. Let $\alpha > -1$, $\beta > -1$ and $p \in (0, \infty)$. Let $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ be a sequence of complex numbers in the unit disk such that

$$\int_0^1 (1-r)^{\alpha+p} n^p(r) dr < \infty. \quad (4)$$

Then there is an interval (t_0, t_1) for $t_0, t_1 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ and for $p \leq 1$ and for $p \geq 1$ for which the canonical product $B_t(z, \{\lambda_k\})$, $t \in (t_0, t_1)$ converges absolutely and uniformly within \mathbf{D} and belongs to $N_{\alpha,\beta}^p(\mathbf{D})$ class.

Theorem 2. Let $\alpha > -1$, $\beta > -1$ and $p \in (0, \infty)$. Let $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ be a sequence of complex numbers in the unit disk such that

$$\int_0^1 (1-r)^{\alpha+p} n^p(r) dr < \infty. \quad (5)$$

Then there is an interval (t'_0, t'_1) for $t'_0, t'_1 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ and for $p \leq 1$ and for $p \geq 1$ for which the canonical product $B_t(z, \{\lambda_k\})$, $t \in (t'_0, t'_1)$ converges absolutely and uniformly within \mathbf{D} and belongs to $N_{\alpha,\beta}^{\infty,p}(\mathbf{D})$ class.

REMARK 2. It is not difficult to extend the statements and the proofs of Theorems 1 and 2 to more general, slowly varying weights $w(1-\tau)$ from S class (see [2]).

The very similar result is also valid for $N_{p,\gamma,v}$ area Nevanlinna type spaces, with some restrictions on parameters.

The proof of Theorems 1 and 2 will be given below.

The goal of this section to provide ways to get some new parametric representations for $N_{\alpha,\beta}^p(\mathbf{D})$, $N_{\alpha,\beta}^{\infty,p}(\mathbf{D})$ and $N_{p,\gamma,\beta}(\mathbf{D})$ classes in the unit disk via $B_\alpha(z_k, z)$ products. The following theorem provides complete parametric representations for $N_{\alpha,\beta}^p(\mathbf{D})$ spaces via Djrbashian products from theorems A and B, (see [8, 14]).

Theorem E (see [8, 14]). If $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$ and $\beta > -1$, then the class $N_{\alpha, \beta}^p$ coincides with the set of functions representable for $z \in \mathbf{D}$ as

$$f(z) = C_\lambda z^\lambda \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \times \exp \left\{ \frac{t+1}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2) \ln \left|1 - \frac{\rho e^{i\varphi}}{z_k}\right|}{(1 - \rho e^{-i\varphi} z)^{t+2}} \rho d\rho d\varphi \right\} \exp\{h(z)\},$$

where $t > \max\{(\alpha + \beta/p) + \max\{1, 1/p\}, (\alpha + 1)\}$, C_λ is a complex number, $\lambda \geq 0$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k^p}{2^{k(\beta+1+2p+\alpha p)}} < \infty,$$

and $h \in H(\mathbf{D})$ is a function satisfying the condition

$$\int_0^1 \left(\int_0^R \left(\int_{-\pi}^{\pi} |h(\tau e^{i\varphi})| d\varphi \right) (1-\tau)^\alpha d\tau \right)^p (1-R)^\beta dR < \infty.$$

Similar results hold for $N_{\alpha, \beta}^{\infty, p}(\mathbf{D})$ and $N_{p, \gamma, \beta}(\mathbf{D})$ classes (see [11]).

To obtain parametric representations of $N_{\alpha, \beta}^p(\mathbf{D})$, $N_{\alpha, \beta}^{\infty, p}(\mathbf{D})$ and $N_{p, \gamma, \beta}(\mathbf{D})$ classes via $B_\alpha(z, \{z_k\})$ infinite Blaschke type products we can use some embeddings and known parametric representations for analytic classes of area Nevanlinna type with quasinorms

$$\int_0^1 \left(\int_{\mathbf{T}} \log^+ |f(z|\xi)| d\xi \right)^p (1-|z|)^\alpha dm_2(z) < \infty,$$

for certain $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$, that were obtained earlier by other authors.

First we formulate a result that will be used by us via B_t product.

Theorem F. Let $0 < p < \infty$, $\alpha > 0$. Then $S_\alpha^p(\mathbf{D})$ coincides with the class of functions f such that

$$f(z) = e^{i\alpha + mK_\beta} z^m B_\beta(z, \{a_k\}) \times \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{2}{(1 - e^{-i\varphi} z)^{\beta+1}} - 1 \right) \psi(e^{i\varphi}) d\varphi \right), \quad z \in \mathbf{D},$$

$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ and $0 < |a_k| \leq |a_{k+1}|$, $k = 1, 2, \dots$, is an arbitrary sequence of points from \mathbf{D} , such that

$$\int_0^1 n^p(r, f) (1-r)^{\alpha+p} dr < \infty,$$

where $\beta \in (\frac{\alpha+1}{p}, \frac{\alpha+1}{p} + 2)$, $\psi \in B_s^{1,p}(\mathbf{T})$, $s = \beta - \frac{\alpha+1}{p}$,

$$\psi(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^r (r-t)^{\beta-1} \ln |f(te^{i\varphi})| dt$$

and

$$K_\beta = \beta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+\beta)}.$$

Now it is clear that to obtain parametric representations of classes we study in this paper via $B_t(z, \{z_k\})$ all we have to do is to show, for example, that if $f \in X$, $X = N_{\alpha, \beta}^p(\mathbf{D})$ or $X = N_{\alpha, \beta}^{\infty, p}(\mathbf{D})$ or $X = N_{p, \gamma, \beta}(\mathbf{D})$, then $f \in S_\tau^1(\mathbf{D})$ for some big enough $\tau > 0$, then apply Theorem F we just formulated above. To do that we formulate the following propositions.

Note that we collect several such propositions below and they can be interesting also as separate statements and relate various analytic area Nevanlinna type spaces to each other.

Proposition 1. *Let $f \in H(\mathbf{D})$. Let $\beta > -1$, $\gamma \geq 0$, $0 < q < \infty$. Then*

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^1 (1-\tau)^{\beta+(\gamma+1)q} \left(\int_{\mathbf{T}} \log^+ |f(\tau\xi)| dm(\xi) \right)^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq c_1 \left(\int_0^1 (1-\tau)^\beta \left(\int_{|z|<\tau} \log^+ |f(z)|(1-|z|)^\gamma dm_2(z) \right)^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Even more general result is valid with the same proof (see Proposition 2 below). We will consider for simplicity only this case. Similar estimate can be proved for $N_{\alpha, \beta}^{\infty, p}(\mathbf{D})$.

Let now

$$\begin{aligned} L(A_\gamma^{p, q})(\mathbf{D}) &= \left\{ f \in H(\mathbf{D}) : \|f\|_{L(A_\gamma^{p, q})} \right. \\ &= \left. \int_0^1 \left(\int_{-\pi}^{\pi} (\ln^+ |f(re^{i\varphi})|)^p d\varphi \right)^{q/p} (1-r)^\gamma dr < \infty \right\}, \end{aligned}$$

where $0 < p < \infty$, $0 < q < \infty$, $\gamma > -1$ and

$$\begin{aligned} L(F_\gamma^{p, q})(\mathbf{D}) &= \left\{ f \in H(\mathbf{D}) : \|f\|_{L(F_\gamma^{p, q})} \right. \\ &= \left. \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^1 (\ln^+ |f(re^{i\varphi})|)^q (1-r)^\gamma dr \right)^{p/q} d\varphi < \infty \right\}, \end{aligned}$$

where $0 < p < \infty$, $0 < q < \infty$, $\gamma > -1$.

Proofs of Proposition 2 and Proposition 3, as follows from [14] and [15], are based on arguments from [14] and [15] and their are valid for subharmonic function $(\log^+ |f(z)|)^s$ for any $s \geq 1$.

Note that Proposition 2 extends Proposition 1 and Proposition 3.

Proposition 2. Let $p \geq 1$, $q \in (0, \infty)$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$, and $\tau = \beta + \frac{q}{p}(\alpha + 1)$. Then

$$\int_0^1 \left(\int_{|z| < R} (\log^+ |f(z)|)^p (1 - |z|)^\alpha dm_2(z) \right)^{q/p} (1 - R)^\beta dR < \infty$$

if and only if

$$\int_0^1 \left(\int_{\mathbf{T}} (\log^+ |f(r\xi)|)^p dm(\xi) \right)^{q/p} (1 - |z|)^\tau dr < \infty.$$

Proposition 3. Let $1 \leq \min(p, q) \leq s$ and $\gamma > -1$. Then

$$\left(\int_{\mathbf{D}} (\log^+ |f(w)|)^s (1 - |w|)^{s(\gamma+1)/q+s/p-2} dm_2(w) \right)^{1/s} \leq c_3 \|f\|_{L(A_\gamma^{p,q})}, \quad f \in L(A_\gamma^{p,q})(\mathbf{D}), \quad (6)$$

$$\left(\int_{\mathbf{D}} (\log^+ |f(w)|)^s (1 - |w|)^{s(\gamma+1)/q+s/p-2} dm_2(w) \right)^{1/s} \leq c_4 \|f\|_{L(F_\gamma^{p,q})}, \quad f \in L(F_\gamma^{p,q})(\mathbf{D}). \quad (7)$$

Proposition 4. Let $q \geq 1$ and $p \leq s$. Then

$$\left(\int_0^1 T_q^s(r, f) (1 - |z|)^\alpha d|z| \right)^{p/s} \leq c_5 \int_0^1 (1 - r)^\tau \left(\sup_{0 < \rho < r} T_q(\rho, f) (1 - |\rho|)^\gamma \right)^p dr,$$

for the following values of indexes: $\alpha > -1$, $p, q, s \in (0, \infty)$, $\gamma \geq 0$, $\tau = (\alpha + 1)(p/s) - \gamma p - 1$.

The easy proof of Proposition 4 immediately follows from dyadic decomposition of the unit interval and growing of $T_q(r, f)$.

We show only particular case of estimate in Proposition 4, the general case is the same.

Let $\tau_n = 1 - \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $p \leq 1$, $\tilde{f}(z) = \log^+ |f(z)|$. Then due to basic properties of Nevanlinna characteristics and dyadic decomposition of the unit interval we have

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbf{D}} \tilde{f}(z) (1 - |z|)^\alpha dm_2(z) \right)^p &\lesssim \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-kp(\alpha+2)} (M_1(\tau_k, \tilde{f}))^p \\ &\lesssim \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-kp(\alpha+1)} \sup_{0 < \rho \leq \tau_k} (M_1(\rho, \tilde{f}) (1 - \rho)^\gamma)^p 2^{k\gamma p} \\ &\lesssim \sum_{k=1}^{\infty} \int_{1-2^{-k-3}}^{1-2^{-k-2}} (1 - |z|)^{(\alpha+1)p - \gamma p - 1} \sup_{0 < \rho \leq |z|} (M_1(\rho, \tilde{f}) (1 - \rho)^\gamma)^p d|z| \end{aligned}$$

$$\leq C \int_0^1 (1 - |z|)^{(\alpha+1)p - \gamma p - 1} \left(\sup_{0 < \rho \leq |z|} T(\tau, f)(1 - \tau)^\gamma \right)^p d|z|.$$

Let us show assertions in Proposition 1:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (1 - r)^{\beta + (\gamma+1)q} \left(\int_{\mathbf{T}} \tilde{f}(r\xi) dm(\xi) \right)^q d\tau \\ & \lesssim \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k(\beta + (\gamma+1)q + 1)} (M_1(\tau_k, \tilde{f}))^q \\ & \lesssim \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{\tau_k < |z| < \tau_{k+1}} \tilde{f}(z)(1 - |z|)^\gamma dm_2(z) \right)^q 2^{-k(\beta+1)} \\ & \lesssim \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+2}} (1 - \tau)^\beta \left(\int_{|z| < \tau} \tilde{f}(z)(1 - |z|)^\gamma dm_2(z) \right)^q d\tau \\ & \lesssim \int_0^1 (1 - \tau)^\beta \left(\int_{|z| < \tau} \tilde{f}(z)(1 - |z|)^\gamma dm_2(z) \right)^q d\tau. \end{aligned}$$

REMARK 3. Classes of analytic functions of area Nevanlinna type with quasinorms that can be seen in the first part of Proposition 4 studied in [10]. There complete descriptions of zeros and parametric representations via other $\Pi_t(z, \{z_k\})$ infinite products are given.

Note, for example, obviously $B_t(z, z_k)$ belongs to spaces with quasinorms

$$\int_0^1 \left(\int_{|z| \leq R} \ln^+ |f(z)|(1 - |z|)^\alpha dm_2(z) \right)^q \sup_R (1 - R)^\beta dR$$

by Proposition 2, $0 < p < \infty$, $\tau = \beta + \frac{q}{p}(\alpha + 1)$ and Theorem D for some values of t parameter.

Note that to use Theorem F we have to apply reverse embedding in Proposition 2. Estimates of Proposition 1 and Proposition 2 give many new results on parametric representation via $B_t(z, z_k)$ product we give such examples below.

To get immediately new assertions of type $B_t(z, z_k) \in X$, where X is a certain new large area Nevanlinna type space we simply will use the following elementary embeddings:

$$\begin{aligned} (A) \quad & (1 - R)^\beta \int_0^R \left(\int_{\mathbf{T}} \ln^+ |f(|z|\xi)| dm(\xi) \right)^p (1 - |z|)^\alpha d|z| \\ & \leq C_1 \int_0^1 \left(\int_{\mathbf{T}} \ln^+ |f(|z|\xi)| dm(\xi) \right)^p (1 - |z|)^\alpha d|z| = \|f\|_{S_\alpha^p}, \\ & 0 < p < \infty, \alpha > -1, \beta \geq 0; \end{aligned}$$

$$(B) \quad \int_0^1 \left(\int_{|z| \leq R} \ln^+ |f(z)| (1 - |z|)^\alpha dm_2(z) \right)^p (1 - R)^\beta dR \leq C_2 \|f\|_{S_\alpha^1},$$

$$0 < p < \infty, \alpha > -1, \beta > -1;$$

$$(C) \quad \|f\|_{NA_{p,\gamma,\nu}} \leq C_3 \|f\|_{S_{\gamma-1}^1}, \quad 0 < p < \infty, \gamma > 0, \nu > -1.$$

Indeed area Nevanlinna type spaces with quasinorms on the right side were studied and assertions of the following type $B_t \in S_\alpha^p$ were given by us above. It remains to apply (A)–(C).

We have the following result from Corollary 1 and (A)–(C).

Theorem 3. Let $\alpha > -1$, $p \in (0, \infty)$ and $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ be a sequences of complex numbers in the unit disk \mathbf{D} such that $0 < |z_k| \leq 1$, $k = 1, \dots$.

1) $\int_0^1 (1-r)^{\alpha+p} n^p(r) dr < \infty$ then we have $B_t(z, \{z_k\}) \in N_{\alpha,\beta}^{\infty,p}$, $\alpha > -1$, $\beta \geq 0$;
if $0 < p \leq 1$, $\frac{\alpha+1}{p} < t < 2 + \frac{\alpha+1}{p}$
if $1 < p < \infty$, $1 + \frac{\alpha}{p} < t < 2 + \frac{\alpha+1}{p}$.

2) $\int_0^1 (1-r)^{\alpha+1} n(r) dr < \infty$ then we have $B_t(z, \{z_k\}) \in N_{\alpha,\beta}^p$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$,
 $t \in (\alpha + 1, \alpha + 3)$;

3) $\int_0^1 (1-r)^\gamma n(r) dr < \infty$ then we have $B_t(z, \{z_k\}) \in N_{p,\gamma,\nu}$, $\nu > -1$, $\gamma > 0$,
 $t \in (\gamma, \gamma + 2)$.

In our next theorem we provide new interesting parametric representations of our large $N_{\alpha,\beta,\gamma}$, $N_{\alpha,\beta}^p$, $N_{\alpha,\beta}^{\infty,p}$ area Nevanlinna type spaces in the unit disk via $B_t(z, z_k)$ infinite products based on Theorem A and embeddings in Propositions 1–4.

Theorem 4. 1. Let $f \in N_{p,\gamma,\tau}$, $\alpha > 0$, $p < 1$, $\alpha > \gamma - 1$, $\tau = (\alpha + 1)p - \gamma p - 1$. Then assertions of Theorem F (parametric representations) are valid for $p = 1$.

2. Let $f \in N_{\gamma,\beta}^p$, $\gamma \geq 0$, $0 < p < \infty$, $\beta > -1$. Then assertions of Theorem F are valid for $\alpha = \beta + (\gamma + 1)p > 0$.

Various other assertions similar to those in our last two theorems can be proven also based on estimates above which relate many area Nevanlinna spaces in the unit disk with each other.

REFERENCES

1. Hayman W., Meromorphic Functions, Oxford Univ. Press, Oxford (1964).
2. Djrbashian M. M. and Shamoian F. A., Topics in the Theory of A_α^p Spaces, Teubner, Leipzig (1988).
3. Djrbashian M. M., Integral Transforms and Representation of Functions in Complex Plane [in Russian], Nauka, Moscow (1966).
4. Shamoyan F. A. and Shubabko E. N., "Parametric representations of some classes of holomorphic functions in the disk," in: Complex Analysis, Operators and Related Topics, pp. 331–338, Birkhäuser, Basel (2000) (Oper. Theory, Adv. Appl., vol. 113).
5. Bergh J. and Lofstrom J., Interpolation Spaces, Springer, New York (1976).

6. Shamoyan F. A., "Parametric representation and description of the root sets of weighted classes of functions holomorphic in the disk," *Sib. Math. J.*, **40**, No. 6, 1211–1229 (1999).
7. Shamoyan R. and Li H., "Descriptions of zero sets and parametric representations of certain analytic area Nevanlinna type classes in disk," *Proc. Razmadze Math. Inst.*, **151**, 103–108 (2009).
8. Shamoyan R. and Mihić O., "On zero sets and embeddings of some new analytic function spaces in the unit disc," *Kragujevac J. Math.*, **38**, No. 2, 229–244 (2014).
9. Shamoyan R. and Mihić O., "On zeros of some analytic spaces of area Nevanlinna type in a halfplane," *Tr. Petrozavodsk. Gos. Univ., Ser. Mat.*, **17**, 67–72 (2010).
10. Shamoyan R. and Arsenović M., "On zero sets and parametric representations of some new analytic and meromorphic function spaces in the unit disk," *Filomat*, **25**, No. 3, 1–14 (2011).
11. Djrbashian M. M. and Zakharyan V., *Classes and Boundary Properties of Functions That are Meromorphic in the Disk* [in Russian], Nauka, Moscow (1993).
12. Shvedenko S. V., "Hardy classes and related spaces of analytic functions in the unit disk, polydisc and unit ball," *Itogi Nauki i Tekhniki, Ser. Mat., VINITI, Moscow* (1985).
13. Shamoyan R. and Li H., "Descriptions of zero sets and parametric representations of certain analytic area Nevanlinna type classes in the unit disk," *Kragujevac J. Math.*, **34**, 73–89 (2010).
14. Jevtić M., Pavlović M., and Shamoyan R., "A note on diagonal mapping theorem in spaces of analytic functions in the unit polydisk," *Publ. Math. Debrecen*, **74**, No. 1-2, 1–14 (2009).
15. Shamoyan R. F., "On multipliers from Bergman type spaces into Hardy spaces in the polydisc [in Russian]," *Ukr. Math. J.*, **10**, 1405–1415 (2000).

Submitted November 22, 2022

Revised July 28, 2023

Accepted September 4, 2023

Romi Shamoyan
Bryansk State University,
14 Bezhitskaya Street, 241023 Bryansk, Russia
rshamoyan@gmail.com

Olivera Mihić
University of Belgrade,
Faculty of Organizational Sciences,
154 Jove Ilića Street, Belgrade, Serbia
oliveradj@fon.rs

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ
УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ
ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ НА ОСНОВЕ
МОДИФИЦИРОВАННОЙ СХЕМЫ КАБАРЕ
Д. Г. Асфандияров, О. С. Сороковикова

Аннотация. Представлен численный метод на основе балансно-характеристической схемы КАБАРЕ для моделирования в приближении мелкой воды нестационарного течения жидкости на произвольной топографии. Разработанный метод позволяет рассчитывать различные режимы течения, включая транскритические. Для моделирования транскритических переходов используется гибридный подход на основе решения локальной задачи Римана, как это делается в схемах по типу Годунова. Представленный численный метод обладает условием хорошей сбалансированности (well-balance) — выполнение условия гидростатического равновесия или условия покоящейся жидкости на неровном рельефе дна. Помимо этого учитывается возможность сквозного расчета динамических границ, разделяющих жидкость и сухое дно, обусловленных процессами затопления и обмеления, а также ряда физических процессов (трение о дно, осадки). Апробация метода проводится на серии верификационных тестов, допускающих точное решение, и классическом эксперименте, имитирующем разрушении плотины.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.33.65.009

Ключевые слова: уравнения мелкой воды, балансно-характеристический подход, схема КАБАРЕ, границы раздела вода/сухое дно, сложная топография дна и береговой линии.

1. Введение

В мировой практике для моделирования различных гидрологических процессов в поймах и руслах рек, каналах, водоемах проточного типа, а также в прибрежных зонах широко используется приближение мелкой воды. Данные уравнения гиперболического типа описывают законы сохранения массы и импульса и определяют связь между полем течения и изменением глубины воды с учетом гидравлического трения и неровностей рельефа. Особым случаем является рассмотрение прорывных течений на гидротехнических сооружениях, паводковые процессы. К численным схемам должны предъявляться особые высокие требования к надежности и точности моделирования разрывных решений и решений с большими градиентами моделируемых величин. Необходимо отсутствие при этом появления нефизических осцилляций (фазовых ошибок) и амплитудных искажений, приводящих к сглаживанию параметров течений (особенно важно при наличии гидравлических скачков).

В настоящее время предложен целый ряд методов для численного решения системы уравнений теории мелкой воды [1]. В частности, широкое распространение получили методы сквозного счета, принадлежащие классу схем по типу Годунова [1, 2]. Данные разностные схемы, первоначально созданные для решения уравнений газовой динамики, связаны с использованием в качестве составного элемента точного или приближенного решения задачи Римана.

При построении численных методов на основе уравнений мелкой воды для решения прикладных задач важным является учет ряда свойств. В частности, к таким свойствам относится хорошая сбалансированность схем (well-balance). Условия хорошей сбалансированности описаны в различных статьях, например в [2, 3], и требуют от вычислительного алгоритма, чтобы решение задачи с начальными условиями покоящейся жидкости не зависело от времени, т. е. в изначально покоящейся жидкости не должны возникать возмущения, обусловленные неровностями дна. Проблема заключается в том, что при дискретизации исходных уравнений для потока импульса требуется дополнительный баланс между членом, играющим роль градиента давления, и источниковым членом, обусловленным неровностью рельефа дна [2]. Помимо этого необходимо учитывать возможность сквозного расчета динамических границ, разделяющих жидкость и сухое дно. Это условие существенно при решении прикладных нестационарных задач, особенно в прибрежных зонах, где граница, разделяющая область жидкости и сухого дна, постоянно меняется. Дополнительным требованием является возможность проводить такое моделирование на неоднородном рельефе дна.

Учитывая широкое распространение приближения мелкой воды для моделирования многих процессов, имеющих практическое значение, и существенные трудности при создании эффективных высокоточных численных методик для решения этих уравнений гиперболического типа международным научным сообществом создаются специальные наборы тестов для проверки точности и качества моделирования разрабатываемых методик, например [4, 5]. В них собраны известные и новые найденные аналитические решения уравнений мелкой воды (одномерные и двумерные) с учетом реализации различных режимов течения, в том числе с обострениями. Имеются задачи для каналов принципиально разной длины, а также тесты с учетом набегания потока на сухое дно, учтено влияние различных физических процессов, например, трение о дно, осадки.

В данной работе для расчета подобного рода задач используется идеология балансно-характеристической схемы КАБАРЕ [6–9]. Ранние работы по моделированию в рамках классического приближения уравнений мелкой воды по схеме КАБАРЕ [8, 9] ограничивались в основном расчетом одномерных тестов без учета практической составляющей, в том числе наличия границы раздела вода/сухое дно на неоднородном рельефе дна, что не позволяло решать большой класс задач (набегание прибрежных волн, наводнения, в том числе паводковые процессы, и т. д.). Данная работа призвана восполнить этот пробел.

В работе приводится обобщение методики КАБАРЕ с учетом требований

применимости к широкому диапазону режимов течения, наличия уреза воды, а также ряда физических процессов (трение о дно, осадки). Под различными режимами течения подразумевается возможность расчета как докритических и сверхкритических течений (аналог дозвукового и сверхзвукового течений в газовой динамике), а также транскритических переходов между этими двумя состояниями. С транскритическими переходами связана так называемая проблема звуковых точек (по аналогии с газовой динамикой). Для схемы КАБАРЕ разработан ряд алгоритмов учета звуковых точек, ограничивающихся частными случаями, например [9, 10]. В данной работе используется более общий относительно класса решаемых задач гибридный подход обработки звуковых точек на основе решения локальной задачи Римана, как это делается в схемах по типу Годунова [1, 2].

Апробация метода проводится на серии задач, имеющих аналитическое решение. Данные задачи рекомендованы и широко используются для верификации гидрологических моделей в международной практике. Также рассматривается классическая валидационная задача о разрушении двумерной плотины [11].

2. Математическая модель

Нестационарная система уравнений теории мелкой воды, описывающая двумерные в плане движения жидкости, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} &= R(x, y, t), \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu^2}{\partial x} + \frac{\partial huv}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial gh^2}{\partial x} + gh \frac{\partial b}{\partial x} &= f_x, \\ \frac{\partial hv}{\partial t} + \frac{\partial hvu}{\partial x} + \frac{\partial hv^2}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial gh^2}{\partial y} + gh \frac{\partial b}{\partial y} &= f_y. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $h = h(t, x, y)$ — глубина жидкости — расстояние от свободной поверхности до дна, м; t — время, с; (x, y) — декартовы координаты на горизонтальной плоскости, м; (u, v) — осредненные по глубине компоненты скорости в направлении x и y соответственно, м/с; $R(x, y, t) \geq 0$ — интенсивность осадков, м/с; $b = b(x, y)$ — отметка рельефа дна относительно произвольного горизонтального уровня, м; (f_x, f_y) — недифференциальные члены, определяющие действие силы трения в направлении x и y соответственно, $\text{м}^2/\text{с}^2$. Данные уравнения описывают законы сохранения массы жидкости и сохранения (изменения) ее импульса при условии постоянства плотности жидкости с учетом внешних сил. Сила трения задается формулой Маннинга — Штриклера [4]:

$$\vec{f} = [f_x, f_y]^T = -\frac{1}{2} \lambda \mathbf{V} |\mathbf{V}|, \quad \mathbf{V} = [u, v]^T, \quad \lambda = 2gn^2 h^{-1/3}, \quad (2)$$

где λ — коэффициент гидравлического трения, n — коэффициент шероховатости дна по Маннингу, $\text{м}^{-1/3}\text{с}$.

Для учета свойства хорошей сбалансированности перепишем систему (1), сделав замену $h = H - b$, где H — уровень свободной поверхности, в последних двух членах второго и третьего уравнения. После преобразования получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu^2}{\partial x} + \frac{\partial huv}{\partial y} + \frac{g}{2} \frac{\partial H^2}{\partial x} - gb \frac{\partial H}{\partial x} &= f_x, \\ \frac{\partial hv}{\partial t} + \frac{\partial hvu}{\partial x} + \frac{\partial hv^2}{\partial y} + \frac{g}{2} \frac{\partial H^2}{\partial y} - gb \frac{\partial H}{\partial y} &= f_y. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь мы не вводим каких-либо дополнительных переменных для моделирования, обозначение для уровня свободной поверхности $H = h + b$ представлено для наглядности преобразования. При выборе такой формы записи исходной системы уравнений для моделирования условия гидростатического равновесия выполняются автоматически и не требуют наложения дополнительных условий при аппроксимации рельефа дна [10].

Для построения численного алгоритма на основе балансно-характеристического подхода используется также характеристическая форма записи линеаризованной исходной системы уравнений (1) [7], которая имеет вид

$$\frac{\partial \vec{I}^x}{\partial t} + \Lambda_x \frac{\partial \vec{I}^x}{\partial x} = \vec{G}^x, \quad \frac{\partial \vec{I}^y}{\partial t} + \Lambda_y \frac{\partial \vec{I}^y}{\partial y} = \vec{G}^y. \quad (4)$$

Входящие в левую часть уравнений величины определяют квази-инварианты Римана (определенные вдоль соответствующих направлений) и соответствующие им характеристические скорости:

$$\begin{aligned} \vec{I}^x &= \begin{pmatrix} u + 2c \\ u - 2c \\ v \end{pmatrix}, \quad \vec{\lambda}^x = \begin{pmatrix} \lambda_1^x \\ \lambda_2^x \\ \lambda_3^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + c \\ u - c \\ u \end{pmatrix}, \quad \Lambda_x = \begin{pmatrix} \lambda_1^x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^x & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^x \end{pmatrix}, \\ \vec{I}^y &= \begin{pmatrix} v + 2c \\ v - 2c \\ u \end{pmatrix}, \quad \vec{\lambda}^y = \begin{pmatrix} \lambda_1^y \\ \lambda_2^y \\ \lambda_3^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v + c \\ v - c \\ v \end{pmatrix}, \quad \Lambda_y = \begin{pmatrix} \lambda_1^y & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^y \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$c = \sqrt{gh}.$$

В теории мелкой воды функция c описывает скорость распространения малых возмущений (является аналогом скорости звука в газовой динамике). Правые части уравнений в (4) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{G}^x &= \Omega_x \left(\vec{d} - A_y \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial y} \right), \quad \vec{G}^y = \Omega_y \left(\vec{d} - A_x \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x} \right), \\ \vec{\phi} &= \begin{pmatrix} h \\ u \\ v \end{pmatrix}, \quad A_x = \begin{pmatrix} u & h & 0 \\ g & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}, \quad A_y = \begin{pmatrix} v & 0 & h \\ 0 & v & 0 \\ g & 0 & v \end{pmatrix}, \\ \vec{d} &= \begin{pmatrix} R \\ -g\partial b/\partial x - f_x/h - uR/h \\ -g\partial b/\partial y - f_y/h - vR/h \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнения, входящие в систему (4), можно трактовать как неоднородные локально-одномерные уравнения переноса в направлениях x и y .

3. Численный алгоритм

3.1. Схема КАБАРЕ. Численный алгоритм строится на основе схемы КАБАРЕ. Схема КАБАРЕ оперирует двумя типами переменных: консервативными, относящимися к центрам ячеек, и потоковыми, которые относятся к центрам граней. Для расчета по схеме КАБАРЕ применяется так называемый балансно-характеристический подход, в рамках которого для вычисления консервативных переменных используются уравнения движения в консервативной форме, а для вычисления потоковых величин — в характеристической [6].

Введем в прямоугольнике $[X_1, X_2] \times [Y_1, Y_2]$ неравномерную расчетную сетку с координатами узлов

$$(x_i, y_i) : \begin{cases} x_1 = X_1, & x_1 < x_2 < \dots < x_{N_x+1} = X_2, & \Delta x_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i, \\ y_1 = Y_1, & y_1 < y_2 < \dots < y_{N_y+1} = Y_2, & \Delta y_{j+1/2} = y_{j+1} - y_j. \end{cases} \quad (7)$$

Данный набор узлов порождает $N_x \times N_y$ расчетных ячеек, $N_x \times (N_y + 1)$ продольных и $(N_x + 1) \times N_y$ поперечных граней. Центрам ячеек соответствуют консервативные переменные, обозначаемые двумя полуцелыми индексами $(i + 1/2, j + 1/2)$, центрам горизонтальных и вертикальных граней соответствуют потоковые переменные, обозначаемые индексами $(i + 1/2, j)$ и $(i, j + 1/2)$ соответственно. Схема оперирует тремя временными слоями: начальным n , полуцелым $n + 1/2$ и новым $n + 1$. Для шага по времени введем обозначение $\tau^{n+1/2} = t^{n+1} - t^n$.

Схема КАБАРЕ для численного решения уравнений движения (3) (без учета силы трения) на конечно-разностной сетке, неоднородной по пространству и по времени, записывается следующим образом:

$$\frac{\mathbf{U}_{i+1/2, j+1/2}^{n+1} - \mathbf{U}_{i+1/2, j+1/2}^n}{\tau^{n+1/2}} + \frac{\bar{\mathbf{G}}_{i+1, j+1/2} - \bar{\mathbf{G}}_{i, j+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{\bar{\mathbf{H}}_{i+1/2, j+1} - \bar{\mathbf{H}}_{i+1/2, j}}{\Delta y_{j+1/2}} = 0, \quad (8)$$

$$\mathbf{U} = [h, uh, vh]^T, \quad \mathbf{G} = [hu, hu^2 + g(H^2 - 2bH)/2, huv]^T,$$

$$\mathbf{H} = [hv, huv, hv^2 + g(H^2 - 2bH)/2]^T.$$

где \mathbf{U} — вектор консервативных величин, \mathbf{G} и \mathbf{H} — векторы потоков, относящиеся к поперечным и продольным граням соответственно. Верхний индекс обозначает номер временного слоя, а нижний — пространственное положение. Чертой сверху обозначается осреднение по двум временным слоям $\bar{\eta} = (\eta^{n+1} + \eta^n)/2$. Разностная схема (8) обладает вторым порядком аппроксимации как по времени, так и по пространству на неравномерных расчетных сетках [6, 7, 12].

Один временной шаг схемы КАБАРЕ состоит из трех фаз. На первой фазе алгоритма вычисляются значения консервативных переменных на $n + 1/2$ временном слое. Во второй фазе с использованием значений промежуточных

консервативных величин и характеристической формы записи исходных дифференциальных уравнений вычисляются значения потоковых переменных на $n + 1$ временном слое. В третьей фазе по найденным на предыдущих шагах значениям консервативных и потоковых величин вычисляются значения консервативных переменных на $n + 1$ временном слое. При заданных начальных и граничных условиях по известным значениям консервативных и потоковых переменных на временном слое n однозначно определяются значения всех консервативных и потоковых переменных на слое $n + 1$, после чего цикл, состоящий из трех описанных фаз, повторяется. Шаг по времени определяется из условия устойчивости Куранта — Фридрихса — Леви:

$$\tau^{n+1/2} = CFL \min_{i,j} \left(\frac{\Delta x_{i+1/2}}{(|u_{i+1/2,j+1/2}^n| + c_{i+1/2,j+1/2}^n)}, \frac{\Delta y_{j+1/2}}{(|v_{i+1/2,j+1/2}^n| + c_{i+1/2,j+1/2}^n)} \right) \quad (9)$$

Все расчеты в работе приводятся при числе Куранта $CFL = 0.3$.

Рассмотрим алгоритм более подробно. Дискретизация уравнений (3) без учета силы трения в первой фазе (шаг предиктор) алгоритма имеет вид

$$\frac{\mathbf{U}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{U}_{i+1/2,j+1/2}^n}{\tau^{n+1/2}/2} + \frac{\mathbf{G}_{i+1,j+1/2}^n - \mathbf{G}_{i,j+1/2}^n}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{\mathbf{H}_{i+1/2,j+1}^n - \mathbf{H}_{i+1/2,j}^n}{\Delta y_{j+1/2}} = 0. \quad (10)$$

Из выражения (10) получаются значения консервативных величин на полуполном временном слое.

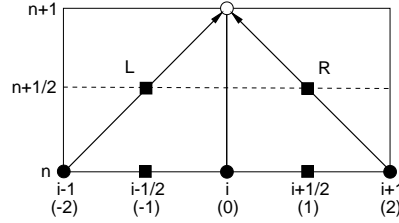
Во второй фазе используется характеристическая форма записи (4) исходных уравнений (1). Рассмотрим алгоритм нахождения потоковых переменных на новом временном слое по одному из направлений (вдоль оси x). Вдоль другого направления алгоритм является полностью симметричным. Локальные инварианты Римана определяются как для потоковых, так и консервативных переменных. Будем использовать гидростатическую реконструкцию для глубины потока [13] при записи инвариантов для обеспечения свойства хорошей сбалансированности. В этом случае инварианты на используемом сеточном шаблоне (рис. 1) определяются так:

$$\begin{aligned} (I_1^x)_q^n &= u_q^n + 2\sqrt{g(\tilde{h}_q^n)}, \quad (I_2^x)_q^n = u_q^n - 2\sqrt{g(\tilde{h}_q^n)}, \quad (I_3^x)_q^n = v_q^n, \\ (I_1^x)_m^{n+1/2} &= u_m^{n+1/2} + 2\sqrt{g(\tilde{h}_m^{n+1/2})}, \quad (I_2^x)_m^{n+1/2} = u_m^{n+1/2} - 2\sqrt{g(\tilde{h}_m^{n+1/2})}, \\ (I_3^x)_m^{n+1/2} &= v_m^{n+1/2}, \quad \tilde{h}_q^n = h_q^n - (b_0 - b_q), \quad q = -2, -1, 0, 1, 2, \quad m = -1, 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь индексы q и m определяют пространственное распределение вычисляемых величин на сеточном шаблоне согласно рис. 1.

Далее производится линейная экстраполяция инвариантов на новый временной слой. Экстраполяция проводится из обеих ячеек, прилегающих к грани:

$$(I_k^x)_{0-}^{n+1} = 2(I_k^x)_{-1}^{n+1/2} - (I_k^x)_{-2}^n, \quad (I_k^x)_{0+}^{n+1} = 2(I_k^x)_1^{n+1/2} - (I_k^x)_2^n, \quad k = 1, 2, 3. \quad (12)$$



$$m_- \leq (I_k^x)_{0-}^{n+1} \leq M_-, \quad m_+ \leq (I_k^x)_{0+}^{n+1} \leq M_+, \quad k = 1, 2, 3, \quad (13)$$

где максимальные и минимальные значения определяются так:

$$\begin{aligned}
m_- &= \min\{(I_k^x)_{-2}^n, (I_k^x)_{-1}^n, (I_k^x)_{0-}^n\} + \tau^{n+1/2}G_k^-, \\
M_- &= \max\{(I_k^x)_{-2}^n, (I_k^x)_{-1}^n, (I_k^x)_{0-}^n\} + \tau^{n+1/2}G_k^-, \\
m_+ &= \min\{(I_k^x)_2^n, (I_k^x)_1^n, (I_k^x)_{0+}^n\} + \tau^{n+1/2}G_k^+, \\
M_+ &= \max\{(I_k^x)_2^n, (I_k^x)_1^n, (I_k^x)_{0+}^n\} + \tau^{n+1/2}G_k^+, \\
&k = 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{14}$$

Здесь G_k , $k = 1, 2, 3$, — правые части уравнений в (4). Верхние индексы $+$ и $-$ обозначают, из какой ячейки берутся данные величины — из правой или левой (согласно сеточному шаблону на рис. 1). Для их оценки используется следующая разностная аппроксимация:

$$\begin{aligned}\langle G_k^- \rangle_{-1}^{n+1/2} &= \frac{(I_k^-)_{-1}^{n+1/2} - (I_k^-)_{-1}^n}{\tau^{n+1/2}/2} + (\lambda_k^-)_{-1}^{n+1/2} \frac{(I_k^-)_{0-}^n - (I_k^-)_{-2}^n}{\Delta x_{-1}}, \\ \langle G_k^+ \rangle_1^{n+1/2} &= \frac{(I_k^+)_{1}^{n+1/2} - (I_k^+)_{1}^n}{\tau^{n+1/2}/2} + (\lambda_k^+)_{1}^{n+1/2} \frac{(I_k^+)_{2-}^n - (I_k^+)_{0+}^n}{\Delta x_1}.\end{aligned}\quad (15)$$

Здесь нижние индексы также определяют пространственное распределение вычисляемых величин согласно сеточному шаблону (см. рис. 1).

Локальные инварианты Римана на новом временном слое определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{если } [\lambda_k^x]_{-1}^{n+1/2} + [\lambda_k^x]_1^{n+1/2} > 0, \text{ то } (I_k^x)_0^{n+1} &= (I_k^x)_{0-}^{n+1}, \\ \text{иначе } (I_k^x)_0^{n+1} &= (I_k^x)_{0+}^{n+1}, \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (16)$$

Потоковые значения глубины и скорости на новом временном слое находятся из полученных инвариантов:

$$\begin{aligned} h_0^{n+1} &= \frac{1}{g} \left(\frac{1}{4} \left((I_1^x)^{n+1} - (I_2^x)^{n+1} \right)^2 \right), \\ u_0^{n+1} &= \frac{1}{2} \left((I_1^x)^{n+1} + (I_2^x)^{n+1} \right), \quad v_0^{n+1} = (I_3^x)^{n+1}. \end{aligned} \quad (17)$$

В области транскритического перехода (случай так называемых звуковых точек) выполняется $[\lambda_1^x]_{-1}^{n+1/2} \cdot [\lambda_1^x]_1^{n+1/2} < 0$ или $[\lambda_2^x]_{-1}^{n+1/2} \cdot [\lambda_2^x]_1^{n+1/2} < 0$, т. е. собственные значения справа и слева имеют разные знаки. В данном случае используется гибридный подход — значения потоковых переменных на новом временном слое находятся из решения задачи о распаде разрыва аналогично тому, как это делается в методах типа Годунова [1]. Начальные данные для задачи распада разрыва глубины и скорости потока $U = [u, h]^T$ слева и справа от грани (индексы $-$ и $+$ соответственно) находятся из линейной реконструкции глубины и скорости потока в ячейках слева и справа с использованием реконструкции-ограничителя minmod [1]:

$$\begin{aligned} U_{i,-}^n &= U_{i-1/2}^n + 0.5q_- \Delta x_{i-1/2}, \\ U_{i,+}^n &= U_{i+1/2}^n - 0.5q_+ \Delta x_{i+1/2}, \\ q_- &= 0.5 \cdot (\text{sign}(a) + \text{sign}(b)) \cdot \min(|a|, |b|), \\ a &= (U_{i+1/2} - U_{i-1/2}) / (0.5 \cdot (\Delta x_{i+1/2} + \Delta x_{i-1/2})), \\ b &= (U_{i-1/2} - U_{i-3/2}) / (0.5 \cdot (\Delta x_{i-1/2} + \Delta x_{i-3/2})), \\ q_+ &= 0.5 \cdot (\text{sign}(c) + \text{sign}(d)) \cdot \min(|c|, |d|), \\ c &= (U_{i+3/2} - U_{i+1/2}) / (0.5 \cdot (\Delta x_{i+3/2} + \Delta x_{i+1/2})), \\ d &= (U_{i+1/2} - U_{i-1/2}) / (0.5 \cdot (\Delta x_{i+1/2} + \Delta x_{i-1/2})). \end{aligned} \quad (18)$$

Направление распространения инварианта I_3^x определяется по знаку продольной компоненты скорости u , полученной в ходе решения задачи Римана на данной границе.

Третья фаза (шаг корректор) аналогична первой, по вычисленным на предыдущих этапах значениям консервативных и потоковых величин определяются значения консервативных переменных на $(n+1)$ -м временном слое:

$$\begin{aligned} \frac{U_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - U_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}}{\tau^{n+1/2}/2} + \frac{G_{i+1,j+1/2}^{n+1} - G_{i,j+1/2}^{n+1}}{\Delta x_{i+1/2}} \\ + \frac{H_{i+1/2,j+1}^{n+1} - H_{i+1/2,j}^{n+1}}{\Delta y_{j+1/2}} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

3.2. Учет трения о дно. Методом расщепления по процессам скорректированные значения консервативных переменных с учетом силы трения вычисляются так:

$$U^{n+1} = \left[h^{n+1}, \frac{(hu)^{n+1}}{1 + \tau s}, \frac{(hv)^{n+1}}{1 + \tau s} \right]^T, \quad s = gn^2 (h^{n+1})^{-4/3} \sqrt{(u^{n+1})^2 + (v^{n+1})^2}. \quad (20)$$

3.3. Граничные условия. Схема допускает задание ряда физически значимых граничных условий таких, как вход, выход, стенка с проскальзыванием, стенка с прилипанием, периодические граничные условия. Реализация всех типов граничных условий в рамках схемы КАБАРЕ объединена общим подходом — дополнением приграничных граней недостающими значениями инвариантов с дальнейшим вычислением потоковых величин по общему алгоритму во второй фазе. Отличие всех граничных условий сводится к способу дополнения недостающих значений инвариантов [7, с. 196–202].

3.4. Алгоритм учета динамических границ вода/сухое дно. Во многих практических задачах важным является определение уреза воды — линии пересечения водной поверхности бассейна реки или водоема с поверхностью суши. Данная граница может резко меняться во времени, например, при наводнении, в частности при паводковых процессах. Таким образом, значимым дополнением вычислительного метода является учет динамических границ вода/сухое дно. В работе за основу взят робастный алгоритм, подробно описанный в [2]. Критерий минимальной глубины применяется для классификации следующих четырех типов граней:

- (1) «сухая» грань — в соседних ячейках выполняется условие $h_L \leq \varepsilon$, $h_R \leq \varepsilon$ (рис. 2(а));
- (2) «водная» грань — $h_L > \varepsilon$, $h_R > \varepsilon$ (рис. 2(б));
- (3) «частично смоченная» грань без потока, например, $h_L > \varepsilon$, $h_R \leq \varepsilon$, $H_L \leq H_R$ (рис. 2(в));
- (4) «частично смоченная» грань с потоком, например $h_L > \varepsilon$, $h_R \leq \varepsilon$, $H_L > H_R$ (рис. 2(г)).

Исходя из данных типов граней, ячейки делятся на три типа:

- (1) «водная» ячейка — грани ячейки принадлежат типу 2 или 4;
- (2) «сухая» ячейка — грани ячейки принадлежат типу 1 или 3;
- (3) «частично смоченная» ячейка — все остальные случаи.

«Сухие» ячейки исключаются из расчета, «водные» рассчитываются по базовому алгоритму, в «частично смоченных» ячейках учитывается только поток массы. В численных расчетах, представленных в данной работе, параметр ε выбирается равным 10^{-6} м.

3.5. Выводы. В данном разделе был представлен вычислительный алгоритм для моделирования различных задач на основе уравнений мелкой воды. Основой численной методики является балансно-характеристическая схема КАБАРЕ. Алгоритм позволяет рассчитывать как докритические, так и сверхкритические режимы течения, равно как и транскритические переходы. Для решения проблемы звуковых точек (транскритических переходов) используется гибридный подход на основе решения локальной задачи Римана. Существенным дополнением вычислительного алгоритма является возможность учета динамических границ вода/сухое дно на неоднородном рельефе дна, что является определяющим для многих практически значимых задач. Добавлен алгоритм

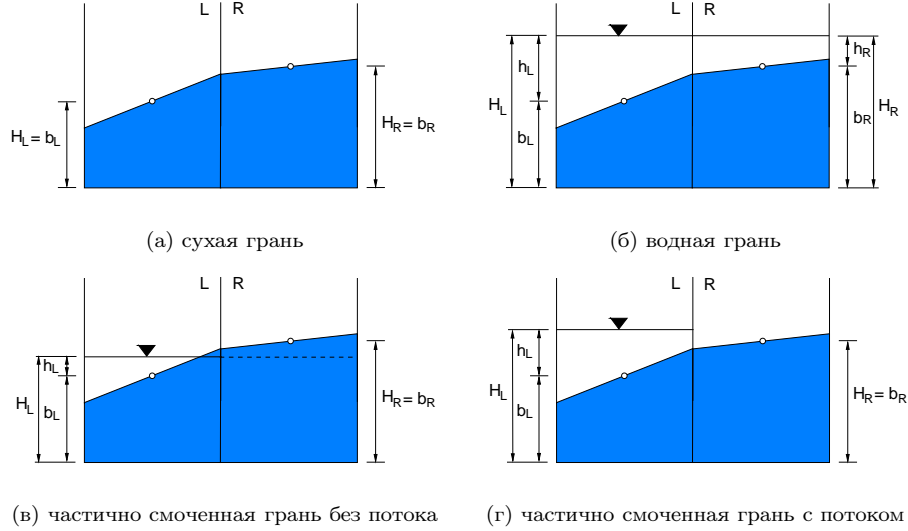


Рис. 2. Схематическое изображение границ раздела вода/сухое дно.

учета трения о дно. Представлен вариант учета условия хорошей сбалансированности схемы.

В следующем разделе проводится апробация вычислительного алгоритма на различных верификационных тестах, а также валидационной задаче о разрушении плотины.

4. Результаты моделирования

Для верификации предложенного численного метода рассматривается ряд тестов, имеющих точное решение. Данные тесты включены в набор задач по аналитическим решениям [4] для верификации численных методик, основанных на приближении мелкой воды. Во всех тестах для оценки точности получаемых численных решений для невязки используется сеточный аналог нормы в L^2 :

$$\|r\|_{L^2} = \left(\sum_{i=1}^N r_i^2 \Delta x \right)^{1/2}.$$

4.1. Вода в состоянии покоя на неровном рельефе дна. В данном тесте проверяется свойство хорошей сбалансированности схемы. Хорошо сбалансированные схемы должны удовлетворять условию отсутствия появления нефизичных перемещений воды над неровным дном из-за дискретизации исходных дифференциальных уравнений в частных производных. Рассматривается стационарная задача стоячей воды с неровным дном и границами раздела вода/сухое дно [14]. Расчетная область представляет собой закрытый квадратный бассейн размером $1 \text{ м} \times 1 \text{ м}$. В центре бассейна расположен симметричный холм, поверхность которого задается формулой $b(x, y) = \max[0, 0.25 - 4.8((x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2)]$. Трение о дно отсутствует, начальный

уровень в канале задается равным $H = 0.2$ м, $u = v = 0$ м/с. Расчетное время задачи составляет $t = 60$ с. Расчеты проводились на равномерных сетках с количеством ячеек $N_x \times N_y = 25 \times 25$ и 50×50 . Топография дна и уровень поверхности воды на начальный момент времени представлены на рис. 3.

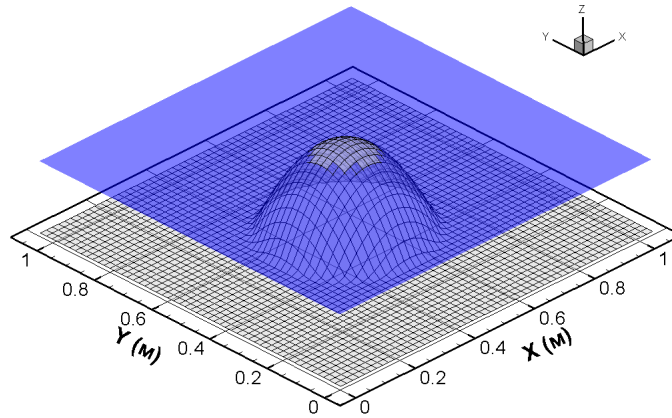


Рис. 3. Топография дна и уровень поверхности воды на начальный момент времени.

Полученные значения невязки в норме L^2 для глубины воды h и величин hu , hv представлены в табл. 1. Видно, что метод хорошо сохраняет стационарное решение.

Таблица 1. Невязки h , hu и hv в норме L^2 .
Задача о покоящейся воде на неровном рельефе дна

$N_x \times N_y$	$L^2(h)$	$L^2(hu)$	$L^2(hv)$
25×25	6.71×10^{-13}	7.92×10^{-15}	7.92×10^{-15}
50×50	4.81×10^{-13}	4.96×10^{-15}	4.96×10^{-15}

4.2. Задача Римана на горизонтальном дне. Рассматриваются классические одномерные тесты о распаде произвольного разрыва на горизонтальном дне, предложенные в работе [15], в квазидвумерной постановке. Начальные условия для тестов представлены в табл. 2, где h_L , u_L , h_R и u_R — начальные значения глубины и скорости слева и справа от разрыва соответственно, X_0 — положение разрыва, t_{out} — расчетное время. Длина расчетной области $L = 50$ м. Расчет проводится на двух сетках с количеством ячеек $N_x = 500$ и 1000 по оси x .

На рис. 4 представлены результаты расчета на подробной сетке ($N_x = 1000$). Численный метод дает хорошее совпадение с аналитическими решениями. В первом тесте размытие скачка происходит на 2–3 ячейки, что говорит о том, что скачок разрешается достаточно точно. Полученные значения невязки в норме L^2 для глубины воды h для данных тестов на разных сетках представлены в табл. 3. Если говорить о порядке сходимости, то схема обеспечивает

Таблица 2. Данные тестовых задач о распаде произвольного разрыва

N	$X_0(m)$	$h_L(m)$	$u_L(m/s)$	$h_R(m)$	$u_R(m/s)$	$t_{out}(s)$
1	10	1.0	2.5	0.1	0.0	7.0
2	25	1.0	-5.0	1.0	5.0	2.5
3	20	1.0	0.0	0.0	0.0	4.0

Таблица 3. Невязка h в норме L^2 . Тесты о распаде произвольного разрыва

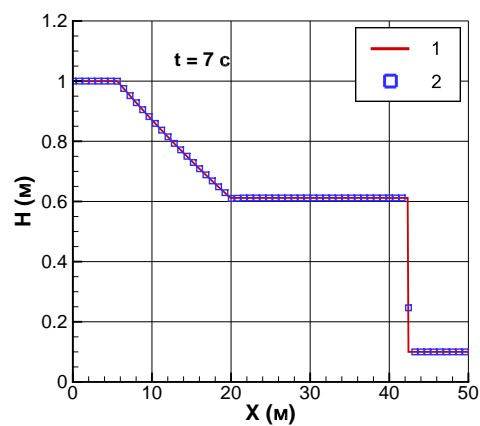
N	$L^2(h), N_x = 500$	$L^2(h), N_x = 1000$
1	1.81×10^{-1}	9.61×10^{-2}
2	5.70×10^{-2}	3.37×10^{-2}
3	1.98×10^{-2}	1.06×10^{-2}

второй порядок только на гладких решениях. В данном случае решения не являются всюду гладкими (равно как и в остальных тестах), и в областях с большими градиентами моделируемых величин по теореме Годунова [1] могут возникать немонотонные осцилляции, поэтому в данных областях срабатывает ограничитель (13), который локально понижает порядок до первого. Исследование на порядок сходимости схемы КАБАРЕ на гладких решениях подробно представлено в статьях [6, 16].

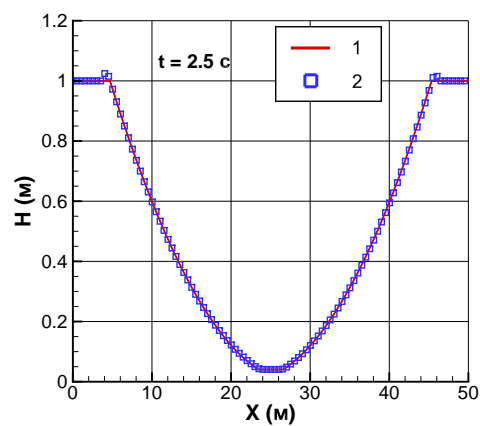
4.3. Тесты с обтеканием препятствия. Рассматриваются одномерные тесты в квазидвумерной постановке с обтеканием препятствия при различных режимах течения, представленные в [4]. Препятствие имеет вид параболического холма, поверхность которого задается формулой $b(x) = \max[0, 0.2 - 0.05(x - 10)^2]$. Длина канала $L = 25$ м, трение о дно отсутствует. Как и во всех остальных одномерных тестовых примерах, размеры области по направлению y определяют только задаваемый расход и не влияют на результаты моделирования, равно как и количество ячеек по данному направлению. Начальные и граничные условия для тестов задаются следующим образом.

1. Докритический поток. Начальные условия: $h_0 + b = 2$ м и $u_0 = v_0 = 0$ м/с. В качестве граничных условий вверх по течению задается постоянный расход $q = h_L u_L = 4.42$ м²/с (в 2D постановке $h_L(q)$ и соответственно u_L находятся из аналитического решения), вниз по течению фиксируется глубина потока $h_R = 2$ м.

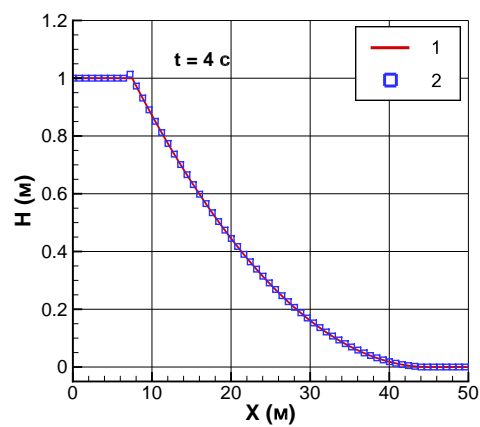
2. Транскритический поток без скачка. Начальные условия $h_0 + b = 0.66$ м и $u_0 = v_0 = 0$ м/с. Граничные условия: вверх по течению $q = h_L u_L = 1.53$ м²/с (h_L и u_L определяются как и в предыдущем случае), вниз по течению фиксируется глубина потока $h_R = 0.66$ м пока поток докритический, затем устанавливается



(а) левая критическая волна разряжения и правый скачок



(б) две волны разряжения вблизи дна



(в) распад разрыва на сухое дно

Рис. 4. Задача о распаде разрыва. Уровень поверхности воды: 1 — точное решение, 2 — численное решение.

ливаются граничные условия на свободный выход.

3. Транскритический поток со скачком. Начальные условия $h_0 + b = 0.33$ м и $u_0 = v_0 = 0$ м/с. Граничные условия: вверх по течению $q = h_L u_L = 0.18$ м²/с (h_L и u_L находятся аналогично предыдущим двум случаям), вниз по течению $h_R = 0.33$ м.

Расчеты проводятся на двух сетках с количеством ячеек $N_x = 500$ и 1000 по оси x . Для построения аналитических решений используется сетка с количеством ячеек $N_x = 5000$. Результаты расчета на подробной сетке ($N_x = 1000$) представлены на рис. 5, где для каждого из тестов также показана критическая высота $h_c = (q/\sqrt{g})^{2/3}$ для определения области докритического и сверхкритического потока. Результаты расчетов показывают очень хорошее совпадение с аналитическими решениями. В случае транскритического перехода со скачком скачок разрешается точно (рис. 5(г)) — значения представлены во всех расчетных узлах). Для сравнения, выполнение данного теста в работе [4] приводит к размытию скачка на 4 ячейки. Полученные значения невязки в норме L^2 для глубины потока h для данных тестов на разных сетках представлены в табл. 4.

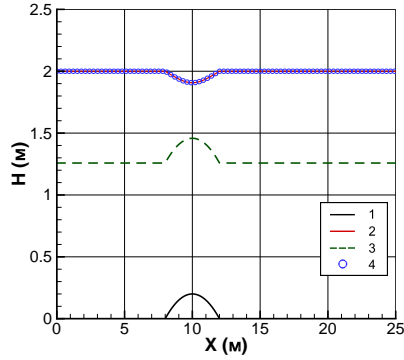
Таблица 4. Невязка h в норме L^2 .
Тесты с обтеканием препятствия

N	$L^2(h), N_x = 500$	$L^2(h), N_x = 1000$
1	1.92×10^{-4}	6.69×10^{-5}
2	5.71×10^{-4}	1.99×10^{-4}
3	8.57×10^{-4}	1.53×10^{-4}

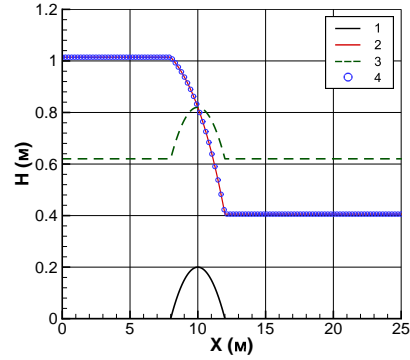
4.4. Тесты в каналах при наличии трения. Рассматриваются два теста из серии одномерных задач установившегося течения в открытых каналах при наличии трения, широко представленных в [4, 5]. Особенность построения решения в этих задачах заключается в нахождении при заданном расходе воды в канале и высоты столба жидкости $h(x)$ в установившемся течении рельефа дна, которому это течение будет соответствовать. В установившемся течении с учетом параметризации гидравлического трения по формуле Маннинга — Штриклера (2) уклон дна определяется из системы уравнений (1) как

$$S_0(x) = -\partial_x b = \left(1 - \frac{(Rx + q)^2}{gh(x)^3}\right)h'(x) + \frac{2(Rx + q)R}{gh(x)^2} + \frac{(Rx + q)^2 n^2}{h(x)^{10/3}}. \quad (21)$$

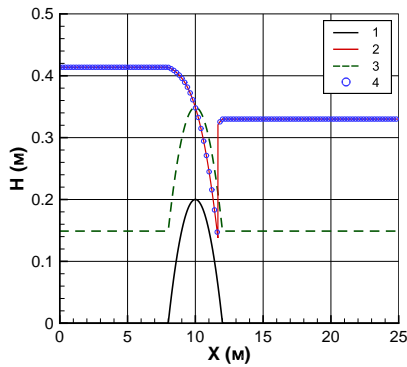
Здесь $q = hu$ — задаваемый расход, м²/с. Сам уровень подстилающей поверхности $b(x)$ можно получить численно, например, используя равномерную сетку с шагом $\Delta x = L/N$ и соотношение $b_{i+1} = b_i + \Delta x \partial_x b$, $i = 0, \dots, N$, $b_0 = b(L)$, где L — длина расчетной области, N — количество ячеек сетки. Затем на полученном рельефе дна воспроизводится модельное значение глубины потока.



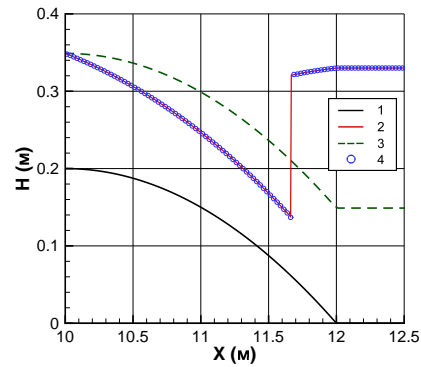
(а) докритический поток



(б) транскритический поток без скачка



(в) транскритический поток со скачком



(г) область вблизи скачка

Рис. 5. Тесты с обтеканием препятствия. 1 — топография дна, 2 — аналитическое решение, 3 — критическая высота, 4 — численное решение.

ТЕСТ 1. Рассматривается канал длиной $L = 5000$ м. Поток на входе и на выходе докритический. Глубина воды в установившемся состоянии задается функцией $h_{ex}(x) = 1.125 + 0.25 \sin(\pi x/500)$. Начальные условия: $h(x) = \max(0, h_{ex}(5000) + b(5000) - b(x))$, $u_0 = v_0 = 0$ м/с. Граничные условия: вверх по течению $q = h_L u_L = 2$ м²/с, где $h_L = h_{ex}(0)$, вниз по течению $h_R = h_{ex}(5000)$. Коэффициент шероховатости дна по Маннингу $n = 0.03$ м^{-1/3}с, интенсивность осадков $R = 0$ м/с. Расчет проводится на двух сетках с количеством ячеек $N_x = 5000$ и 10000 вдоль оси x . Для построения аналитического решения используется сетка с количеством ячеек $N_x = 20000$.

ТЕСТ 2. Рассматривается канал, течение в котором в установившемся состоянии является всюду докритическим. Длина канала $L = 1000$ м. Глубина воды в установившемся состоянии задается функцией

$$h_{ex}(x) = (4/g)^{1/3} (1 + 0.5 \exp(-16(0.001x - 0.5)^2)).$$

Начальные условия: $h(x) = 0$ м, $u_0 = v_0 = 0$ м/с. Граничные условия: вверх по

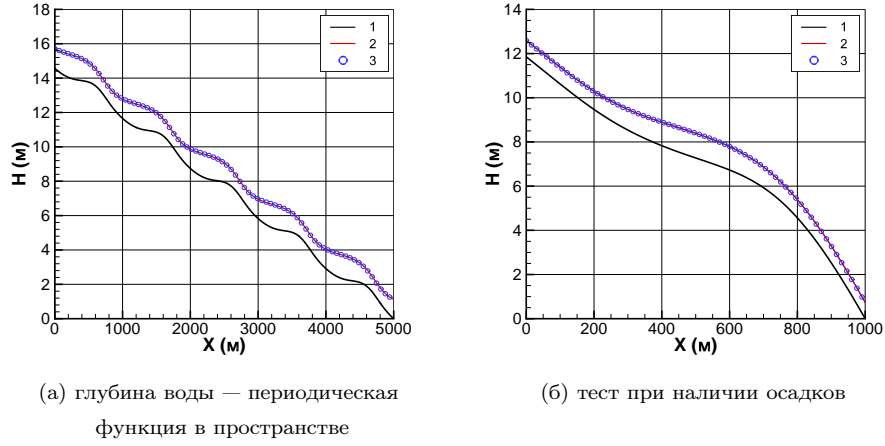


Рис. 6. Тесты в каналах при наличии трения: 1 — топография дна, 2 — аналитическое решение, 3 — численное решение.

течению $q = h_L u_L = 2 \text{ м}^2/\text{с}$, где $h_L = h_{ex}(0)$, вниз по течению $h_R = h_{ex}(1000)$. Коэффициент шероховатости дна по Маннингу $n = 0.033 \text{ м}^{-1/3}\text{с}$, интенсивность осадков $R = 0.001 \text{ м/с}$. Расчет проводится на двух сетках с количеством ячеек $N_x = 1000$ и 2000 вдоль оси x . Для построения аналитического решения используется сетка с количеством ячеек $N_x = 4000$.

Результаты расчета на подробных сетках для двух тестов представлены на рис. 6. Результаты расчетов показывают хорошее совпадение с аналитическими решениями. Метод хорошо справляется с границами раздела вода/сухое дно на неровной поверхности и при наличии трения. Полученные значения невязки в норме L^2 для глубины потока h для данных тестов на разных сетках представлены в табл. 5.

Таблица 5. Невязка h в норме L^2 .
Тесты в каналах при наличии трения

N	$L^2(h), N_x = 1000$	$L^2(h), N_x = 2000$	$L^2(h), N_x = 5000$	$L^2(h), N_x = 10000$
1	—	—	1.07×10^0	1.07×10^0
2	4.61×10^{-1}	4.60×10^{-1}	—	—

4.5. Задача о разрушении двумерной плотины. Рассматривается валидационная задача о прорыве плотины [11]. Расчетная область представляет собой прямоугольник размером $3 \text{ м} \times 2 \text{ м}$. Слева находится резервуар размером $1 \text{ м} \times 2 \text{ м}$ с непротекаемыми стенками. На правой границе резервуара имеется тонкая перегородка с симметричным относительно оси абсцисс отверстием шириной $0,40 \text{ м}$ (рис. 7(а)). В начальный момент времени отверстие в перегородке закрыто и вся жидкость располагается слева от нее. Все условия проведенного

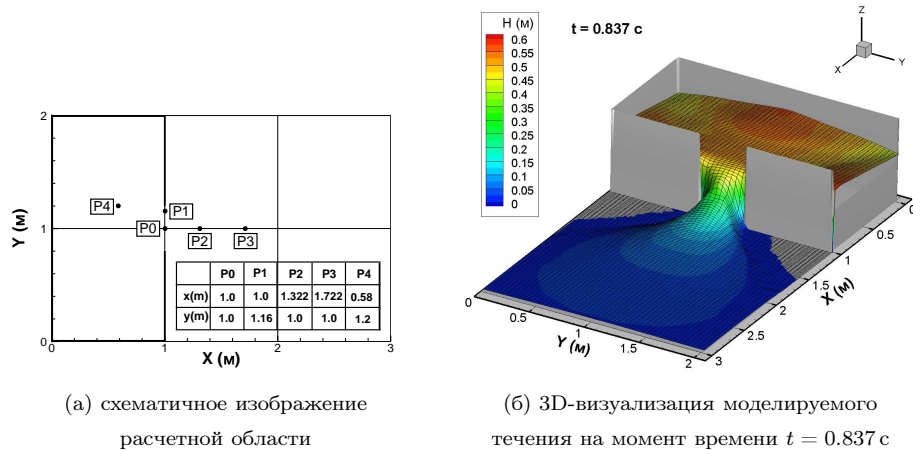


Рис. 7. Задача о разрушении двумерной плотины.

численного эксперимента взяты в соответствии с условиями лабораторного и численного экспериментов, представленных в [11]. Глубина воды в резервуаре в начальный момент времени равна 0.6 м, уклон дна составляет 0%. Трение о дно не учитывается. Количество ячеек расчетной сетки $N_x \times N_y = 150 \times 50$. Расчетное время составляет 10 с.

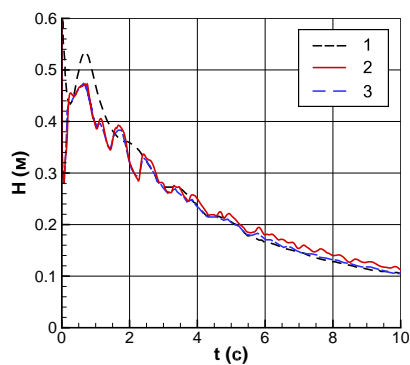
Динамика глубины и скорости потока замеряется в контрольных точках, расположение которых показано на рис. 7(а). На рис. 7(б) приведена 3D-визуализация моделируемого течения (глубины потока) на момент времени $t = 0.837$ с.

Результаты расчета в контрольных точках глубины (точки P0, P1, P2, P3) и продольной компоненты скорости потока (точки P0 и P4) представлены на рис. 8. Также приводится сравнение с результатами лабораторного эксперимента и расчета по авторской численной методике на основе WAF-метода [11]. Экспериментальные данные для продольной компоненты скорости представлены осредненными по глубине.

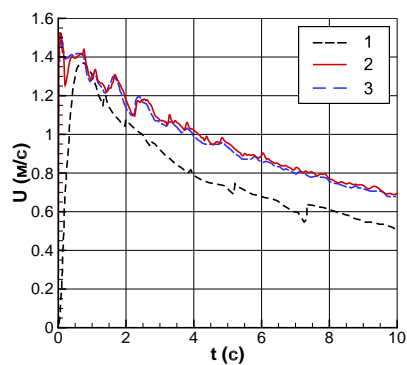
Результаты расчета по предложенному методу и авторской численной методике хорошо согласуются между собой. Расчетные профили глубины и продольной компоненты скорости в различных точках показывают хорошую асимптотику с ростом времени относительно результатов лабораторного эксперимента. В начальные моменты времени различие существенно, что говорит о том, что моделирование на основе приближения уравнений мелкой воды не позволяет учитывать сложные турбулентные процессы, возникающие в момент прорыва [11].

5. Заключение

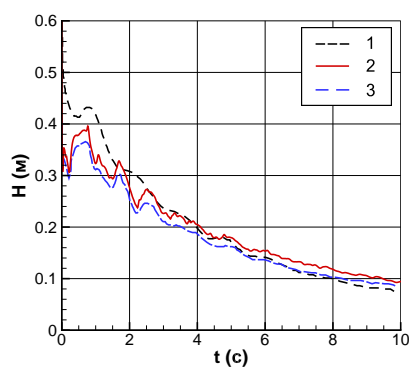
В работе представлен численный метод на основе модифицированной схемы КАБАРЕ для моделирования нестационарных течений в приближении мелкой



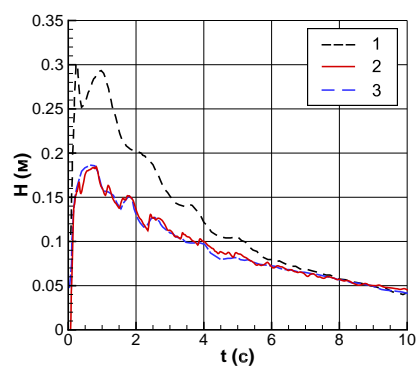
(а) глубина потока в точке P0



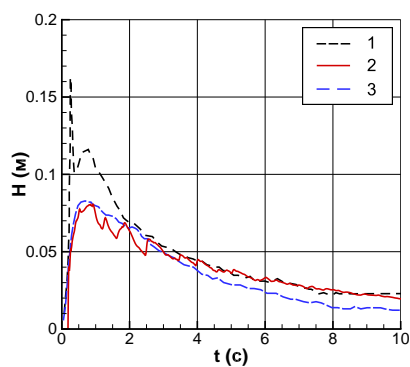
(б) продольная компонента скорости в точке P0



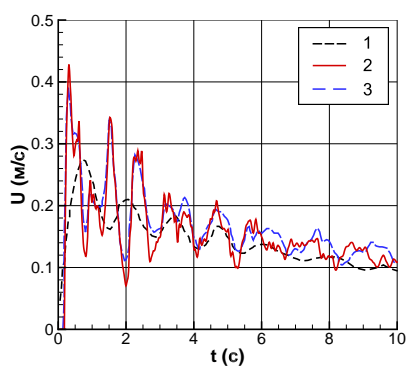
(в) глубина потока в точке P1



(г) глубина потока в точке P2



(д) глубина потока в точке P3



(е) продольная компонента скорости в точке P4

Рис. 8. Задача о разрушении двумерной плотины. 1 — данные эксперимента [11], 2 — результаты моделирования, 3 — результаты моделирования по WAF-методу [11].

воды.

Особое внимание уделяется практической составляющей метода. Построенный алгоритм удовлетворяет требованию хорошей сбалансированности и позволяет рассчитывать динамические границы, разделяющие жидкость и сухое дно, на неоднородном рельефе дна. Также учитывается возможность моделирования при учете гидравлического трения и осадков.

Проведена верификация метода на различных задачах, допускающих точное решение. Рассмотренные задачи являются частью специальных наборов тестов для проверки точности и качества моделирования разрабатываемых численных методик, основанных на приближении мелкой воды. Также была рассмотрена классическая валидационная задача о разрушении плотины, реализующая существенно двумерное течение с распространением по сухому дну. Проведено сравнение с данными эксперимента и авторской численной методики.

Результаты моделирования показывают, что разработанный метод работает надежно в широком диапазоне параметров течения, в том числе с режимами обострения, что особенно важно при решении задач гиперболического типа. Не приводит к появлению нефизических осцилляций в зоне больших градиентов моделируемых величин и искажению амплитуд перепадов в этих зонах. В том числе в проведенных тестах гидравлический скачок разрешается очень точно, размыв происходит не более чем на три расчетные ячейки. Все представленные результаты рассчитаны с использованием полного двумерного кода. Если аналитическое решение даже одномерное, то течение считается двумерным симметричным. Это дополнительная проверка надежности алгоритма на отсутствие дефектов, связанных с фазовыми и амплитудными ошибками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
2. Huang Y., Zhang N., and Pei Y. Well-balanced finite volume scheme for shallow water flooding and drying over arbitrary topography // Eng. Appl. Comput. Fluid Mech. 2013. V. 7, N 1. P. 40–54.
3. Bermudez A., Dervieux J. A., Vázquez M. E. Upwind schemes for the two dimensional shallow water equations with variable depth using unstructured meshes // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 1998. V. 155. P. 49–72.
4. Delestre O., Lucas C., Ksinant P.-A., Darboux F., Laguerre C., et al. SWASHES: a compilation of shallow water analytic solutions for hydraulic and environmental studies // Int. J. Numer. Methods Fluids. Wiley, 2013. V. 72, N 3. P. 269–300.
5. Ngoc Tuoi Vo Thi. One dimensional Saint-Venant system. Anal. PDEs [math.AP]. 2008. <https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-00597434>.
6. Karabasov S., Goloviznin V. Compact accurately boundary-adjusting high-resolution technique for fluid dynamics // J. Comput. Phys. 2009. V. 228. P. 7426–7451.
7. Головизнин В. М., Зайцев М. А., Карабасов С. А., Короткин И. А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2013.
8. Goloviznin V. M., Isakov V. A. Balance-characteristic scheme as applied to the shallow water equations over a rough bottom // Comput. Math. Math. Phys. 2017. V. 57. P. 1140–1157.
9. Afanasiev N., Goloviznin V. A locally implicit time-reversible sonic point processing algorithm for one-dimensional shallow-water equations // J. Comput. Phys. 2021. V. 434. Paper ID

- 110220.
10. Головизнин В. М., Соловьев А. В., Исаков В. А. Аппроксимационный алгоритм обработки звуковых точек в схеме «КАБАРЕ» // Вычисл. методы и программирование. 2016. Т. 17, вып. 2. С. 166–176.
 11. Fraccarollo L., Toro E. F. Experimental and numerical assessment of the shallow water model for two-dimensional dam-break type problems // J. Hydraul. Res. 1995. V. 33, N 6. P. 843–864.
 12. Kostykin S. V. A variant of the multidimensional generalization of the cabaret scheme // Math. Models Comput. Simul. 2018. V. 2. P. 564–573.
 13. Delestre O., Cordier S., Darboux F., Du M., James F., Laguerre C., Lucas C., and Planchon O. FullSWOF: A free software package for the simulation of shallow water flows. 2014. arXiv:1401.4125.
 14. Brufau P., Garcia-Navarro P. Unsteady free surface flow simulation over complex topography with a multidimensional upwind technique // J. Comput. Phys. 2003. V. 186, N 2. P. 503–526.
 15. Toro E. T. Shock-capturing methods for free-surface shallow flows. Chichester: Wiley, 2001.
 16. Chintagunta A., Naghibi S. E., Karabasov S. A. Flux-corrected dispersion improved CABA-RET schemes for linear and nonlinear wave propagation problems // Comput. Fluids. 2017.

Поступила в редакцию 1 августа 2023 г.

После доработки 1 сентября 2023 г.

Принята к публикации 4 сентября 2023 г.

Асфандияров Данил Гамилевич, Сорокикова Ольга Спартаковна
Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН,
ул. Большая Тульская, 52, Москва 115191
dasfandiyarov@ibrae.ac.ru, olga_sorokov@mail.ru

A HIGH-RESOLUTION NUMERICAL METHOD FOR
SOLVING THE SHALLOW WATER EQUATIONS
BASED ON THE MODIFIED CABARET SCHEME
D. G. Asfandiyarov and O. S. Sorokovikova

Abstract: A numerical method based on the CABARET scheme for modeling unsteady flow over arbitrary topography in the shallow water approximation is developed. The method allows simulating a wide range of flow conditions, including transcritical. To model transcritical transitions, a hybrid approach is used based on solving the local Riemann problem, as is done in Godunov-type schemes. The presented numerical method has a well-balance condition—the fulfillment of the condition of hydrostatic equilibrium or the condition of a fluid at rest on an uneven bottom topography. A robust technique is used to simulate the movement of wet/dry fronts caused by flooding or recession. A number of physical processes are taken into account, such as bed friction and rain. Numerical results are compared with analytical solutions and data from the dam-break experiment.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.33.65.009

Keywords: shallow water equations, balance-characteristic approach, wet/dry fronts, CABARET scheme, complex topography.

REFERENCES

1. Kulikovskiy A. G., Pogorelov N. V., and Semenov A. Yu., Mathematical Questions of the Numerical Solution of Hyperbolic Systems of Equations [in Russian], FIZMATLIT, Moscow (2001).
2. Huang Y., Zhang N., and Pei Y., “Well-balanced finite volume scheme for shallow water flooding and drying over arbitrary topography,” Eng. Appl. Comput. Fluid Mech., **7**, No. 1, 40–54 (2013).
3. Bermudez A., Dervieux J. A., and Vázquez M. E., “Upwind schemes for the two dimensional shallow water equations with variable depth using unstructured meshes,” Comput. Methods Appl. Mech. Eng., **155**, 49–72 (1998).
4. Delestre O., Lucas C., Ksinant P.-A., Darboux F., Laguerre C. et al., “SWASHES: a compilation of shallow water analytic solutions for hydraulic and environmental studies,” Int. J. Numer. Methods Fluids, **72**, No. 3, 269–300 (2013).
5. Ngoc Tuoi Vo Thi, One dimensional Saint-Venant system, Analysis of PDEs [math.AP]. 2008. <https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-00597434>
6. Karabasov S. and Goloviznin V., “Compact accurately boundary-adjusting high-resolution technique for fluid dynamics,” J. Comput. Phys., **228**, 7426–7451 (2009).
7. Goloviznin V. M., Zaitsev M. A., Karabasov S. A., and Korotkin I. A., New Algorithms of Computational Fluid Dynamics for Multiprocessor Computing Systems [in Russian], Izdat. Moskov. Univ., Moscow (2013).
8. Goloviznin V. M. and Isakov V. A., “Balance-characteristic scheme as applied to the shallow water equations over a rough bottom,” Comput. Math. Math. Phys., **57**, 1140–1157 (2017).

9. Afanasiev N. and Goloviznin V., “A locally implicit time-reversible sonic point processing algorithm for one-dimensional shallow-water equations,” J. Comput. Phys., **434**, paper ID 110220 (2021).
10. Goloviznin V. M., Solovjev A. V., and Isakov V. A., “An approximation algorithm for the treatment of sound points in the CABARET scheme [in Russian],” Numer. Methods Program., **17**, 166–176 (2016).
11. Fraccarollo L. and Toro E. F., “Experimental and numerical assessment of the shallow water model for two-dimensional dam-break type problems,” J. Hydraul. Res., **33**, No. 6, 843–863 (1995).
12. Kostykin S. V., “A variant of the multidimensional generalization of the CABARET scheme,” Math. Models Comput. Simul., **2**, 564–573 (2010).
13. Delestre O., Cordier S., Darboux F., Du M., James F., Laguerre C., Lucas C., and Planchon O., FullSWOF: A free software package for the simulation of shallow water flows, arXiv:1401.4125 (2014).
14. Brufau P. and García-Navarro P., “Unsteady free surface flow simulation over complex topography with a multidimensional upwind technique,” J. Comput. Phys., **186**, No. 2, 503–526 (2003).
15. Toro E. F., Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows, Wiley, Chichester (2001).
16. Chintagunta A., Naghibi S. E., and Karabasov S. A., “Flux-corrected dispersion improved CABARET schemes for linear and nonlinear wave propagation problems,” Comput. Fluids (2017).

Submitted August 1, 2023

Revised September 1, 2023

Accepted September 4, 2023

Danil G. Asfandiyarov, Olga S. Sorokovikova
Nuclear Safety Institute of Russian Academy of Sciences,
52 Bolshaya Tulkaya Street, 115191 Moscow, Russia
dasfandiyarov@ibrae.ac.ru, olga_sorokov@mail.ru

**X Международная конференция по математическому моделированию,
посвященная 30-летию Академии наук Республики Саха (Якутия)
(16–20 июля 2023 г.)**

X Международная конференция по математическому моделированию, посвященная 30-летию Академии наук Республики Саха (Якутия) и памяти первого президента АН РС(Я), чл.-корр. РАН Василия Васильевича Филиппова, была организована Академией наук Республики Саха (Якутия), Северо-Восточным федеральным университетом им. М. К. Аммосова, Институтом прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН (Москва), Институтом математики им. С. Л. Соболева СО РАН (Новосибирск) и Институтом вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (Новосибирск).

Программа конференции включала следующие направления:
неклассические задачи уравнений математической физики;
современные вычислительные методы и технологии;
математическое моделирование в науке и технике;
физико-технические проблемы в Арктике и Субарктике.

Конференция проходила в г. Якутске с 16 по 20 июля 2023 г. при поддержке Северо-Восточного федерального университета имени М. К. Аммосова, Академии наук Республики Саха (Якутия), Математического центра мирового уровня «Математический центр в Академгородке», Якутского отделения Регионального научно-образовательного математического центра «Дальневосточный центр математических исследований».

Всего в конференции приняли участие более 150 человек, в том числе ведущие ученые из России, Китая, Казахстана и Узбекистана. Среди участников 6 академиков и 8 член-корреспондентов Российской академии наук, 49 докторов и 55 кандидатов наук. В работе конференции также приняли активное участие студенты, аспиранты, молодые ученые республики.

За время работы конференции было заслушано 20 пленарных и 134 секционных докладов, в которых был охвачен широкий круг вопросов, связанных с применением методов математического моделирования и современных вычислительных технологий при решении актуальных прикладных задач развития Арктики и Субарктики, а также современных проблем математики и механики.

Следует отметить высокий уровень представленных докладов, а также актуальность тематики и новизну доложенных результатов, положенных в их основу. Тематика докладов была связана с исследованиями корректности неклассических задач математической физики, развитием подходов математического моделирования, проблемами численного решения прямых и обратных задач, функциональными возможностями технологий машинного обучения, искусственного интеллекта и больших данных, параллельным вычислительными технологиями, междисциплинарными исследованиями с применением вычислительных

технологий, а также актуальными физико-техническими проблемами Арктики и северных территорий страны.

Помимо приглашенных докладов, работа конференции проводилась по секциям:

«Неклассические задачи уравнений математической физики»,

«Современные вычислительные методы и технологии»,

«Математическое моделирование в науке и технике»,

«Физико-технические проблемы в Арктике и Субарктике, посвященные памяти первого президента АН РС(Я), чл.-корр. РАН Василия Васильевича Филипова».

Разделение конференции на секции позволило более полно и точно охватить различные научные области и специализации, а также удовлетворить интересы участников с разными научными направлениями. Каждая секция была сосредоточена на конкретной тематике и предоставляла площадку для обмена знаниями, представления научных исследований и дискуссий.

В рамках Конференции были проведены сопутствующие мероприятия: встречи с представителями власти и компаний реального сектора экономики и руководством университета; освещение конференции через средства массовой информации; круглый стол участников конференции. Участники конференции признали приоритетными следующие направления научных исследований в области прикладной математики.

- Разработка и реализация математических методов для решения неклассических задач математической физики. Оно включает в себя исследование физических явлений, которые не могут быть полностью описаны классическими уравнениями, и разработку специализированных математических подходов для их моделирования.

- Дальнейшая разработка и реализация математических методов моделирования, решения прямых и обратных задач, технологий больших данных и искусственного интеллекта.

- Интеграция результатов научных исследований в экономику региона и страны, в частности, в рамках кооперации академического сообщества, компаний реального сектора экономики и правительственных структур.

- Активизация работ по решению актуальных задач Севера и Арктики, в том числе, с использованием технологий больших данных и искусственного интеллекта.

К началу конференции был опубликован сборник тезисов докладов, который индексируется в РИНЦ. В докладах были освещены научные результаты, полученные в области математического моделирования природных и технологических процессов, в теории краевых задач для неклассических уравнений математической физики, в области неклассических задач механики деформируемого твердого тела, в теории оптимального управления, в теории игр среднего поля и др.

Оргкомитетом подписан договор с издательством AIP Publishing на издание сборника трудов X Международной конференции по математическому моделированию в выпуске серии книг Американского института физики AIP Conference Proceedings. Сборник трудов будет индексирован в реферативно-библиографических и наукометрических базах данных Web of Science и SCOPUS.

По результатам работы конференции 100 докладов рекомендованы для представления статей на рецензирование с целью опубликования в сборнике трудов конференции (AIP Conference Proceedings), 20 докладов рекомендованы для представления статей в научный журнал «Математические заметки СВФУ», входящий в БД SCOPUS.

Участники X Международной конференции по математическому моделированию приняли следующее решение:

1) одобрить деятельность программного и организационного комитетов, по организации и проведению конференции на высоком научно-организационном уровне;

2) учитывая актуальность тематики научных исследований конференции, организовать и провести XI Международную конференцию по математическому моделированию в 2026 г. на базе СВФУ и АН РС(Я).

Григорьев Юрий Михайлович (18.07.1959–22.09.2023)

22 августа 2023 г. на 65-м году ушел из жизни известный ученый в области механики, математического моделирования природных и техногенных процессов, действительный член Академии наук РС(Я), доктор физико-математических наук Юрий Михайлович Григорьев. Ю. М. Григорьев родился 18 июля 1959 г. в п. Нюрба Ленинского района Якутской АССР. После окончания в 1981 г. физического факультета Якутского государственного университета он проходил стажировку и обучение в аспирантуре механико-математического факультета Новосибирского государственного университета, которые завершились защитой кандидатской диссертации в 1985 г. в Институте гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН. В 2000 г. он защитил докторскую диссертацию в Институте вычислительной математики и математической геофизики СО РАН на тему «Методы решения задач моделирования деформаций тел и электромагнитной совместимости».

Ю. М. Григорьевым разработана теория кватернионных функций как новый математический аппарат моделирования трехмерных задач математической физики, показана эффективность метода кватернионных функций при решении ряда задач в теории упругости. Трудно переоценить вклад Ю. М. Григорьева в развитие науки и укрепление высшей школы в Республике Саха (Якутия). Он автор около 300 научных работ. Под его руководством выполнены ряд федеральных и международных грантов и проектов, защищены 3 кандидатские диссертации.

Юрий Михайлович уделял большое внимание проведению и организации олимпиад школьников и вовлечению их в научные исследования в республике.

О научном авторитете Ю. М. Григорьева свидетельствует его членство в ряде российских и международных научных советов, комитетов, диссертационных советов. Большая работа проведена Ю. М. Григорьевым в должности заместителя ректора по международной научно-технической деятельности СВФУ. Как член Академии наук РС(Я) он выполнял обязанности главного ученого секретаря, председателя ОУС по физико-техническим наукам, члена редколлегии ряда научных журналов.

Научные достижения Ю. М. Григорьева удостоены высоких званий и наград: «Заслуженный деятель науки РС(Я)», «Отличник образования РС(Я)», «Почетный работник высшего профессионального образования РФ» и др.

К глубокому сожалению, тяжелая болезнь унесла из наших рядов энергичного, полного новых планов и задумок, сильного, незаурядного человека, ученого, организатора науки и высшей школы. Светлая память о Юрии Михайловиче Григорьеве сохранится в сердцах его коллег и учеников.

Президиум АН РС (Я),

Редколлегия журнала «Математические заметки СВФУ»

Памяти Николая Андреевича Ларькина

30 августа 2023 г. ушел из жизни наш друг, коллега и прекрасный математик Николай Андреевич Ларькин. Нас связывали долгие годы совместной работы, общие научные интересы, участие в конференциях и семинарах.

Научные интересы Николая Андреевича Ларькина были сосредоточены в области, связанной с разрешимостью краевых задач для дифференциальных уравнений математической физики. Им были получены яркие результаты о разрешимости краевых задач для нелинейных уравнений третьего порядка, для аналогов уравнения Кортвега — де Фриза в нецилиндрических областях, для уравнений Курамото — Сивашинского — Захарова — Кузнецова, Бенни — Лина, для многомерных аналогов системы Навье — Стокса.

Много лет Николай Андреевич работал в составе Программного комитета Международных конференций, проводимых в Якутске, и мы постоянно обсуждали с ним программу конференций, тематику докладов, приглашение гостей.

Последние годы Николай Андреевич работал в Бразилии, в г. Маринга. Несмотря на большое расстояние между нами, наше сотрудничество не прекращалось. Взаимные визиты в Россию и Бразилию, обсуждение новых результатов, нерешенных задач и, наконец, совместные публикации — все это было до последних дней его жизни.

Светлая память о Николае Андреевиче Ларькине будет всегда в наших сердцах. Нам его будет не хватать.

А.И. Кожанов, И.Е. Егоров, С.В. Попов, С.Г. Пятков



Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций
Свидетельство о регистрации № ПИ № ФС 77–59001 от 11.08.2014 г.
Учредитель: ФГАОУ ВО «Северо-Восточный
федеральный университет имени М. К. Аммосова»
ул. Белинского, 58, Якутск, 677000

Подписано в печать 27.10.2023. Формат 70x108/16.
Печать цифровая. Печ. л. 9,75. Уч.-изд. л. 10,0. Тираж 50 экз. Заказ № 296.

Издательский дом Северо-Восточного федерального университета,
677891, г. Якутск, ул. Петровского, 5.
Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии ИД СВФУ