

СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М. К. АММОСОВА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ СВФУ

ОСНОВАН В 1994 ГОДУ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ВЫХОДИТ 4 РАЗА В ГОД

Том 25, № 1 (97)

Январь—март, 2018

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Гадоев М. Г., Исмоков Ф. С. Об относительной ограниченности одного класса вырождающихся дифференциальных операторов в лебеговом пространстве	3
Егоров И. Е., Ефимова Е. С., Тихонова И. М. Фредгольмова разрешимость первой краевой задачи для уравнения смешанного типа второго порядка со спектральным параметром	15
Карачанская Е. В., Петрова А. П. Применение программного управления с вероятностью 1 для некоторых задач финансовой математики	25
Лазарев Н. П., Истоу Х., Сивцев П. В., Тихонова И. М. О регулярности решения в задаче о равновесии пластины Тимошенко, содержащей наклонную трещину	38
Рудых Г. А., Семенов Э. И. Исследование совместности переопределенной системы для многомерного уравнения нелинейной теплопроводности (общий случай)	50
Стрелецкая Е. М., Фёдоров В. Е., Дебуш А. Задача Коши для уравнения распределенного порядка в банаховом пространстве	63
Хлуднев А. М., Попова Т. С. Задача сопряжения упругого включения Тимошенко и полужесткого включения	73

Математическое моделирование

Крылатова С. Р., Матвеев А. И., Лебедев И. Ф., Яковлев Б. В. <i>Моделирование движения частицы в винтовом пневмосепараторе статистическими методами</i>	90
Ханхасаев В. Н., Дармахеев Э. В. <i>О некоторых применениях гиперболического уравнения теплопроводности и методах его решения</i>	98
Mathematical Notes of North-Eastern Federal University Mathematics	
M. G. Gadoev and F. S. Iskhokov <i>On relative boundedness of a class of degenerate differential operators in the Lebesgue space</i>	13
I. E. Egorov, E. S. Efimova, and I. M. Tikhonova <i>On Fredholm solvability of first boundary value problem for mixed-type second-order equation with spectral parameter</i>	23
E. V. Karachanskaya and A. P. Petrova <i>Modeling of the programmed control with probability 1 for some financial tasks</i>	36
N. P. Lazarev, H. Itou, P. V. Sivtsev, and I. M. Tikhonova <i>On the solution regularity of an equilibrium problem for the Timoshenko plate having an inclined crack</i>	48
G. A. Rudykh and E. I. Semenov <i>Research of compatibility of the redefined system for the multidimensional nonlinear heat equation (general case)</i>	61
E. M. Streletskaya, V. E. Fedorov, and A. Debbouche <i>The Cauchy problem for distributed order equations in Banach spaces</i>	71
A. M. Khludnev and T. S. Popova <i>On junction problem for elastic Timoshenko inclusion and semi-rigid inclusion</i>	87
Mathematical modeling	
S. R. Krylatova, A. I. Matveev, I. F. Lebedev, and B. V. Yakovlev <i>Modeling of particle motion in spiral pneumoseparator by statistical methods</i>	96
V. N. Khankhasaev and E. V. Darmakheev <i>On some applications of the hyperbolic heat equation and the methods for solving it</i>	110

АДРЕС ИЗДАТЕЛЯ:

СВФУ, ул. Белинского, 58, Якутск, 677000

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

СВФУ, ул. Кулаковского, 48, каб. 543, Якутск, 677000

Телефон: 8(4112)32-14-99, Факс: 8(4112)36-43-47;

<http://mzsvfu.ru>

e-mail: prokopevav85@gmail.com; yktmatzam@gmail.com;

ivanegorov51@mail.ru

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ
ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ
В ЛЕБЕГОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ
М. Г. Гадоев, Ф. С. Исхоков

Аннотация. В пространстве $L_p(\Omega)$, где $1 < p < +\infty$ и Ω — произвольная (ограниченная или неограниченная) область n -мерного евклидова пространства R_n , исследуется относительная ограниченность одного класса дифференциальных операторов с частными производными недивергентного вида высшего порядка. Исследуемые операторы имеют нестепенное вырождение вдоль всей границы области Ω , и вырождение по каждой независимой переменной характеризуется с помощью разных функций.

В работах, опубликованных ранее по этому направлению, обычно сначала задавался исследуемый оператор в области Ω и затем в этой области определялись функции, с помощью которых характеризуются вырождения коэффициентов исследуемого оператора. Эти функции имели одинаковое поведение вблизи границы по разным независимым переменным.

В отличие от этого, в настоящей работе область Ω и функции, которые характеризуют вырождения коэффициентов дифференциального оператора, задаются в паре друг с другом и предполагается выполнение «условия погружения», введенного ранее П. И. Лизоркиным. При этом дифференцируемость функций, с помощью которых определяется вырождение исследуемого оператора, не требуется.

Исследование относительной ограниченности дифференциальных операторов является одним из основных направлений теории таких операторов, и результаты, полученные в этом направлении, имеют широкое применение в теории вложения нормированных пространств дифференцируемых функций многих переменных, теории разделимости дифференциальных операторов, спектральной теории дифференциальных операторов и т.д.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.1.12764

Ключевые слова: дифференциальный оператор с частными производными, нестепенное вырождение, относительная ограниченность операторов, разбиение единицы.

0. Введение

Работа посвящена исследованию относительной ограниченности одного класса дифференциальных операторов с частными производными недивергентного вида в произвольной (ограниченной или неограниченной) области Ω n -мерного евклидова пространства с нестепенным вырождением на границе области в пространстве $L_p(\Omega)$. Результаты об относительной ограниченности диф-

ференциальных операторов применяются в теории разделимости дифференциальных операторов, теории вложения нормированных пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных, спектральной теории дифференциальных операторов (см., например, [1–17] и имеющуюся в них библиографию).

В настоящей работе, так же как в работе авторов [18], область Ω и функции, которые характеризуют вырождения коэффициентов дифференциального оператора, задаются в паре друг с другом и предполагается выполнение «условия погружения», введенного П. И. Лизоркиным в работе [19]. При этом вырождения коэффициентов дифференциального оператора по разным независимым переменным характеризуются с помощью разных функций и дифференцируемость функций, с помощью которых определяется вырождение исследуемого оператора, не требуется.

1. Формулировка основного результата

Пусть Ω — произвольное открытое множество в n -мерном евклидовом пространстве R_n , и пусть $\Pi(0)$ — единичный куб с центром в начале системы координат. Для любой точки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in R_n$ и любого вектора $\vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ с положительными компонентами определим параллелепипед $\Pi_{\vec{t}}(\xi)$ равенством

$$\Pi_{\vec{t}}(\xi) = \{x \in R_n : ((x_1 - \xi_1)/t_1, (x_2 - \xi_2)/t_2, \dots, (x_n - \xi_n)/t_n) \in \Pi(0)\}.$$

Пусть $g_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$, — определенные в Ω положительные функции. Положим $\Pi_{\varepsilon, \vec{g}}(\xi) = \Pi_{\xi \vec{g}(\xi)}(\xi)$, где $\varepsilon > 0$ и $\vec{g}(\xi) = (g_1(\xi), g_2(\xi), \dots, g_n(\xi))$.

Предполагается, что множество Ω и функции $g_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$, связаны следующим условием.

(А) Существует постоянная $\varepsilon_0 > 0$ такая, что для всех $\xi \in \Omega$ параллелепипед $\Pi_{\varepsilon, \vec{g}}(\xi)$ содержится в Ω для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Условие (А) является аналогом условия погружения, введенного в [19]. В этой работе также рассмотрены примеры областей Ω и положительных функций $g_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяющих условию погружения.

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$L(x, D_x) = \sum_{|k| \leq 2r} a_k(x) D_x^k \quad (x \in \Omega), \quad (1)$$

где $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ — мультииндекс, $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ — длина мультииндекса,

$$D_x^k = \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{k_1} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{k_2} \dots \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{k_n}$$

и i — мнимая единица.

Символом $B(\tau, \vec{g}, \Omega)$, где τ — положительное число, обозначим класс символов

$$L(x, s) = \sum_{|k| \leq 2r} a_k(x) s^k \quad (x \in \Omega, s \in R_n)$$

с измеримыми коэффициентами, удовлетворяющими следующим условиям:

- (I) $\inf_{x \in \Omega, s \in R_n} |L(x, s)| = \delta \neq 0$
 (II) $|a_k(x)s^{k'}| \leq \tau g_1^{-k_1''}(x) g_2^{-k_2''}(x) \dots g_n^{-k_n''}(x) |L(x, s)|$
 для всех $x \in \Omega$, $s \in R_n$, $k = k' + k''$, $k'' \neq 0$, $|k| \leq 2r$;
 (III) $\sum_{|k| \leq 2r} |(a_k(x) - a_k(y))s^k| \leq \tau |L(x, s)|$ для всех $s \in R_n$ и всех $x, y \in \Omega$
 таких, что $|x_j - y_j| < \varepsilon^2 g_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Будем писать $L(x, s) \in \mathbb{B}(\tau, \vec{g}, \Omega)$, если

$$L(x, s) \in B(\tau, \vec{g}, \Omega), \quad D_x^l a_k(x) \in L_{\infty, \text{loc}}(\Omega) \quad (|l| \leq |k| \leq 2r),$$

и выполняется одно из следующих условий:

- (IVa) $L(x, D_x)$ — симметрическое дифференциальное выражение;
 (IVб) имеет место неравенство

$$\sum_{\substack{l+k'+k''=k, \\ k'' \neq 0, |k| \leq 2r}} |(D_x^l a_k(x)) g_1^{k_1''}(x) g_2^{k_2''}(x) \dots g_n^{k_n''}(x) s^{k'}| \leq \tau |L(x, s)|$$

для всех $x \in \Omega$, $s \in R_n$.

Наряду с дифференциальным выражением (1) рассмотрим дифференциальное выражение

$$\mathbb{L}(x, D_x) = \sum_{|k| \leq 2r} b_k(x) D_x^k \quad (x \in \Omega) \quad (2)$$

с непрерывными коэффициентами $b_k(x)$ ($x \in \Omega$, $|k| \leq 2r$), удовлетворяющими неравенству

$$\sum_{\substack{k'+k''=k, \\ |k| \leq 2r}} |b_k(x) g_1^{k_1''}(x) g_2^{k_2''}(x) \dots g_n^{k_n''}(x) s^{k'}| \leq \mathbb{N} |L(x, s)| \quad (3)$$

для всех $x \in \Omega$, $s \in R_n$; $\mathbb{N}$ — некоторая положительная постоянная.

Теорема. Пусть существует число $\lambda > 0$ такое, что

$$\lambda^{-1} \leq \frac{g_j(x)}{g_j(y)} \leq \lambda, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

для всех $y \in \Omega$ и всех $x \in \Pi_{\varepsilon, \vec{g}}(y)$, и пусть при некотором $\varkappa > 0$ выполняется неравенство

$$\sum_{|k| \leq 2r} |a_k(x) s^k| \leq \varkappa |L(x, s)| \quad (5)$$

для всех $x \in \Omega$, $s \in R_n$. Пусть также выполняется неравенство (3). Тогда найдется число $\tau_0 = \tau_0(r, n, p, \varkappa, \delta) > 0$, $1 < p < +\infty$, такое, что если $L(x, s) \in B(\tau, \vec{g}, \Omega)$, $0 < \tau < \tau_0^*$, то для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$ выполняется неравенство

$$\sum_{|k| \leq 2r} \|b_k(x) D_x^k u(x); L_p(\Omega)\| \leq \mathbb{M} \|L(x, D_x) u(x); L_p(\Omega)\|, \quad (6)$$

где $\mathbb{M} = \mathbb{M}(r, n, p, \varkappa, \mathbb{N})$ — некоторая положительная постоянная. Если же $L(x, s) \in \mathbb{B}(\tau, \vec{g}, \Omega)$, $0 < \tau < \tau_0^*$, то неравенство (6) имеет место также для всех $u(x) \in L_p(\Omega)$ таких, что $L(x, D_x)u(x) \in L_p(\Omega)$.

Напомним определение относительной ограниченности операторов в банаховых пространствах. Пусть X, Y и Z — банаховы пространства и $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$, $B : D(B) \subset X \rightarrow Z$ — некоторые плотно определенные линейные операторы. Оператор B называется *ограниченным относительно оператора A* (или *A -ограниченным*), если $D(A) \subset D(B)$ и существуют постоянные $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$ такие, что

$$\|Bu; Z\| \leq \alpha\|u; X\| + \beta\|Au; Y\|$$

для всех $u \in D(A)$.

Пусть операторы (см. (1), (2))

$$L = L(\cdot, D), \quad D(L) = C_0^\infty(\Omega), \quad \text{и} \quad \mathbb{L} = \mathbb{L}(\cdot, D), \quad D(\mathbb{L}) = C_0^\infty(\Omega),$$

допускают замыкание в пространстве $L_p(\Omega)$. Их замыкания обозначим через $L_{(p)}$ и $\mathbb{L}_{(p)}$ соответственно. Тогда в условиях сформулированной выше теоремы если $L(x, s) \in \mathbb{B}(\tau, \vec{g}, \Omega)$, $0 < \tau < \tau_0^*$, то неравенство (6) имеет место для всех $u(x) \in L_p(\Omega)$ таких, что $L(x, D_x)u(x) \in L_p(\Omega)$, и из этого неравенства следует ограниченность оператора $\mathbb{L}_{(p)}$ относительно оператора $L_{(p)}$ в пространстве $L_p(\Omega)$.

2. Доказательство основной теоремы

Отметим, что дифференциальные операторы $L(x, D_x)$, символы которых принадлежат классу $B(\tau, \vec{g}, \Omega)$, ранее изучались в работах авторов [18, 20]. Так же как в этих работах, здесь применяется техника, основанная на следующей лемме о разбиении единицы области Ω .

Лемма 1 (см. [17, лемма 1]). Пусть область Ω и положительные функции $g_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяют сформулированным выше условиям.

Тогда существуют неотрицательные функции $\psi_1, \psi_2, \dots$ из класса $C_0^\infty(\Omega)$ такие, что

$$1) \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m^2(x) \equiv 1 \quad (x \in \Omega);$$

2) покрытие $\{\text{supp } \psi_m\}_{m=1}^{+\infty}$ области Ω имеет конечную кратность $\Lambda(n, \lambda)$, где λ — константа из условия (4);

3) для любого мультииндекса k существует конечное число $M_k > 0$ такое, что

$$|D_x^k \psi_m(x)| \leq M_k g_1^{-k_1}(x) g_2^{-k_2}(x) \dots g_n^{-k_n}(x) \quad (x \in \Omega);$$

4) для всех $x, y \in \text{supp } \psi_m$, $m = 1, 2, \dots$, выполняется неравенство

$$|x_j - y_j| < \varepsilon^2 g_j(x), \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

5) для любой функции $f \in L_1(\Omega)$ справедливо соотношение

$$\sum_{m=N}^{+\infty} \int_{\Omega} \chi_m(x) f(x) dx \rightarrow 0, \quad N \rightarrow +\infty,$$

где $\chi_m(x)$ — характеристическая функция множества $\text{supp } \psi_m$.

Пусть $L(x, s) \in B(\tau, \vec{g}, \Omega)$ и $0 < \tau < \tau_0$, где $\tau_0 = \tau_0(n, r, p, \varkappa) > 0$ — такое же положительное число, как в [20, теорема 1]. Тогда согласно этой теореме замыкание $L_{(p)}$ оператора $L = L(\cdot, D)$, $D(L) = C_0^\infty(\Omega)$, в пространстве $L_p(\Omega)$ существует и имеет место равенство (см. [18, с. 21])

$$L_{(p)}F_{(p)} = E + \Gamma_{(p)}, \quad (7)$$

где $\Gamma_{(p)}$ — замыкание в $L_p(\Omega)$ некоторого оператора $\Gamma \in \mathcal{L}_p[\Omega]$ такого, что $\|\Gamma\|_p \leq 1/2$, и при этом $D(\Gamma_{(p)}) = L_p(\Omega)$. Здесь и далее символом $\mathcal{L}_p[\Omega]$ обозначено пространство всех линейных операторов, действующих из $C_0^\infty(\Omega)$ в $L_1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$, замыкания которых в пространстве $L_p(\Omega)$ являются ограниченными операторами.

Напомним (см. [18, с. 8]), что $F_{(p)}$ — замыкание в $L_p(\Omega)$ оператора

$$F = \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m \Phi_m \psi_m, \quad D(F) = C_0^\infty(\Omega), \quad (8)$$

где Φ_m , $m = 1, 2, \dots$, — псевдодифференциальный оператор в R_n с символом $\Phi_m(s) = L_m^{-1}(s)$ и

$$L_m(s) = \sum_{|k| \leq 2r} a_k(x^{(m,k)}) s^k \quad (s \in R_n), \quad (9)$$

$\{x^{(m,k)}, |k| \leq 2r\}$ — некоторые фиксированные точки из $\text{supp } \psi_m$, $m = 1, 2, \dots$

Ниже докажем неравенство

$$\|b_k D^k F\|_p \leq C_{1,p} < +\infty, \quad |k| \leq 2r. \quad (10)$$

Используя равенство

$$b_k D^k F = \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m b_k D^k \Phi_m \psi_m + \sum_{m=1}^{+\infty} [b_k D^k, \psi_m] \Phi_m \psi_m,$$

где символ $[\cdot, \cdot]$ обозначает коммутатор $[T_1, T_2] = T_1 T_2 - T_2 T_1$, представим оператор $b_k D^k F$ в виде

$$b_k D^k F = \mathbb{F}_*^{(k)} + \mathbb{F}_{**}^{(k)}, \quad (11)$$

где

$$\mathbb{F}_*^{(k)} = \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m b_k \Phi_m^{(k)} \psi_m, \quad \mathbb{F}_{**}^{(k)} = \sum_{m=1}^{+\infty} [b_k D^k, \psi_m] \Phi_m \psi_m, \quad (12)$$

$\Phi_m^{(k)}$ — псевдодифференциальный оператор в R_n с символом $s^k L_m^{-1}(s)$.

Оценим норму оператора $\mathbb{F}_*^{(k)}$. Для этого представим оператор $\mathbb{F}_*^{(k)}$ в виде

$$\mathbb{F}_*^{(k)} = \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m(b_k(x) - b_k(x^{(m,k)}))\Phi_m^{(k)}\psi_m + \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m b_k(x^{(m,k)})\Phi_m^{(k)}\psi_m.$$

Применяя [18, лемма 2], получаем

$$\|\mathbb{F}_*^{(k)}\|_p \leq M_1(\mathbb{C}_{1,k} + \mathbb{C}_{2,k}), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{1,k} &= \sup_{m=1,2,\dots} \|\psi_m(b_k(x) - b_k(x^{(m,k)}))\Phi_m^{(k)}\psi_m\|_p, \\ \mathbb{C}_{2,k} &= \sup_{m=1,2,\dots} \|\psi_m b_k(x^{(m,k)})\Phi_m^{(k)}\psi_m\|_p. \end{aligned}$$

Также с помощью [18, лемма 2] доказывается, что

$$\|\psi_m(b_k(x) - b_k(x^{(m,k)}))\Phi_m^{(k)}\psi_m\|_p \leq M_{11} \sup |(b_k(x) - b_k(x^{(m,k)}))s^k L_m^{-1}(s)|.$$

В этих неравенствах верхняя грань берется по $x \in \text{supp } \psi_m$, $s \in R_n$. Отсюда в силу непрерывности коэффициентов $b_k(x)$, $|k| \leq 2r$, и условия (3) следует, что

$$\|\psi_m(b_k(x) - b_k(x^{(m,k)}))\Phi_m^{(k)}\psi_m\|_p \leq \mathbb{M}_1, \quad (14)$$

где $\mathbb{M}_1$ — некоторое конечное положительное число.

Из условия (3), в частности, следует, что

$$|b_k(x)s^k| \leq \mathbb{N}|L(x, s)|, \quad |k| \leq 2r,$$

для всех $x \in \Omega$, $s \in R_n$. Следовательно,

$$|b_k(x^{(m,k)})s^k| \leq \mathbb{N}|L(x^{(m,k)}, s)|, \quad |k| \leq 2r, \quad m = 1, 2, \dots,$$

для всех $s \in R_n$.

Согласно неравенству (16) из работы [18]

$$|L(x, s)| \leq 2|L_m(s)| \leq 3|L(x, s)|, \quad s \in R_n, \quad x \in \text{supp } \psi_m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Отсюда следует, что

$$|L(x^{(m,k)}, s)| \leq 2|L_m(s)| \leq 3|L(x^{(m,k)}, s)|, \quad s \in R_n, \quad m = 1, 2, \dots$$

Поэтому

$$|b_k(x^{(m,k)})s^k L_m^{-1}(s)| \leq 2\mathbb{N}, \quad |k| \leq 2r, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

для всех $s \in R_n$.

Отметим, что в силу [18, лемма 3] для нормы псевдодифференциального оператора $\Phi_m^{(k)}$ имеет место следующее неравенство:

$$\|\Phi_m^{(k)}\|_p \leq M_p \sup_{s \in R_n} |s^k L_m^{-1}(s)|.$$

Отсюда и из (16) следует, что

$$\|\psi_m b_k(x^{(m,k)})\Phi_m^{(k)}\psi_m\|_p \leq 2\mathbb{N} \quad (17)$$

для всех $|k| \leq 2r$, $m = 1, 2, \dots$.

В силу доказанных неравенств (14), (17) из (13) получим следующую оценку для нормы оператора $\mathbb{F}_*^{(k)}$:

$$\|\mathbb{F}_*^{(k)}\|_p \leq M_{1,p}(\mathbb{M}_1 + 2\mathbb{N}). \quad (18)$$

Переходим к оценке нормы оператора (см. (12)) $\mathbb{F}_{**}^{(k)}$. Так как

$$[b_k D^k, \psi_m] = b_k(x) D^k(\psi_m(x)) - \psi_m(x) b_k(x) D^k,$$

имеет место представление

$$\mathbb{F}_{**}^{(k)} = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{\substack{k'+k''=k, \\ k' \neq 0}} C(k', k'') b_k(x) \psi_m^{(k')} \Phi_m^{(k'')} \psi_m,$$

где $C(k', k'')$ — постоянные числа, $\psi_m^{(k')}(x) = D_x^{k'} \psi_m(x)$ и $\Phi_m^{(k'')}$ — псевдодифференциальный оператор в R_n с символом $s^{k''} L_m^{-1}(s)$. Отсюда в силу [18, лемма 2] следует, что

$$\|\mathbb{F}_{**}^{(k)}\|_p \leq \Lambda^{1/p}(n, \lambda) \sum_{\substack{k'+k''=k, \\ k' \neq 0}} \mathbb{C}_{(k', k'')}^{(k)}, \quad (19)$$

где

$$\mathbb{C}_{(k', k'')}^{(k)} = \sup_{m=1, 2, \dots} \|b_k(x) \psi_m^{(k')} \Phi_m^{(k'')} \psi_m\|_p. \quad (20)$$

В силу [18, лемма 3] имеем

$$\|b_k(x) \psi_m^{(k')} \Phi_m^{(k'')} \psi_m\|_p \leq \sup_{x \in \text{supp } \psi_m} \sup_{s \in R_n} |\psi_m^{(k')}(x) b_k(x) s^{k''} L_m^{-1}(s)|.$$

Применяя неравенство (15) и п. 3 леммы 1, получим

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in \text{supp } \psi_m} \sup_{s \in R_n} |\psi_m^{(k')}(x) b_k(x) s^{k''} L_m^{-1}(s)| \\ & \leq M_{21} \sup_{x \in \text{supp } \psi_m} \sup_{s \in R_n} |b_k(x) g_1^{k'_1}(x) g_2^{k'_2}(x) \dots g_n^{k'_n}(x) s^{k''} L_m^{-1}(s)| \\ & \leq M_{22} \sup_{x \in \text{supp } \psi_m} \sup_{s \in R_n} |b_k(x) g_1^{k'_1}(x) g_2^{k'_2}(x) \dots g_n^{k'_n}(x) s^{k''} L^{-1}(x, s)|. \end{aligned}$$

Отсюда в силу условия (3) следует, что

$$\sup_{x \in \text{supp } \psi_m} \sup_{s \in R_n} |\psi_m^{(k')}(x) b_k(x) s^{k''} L_m^{-1}(s)| \leq M_{22} \mathbb{N} < +\infty.$$

Таким образом (см. (19), (20)), существует конечное положительное число $\mathbb{M}_{2,p}$, $1 < p < +\infty$, такое, что

$$\|\mathbb{F}_{**}^{(k)}\|_p \leq \mathbb{M}_{2,p} \quad (21)$$

для всех мультииндексов k таких, что $|k| \leq 2r$.

В силу представления (11) из (18), (21) следует неравенство (10).

Пусть $u(x)$ — произвольная функция из класса $C_0^\infty(\Omega)$. Тогда существует функция (см. (8)) $v(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $Fv = u$. Используя равенство (7),

имеем $Lu = LFv = (E + \Gamma)v$. Так как $\Gamma \in \mathcal{L}_p[\Omega]$ и $\|\Gamma\|_p \leq 1/2$, то $v = (E + \Gamma)^{-1}Lu$. Отсюда и из неравенства (10) имеем

$$\begin{aligned} \|b_k D^k u; L_p(\Omega)\| &= \|b_k D^k Fv; L_p(\Omega)\| \leq C_{1,p} \|v; L_p(\Omega)\| \\ &= C_{1,p} \|(E + \Gamma)^{-1}Lu; L_p(\Omega)\| \leq C_{1,p} \|(E + \Gamma)^{-1}\|_p \|Lu; L_p(\Omega)\|. \end{aligned}$$

Так как $(E + \Gamma)^{-1}$ — ограниченный оператор, то

$$\|b_k D^k u; L_p(\Omega)\| \leq C_{2,p} \|Lu; L_p(\Omega)\| \quad (u \in C_0^\infty(\Omega)), \quad (22)$$

где $C_{2,p}$ — положительная постоянная. Следовательно,

$$\sum_{|k| \leq 2r} \|b_k(x) D_x^k u(x); L_p(\Omega)\| \leq \mathbb{M} \|L(x, D_x)u(x); L_p(\Omega)\|$$

для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$, т. е. неравенство (6) в случае $u \in C_0^\infty(\Omega)$ доказано.

Таким образом, первая часть утверждения основной теоремы доказана. Для доказательства второй части вводим пространство $\mathcal{W}_{p,L}(\Omega)$, которое состоит из всех функций $u(x) \in L_p(\Omega)$ таких, что $L(x, D_x)u(x) \in L_p(\Omega)$. Норма в $\mathcal{W}_{p,L}(\Omega)$ определяется равенством

$$\|u; \mathcal{W}_{p,L}(\Omega)\| = \left\{ \int_{\Omega} |u(x)|^p dx + \int_{\Omega} |L(x, D_x)u(x)|^p dx \right\}^{1/p}.$$

Если $L(x, s) \in B(\tau, \vec{g}, \Omega)$ и $0 < \tau < \tau_0$, где $\tau_0 = \tau_0(n, r, p, \kappa) > 0$ — такое же положительное число, как в [18, теорема 1], то согласно этой теореме замыкание $L_{(p)}$ оператора $L = L(\cdot, D)$, $D(L) = C_0^\infty(\Omega)$, в пространстве $L_p(\Omega)$ существует. Пусть $u \in D(L_{(p)})$. Тогда существует последовательность функций $u_1(x), u_2(x), \dots$ из класса $C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $u_j \xrightarrow{p} u$, $Lu_j \xrightarrow{p} L_{(p)}u$. Из (22) следует, что

$$\|b_k D^k(u_i - u_j); L_p(\Omega)\| \leq C_{2,p} \|L(u_i - u_j); L_p(\Omega)\|. \quad (23)$$

Поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\|D^k(u_i - u_j); L_p(\Omega_\varepsilon)\| \longrightarrow 0 \quad (i, j \longrightarrow +\infty), \quad (24)$$

где $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : |b_k(x)| > \varepsilon\}$. Так как $u_j \xrightarrow{p} u$, из (24) следует, что в Ω_ε существует обобщенная производная $D_x^k u(x)$ в смысле С. Л. Соболева. Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и непрерывности коэффициентов $b_k(x)$, $|k| \leq 2r$, следует, что обобщенная производная $D_x^k u(x)$ в смысле С. Л. Соболева существует в множестве $\Omega_0 = \{x \in \Omega : b_k(x) \neq 0\}$. Учитывая это и переходя к пределу при $j \longrightarrow +\infty$ в неравенстве (23), получим

$$\|b_k D^k u - b_k D^k u_i; L_p(\Omega_\varepsilon)\| \leq C_{2,p} \|L(u - u_i); L_p(\Omega)\|.$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем

$$\|b_k D^k u - b_k D^k u_i; L_p(\Omega)\| \leq C_{2,p} \|L(u - u_i); L_p(\Omega)\|.$$

Следовательно, если переходить к пределу при $j \rightarrow +\infty$ в неравенстве

$$\sum_{|k| \leq 2r} \|b_k(x) D_x^k u_i(x); L_p(\Omega)\| \leq \mathbb{M} \|L(x, D_x) u_i(x); L_p(\Omega)\|,$$

то получим неравенство (6) для всех $u \in D(L_{(p)})$.

Ниже докажем, что в условиях теоремы найдется число $t_0 = t(r, n, p, \varkappa)$ такое, что если $0 < \tau < t_0$ и $L(x, s) \in \mathbb{B}(\tau, \vec{g}, \Omega)$, то

$$D(L_{(p)}) = \mathcal{W}_{p,L}(\Omega). \quad (25)$$

Поэтому в этом случае неравенство (6) имеет место для всех $u(x) \in L_p(\Omega)$ таких, что $L(x, D_x)u(x) \in L_p(\Omega)$. Таким образом, для завершения доказательства основной теоремы осталось доказать равенство (25).

Обозначим через $L'(x, s)$ символ дифференциального выражения $L'(x, D_x)$, сопряженного к дифференциальному выражению $L'(x, D_x)$. Непосредственными вычислениями можно убедиться в том, что если $L(x, s) \in \mathbb{B}(\tau, \vec{g}, \Omega)$, $0 < \tau < \mu$, где μ — некоторое малое число, зависящее только от r и n , то $L'(x, s) \in B(\frac{8\tau}{\mu}, \vec{g}, \Omega)$. Если же при этом выполняется неравенство (5), то

$$\sum_{|k| \leq 2r} |a'_k(x) s^k| \leq \varkappa' |L'(x, s)| \quad (x \in \Omega, s \in R_n),$$

где $\varkappa' = 4\varkappa + 3$ и $a'_k(x)$ — коэффициенты символа $L'(x, s)$.

Таким образом, к дифференциальным операторам $L = L(x, D_x)$, $D(L) = C_0^\infty(\Omega)$, и $L' = L'(x, D_x)$, $D(L') = C_0^\infty(\Omega)$, можно применить результаты работы [18], согласно которым можно подобрать положительное число $t_1 = t_1(r, n, p, \varkappa)$ такое, что если $L(x, s) \in \mathbb{B}(\tau, \vec{g}, \Omega)$, то (см. [18, с. 21, 22])

$$R(L_{(p)}) = L_p(\Omega), \ker L_{(p)} = \emptyset; \quad R(L'_{(q)}) = L_q(\Omega), \ker L'_{(q)} = \emptyset, \quad 1/p + 1/q = 1.$$

Отсюда в силу [2, лемма 2.6, п. (в)] следует равенство $(L'_{(q)})^* = L_{(p)}$. Поэтому из [2, лемма 2.6, п. (г)] следует, что $u(x) \in D((L'_{(q)})^*) = D(L_{(p)})$ тогда и только тогда, когда $u(x) \in L_p(\Omega)$ и обобщенная функция

$$(L(x, D_x)u)(x) = \sum_{|k| \leq 2r} a_k(x) D_x^k u(x)$$

принадлежит пространству $L_p(\Omega)$, т. е. имеет место равенство (25).

Основная теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
2. Бойматов К. Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения // Тр. МИАН СССР. 1984. Т. 170. С. 37–76.
3. Anderson T. G., Hinton D. B. Relative boundedness and compactness theory for second-order differential operators // J. Inequal. Appl. 1997. V. 1. P. 375–400.
4. Binding P., Hryntiv R. Relative boundedness and relative compactness for linear operators in Banach space // Proc. Amer. Math. Soc. 2000. V. 128, N 8. P. 2287–2290.

5. Отелбаев М. О разделимости эллиптических операторов // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234. № 3. С. 540–543.
6. Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости эллиптических уравнений в R^n // Тр. МИАН СССР. 1983. Т. 161. С. 195–217.
7. Muratbekov M., Otelbaev M. On the existence of a resolvent and separability for a class of singular hyperbolic type differential operators on an unbounded domain // Euras. Math. J. 2016. V. 7, N 1. P. 50–67.
8. Бойматов К. Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения к крайевым задачам // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247, № 3. С. 532–536.
9. Бойматов К. Х. Теоремы разделимости // Докл. АН СССР. 1973, Т. 213, № 5. С. 1009–1011.
10. Зорин А. В. Метод исследования существенного и дискретного спектра оператора Гамильтона водородоподобного атома в квантовой механике Курьшикина // Вестн. РУДН. Сер. Прикладная и компьютерная математика. 2004. Т. 3, № 1. С. 121–131.
11. Brown R. C., Hinton D. B. Relative form boundedness and compactness for a second-order differential operator // J. Comput. Appl. Math. 2004. V. 171. P. 123–140.
12. Тригуб Р. М. О сравнении линейных дифференциальных операторов // Мат. заметки. 2007. Т. 82, вып. 3. С. 426–440.
13. Behncke H., Nyamwala F. O. Spectral analysis of higher order differential operators with unbounded coefficients // Math. Nachr. 2012. V. 285, N 1. P. 56–73.
14. Brown R. C. Separation and disconjugacy // J. Inequal. Pure Appl. Math. 2003. V. 4, N 3. Art. 56. P. 1–16.
15. Ospanov K. N., Akhmetkaliyeva R. D. Separation and the existence theorem for second order nonlinear differential equation // Electr. J. Quantat. Theory Diff. Equ. 2012. N 66. P. 1–12.
16. Zayed E. M. E., Omeran S. A. Separation for triple-harmonic differential operator in Hilbert space // Int. J. Math. Combin. 2010. V. 4. P. 13–23.
17. Qi J., Sun H. Relatively bounded and relatively compact perturbations for limit circle Hamiltonian systems // Integr. Equ. Oper. Theory. 2016. DOI 10.1007/s00020-016-2325-y.
18. Гадоев М. Г., Исмоков Ф. С. Об обратимости одного класса вырождающихся дифференциальных операторов в лебеговом пространстве // Мат. заметки СВФУ. 2016. Т. 23, № 3. С. 3–26.
19. Лизоркин П. И. Оценки смешанных и промежуточных производных в весовых L_p -нормах // Тр. МИАН СССР. 1980. Т. 156. С. 130–142.
20. Гадоев М. Г., Исмоков Ф. С. О некоторых функциональных пространствах, норма которых задается с помощью дифференциального оператора // Тр. междунар. летней математической школы-конференции С. Б. Стечкина по теории функций. Душанбе. 2016. С. 82–84.

Статья поступила 19 января 2018 г.

Гадоев Махмадрахим Гафурович,
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
Политехнический институт (филиал) в г. Мирном,
ул. Тихонова, 5/1, Мирный 678170, Республика Саха (Якутия)
gadoev@rambler.ru

Исмоков Фаридун Сулаймонович,
Институт математики имени А. Джураева АН Республики Таджикистан,
ул. Айни, 299/4, Душанбе, 734063, Республика Таджикистан
fariduniskhokov@mail.ru

ON RELATIVE BOUNDEDNESS OF A CLASS
OF DEGENERATE DIFFERENTIAL
OPERATORS IN THE LEBESGUE SPACE
M. G. Gadoev and F. S. Iskhokov

Abstract: In the space $L_p(\Omega)$, where $1 < p < +\infty$ and Ω is an arbitrary (bounded or unbounded) domain in $\mathbb{R}_n$, we investigate relative boundedness for a class of higher order partial differential operators in non-divergent form. These operators have non-power degeneracy on the whole boundary of Ω and degeneracy with respect to each of independent variables is characterized by different functions.

In the earlier published papers in this direction, as a rule, firstly the operator is defined in Ω and then functions characterizing degeneracies of the operator's coefficients are defined in this domain.

In contrast to that, here we define Ω and these functions related to each other while fulfilling the “immersion condition” introduced by P. I. Lizorkin in [19]. In addition, differentiability of the functions by which we define degeneracy of the investigated operator is not required.

Study of relative boundedness of differential operators is one of the modern directions in such operators theory with results having a wide range of applicability to the imbedding theory of differentiable functions of many variables, the separation theory of differential operators, the spectral theory of differential operators, etc.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.1.12764

Keywords: partial differential operator, non-power degeneracy, relative boundedness of operators, partition of the unit.

REFERENCES

1. Kato T., *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1995).
2. Boimatov K. Kh., “Separability theorems, weighted spaces and their applications [in Russian],” *Tr. Mat. Inst. Steklova*, **170**, 39–81 (1987).
3. Anderson T. G. and Hinton D. B., “Relative boundedness and compactness theory for second-order differential operators,” *J. Inequal. Appl.*, **1**, 375–400 (1997).
4. Binding P. and Hryntiv R., “Relative boundedness and relative compactness for linear operators in Banach space,” *Proc. Amer. Math. Soc.*, **128**, No. 8, 2287–2290 (2000).
5. Otelbaev M., “On separation of elliptic operators [in Russian],” *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **234**, No. 3, 540–543 (1977).
6. Otelbaev M., “Coercive estimates and separation theorems of elliptic operators in $\mathbb{R}^n$ [in Russian],” *Tr. Mat. Inst. Steklova*, **161**, 195–217 (1983).
7. Muratbekov M. and Otelbaev M., “On the existence of a resolvent and separability for a class of singular hyperbolic type differential operators on an unbounded domain,” *Euras. Math. J.*, **7**, No. 1, 50–67 (2016).
8. Boimatov K. Kh., “Separability theorems, weighted spaces and their applications to boundary value problems [in Russian],” *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **247**, No. 3, 532–536 (1979).

9. Boimatov K. Kh., "Separation theorems [in Russian]," Dokl. Akad. Nauk SSSR, **213**, No. 5, 1009–1011 (1973).
10. Zorin V. A., "Method of investigation of essential and discrete spectra of Hamiltonian operator of hydrogen-like atom in quantum mechanics of Kuryshkin," Vestn. Ross. Univ. Druzhby Narodov, Ser. Prikl. Comput. Mat., **3**, No. 1, 121–131 (2004).
11. Brown R. C. and Hinton D. B., "Relative form boundedness and compactness for a second-order differential operator," J. Comput. Appl. Math., **171**, 123–140 (2004).
12. Trigub R. M., "Comparison of linear differential operators," Math. Notes, **82**, No. 3, 380–394 (2007).
13. Behncke H. and Nyamwala F. O., "Spectral analysis of higher order differential operators with unbounded coefficients," Math. Nachr., **285**, No. 1, 56–73 (2012).
14. Brown R. C., "Separation and disconjugacy," J. Inequal. Pure Appl. Math., **4**, No. 3, paper 56, 1–16 (2003).
15. Ospanov K. N. and Akhmetkaliyeva R. D., "Separation and the existence theorem for second order nonlinear differential equation," Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., **66**, 1–12 (2012).
16. Zayed E. M. E. and Omran S. A., "Separation for triple-harmonic differential operator in Hilbert space," Int. J. Math. Comb., **4**, 13–23 (2010).
17. Qi J. and Sun H., "Relatively bounded and relatively compact perturbations for limit circle Hamiltonian systems," Integr. Equ. Oper. Theory (2016). DOI 10.1007/s00020-016-2325-y.
18. Gadoev M. G. and Iskhokov F. S., "On invertibility of a class of degenerate differential operators in the Lebesgue space," Math. Zamet. SVFU, **23**, No. 3, 3–26 (2016).
19. Lizorkin P. I., "Estimate of mixed and intermediate derivatives in weighted L_p -norms [in Russian]," Tr. Mat. Inst. Steklova, **156**, 141–153 (1983).
20. Gadoev M. G. and Iskhokov F. S., "On some functional spaces, which norms are given by differential operators," in: Proc. Int. Summer Math. Stechkin School-Conf. Function Theory (Dushanbe, Tajikistan, Aug. 15–25, 2016), 82–84 (2016).

Submitted January 19, 2018

Makhmadrakhim G. Gadoev
North-Eastern Federal University,
Mirny Polytechnic Institute (branch),
5/1 Tikhonov Street, Mirny 678170, Yakutia, Russia
gadoev@rambler.ru

Faridun S. Iskhokov
Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan,
A. Dzhuraev Mathematical Institute,
299/4 Aini Street, Dushanbe 734063, Tajikistan
fariduniskhokov@mail.ru

ФРЕДГОЛЬМОВА РАЗРЕШИМОСТЬ ПЕРВОЙ
КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА
СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

И. Е. Егоров, Е. С. Ефимова, И. М. Тихонова

Аннотация. В цилиндрической области пространства R^{n+1} для уравнения смешанного типа второго порядка со спектральным параметром изучается первая краевая задача. Для уравнений смешанного типа второго порядка ранее были получены лишь результаты разрешимости различных краевых задач в двумерной области. Постановку корректной краевой задачи для уравнений смешанного типа впервые предложил В. Н. Врагов. Одним из условий корректности является условие неотрицательности спектрального параметра. В этой работе анализируется случай комплексного спектрального параметра. При определенных условиях на коэффициенты уравнения получены априорные оценки. С их помощью доказана теорема существования и единственности решения первой краевой задачи в энергетическом классе. Получены достаточные условия фредгольмовой разрешимости первой краевой задачи в энергетическом классе.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.1.12765

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, априорная оценка, условия ортогональности.

Фредгольмова разрешимость краевых задач для уравнений смешанного типа со спектральным параметром изучалась во многих работах [1–14]. В основном интересные результаты были получены для модельных уравнений смешанного типа со спектральным параметром на плоскости [1, 4, 5]. При этом установлены теоремы единственности решений краевых задач для уравнений смешанного типа со спектральным параметром, найдены собственные значения и собственные функции этих задач для специальных областей на плоскости. Наиболее полную библиографию по данной теме можно найти в [1, 2, 4, 5, 9].

Исследование спектральных задач, возникающих при исследовании разрешимости локальных и нелокальных краевых задач, представляется актуальным, поскольку возникающие задачи имеют особенности, не позволяющие применить известные результаты.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (договор № 16-31-00430).

В данной работе исследуется первая краевая задача для уравнения смешанного типа второго порядка со спектральным параметром в многомерном случае. При этом спектральный параметр является комплексным числом.

Пусть Ω — ограниченная область в R^n с границей $S \in C^1$, $\Omega_t = \Omega \times \{t\}$ для $0 \leq t \leq T$, $S_T = S \times (0, T)$, $Q = \Omega \times (0, T)$.

В цилиндрической области Q рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu - \lambda u = f(x, t), \quad (1)$$

где

$$Lu \equiv k(x, t)u_{tt} - \Delta u + a(x, t)u_t + c(x)u,$$

$\lambda \in C$, $u = \operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u$.

Будем предполагать, что коэффициенты дифференциального оператора L — вещественные достаточно гладкие функции в $\overline{Q}$.

Введем множества

$$P_0^\pm = \{(x, 0) : k(x, 0) \gtrless 0, x \in \Omega\}, \quad P_T^\pm = \{(x, T) : k(x, T) \gtrless 0, x \in \Omega\}.$$

Краевая задача. Найти решение уравнения (1) в области Q такое, что

$$u|_{S_T} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{P_0^+} = 0, \quad u|_{P_T^-} = 0. \quad (2)$$

Пусть C_L — класс комплекснозначных функций из $W_2^2(Q)$, удовлетворяющих условиям (2). Через C_{L^*} обозначим класс комплекснозначных функций из $W_2^2(Q)$, удовлетворяющих сопряженным краевым условиям

$$v|_{S_T} = 0, \quad v|_{P_0^-} = 0, \quad v|_{t=T} = 0, \quad v_t|_{P_T^+} = 0, \quad (2^*)$$

причем

$$L^*v \equiv k(x, t)v_{tt} - \Delta v + a^*v_t + c^*v, \quad v \in C_{L^*},$$

$$a^* = 2k_t - a, \quad c^* = c + k_{tt} - a_t.$$

Рассмотрим известное пространство Соболева $W_2^1(Q)$ [15] со скалярным произведением

$$(u, v)_1 = \int_Q \left[u\bar{v} + \sum_{i=1}^n u_{x_i} \bar{v}_{x_i} + u_t \bar{v}_t \right] dQ, \quad \|u\|_1^2 = (u, u)_1 \quad \forall u, v \in W_2^1(Q),$$

и пространство $L_2(Q)$, в котором

$$(u, v) = \int_Q u\bar{v} dQ, \quad \|u\|^2 = (u, u), \quad u, v \in L_2(Q).$$

Пусть $\widehat{W}_2^1(Q)$ (соответственно $\widehat{W}_2^1(Q)$) — пополнение класса C_L (C_{L^*}) по норме пространства Соболева $W_2^1(Q)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функцию $u \in L_2(Q)$ будем называть *сильным решением краевой задачи* (1), (2), если существует последовательность функций $u_m \in C_L$ такая, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m - u\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|Lu_m - \lambda u_m - f\| = 0, \quad f \in L_2(Q).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $u(x, t) \in \widetilde{W}_2^1(Q)$ называется *обобщенным решением первой краевой задачи* (1), (2), если выполнено интегральное тождество

$$a(u, v) - \lambda(u, v) = (f, v) \quad (3)$$

для любых $v \in \widetilde{W}_2^1(Q)$, $f \in L_2(Q)$ и

$$a(u, v) \equiv \int_Q \left[-ku_t \bar{v}_t + \sum_{k=1}^n u_{x_k} \bar{v}_{x_k} + (a - k_t)u_t \bar{v} + cu \bar{v} \right] dQ.$$

Аналогично даются определения сильного решения и обобщенного решения сопряженной краевой задачи для уравнения

$$L^*v - \bar{\lambda}v = g, \quad g \in L_2(Q),$$

с краевыми условиями (2*).

В силу равенства

$$(Lu, v) = (u, L^*v), \quad u \in C_L, \quad v \in C_{L^*},$$

оператор L с областью определения C_L допускает замыкание $\bar{L} = A$ в пространстве $L_2(Q)$. Для положительных чисел δ_1, μ и c_0 введем множество

$$D(\delta_1, \mu, c_0) = \{\lambda \in C : \operatorname{Re} \lambda \leq c_0 - \delta_1^{-1} \mu^2 (\operatorname{Im} \lambda)^2, \operatorname{Re} \lambda \leq 0\}.$$

Лемма 1. Пусть коэффициент $c(x)$ достаточно большой и выполнены условия

$$k(x, T) < 0, \quad c(x) \geq 2c_0, \quad a - \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0.$$

Тогда существуют положительные числа δ_1, μ и при $\lambda \in D(\delta_1, \mu, c_0)$ имеет место неравенство

$$\|u\|_1 \leq c_2 \|Au - \lambda u\|, \quad c_2 > 0, \quad (4)$$

для всех функций $u \in D(A - \lambda E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой функции $u \in C_L$ рассмотрим выражение

$$\int_Q (Lu - \lambda u)(\varphi(t)\bar{u}_t + \psi(t)\bar{u}) dQ,$$

где $\varphi(t), \psi(t)$ — неотрицательные бесконечно дифференцируемые функции. После интегрирования по частям с учетом краевых условий (2) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_Q (Lu - \lambda u)(\varphi\bar{u}_t + \psi\bar{u}) dQ &= \int_Q \left\{ \left[\left(a - \frac{1}{2}k_t \right) \varphi - k \left(\psi + \frac{1}{2}\varphi_t \right) \right] |u_t|^2 \right. \\ &\quad + \left(\psi - \frac{1}{2}\varphi_t \right) \sum_{k=1}^n |u_{x_k}|^2 + \left[-\operatorname{Re} \lambda \left(\psi - \frac{1}{2}\varphi_t \right) + \left(\psi - \frac{1}{2}\varphi_t \right) c \right] |u|^2 \\ &\quad \left. + \varphi \operatorname{Im} \lambda \operatorname{Im}(u\bar{u}_t) + [(a - k_t)\psi - k\psi_t] \operatorname{Re}(u_t\bar{u}) \right\} dQ + I, \quad (5) \end{aligned}$$

где

$$I = \frac{1}{2} \int_{\Omega} k \varphi |u_t|^2 dx \Big|_{t=0}^{t=T}.$$

Выберем число T_0 так, что $-k(x, t) \geq k_0 > 0$, $t \in [T_0, T]$, $T_0 < T$. Будем считать, что $\varphi(t) = \mu > 0$ при $0 \leq t \leq T_0$, $\varphi(T) = 0$ и $\varphi_t \leq 0$. Положим

$$\psi = -\frac{1}{2}\varphi_t + 1.$$

Далее, выберем μ так, чтобы

$$\delta\mu - \max |k| \geq \delta > 0. \quad (6)$$

Тогда в силу условий леммы 1 и неравенства Коши имеем

$$\begin{aligned} \left(a - \frac{1}{2}k_t \right) \varphi - k \left(\psi + \frac{1}{2}\varphi_t \right) &\geq \min\{\delta\mu, k_0\} = \delta_1, \\ \left| \int_Q \varphi \operatorname{Im} \lambda \operatorname{Im}(u \bar{u}_t) \right| &\leq \frac{1}{\delta_1} \mu^2 (\operatorname{Im} \lambda)^2 \int_Q |u|^2 dQ + \frac{\delta_1}{4} \int_Q |u_t|^2 dQ, \\ \left| \int_Q [(a - k_t)\psi - k\psi_t] \operatorname{Re}(u_t \bar{u}) dQ \right| &\leq \frac{\delta_1}{4} \int_Q |u_t|^2 dQ \\ &\quad + \frac{1}{\delta_1} \int_Q [(a - k_t)\psi - k\psi_t]^2 |u|^2 dQ. \end{aligned}$$

Пусть c_0 удовлетворяет условию

$$c_0 - \delta_1^{-1} [(a - k_t)\psi - k\psi_t]^2 \geq \delta_2 > 0.$$

С другой стороны, имеем

$$I = -\frac{1}{2}\mu \int_{P_0^-} k |u_t|^2 dx \geq 0.$$

Тогда при $\lambda \in D(\delta_1, \mu, c_0)$ из соотношения (5) следует априорная оценка (4). Лемма 1 доказана.

Введем множество

$$D^*(\delta_1^*, \mu^*, c_0^*) = D(\delta_1^*, \mu^*, c_0^*)$$

при $k(x, 0) < 0$, $k(x, T) < 0$,

$$D^*(\delta_1^*, \mu^*, c_0^*) = \left\{ \lambda \in C : \operatorname{Re} \lambda \leq c_0^* - \frac{1}{\delta_1^* \mu^*} (\operatorname{Im} \lambda)^2 \right\}$$

при $k(x, 0) \geq 0$, $k(x, T) < 0$.

Лемма 2. Пусть коэффициент $c(x)$ достаточно большой, выполнены условия

$$a - \frac{3}{2}k_t \geq \delta > 0, \quad c^*(x) \geq 2c_0^*$$

и имеет место один из следующих случаев:

$$k(x, 0) < 0, \quad k(x, T) < 0 \quad \text{либо} \quad k(x, 0) \geq 0, \quad k(x, T) < 0.$$

Тогда при $\lambda \in D^*(\delta_1^*, \mu^*, c_0^*)$ имеет место неравенство

$$\|v\|_1 \leq c_2^* \|(A^* - \bar{\lambda}E)v\|, \quad c_2^* > 0, \quad (7)$$

для всех функций $v \in D(A^* - \lambda E)$, причем параметры δ_1^* , μ^* выбираются в зависимости от вышеназванных случаев.

Доказательство. Для функций $v \in C_{L^*}$ после интегрирования по частям с учетом краевых условий (2*) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_Q (L^*v - \bar{\lambda}v)(-\varphi\bar{v}_t + \psi\bar{v}) dQ &= \int_Q \left\{ \left[\left(a - \frac{3}{2}k_t \right) \varphi - k \left(\psi - \frac{1}{2}\varphi_t \right) \right] |v_t|^2 \right. \\ &+ \left(\psi + \frac{1}{2}\varphi_t \right) \sum_{k=1}^n |v_{x_k}|^2 + \left[-\operatorname{Re} \lambda \left(\psi + \frac{1}{2}\varphi_t \right) + \left(\psi + \frac{1}{2}\varphi_t \right) c^* \right] |v|^2 - \varphi \operatorname{Im} \lambda \operatorname{Im}(v\bar{v}_t) \\ &\left. + [(k_t - a)\psi - k\psi_t] \operatorname{Re}(v_t\bar{v}) \right\} dQ + I, \quad (8) \end{aligned}$$

где

$$I = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} k\varphi |v_t|^2 dx \Big|_{t=0}^{t=T}.$$

Рассмотрим случай $k(x, 0) < 0$, $k(x, T) < 0$. Выберем число $t_0 < T$ так, чтобы $-k(x, t) \geq k_1 > 0$, $t \in [0, t_0]$. Пусть функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi_t \geq 0, \quad \varphi(t) = \mu^*, \quad t_0 \leq t \leq T,$$

причем для $\mu^* = \mu$ выполнено (6). Положим $\psi = \frac{1}{2}\varphi_t + 1$.

Снова имеем неравенство

$$\left(a - \frac{3}{2}k_t \right) \varphi - k \left(\psi - \frac{1}{2}\varphi_t \right) \geq \min\{\delta\mu, k_1\} = \delta_1.$$

Будем считать, что для c_0^* выполнено условие

$$c_0^* - (\delta_1^*)^{-1} [(k_t - a)\psi - k\psi_t]^2 \geq \delta_2 > 0.$$

Также имеем

$$I = -\frac{\mu^*}{2} \int_{\Omega_T} k\varphi |v_t|^2 dx \geq 0.$$

Теперь при $\lambda \in D^*(\delta_1, \mu, c_0^*)$ из соотношения (8) получаем априорную оценку (7).

Пусть имеет место случай $k(x, 0) \geq 0$, $k(x, T) < 0$. В равенстве (8) положим $\varphi(t) = e^{2\mu^*t}$, $\psi(t) \equiv 0$. Выбираем $\mu^* > 0$ так, чтобы

$$a - \frac{3}{2}k_t + \mu^*k \geq \frac{\delta}{2} = \delta_1^*.$$

В этом случае снова имеем $I \geq 0$. Тогда априорная оценка (7) следует из (8) для $\lambda \in D^*(\delta_1^*, \mu^*, c_0^*)$. Лемма 2 доказана.

Теорема 1. Пусть выполнены условия лемм 1, 2 и

$$\lambda \in D(\delta_1, \mu, c_0) \cap D^*(\delta_1^*, \mu^*, c_0^*).$$

Тогда для любой функции $f \in L_2(Q)$ существует и притом единственное сильное решение краевой задачи (1), (2) из $D(A - \lambda E)$.

Доказательство. Из априорной оценки (7) следует, что $N(A^* - \bar{\lambda}E) = 0$. Отсюда непосредственно имеем $\overline{R(A - \lambda E)} = L_2(Q)$. С другой стороны, в силу априорной оценки (4)

$$R(A - \lambda E) = \overline{R(A - \lambda E)}.$$

Тогда уравнение $Au - \lambda u = f$ везде разрешимо. Единственность искомого решения следует из леммы 1. Теорема 1 доказана.

Отметим, что сильное решение краевой задачи (1), (2) из $D(A - \lambda E)$, гарантированное теоремой 1, является обобщенным решением краевой задачи (1), (2) из пространства $\tilde{W}_2^1(Q)$.

Краевая задача, сопряженная к задаче (1), (2), имеет вид

$$L^*v - \bar{\lambda}v = g(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (1^*)$$

с краевыми условиями (2*).

Теорема 2. Пусть выполнены условия лемм 1, 2 и

$$\lambda \in D(\delta_1, \mu, c_0) \cap D^*(\delta_1^*, \mu^*, c_0^*).$$

Тогда для любой функции $g \in L_2(Q)$ существует и притом единственное сильное решение краевой задачи (1*), (2*) из $D(A^* - \bar{\lambda}E)$.

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично доказательству теоремы 1.

Следуя [2], введем энергетические классы

$$V_L^1(Q) = D(A - \lambda E), \quad V_{L^*}^1(Q) = D(A^* - \bar{\lambda}E)$$

для операторов

$$A_\lambda = A - \lambda E, \quad A_\lambda^* = A^* - \bar{\lambda}E.$$

Лемма 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда имеет место равенство

$$(A_\lambda^{-1})^* = (A_\lambda^*)^{-1}.$$

Доказательство. В силу теорем 1, 2 справедливо равенство

$$(A_\lambda u, v) = (u, A_\lambda^* v) \quad u \in V_L^1(Q), \quad v \in V_{L^*}^1(Q).$$

В этом равенстве положим

$$\varphi = A_\lambda u, \quad \psi = A_\lambda^* v.$$

На основании теорем 1, 2 оно принимает вид

$$(\varphi, (A_\lambda^*)^{-1}\psi) = (A_\lambda^{-1}\varphi, \psi) = (\varphi, (A_\lambda^{-1})^*\psi), \quad \varphi, \psi \in L_2(Q),$$

откуда

$$(A_\lambda^*)^{-1}\psi = (A_\lambda^{-1})^*\psi, \quad \psi \in L_2(Q).$$

Лемма 3 доказана.

Теорема 3. Пусть выполнены условия лемм 1, 2. Тогда имеют место следующие утверждения.

1. Краевая задача (1), (2) однозначно разрешима в $V_L^1(Q)$ кроме не более чем счетного множества $\{\lambda_k\}$, причем единственной предельной для $\{\lambda_k\}$ точкой может быть $\lambda = \infty$. Наряду с λ_k в спектр краевой задачи (1), (2) входит $\bar{\lambda}_k$. При значениях $\lambda = \lambda_k$ из спектра задачи (1), (2) однородная краевая задача (1), (2) имеет нетривиальные решения в $V_L^1(Q)$, причем каждому λ_k соответствует конечное число n_k линейно независимых решений.

2. Числа $\{\lambda_k\}, \{\bar{\lambda}_k\}$ являются собственными значениями сопряженной краевой задачи (1*), (2*), причем $\bar{\lambda}_k$ имеет кратность n_k и соответствующие собственные функции $v_{k_j}, j = \overline{1, n_k}$, принадлежат V_L^1 . Для разрешимости краевой задачи (1), (2) при $\lambda = \lambda_k$ необходимо и достаточно выполнения условий ортогональности

$$(f, v_{k_j}) = 0, \quad j = \overline{1, n_k}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Краевая задача (1), (2) эквивалентна операторному уравнению

$$A_{\lambda_0} u \equiv Au - \lambda_0 u = (\lambda - \lambda_0)u + f. \quad (9)$$

При

$$\lambda_0 \in D(\delta_1, \mu, c_0) \cap D^*(\delta_1^*, \mu^*, c_0^*)$$

оператор A_{λ_0} по теореме 1 имеет ограниченный обратный $A_{\lambda_0}^{-1}$, действующий из $L_2(Q)$ в $V_L^1(Q)$. Поэтому операторное уравнение (9) эквивалентно уравнению

$$u = (\lambda - \lambda_0)A_{\lambda_0}^{-1}u + A_{\lambda_0}^{-1}f. \quad (10)$$

В силу вполне непрерывности вложения $V_L^1(Q)$ в $L_2(Q)$ заключаем, что $A_{\lambda_0}^{-1}$ — вполне непрерывный оператор из $L_2(Q)$ в $L_2(Q)$. Тем самым доказано утверждение 1 теоремы 3.

Заметим, что сопряженная краевая задача (1*), (2*) эквивалентна операторному уравнению

$$v = (\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0)(A_{\lambda_0}^*)^{-1}v + (A_{\lambda_0}^*)^{-1}g. \quad (11)$$

В силу леммы 3 однородное уравнение (11) является сопряженным к однородному уравнению (10).

Для разрешимости уравнения (9) при $\lambda = \lambda_k$ необходимо и достаточно выполнения условий ортогональности

$$(A_{\lambda_0}^{-1}f, v_{k_j}) = 0, \quad j = \overline{1, n_k}.$$

Отсюда получаем

$$0 = (f, (A_{\lambda_0}^{-1})^* v_{k_j}) = (f, (A_{\lambda_0}^*)^{-1} v_{k_j}) = \frac{1}{\lambda_k - \lambda_0} (f, v_{k_j}).$$

Теорема 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Случаи $k(x, 0) < 0, k(x, T) > 0$ или $k(x, 0) \geq 0, k(x, T) > 0$ рассмотрены в [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Е. И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
2. Кузьмин А. Г. Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1990.
3. Егоров И. Е., Федоров В. Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995.
4. Салахитдинов М. С., Уринов А. Н. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. Ташкент: Изд-во ФАН, 1997.
5. Салахитдинов М. С., Уринов А. Н. К спектральной теории уравнений смешанного типа. Ташкент: Изд-во MUMTOZ SO'Z, 2010.
6. Егоров И. Е. О фредгольмовой разрешимости одной краевой задачи для уравнения смешанного типа // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, вып. 1. С. 55–64.
7. Егоров И. Е., Захарова Т. И. О фредгольмовости краевой задачи для уравнения смешанного типа // Мат. заметки ЯГУ. 2013. Т. 20, вып. 1. С. 20–26.
8. Врагов В. Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 6. С. 1098–1105.
9. Егоров И. Е. О краевой задаче для уравнения смешанного типа со спектральным параметром // Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 1, С. 11–17.
10. Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В. Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.
11. Кальменов Т. Ш. О спектре задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева — Бицадзе // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 8. С. 1418–1425.
12. Егоров И. Е. О фредгольмовости краевой задачи Врагова для уравнения смешанного типа четного порядка // Мат. заметки СВФУ. 2016. Т. 23, № 4, С. 19–28.
13. Егоров И. Е. О фредгольмовой разрешимости первой краевой задачи для уравнения смешанного типа четного порядка // Мат. заметки ЯГУ. 2013. Т. 20, вып. 2. С. 48–56.
14. Капустин Н. Ю., Моисеев Е. И. О сходимости спектральных разложений функций из класса Гельдера для двух задач со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 8. С. 1069–1074.
15. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

Статья поступила 22 января 2018 г.

Егоров Иван Егорович, Ефимова Елена Сергеевна,
Тихонова Ирина Михайловна
Северо-Восточный федеральный университет им М. К. Аммосова,
НИИ математики,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891
IvanEgorov51@mail.ru, OslamE@mail.ru, irinamikh3007@mail.ru

ON FREDHOLM SOLVABILITY OF
FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM
FOR MIXED-TYPE SECOND-ORDER
EQUATION WITH SPECTRAL PARAMETER

I. E. Egorov, E. S. Efimova,
and I. M. Tikhonova

Abstract: We study the first boundary problem for the mixed-type second-order equation with a spectral parameter in a cylindrical domain in $\mathbb{R}^{n+1}$. Previously, for the mixed-type second-order equations some results were received only in two-dimensional domains. V. N. Vragov was the first to propose a well-posed statement of a boundary problem for the mixed-type equations. One of the well-posedness conditions is non-negativity of the spectral parameter. Here we analyze the case of complex spectral parameter and receive a priori estimates under certain conditions, using which an existence and uniqueness theorem is proved for the first boundary problem in the energy class. Also, we obtain sufficient conditions for the Fredholm solvability in the energy class.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.1.12765

Keywords: mixed-type equation, a priori estimate, inequality, equality, orthogonality conditions.

REFERENCES

1. Moiseev E. I., Equations of Mixed Type with Spectral Parameter [in Russian], Izdat. Mosc. Univ., Moscow (1988).
2. Kuz'min A. G., Nonclassical Equations of Mixed Type and their Application to Gas Dynamics [in Russian], Izdat. Leningr. Univ., Leningrad (1990).
3. Egorov I. E. and Fedorov V. E., Nonclassical Higher-Order Equations in Mathematical Physics [in Russian], Izdat. Vychisl. Tsentra SO RAN, Novosibirsk (1995).
4. Salakhitdinov M. S. and Urinov A. N. Boundary Value Problems for Equations of Mixed Type with Spectral Parameter [in Russian], Izdat. FAN, Tashkent (1997).
5. Salakhitdinov M. S. and Urinov A. N., To Spectral Theory of Equations of Mixed Type [in Russian], Izdat. MUMTOZ SO'Z, Tashkent (2010).
6. Egorov I. E., "On Fredholm solvability of boundary value problem for mixed-type equation [in Russian]," Mat. Zamet. YaGU, **18**, No. 1, 55–64 (2011).
7. Egorov I. E. and Zakharova T. I., "On Fredholm property of boundary value problem for mixed-type equations [in Russian]," Mat. Zamet. YaGU, **20**, No. 1, 20–26 (2013).
8. Vragov V. N., "To the theory of boundary value problems for mixed-type equations [in Russian]," Differ. Uravn., **13**, No. 6, 1098–1105 (1977).
9. Egorov I. E., "On a boundary value problem for equation of mixed type with spectral parameter [in Russian]," Mat. Zamet. SVFU, **21**, No. 1, 11–17 (2014).
10. Egorov I. E., Pyatkov S. G., and Popov S. V., Nonclassical Differential-Operator Equations, Nauka, Novosibirsk (2000).

11. *Kalmenov T. Sh.*, “On the spectrum of the Tricomi problem for the Lavrent’ev–Bitsadze equation [in Russian],” *Differ. Uravn.*, **13**, No. 8, 1418–1425 (1977).
12. *Egorov I. E.*, “On the Fredholm property of Vragov boundary value problem for mixed-type equations of even order [in Russian],” *Mat. Zamet. SVFU*, **23**, No. 4, 19–28 (2016).
13. *Egorov I. E.*, “On Fredholm solvability of the first boundary value problem for mixed-type equations of even order [in Russian],” *Mat. Zamet. YaGU*, **20**, No. 2, 48–56 (2013).
14. *Kapustin N. Yu. and Moiseev E. I.*, “On the convergence of spectral expansions of functions from the Hölder class for two problems with spectral parameter in the boundary condition [in Russian],” *Differ. Uravn.*, **36**, No. 8, 1069–1074 (2000).
15. *Ladyzhenskaya O. A.*, *Boundary Value Problems of Mathematical Physics*, Nauka, Moscow (1973).

Submitted January 22, 2018

Ivan E. Egorov, Elena S. Efimova, Irina M. Tikhonova
M. K. Ammosov North-Eastern Federal University,
Institute of Mathematics,
48 Kulakovsky Street, Yakutsk 677891, Russia
`IvanEgorov51@mail.ru`, `OslamE@mail.ru`, `irinamikh3007@mail.ru`

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ
С ВЕРОЯТНОСТЬЮ 1 ДЛЯ НЕКОТОРЫХ
ЗАДАЧ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ
Е. В. Карачанская, А. П. Петрова

Аннотация. Описание динамики некоторых финансовых событий может быть связано со стохастическими дифференциальными уравнениями Ито (СДУ). В работе рассматриваются финансовые модели, которые имеют случайные возмущения, вызванные винеровским и пуассоновским процессами. Построение программных управлений с вероятностью 1 (РСР1) основано на понятии первого интеграла для стохастических динамических систем диффузионного типа со скачками, описываемых уравнениями Ито. В качестве примеров построения РСР1 рассматриваются два вида финансовых моделей: модель инвестиционного портфеля (диффузионная) и модель процентных ставок (диффузионная со скачками). Приведенные примеры сопровождаются численным моделированием.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.1.12766

Ключевые слова: программное управление с вероятностью 1, диффузионное уравнение Ито со скачками, первый интеграл системы уравнений Ито, модель инвестиционного портфеля, модель процентных ставок.

Введение

Поведение реального объекта, функционирующего в условиях естественных шумов, характеризуется некоторой неопределенностью, кроме того, в системах управления сложными системами обычно участвуют люди, для которых характерна некоторая неопределенность поведения. Описание таких систем при помощи детерминистских подходов не всегда отражает действительную картину функционирования объекта [1]. Если детерминированной моделью процесса является дифференциальное уравнение

$$dX(t) = A(t, X(t)) dt,$$

то для получения модели, испытывающей сильные возмущения, вызванные диффузией и скачками, возможно представление в виде обобщенного стохастического дифференциального уравнения Ито (диффузионного уравнения со скачками)

$$dX(t) = A(t, X(t)) dt + B(t, X(t)) dW(t) + \int G(t, X(t), \gamma) \nu(dt, d\gamma), \quad (1)$$

где $W(t)$ — винеровский процесс, $\nu(t, \Delta\gamma)$ — стандартный пуассоновский процесс.

Рассмотрение систем управления с винеровскими и пуассоновскими возмущениями обусловлено наличием белых шумов различной интенсивности и тем фактом, что в случайные моменты времени система может испытывать скачки.

Описание динамики некоторых финансовых событий может быть связано со стохастическими дифференциальными уравнениями Ито (см., например, [2–4]). Область применения СДУ постоянно растет: финансовая математика и экономика, задачи управления [5–7], статистическая физика [8, 9], экология [10], другие открытые системы и т. д.

Обязательное сохранение (с вероятностью 1) необходимых свойств, которые можно рассматривать как первые интегралы стохастических систем [11, 12], при любых сильных возмущениях будет определяться программным управлением с вероятностью 1 [13].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [14]. *Программным управлением с вероятностью 1* (РСР1 — Programmed Control with Probability 1) будем называть такое управление в стохастической системе с сильными возмущениями, которое с вероятностью, равной 1, обеспечивает постоянство характеристик, зависящих от положения системы, в любой момент времени.

1. О построении РСР1 при внесении управления в диффузионную часть

Основу для построения РСР1 дает следующая

Теорема 1 [16]. Пусть $F(t, X, \omega)$ — случайная функция, $F(t, X) \in \mathcal{C}_{t,X}^{1,2}$ и $X(t)$ — решение системы СДУ

$$dX(t) = A(t, X(t))dt + B(t, X(t))dW(t) + \int G(t, X(t), \gamma)\nu(dt, d\gamma), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$X(0) = X_0,$$

где $X \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$; $W(t)$ — m -мерный винеровский процесс; $\nu(t, \Delta\gamma)$ — однородная по t мера Пуассона, винеровские процессы $W_k(t)$ и пуассоновская мера $\nu([0; T], \mathcal{A})$, заданные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{F}_t$ -измеримы для любых $t > 0$ и множества $\mathcal{A}$ из σ -алгебры $\mathfrak{B}$ борелевских множеств пространства $\mathbb{R}^{n'}$ и взаимно независимы. Пусть $H(t, X)$ — матрица следующего вида:

$$H(t, X) = \begin{bmatrix} \vec{e}_0 & \vec{e}_1 & \dots & \vec{e}_n \\ \frac{\partial F(t, X)}{\partial t} & \frac{\partial F(t, X)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F(t, X)}{\partial x_n} \\ f_{20} & f_{21} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n,0} & f_{n,1} & \dots & f_{n,n} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где

$$f_{ij} = f_{ij}(t, X) = \frac{\partial f_i(t, X)}{\partial x_j}, \quad i = \overline{2, n}, \quad j = \overline{1, n}, \quad f_{i0} = f_{i0}(t, X) = \frac{\partial f_i(t, X)}{\partial t}$$

— произвольные функции. Если случайная функция $F(t, \mathbf{x}, \omega)$ является стохастическим первым интегралом системы (2), то коэффициенты уравнения (2) и неслучайная функция $F(t, X)^{1)}$ связаны следующими соотношениями:

1) коэффициенты

$$B_k(t, X) = \sum_{i=1}^n b_{ik}(t, X) \vec{e}_i, \quad k = \overline{1, m},$$

— столбцы матрицы $B(t, X)$ — принадлежат множеству функций $B_k(t, X) \in \{q_{00} \cdot \det M(t, X)\}$, где $M(t, X)$ — минор, соответствующий элементу $h_{n+1,0}$ матрицы (3);

2) коэффициент $A(t, X)$ принадлежит множеству функций, определяемых условием

$$A(t, X) \in \left\{ R(t, X) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial B_k(t, X)}{\partial X} \right] \cdot B_k(t, \mathbf{x}) \right\},$$

где $R(t, X)$ — матрица-столбец, компоненты которой $r_i(t, \mathbf{x})$, $i = \overline{1, n}$, определяются следующим образом:

$$C^{-1}(t, X) \cdot \det H(t, X) = \vec{e}_0 + \sum_{i=1}^n r_i(t, X) \vec{e}_i;$$

$C(t, X)$ — алгебраическое дополнение элемента $\vec{e}_0$ матрицы $H(t, X)$ и $\det C(t, X) \neq 0$; $\left[\frac{\partial B_k(t, X)}{\partial X} \right]$ — матрица Якоби для векторной функции $B_k(t, X)$;

3) коэффициент

$$G(t, X, \gamma) = \sum_{i=1}^n g_i(t, X, \gamma) \vec{e}_i$$

при пуассоновской мере определяется представлением

$$G(t, X, \gamma) = Y(t, X, \gamma) - X,$$

где $Y(t, X, \gamma)$ — решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial Y(\cdot, \gamma)}{\partial \gamma} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial F(t, Y(\cdot, \gamma))}{\partial Y_1} & \frac{\partial F(t, Y(\cdot, \gamma))}{\partial Y_2} & \cdots & \frac{\partial F(t, Y(\cdot, \gamma))}{\partial Y_n} \\ \varphi_{31}(t, Y(\cdot, \gamma)) & \varphi_{32}(t, Y(\cdot, \gamma)) & \cdots & \varphi_{3n}(t, Y(\cdot, \gamma)) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1}(t, Y(\cdot, \gamma)) & \varphi_{n2}(t, Y(\cdot, \gamma)) & \cdots & \varphi_{nn}(t, Y(\cdot, \gamma)) \end{bmatrix},$$

удовлетворяющее начальному условию $Y(t, X, \gamma)|_{\gamma=0} = X$.

Относительно произвольных функций $f_{ij} = f_{ij}(t, X)$, $\varphi_{ij} = \varphi_{ij}(t, Y(\cdot, \gamma))$ полагаем, что они выбраны таким образом, чтобы каждое семейство функций $\{f_i\}$, $\{\varphi_i\}$, определяемое условиями

$$f_{ij}(t, X) = \frac{\partial f_i(t, X)}{\partial x_j}, \quad \varphi_{ij}(t, Y(\cdot, \gamma)) = \frac{\partial \varphi_i(t, Y(\cdot, \gamma))}{\partial Y_j},$$

¹⁾ В случае, когда рассматриваем конкретную реализацию, т. е. параметр ω в дальнейшем не влияет, неслучайную функцию $F(t, X)$ можно считать детерминированным первым интегралом стохастической системы.

составляло вместе с функцией $F(t, X)$ совокупность независимых функций.

Ранее рассмотренные задачи построения РСР1 относились к задачам с управлением в детерминированной части, при этом множители при винеровском процессе определялись при построении системы стохастических дифференциальных уравнений [13, 14]. Особенностью большинства стохастических моделей в экономике является то, что в них известен коэффициент диффузии (дисперсия волатильности). В финансовых моделях управление часто входит и в диффузионную часть:

$$dX_i(t) = \alpha(t, X(t), u(t, X(t))) dt + \sum_{k=1}^m \beta_{ik}(t, X(t), u(t, X(t))) dW_k(t) + \int g_i(t, X(t), \gamma) \nu(dt, d\gamma), \quad i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

что связано с возможностью регулирования волатильности, поэтому рассмотрим задачи построения программного управления с вероятностью 1 для подобных финансовых моделей.

Теорема 2. Пусть случайный процесс $X(t) = \|X_i(t)\| \in \mathbb{R}^n$ является решением системы уравнений вида (4), где $W(t) = \|W_k(t)\|$, $W_k(t)$, $k = 1, \dots, m$, — одномерные независимые винеровские процессы, $\nu(t, \Delta)$ — стандартная пуассоновская мера, $A(t, x) = \|A_i(t, x)\|$, $A_i(t, x) \in \mathcal{C}_{t,x}^{1,2}$, $B(t, x) = \|B_{ik}(t, x)\|$, $B_{ik}(t, x) \in \mathcal{C}_{t,x}^{1,2}$, $G(t, x, \gamma) = \|G_i(t, x, \gamma)\|$, $G_i(t, x, \gamma) \in \mathcal{C}_{t,x,\gamma}^{1,2,1}$. Если функция $F(t, X(t))$, $F(t, x) \in \mathcal{C}_{t,x}^{1,2}$, должна при любых t принимать значение, равное $F(t_0, X(t_0))$, на любых траекториях решений уравнения (4), то возможно построение программных управлений с вероятностью 1 для этой системы. При этом максимальное число управлений детерминированной частью равно n , максимальное число управлений диффузионной части — nm .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для построения программного управления с вероятностью 1 в экономической модели вида (4) необходимо внесение управления одновременно в стохастическую и детерминированную части. Функцию $F(t, X(t))$ будем интерпретировать как первый интеграл этой системы уравнений Ито [15]. Систему (4) можно записать в векторной форме

$$dX(t) = \alpha(t, X(t), u(t, X(t))) dt + \beta(t, X(t), u(t, X(t))) dW(t) + \int g(t, \mathbf{x}(t), \gamma) \nu(dt, d\gamma). \quad (5)$$

По известной функции $F(t, X(t))$, трактуемой как первый интеграл системы СДУ Ито [15], строится система уравнений в соответствии с теоремой 1:

$$dX(t) = A(t, X(t)) dt + B(t, X(t)) dW(t) + \int G(t, X(t), \gamma) \nu(dt, d\gamma). \quad (6)$$

Сопоставление коэффициентов уравнений (6) и (5) (в силу выполнения условий существования и единственности решения СДУ (6)) позволяет определить искомые управления. В системе (6) определяются как коэффициенты в

детерминированной части, так и коэффициенты в диффузионной части. Для возможности применения теоремы 1 без изменения при этом смысла исходной управляемой системы необходимо введение управления в детерминированную часть всех n уравнений. Таким образом, максимальное количество управлений для детерминированной части равно n . В стохастической части вектор-столбец $B(t, X(t))$ с n элементами умножается на m -мерный винеровский процесс $W(t)$. Рассуждая аналогично предыдущему, можно обнаружить, что общее количество слагаемых в стохастической части будет равно nm . Таким образом, максимальное количество управлений в нем будет nm . $\square$

2. Управление инвестиционным портфелем

Рассматривается возможность применения программного управления с вероятностью 1 [14] для задачи финансовой математики. Для стратегии дублирования модели ведения бизнеса и дублирующего портфеля, полученной из классической модели Блэка — Шоулза [4] и представленной системой стохастических уравнений Ито

$$\begin{aligned} dS(t) &= [\mu_1(t, S(t), Y(t)) + Z_1(t, S(t), Y(t))] dt \\ &\quad + [\sigma_1(t, S(t), Y(t)) + Z_3(t, S(t), Y(t))] dW(t), \\ dY(t) &= [\mu_2(t, S(t), Y(t)) + Z_2(t, S(t), Y(t))] dt \\ &\quad + [\sigma_2(t, S(t), Y(t)) + Z_4(t, S(t), Y(t))] dW(t), \end{aligned} \quad (7)$$

где $W(t)$ — стандартный винеровский процесс, $Y(t) = X^\pi(t)$ — динамика инвестиционного портфеля $X(t)$ при заданной стратегии π , $S(t)$ — цена акций, $\mu_i(t, S(t), Y(t))$, $\sigma_i(t, S(t), Y(t))$, $i = 1, 2$, — заданные функции, необходимо построить РСР1 такое, что для любого t

$$F(t, S(t), Y(t)) = F(0, S(0), Y(0))$$

для заданной функции $F(t, S(t), Y(t))$.

В соответствии с теоремой 3.9 из [14] сначала построим систему стохастических дифференциальных уравнений, в качестве первого интеграла которой возьмем нужную функцию, например, пусть

$$F(t, s, y) = ye^{-2s} \text{ и } F(t, S(t), Y(t)) = F(0, S(0), Y(0)) = 1.$$

Теперь в соответствии с теоремой 1 строим матрицу B (в данном случае вектор-столбец, поскольку $W(t)$ — одномерный винеровский процесс):

$$B = q_{00}(e^{-2S(t)}, 2Y(t)e^{-2S(t)}),$$

где $q_{00} = q_{00}(t, S(t), Y(t))$, и определяем второе слагаемое:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial B(t, S(t), Y(t))}{\partial(S(t), Y(t))} \right] &= q_{00} \begin{bmatrix} -2e^{-2S(t)} & 0 \\ -4Y(t)e^{-2S(t)} & 2e^{-2S(t)} \end{bmatrix}, \\ \left[\frac{\partial B(t, S(t), Y(t))}{\partial(S(t), Y(t))} \right] B(t, S(t), Y(t)) &= q_{00}^2 \begin{bmatrix} -2te^{-4S(t)} \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Строим матрицу H и вычисляем ее определитель

$$\begin{aligned} \det H &= \det \begin{bmatrix} \vec{e}_0 & \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \\ 0 & -2Y(t)e^{-2S(t)} & e^{-2S(t)} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} \\ &= \vec{e}_0 \cdot (-2Y(t)e^{-2S(t)}f_3 - e^{-2S(t)}f_2) + \vec{e}_1 \cdot e^{-2S(t)}f_1 + \vec{e}_2 \cdot 2Y(t)e^{-2S(t)}f_1, \end{aligned}$$

где $f_i = f_i(t, S(t), Y(t))$, $i = 1, 2, 3$. Тогда вектор $A = A(t, S(t), Y(t))$ имеет координаты

$$a_1 = -\frac{f_1}{2Y(t)f_3 + f_2} - 2q_{00}^2 t e^{-4S(t)}, \quad a_2 = -\frac{2Y(t)f_1}{2Y(t)f_3 + f_2}$$

при условии $2Y(t)f_3 + f_2 \neq 0$ и система стохастических дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} dS(t) &= \left(-\frac{f_1}{2Y(t)f_3 + f_2} - 2q_{00}^2 t e^{-4S(t)} \right) dt + q_{00} e^{-2S(t)} dW(t), \\ dY(t) &= -\frac{2Y(t)f_1}{2Y(t)f_3 + f_2} dt + 2q_{00} Y(t) e^{-2S(t)} dW(t). \end{aligned} \quad (8)$$

Следовательно, приравнивая коэффициенты уравнений (7) и (8), получаем выражения для управлений для детерминированной части:

$$\begin{aligned} Z_1(t, S(t), Y(t)) &= -\frac{f_1}{2Y(t)f_3 + f_2} - 2q_{00}^2 t e^{-4S(t)} - \mu_1(t, S(t), Y(t)), \\ Z_2(t, S(t), Y(t)) &= -\frac{2Y(t)f_1}{2Y(t)f_3 + f_2} - \mu_2(t, S(t), Y(t)), \end{aligned}$$

и диффузионной части:

$$\begin{aligned} Z_3(t, S(t), Y(t)) &= q_{00} e^{-2S(t)} - \sigma_1(t, S(t), Y(t)), \\ Z_4(t, S(t), Y(t)) &= 2q_{00} Y(t) e^{-2S(t)} - \sigma_1(t, S(t), Y(t)). \end{aligned}$$

Таким образом, искомый набор управлений найден.

Для проведения численного моделирования с помощью метода Эйлера [18, 19] решения системы СДУ и определения значений сохраняемой функции положим, что

$$\begin{aligned} dS(t) &= [S(t)e^{-S(t)} + Z_1(t, S(t), Y(t))] dt \\ &\quad + [S(t) + e^{-2t} + Z_3(t, S(t), Y(t))] dW(t), \\ dY(t) &= [Y(t)S(t) + e^{-2S(t)} + Z_2(t, S(t), Y(t))] dt \\ &\quad + [e^{-t} + Z_4(t, S(t), Y(t))] dW(t), \end{aligned} \quad (9)$$

Тогда имеем набор управлений

$$Z_1(t, S(t), Y(t)) = -\frac{f_1}{2Y(t)f_3 + f_2} - 2q_{00}^2 t e^{-4S(t)} - S(t)e^{-S(t)},$$

$$\begin{aligned} Z_2(t, S(t), Y(t)) &= -\frac{2Y(t)f_1}{2Y(t)f_3 + f_2} - Y(t)S(t) - e^{-2S(t)}, \\ Z_3(t, S(t), Y(t)) &= q_{00}e^{-2S(t)} - S(t) - e^{-2t}, \\ Z_4(t, S(t), Y(t)) &= 2q_{00}Y(t)e^{-2S(t)} - e^{-t}. \end{aligned}$$

В качестве произвольных функций $f_i(t, S(t), Y(t))$, $i = 1, 2, 3$, и $q_{00}(t, S(t), Y(t))$ были взяты

$$\begin{aligned} f_1(t, S(t), Y(t)) &= \sin S(t) + \cos Y(t), \quad f_2(t, S(t), Y(t)) = \cos t + 2, \\ f_3(t, S(t), Y(t)) &= \frac{1}{Y(t)}, \quad q_{00}(t, S(t), Y(t)) = S(t). \end{aligned}$$

3. Управление двумя облигациями

Пусть портфель состоит из двух облигаций, подверженных воздействию винеровского процесса и совершающих скачки под действием пуассоновского процесса

$$\begin{aligned} dR_1(t) &= [\mu_1(t, R_1(t), R_2(t)) + Z_1(t, R_1(t), R_2(t))] dt \sigma_1(t, R_1(t), R_2(t)) dW(t) \\ &\quad + \int g_1(t, R_1(t), R_2(t), \gamma) \nu(dt, d\gamma), \\ dR_2(t) &= [\mu_2(t, R_1(t), R_2(t)) + Z_2(t, R_1(t), R_2(t))] dt + \sigma_2(t, R_1(t), R_2(t)) dW(t) \\ &\quad + \int g_2(t, R_1(t), R_2(t), \gamma) \nu(dt, d\gamma), \end{aligned} \quad (10)$$

где $R_i(t)$ — процентная ставка облигации $i = \overline{1, 2}$, $W_k(t)$ — двумерный винеровский процесс, $\nu(t, \Delta\gamma)$ — стандартная пуассоновская мера на $[0, T] \times \mathbb{R}^n$, $\mu_i(t, R_1(t), R_2(t))$, $\sigma_i(t, R_1(t), R_2(t))$, $i = 1, 2$, — заданные функции. Найдем такие управления, чтобы с вероятностью 1 функция риска $F(t, R_1(t), R_2(t))$ сохраняла постоянное значение, зависящее от начальных данных: $R_1(0) = 0$, $R_2(0) = 0$.

Пусть $F(t, R_1(t), R_2(t)) = R_2(t)e^{-2R_1(t)} + e^{-2}$, тогда

$$F(t, R_1(t), R_2(t)) = F(0, R_1(0), R_2(0)) = e^{-2}.$$

В соответствии с теоремой 1 сначала нужно построить систему стохастических дифференциальных уравнений, для которой функция $F(t, R_1(t), R_2(t))$ является детерминированным первым интегралом.

Из утверждения 3 теоремы 1 определим коэффициент при пуассоновской мере. Для этого сначала найдем частные производные функции $F(t, s_1, s_2) = s_2e^{-2s_1} + e^{-2}$. Они имеют следующий вид (s_1 и s_2 — вспомогательные переменные):

$$\frac{\partial F(t, s_1, s_2)}{\partial s_1} = -2s_2e^{-2s_1}, \quad \frac{\partial F(t, s_1, s_2)}{\partial s_2} = e^{-2s_1}. \quad (11)$$

Тогда

$$\frac{\partial s(t, R_1(t), R_2(t), \gamma)}{\partial \gamma} = \left[\frac{\frac{\partial s_1(t, R_1(t), R_2(t), \gamma)}{\partial \gamma}}{\frac{\partial s_2(t, R_1(t), R_2(t), \gamma)}{\partial \gamma}} \right] = \left[\frac{e^{-2s_1}}{2s_2e^{-2s_1}} \right].$$

Решая эту систему, получаем

$$\begin{aligned} s_1(t, R_1(t), R_2(t), \gamma) &= \frac{1}{2} \ln(2\gamma + 2C_1(R_1(t), R_2(t))), \\ s_2(t, R_1(t), R_2(t), \gamma) &= C_2(R_1(t), R_2(t))(\gamma + C_1(R_1(t), R_2(t))), \end{aligned}$$

и с учетом начальных данных, т. е. $s(t, R_1(t), R_2(t), \gamma)|_{\gamma=0} = R$,

$$C_1(R_1(t), R_2(t)) = \frac{1}{2}e^{2R_1(t)}, \quad C_2(R_1(t), R_2(t)) = 2R_2(t)e^{-2R_1(t)}$$

или

$$\begin{aligned} s_1(t, R_1(t), R_2(t), \gamma) &= \frac{1}{2} \ln(2\gamma + e^{2R_1(t)}), \\ s_2(t, R_1(t), R_2(t), \gamma) &= 2R_2(t)\gamma e^{-2R_1(t)} + R_2(t). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} g_1(t, R_1(t), R_2(t), \gamma) &= \frac{1}{2} \ln(2\gamma + e^{2R_1(t)}) - R_1(t), \\ g_2(t, R_1(t), R_2(t), \gamma) &= 2R_2(t)\gamma e^{-2R_1(t)}. \end{aligned} \tag{12}$$

Далее строим матрицу B :

$$B = q_{00}(e^{-2R_1(t)}, 2R_2(t)e^{-2R_1(t)}),$$

где $q_{00} = q_{00}(\cdot) = q_{00}(t, R_1(t), R_2(t))$, и определяем

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial B(\cdot)}{\partial R(t)} \right] &= q_{00} \begin{bmatrix} -2e^{-2R_1(t)} & 0 \\ -4R_2(t)e^{-2R_1(t)} & 2e^{-2R_1(t)} \end{bmatrix}, \\ \left[\frac{\partial B(\cdot)}{\partial R(t)} \right] B(\cdot) &= q_{00}^2 \begin{bmatrix} -2e^{-4R_1(t)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2r_{00}^2 e^{-4R_1(t)} \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Теперь строим матрицу H и вычисляем ее определитель:

$$\begin{aligned} \det H &= \det \begin{bmatrix} \vec{e}_0 & \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \\ 0 & -2R_2(t)e^{-2R_1(t)} & e^{-2R_1(t)} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} \\ &= \vec{e}_0(-2f_3R_2(t)e^{-2R_1(t)} - f_2e^{-2R_1(t)}) + \vec{e}_1(f_1e^{-2R_1(t)}) + \vec{e}_2(2f_1R_2(t)e^{-2R_1(t)}), \end{aligned}$$

где $f_i = f_i(t, R_1(t), R_2(t))$, $i = 1, 2, 3$. Координаты вектора $A = A(t, R_1(t), R_2(t))$ таковы:

$$a_1 = -\frac{f_1}{f_2 + 2f_3R_2(t)} - 2q_{00}^2e^{-4R_1(t)}, \quad a_2 = -\frac{2f_1R_2(t)}{f_2 + 2f_3R_2(t)}$$

при условии $f_2 + 2f_3R_2(t) \neq 0$, и система уравнений Ито имеет вид

$$\begin{aligned} dR_1(t) &= \left[-\frac{f_1(t, R_1(t), R_2(t))}{f_2(t, R_1(t), R_2(t)) + 2f_3(t, R_1(t), R_2(t))R_2(t)} - 2q_{00}^2e^{-4R_1(t)} \right] dt \\ &\quad + q_{00}e^{-2R_1(t)} dW(t) + \int \left(\frac{1}{2} \ln(2\gamma + e^{2R_1(t)}) - R_1(t) \right) \nu(dt, d\gamma), \\ dR_2(t) &= \left[-\frac{2f_1(t, R_1(t), R_2(t))R_2(t)}{f_2(t, R_1(t), R_2(t)) + 2f_3(t, R_1(t), R_2(t))R_2(t)} \right] dt \\ &\quad + 2q_{00}R_2(t)e^{-2R_1(t)} dW(t) + \int 2R_2(t)\gamma e^{-2R_1(t)} \nu(dt, d\gamma). \end{aligned} \tag{13}$$

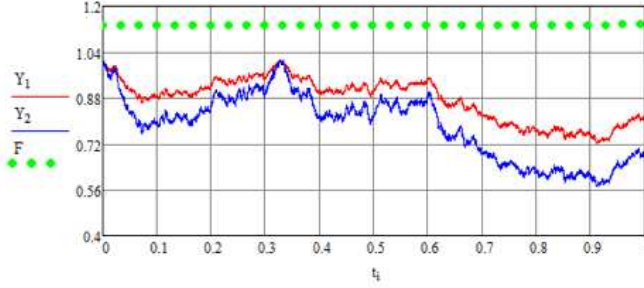


Рис. 1. Решение построенной СДУ (8) и значения функции $F(t, S(t), Y(t))$

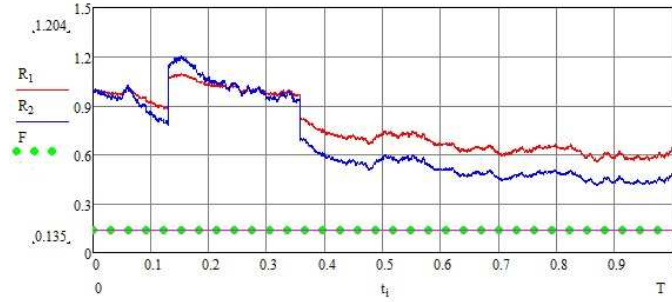


Рис. 2. Решение построенной СДУ (13) и значения функции $F(t, R_1(t), R_2(t))$

Искомое множество управлений детерминированной частью получим из сопоставления уравнений (10) и (13):

$$Z_1(\cdot) = -\frac{f_1(t, R_1(t), R_2(t))}{f_2(t, R_1(t), R_2(t)) + 2f_3(t, R_1(t), R_2(t))R_2(t)} - 2q_{00}^2 e^{-4R_1(t)} - \mu_1(t, R_1(t), R_2(t)),$$

$$Z_2(\cdot) = -\frac{2f_1(t, R_1(t), R_2(t))R_2(t)}{f_2(t, R_1(t), R_2(t)) + 2f_3(t, R_1(t), R_2(t))R_2(t)} - \mu_2(t, R_1(t), R_2(t)).$$

Сопоставляя уравнения (10) и (13), видим, что необходимо ввести дополнительно управление в диффузионную часть — корректирующие функции:

$$Z_3(\cdot) = q_{00}e^{-2R_1(t)} - \sigma_1(t, R_1(t), R_2(t)),$$

$$Z_4(\cdot) = 2q_{00}R_2(t)e^{-2R_1(t)} - \sigma_2(t, R_1(t), R_2(t)).$$

Для численного моделирования возьмем

$$\mu_1(t, R_1(t), R_2(t)) = R_1(t) + R_2(t) + e^{-t}, \quad \mu_2(t, R_1(t), R_2(t)) = R_1(t)R_2(t) + e^{-2t},$$

$$\sigma_1(t, R_1(t), R_2(t)) = e^{R_1(t)}, \quad \sigma_2(t, R_1(t), R_2(t)) = e^{R_2(t)},$$

в качестве произвольных функций —

$$\begin{aligned} f_1(t, R_1(t), R_2(t)) &= \sin R_1(t) + \cos R_2(t), & f_2(t, R_1(t), R_2(t)) &= \cos t + 2, \\ f_3(t, R_1(t), R_2(t)) &= \frac{1}{R_2(t)}, & q_{00}(t, R_1(t), R_2(t)) &= R_1(t). \end{aligned}$$

Как видно из рис. 1 и 2, приведенный алгоритм построения РСР1 действительно позволяет с вероятностью 1 в любой момент времени сохранять значение функции, зависящей от пространственного положения динамической системы.

4. Заключение

Построены программные управления с вероятностью 1 (РСР1) для модели инвестиционного портфеля, а также для модели с двумя облигациями. Доказана теорема о размерности РСР1 в моделях, имеющих управления как в детерминированной, так и в диффузионной части.

Численное моделирование решения систем СДУ дает возможность наглядного представления траекторий системы, описывающей изменение фазовых переменных при наличии РСР1, и соответствующее этому поведению сохранение заданного значения некоторой функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубко В. А. Открытые динамические системы и их моделирование // Вестн. ДВО РАН. 1993. № 4–5. С. 55–64.
2. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Факты, модели. Теория. М.: ФАЗИС. 2004. Т. 1, 2.
3. Kohlmann, M., Siyuan, L., Xiong, Dewen. A Generalized Itô–Ventzell formula to derive forward utility models in a jump market // Stochastic Anal. Appl. 2013. V. 31, N 4. P. 632–662.
4. Delong L. Backward stochastic differential equations with jumps and their actuarial and financial applications. Longon: Springer-Verl., 2013.
5. Колмановский В. Б. Задачи управления при неполной информации. Соровский образовательный журнал. 1999. № 4. С. 122–127.
6. Хрусталев М. М., Румянцев Д. С. Оптимизация квазилинейных динамических стохастических систем со сложной структурой // Автоматика и телемеханика. 2011. № 10. С. 154–169.
7. Хрусталев М. М., Румянцев Д. С., Царьков К. А. Оптимизация квазилинейных стохастических систем диффузионного типа, нелинейных по управлению // Автоматика и телемеханика. 2017. № 6. С. 84–105.
8. Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика. М.: Мир, 1978. Т. 1.
9. Климонтович Ю. Л. Нелинейное броуновское движение // Успехи физ. наук. 1994. Т. 164. № 8. С. 811–844.
10. Дубко В. А. О моделирование динамики подсистемы в многоэлементных взаимодействиях системах и построение стохастического уравнения самодиффузии // Вестн. Приамур. гос. ун-та им. Шолом-Алейхема. 2016. № 1. С. 100–104.
11. Дубко В. А. Вопросы теории и применения стохастических дифференциальных уравнений. Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1989.
12. Дубко В. А. Специальные разделы теории стохастических дифференциальных уравнений. Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2013.
13. Карачанская Е. В. Построение программных управлений динамической системы на основе множества ее первых интегралов // Современная математика. Фундаментальные направления. 2011. № 42. С. 125–133.

14. Карачанская Е. В. Интегральные инварианты стохастических систем и программное управление с вероятностью 1. Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2015.
15. Дубко В. А., Карачанская Е. В. Стохастические первые интегралы, ядра интегральных инвариантов и уравнения Колмогорова // Дальневост. мат. журн. 2014. Т. 13. № 2. С. 200–216.
16. Карачанская Е. В. Построение множества дифференциальных уравнений с заданным множеством первых интегралов // Вестн. Тихоокеан. гос. ун-та. 2011. № 3. С. 47–56.
17. Карачанская Е. В. Обобщенная формула Ито — Вентцеля для случая нецентрированной пуассоновской меры, стохастический первый интеграл и первый интеграл // Мат. тр. 2014. Т. 17. № 1. С. 99–122.
18. Averina T., Karachanskaya E., Rybakov K. Statistical modelling of random processes with invariants // Proc. 2017 Intern. Multi-Conf. on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON). 18–22 Sep., 2017. Novosibirsk, Akademgorodok, Russia. P. 34–37.
19. Аверина Т. А., Карачанская Е. В., Рыбаков К. А. Моделирование и анализ линейных инвариантных стохастических систем // Дифференц. уравнения и процессы управления. Электрон. журн. 2018. № 1. С. 54–76. Режим доступа: <http://www.math.spbu.ru/diffjournal>.

Статья поступила 12 января 2018 г.

Карачанская Елена Викторовна
Дальневосточный гос. университет путей сообщения,
ул. Серышева, 47, Хабаровск, 680027;
Тихоокеанский гос. университет,
ул. Тихоокеанская, 136, Хабаровск, 680035
elena_chal@mail.ru

Петрова Алена Петровна
Северо-Восточный федеральный университет,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
alyona.petrova393@gmail.com

MODELING OF THE PROGRAMMED
CONTROL WITH PROBABILITY 1
FOR SOME FINANCIAL TASKS

E. V. Karachanskaya and A. P. Petrova

Abstract: The description of the dynamics of some financial events can be related to Itô stochastic differential equations (SDE). In this paper, we consider a financial model affected by random disturbances which take the form of Wiener and Poisson perturbations. The construction of the programmed control with probability 1 (PCP1) is based on the concept of first integral for stochastic dynamic systems of diffusion type with jumps which are described by the Itô equations. Two types of financial models are considered as examples of the construction of PCP1: the investment portfolio model (diffusion model) and the interest rate model (diffusion with jumps). The given examples are accompanied by numerical modeling.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.1.12766

Keywords: programmed control with probability 1, stochastic Itô's equation with jumps, first integral of system of the Itô equations, investment portfolio model, interest rate model.

REFERENCES

1. Dubko V., "Open dynamic systems and its simulation [in Russian]," Vestn. Dal'nevost. Otdel. Ross. Akad. Nauk, No. 4–5, 55–64 (1993).
2. Shiryaev A. N., Essentials of Stochastic Finance. Facts, Models, Theory, World Sci. Publ. Co. Inc., River Edge, NJ (1999) (Adv. Ser. Stat. Sci. Appl. Probab.; V. 3)
3. Kohlmann M., Siyuan L., and Xiong Dewen, "A generalized Itô–Wentzell formula to derive forward utility models in a jump market," Stochastic Anal. Appl., **31**, No. 4, 632–662 (2013).
4. Delong L., Backward Stochastic Differential Equations with Jumps and Their Actuarial and Financial Applications, Springer-Verlag, Longon (2013).
5. Kolmanovsky V. B., "Control problems with incomplete information [in Russian]," Soros Edu. J., No. 4, 122–127 (1999).
6. Khrustalev M. M. and Rumyantsev D. S., "Optimizing quasilinear stochastic dynamical systems with complex structure," Autom. Remote Control, **72**, No. 10, 2147–2160 (2011).
7. Khrustalev M. M., Rumyantsev D. S., and Tsar'kov K. A., "Optimization of quasilinear stochastic control-nonlinear diffusion systems," Autom. Remote Control, **78**, No. 6, 1028–1045 (2017).
8. Balescu R., Equilibrium and Non-Equilibrium Statistical Mechanics, John Wiley and Sons, Univ. Michigan (1975).
9. Klimontovich Yu. L., "Nonlinear Brownian motion [in Russian]," Uspekhi Fiz. Nauk, **164**, No. 8, 811–844 (1994).
10. Dubko V. A., "On modeling of subsystem dynamics in multi-element interacting systems and constructing a stochastic self-diffusion equation [in Russian]," Vestn. Priamursk. Gos. Univ., No. 1, 100–104 (2016).

11. Dubko V. A., Questions about Theory and Applications of the Stochastic Differential Equations [in Russian], Dal'nauka, Vladivostok (1989).
12. Dubko V. A. and Karachanskaya E. V., Special Sections of the Theory of Stochastic Differential Equations [in Russian], Izdat. Dal'nevost. Natsion. Univ., Khabarovsk (2013).
13. Karachanskaya E. V., "Construction of programmed controls for a dynamic system based on the set of its first integrals," J. Math. Sci., **199**, No. 5, 547–555 (2014).
14. Karachanskaya E. V., Integral Invariants of Stochastic Systems and Programmed Control with Probability 1 [in Russian], Izdat. Dal'nevost. Natsion. Univ., Khabarovsk (2015).
15. Dubko V. A. and Karachanskaya E. V., "Stochastic first integrals, kernel functions for integral invariants and the Kolmogorov equations [in Russian]," Dal'nevost. Mat. Zh., **14**, No. 2, 200–216 (2014).
16. Karachanskaya E. V., "Construction of the set of differential equations with a given set of first integrals [in Russian]," Vestn. Dal'nevost. Natsion. Univ., No. 3, 47–56 (2011).
17. Karachanskaya E. V., "The generalized Itô–Wenttsel formula in the case of a noncentered Poisson measure, a stochastic first integral, and a first integral," Sib. Adv. Math., **17**, No. 1, 99–122 (2014).
18. Averina T. A., Karachanskaya E. V., and Rybakov K. A., "Statistical modelling of random processes with invariants," in: Proc. Int. Multi-Conf. Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON) (Akademgorodok, Novosibirsk, Russia, Sep. 18–22, 2017), pp. 34–37, IEEE (2017).
19. Averina, T.A., Karachanskaya E. V., and Rybakov K. A., "Modeling and analysis of linear invariant stochastic systems," Differ. Equ. Control Processes, Online J., No. 1, 54–76 (2018). <http://www.math.spbu.ru/diffjournal>

Submitted January 12, 2018

Elena V. Karachanskaya
Far Eastern State Transport University,
47 Serysheva Street, Khabarovsk 680027, Russia;
Pacific National University,
136 Tikho-Okeanskaya Street, Khabarovsk 680035, Russia
elena_chal@mail.ru

Alena P. Petrova
North-Eastern Federal University,
48 Kulakovsky Street, Yakutsk 677000, Russia
alyona.petrova393@gmail.com

УДК 517.972

О РЕГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О РАВНОВЕСИИ ПЛАСТИНЫ ТИМОШЕНКО, СОДЕРЖАЩЕЙ НАКЛОННУЮ ТРЕЩИНУ

Н. П. Лазарев, Х. Итоу,
П. В. Сивцев, И. М. Тихонова

Аннотация. Исследуется задача о равновесии упругой трансверсально-изотропной пластины (модели Тимошенко), содержащей сквозную наклонную трещину. Считается что трещина не выходит на внешнюю границу. В исходном состоянии предполагается, что противоположные берега трещин соприкасаются друг с другом. При этом трещина описывается с помощью поверхности, которая удовлетворяет определенным предположениям. На кривой, задающей трещину в срединной плоскости, ставится краевое условие в виде неравенства, описывающее непроникание противоположных берегов трещины. На внешней границе заданы однородные условия Дирихле. Установлена локальная дополнительная гладкость решения по сравнению с заданной в вариационной формулировке при определенных условиях на поверхность, задающую трещину. Доказана бесконечная дифференцируемость функции решения при дополнительных предположениях на функцию, задающую внешние нагрузки, а также на значения функций перемещений вблизи кривой, описывающей трещину.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.1.12767

Ключевые слова: вариационное неравенство, пластина Тимошенко, трещина, условия непроникания, регулярность решения.

Введение

При исследовании задач механики деформирования пластин и оболочек часто используют модели Кирхгофа — Лява и Тимошенко. Для пластин (оболочек), содержащих трещину, классический подход предполагает задание краевых условий в виде равенств на кривой, описывающей разрез (трещину) [1–5]. В настоящее время для моделей пластин и оболочек с трещинами получен широкий круг результатов для нелинейных задач с краевыми условиями в виде системы равенств и неравенств [6–19] и др. Эти условия налагаются на значения функций, которые описывают перемещения точек срединной поверхности пластины (оболочки). С механической точки зрения они описывают непроникание противоположных берегов трещины. В работах [6, 7, 14] исследованы нелинейные задачи о равновесии пластины модели Кирхгофа — Лява с условиями непроникания для наклонной трещины. При этом в [6] условие непроникания приведено для трещин, заданных гладкой поверхностью $z = F(x_1, x_2)$, где

$F(x_1, x_2)$ — функция, определенная в (срединной) плоскости (x_1, x_2) . В [7] приводится вывод условия непроникания для трещины, которая мало отличается от вертикальной. Кроме того, в [6, 7, 14] используются дополнительные (относительно модели Кирхгофа — Лява) предположения о том, что перемещения во всех точках берегов трещины можно задать с помощью перемещений точек, лежащих в срединной плоскости пластины. В работе [16] для математической модели о равновесии пластины Тимошенко, содержащей наклонную трещину, обоснована корректность, найдены соответствующие эквивалентные вариационные и дифференциальные постановки. Кроме того, для одномерного случая (балка с наклонным разрезом) получено аналитическое решение и исследованы его качественные свойства.

В данной работе исследуется задача о равновесии упругой трансверсально-изотропной пластины Тимошенко (см. [16]), содержащей наклонную трещину, с условиями типа неравенств на внутренней границе. Доказана локальная принадлежность решения классу H^2 вблизи прямолинейного разреза. Заметим, что вариационная постановка предполагает решение класса H^1 . Показана бесконечная дифференцируемость решения при дополнительных условиях «нулевого» раскрытия трещины и бесконечной дифференцируемости функции внешних нагрузок. Данная работа обобщает полученные ранее результаты о регулярности решений в задаче о равновесии пластины Тимошенко с вертикальной трещиной [11].

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная односвязная область с гладкой границей $\partial\Omega$, Γ_c — гладкая кривая без самопересечений такая, что $\overline{\Gamma}_c \subset \Omega$, $\partial\Gamma_c \notin \Gamma_c$. Обозначим через $\nu = \nu(x) = (\nu_1, \nu_2)$, $x = (x_1, x_2) \in \Gamma_c$, вектор нормали к Γ_c . Как и в работах [7, 16], определим поверхность

$$\Xi = \{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, z) \mid |z| \leq h, \bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2), \bar{x} = x - z\nu(x) \operatorname{tg} \alpha(x), x \in \Gamma_c\},$$

где $\alpha(x)$, $|\alpha(x)| < \pi/2$, $x \in \Gamma_c$ — функция двух переменных (рис. 1).

Предположим, что нормаль $n(\bar{x}, z)$ к поверхности Ξ при фиксированном $x \in \Gamma_c$ остается неизменной, т. е.

$$n(\bar{x}, z) = n(x, 0) = (\nu(x) \cos \alpha(x), \sin \alpha(x)) \quad \forall \bar{x} = x - z\nu(x) \operatorname{tg} \alpha(x), \quad |z| \leq h.$$

Заметим, что этим свойством обладают, например, поверхности Ξ , образованные с помощью плоскости или конической поверхности.

Предположим, что в исходном недеформированном состоянии пластина, содержащая наклонную трещину, задается в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ множеством $\Omega \times [-h, h] \setminus \Xi$. При этом поверхность Ξ соответствует трещине (разрезу) нулевой ширины. В срединной плоскости $z = 0$ имеем негладкую область $\Omega_c = \Omega \setminus \overline{\Gamma}_c$. В соответствии с направлением нормали ν выберем положительные Γ_c^+ , Ξ^+ и отрицательные Γ_c^- , Ξ^- берега кривой Γ_c и поверхности Ξ .

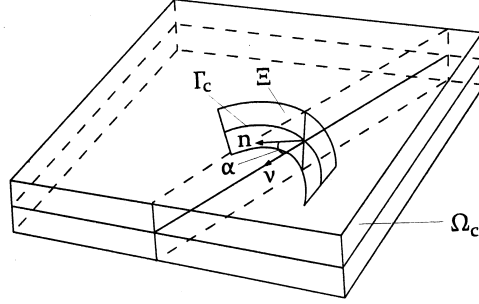


Рис. 1. Пластина с наклонной трещиной

Обозначим через $\chi = \chi(x) = (W, w)$, $x \in \Omega_c$, вектор перемещений точек срединной поверхности, где $W = (w_1, w_2)$ и w горизонтальные (вдоль плоскости (x_1, x_2)) и вертикальные перемещения соответственно. Углы поворота нормальных сечений обозначим через $\psi = \psi(x) = (\psi_1, \psi_2)$, $x \in \Omega_c$.

Приведем известные тензорные соотношения теории упругости, справедливые для упругих трансверсально-изотропных пластин [20]. Тензоры, описывающие деформацию пластины, определяются по формулам

$$\varepsilon_{ij}(\psi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} \right), \quad \varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2.$$

Тензоры моментов и усилий вычисляются по формулам

$$m_{ij}(\psi) = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\psi), \quad \sigma_{ij}(W) = 3h^{-2} c_{ijkl} \varepsilon_{kl}(W) \quad (1)$$

(по повторяющимся индексам проводится суммирование), где ненулевые постоянные коэффициенты тензора c_{ijkl} определяются соотношениями

$$c_{iiii} = D, \quad c_{iijj} = D\kappa, \quad c_{ijij} = c_{ijji} = D(1 - \kappa)/2, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j,$$

D — цилиндрическая жесткость пластины, κ — коэффициент Пуассона. Для вектора поперечных сил $q = (q_1, q_2)$ выполняются следующие равенства [20]:

$$q_i(w, \psi) = \Lambda(w, \psi), \quad i = 1, 2, \quad \left(v, \psi_i = \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \quad (2)$$

где $\Lambda = 2\kappa'\mathcal{G}$, κ' — коэффициент сдвига, $\mathcal{G}$ — модуль сдвига в площадках, перпендикулярных срединной плоскости пластины. Предполагаем, что все коэффициенты, описывающие упругие свойства пластины, постоянны.

Пусть $H^1(\Omega_c)$ — пространство Соболева, $H^{1,0}(\Omega_c)$ — его подпространство, состоящее из всех функций, которые обращаются в нуль на внешней границе $\partial\Omega$. Введем следующие обозначения:

$$H(\Omega_c) = H^{1,0}(\Omega_c)^5, \quad \|\cdot\| = \|\cdot\|_{H(\Omega_c)}.$$

Пусть $\eta = (W, w, \psi) \in H(\Omega_c)$, $\bar{\eta} = (\bar{W}, \bar{w}, \bar{\psi}) \in H(\Omega_c)$. Определим билинейную форму

$$B(\eta, \bar{\eta}) = \int_{\Omega_c} (\sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(\bar{W}) + m_{ij}(\psi) \varepsilon_{ij}(\bar{\psi}) + \Lambda(w, \psi) (\bar{w}, \bar{\psi})).$$

Заметим, что для билинейной формы справедлива оценка

$$B(\eta, \eta) \geq c \|\eta\|_{H(\Omega_c)}^2 \quad \forall \eta \in H(\Omega_c) \quad (3)$$

с не зависящей от η постоянной $c > 0$ [11]. Функционал потенциальной энергии деформированной пластины имеет вид

$$\Pi(\eta) = \frac{1}{2} B(\eta, \eta) - \int_{\Omega_c} F \eta \quad \forall \eta = (W, w, \psi) \in H(\Omega_c), \quad (4)$$

где $F = (f_1, f_2, f_3, \mu_1, \mu_2) \in L^2(\Omega_c)^5$ — вектор заданных внешних нагрузок.

На внешней границе $\partial\Omega$ зададим краевые условия жесткого защемления:

$$\eta = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad \text{где } \eta = (W, w, \psi). \quad (5)$$

Как известно, в модели Тимошенко перемещения $\hat{\chi}(x, z) = (\widehat{W}(x, z), \widehat{w}(x, z))$ для точек пластины, отстоящих от срединной поверхности на расстояние $|z| \leq h$, выражаются с помощью перемещений в срединной поверхности $\hat{\chi}(x, 0) = \chi(x) = (W, w)$ и углов поворота нормальных сечений $\psi = \psi(x)$. При этом справедливы следующие формулы [20]:

$$\widehat{W}(x, z) = W(x) + z\psi(x), \quad \widehat{w}(x, z) = w(x), \quad |z| \leq h, \quad x \in \Omega_c.$$

Пусть угол $\alpha(x)$ достаточно мал при всех $x \in \Gamma_c$. Предположим, что перемещения в точках $(\bar{x}, z) \in \Xi^\pm$ (на берегах трещины) можно выразить с помощью следов функций $W(x)$, $w(x)$, $\psi(x)$ на кривой Γ_c следующими равенствами:

$$\widehat{w}^\pm(\bar{x}, z) = w^\pm(x), \quad \widehat{W}^\pm(\bar{x}, z) = W^\pm(x) + z\psi^\pm(x), \quad |z| \leq h, \quad x \in \Gamma_c, \quad (6)$$

где $\bar{x} = x - z\nu(x) \operatorname{tg} \alpha(x)$.

Условие непроникания берегов трещины заключается в том, что разность перемещений $\hat{\chi}(\bar{x}, z)^+$ на положительном берегу Ξ^+ и $\hat{\chi}(\bar{x}, z)^-$ на Ξ^- в проекции на нормаль $n(\bar{x}, z)$ должна быть неотрицательной (см. [16]):

$$(\hat{\chi}(\bar{x}, z)^+ - \hat{\chi}(\bar{x}, z)^-) \cdot (\nu(x) \cos \alpha(x), \sin \alpha(x)) \geq 0, \quad (\bar{x}, z) \in \Xi.$$

С учетом (6), подставляя экстремальные значения $z = h$, $z = -h$, находим

$$[W_\nu] \cos \alpha - h[\psi_\nu] \cos \alpha + [w] \sin \alpha \geq 0, \quad x \in \Gamma_c,$$

где $\psi_\nu = \psi_i \nu_i$, $W_\nu = w_i \nu_i$, $[v] = v|_{\Gamma_c^+} - v|_{\Gamma_c^-}$. Поделив последнее соотношение на $\cos \alpha$, выведем условие непроникания для наклонной трещины

$$[W_\nu] + [w] \operatorname{tg} \alpha \geq h[\psi_\nu], \quad x \in \Gamma_c. \quad (7)$$

Заметим, что при $\alpha \equiv 0$ неравенство (7) обращается в известное условие непроникания для вертикальных трещин, содержащихся в пластинах модели Тимошенко [17, 18]. Если же для углов поворота вблизи трещины выполняются соотношения гипотезы «прямых нормалей» Кирхгофа — Лява: $\psi_i + w_{,i} = 0$, $i = 1, 2$, то (7) принимает вид условия непроникания для наклонной трещины в пластине Кирхгофа — Лява [7, 14].

Задача о равновесии пластины, содержащей наклонную трещину, формулируется в виде минимизации функционала энергии [16]

$$\inf_{\eta \in K} \Pi(\eta), \quad (8)$$

где

$$K = \{\eta \in H(\Omega_c) \mid \eta = (W, w, \psi) \text{ удовлетворяет (7)}\}$$

— множество допустимых функций. Известно, что задача (8) имеет единственное решение $\xi = (U, u, \phi)$ и эквивалентна следующему вариационному неравенству:

$$\xi \in K, \quad B(\xi, \eta - \xi) \geq \int_{\Omega_c} F(\eta - \xi) \quad \forall \eta \in K. \quad (9)$$

Кроме того, при условии достаточной гладкости решения ξ вариационной задачи (8) функция удовлетворяет следующей дифференциальной постановке, состоящей из уравнений равновесия (10)–(12) и граничных условий (13)–(17):

$$\sigma_{ij,j}(U) = -f_i, \quad \text{в } \Omega_c, \quad i = 1, 2, \quad (10)$$

$$m_{ij,j}(\phi) - q_i(u, \phi) = -\mu_i, \quad \text{в } \Omega_c \quad i = 1, 2, \quad (11)$$

$$q_{i,i}(u, \phi) = -f_3 \quad \text{в } \Omega_c, \quad (12)$$

$$U = \phi = 0, \quad u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (13)$$

$$[\sigma_\nu] = [m_\nu] = 0, \quad [\sigma_\tau] = [m_\tau] = 0, \quad \sigma_\nu \operatorname{tg} \alpha = q_\nu \quad \text{на } \Gamma_c, \quad (14)$$

$$\sigma_\tau = m_\tau = 0, \quad [U_\nu] + [u] \operatorname{tg} \alpha \geq h[\phi_\nu], \quad -h\sigma_\nu \geq |m_\nu| \quad \text{на } \Gamma_c, \quad (15)$$

$$\left(\sigma_\nu + \frac{1}{h}m_\nu\right)([U_\nu] + [u] \operatorname{tg} \alpha + h[\phi_\nu]) = 0 \quad \text{на } \Gamma_c, \quad (16)$$

$$\left(\sigma_\nu - \frac{1}{h}m_\nu\right)([U_\nu] + [u] \operatorname{tg} \alpha - h[\phi_\nu]) = 0 \quad \text{на } \Gamma_c. \quad (17)$$

И наоборот, достаточно гладкая функция $\xi = (U, u, \phi)$, удовлетворяющая (10)–(17), является решением вариационной задачи (8) (см. [16]).

2. Гладкость решения в случае нулевого раскрытия трещины

В этом разделе рассматривается вопрос о регулярности решений. До сих пор предполагалось, что берега трещины могут расходиться. Пусть теперь раскрытие трещины в некоторой окрестности точки $x^0 = (x_1^0, x_2^0) \in \Gamma_c$ является нулевым. Это условие можно записать в виде

$$[\xi] = 0 \quad \text{на } \mathcal{O}(x^0) \cap \Gamma_c.$$

Докажем, что в этом случае при дополнительном условии бесконечной дифференцируемости функции F в этой же окрестности $\mathcal{O}(x^0)$ решение ξ также состоит из бесконечно гладких функций в $\mathcal{O}(x^0)$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $F \in C^\infty(\mathcal{O}(x^0))^5$ и $[\xi] = 0$ на $\mathcal{O}(x^0) \cap \Gamma_c$. Тогда $\xi \in C^\infty(\mathcal{O}(x^0))^5$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию теоремы имеют место соотношения $[U] = [\phi] = (0, 0)$, $[u] = 0$ на $\mathcal{O}(x^0) \cap \Gamma_c$. Следовательно, выполняются соотношения (см. [21])

$$U, \phi \in H^1(\mathcal{O}(x^0))^2, \quad u \in H^1(\mathcal{O}(x^0)).$$

Для начала рассмотрим уравнение (10) и установим, что оно выполняется также в области $\mathcal{O}(x^0)$. Из вариационного неравенства (9) подстановкой пробных функций вида $\eta = \xi \pm \bar{\eta}$, удовлетворяющих $\bar{\eta} = (\bar{W}, \bar{w}, \bar{\psi})$, $\bar{\psi} = 0$, $\bar{w} = 0$, получим

$$\int_{\Omega_c} \sigma_{ij}(U) \bar{w}_{i,j} = \int_{\Omega_c} f_i \bar{w}_i \quad \forall \bar{w}_i \in H_0^1(\Omega_c), \quad i = 1, 2.$$

Отсюда, поменяв области интегрирования с Ω_c на $\mathcal{O}(x^0)$, можно легко получить равенства

$$\int_{\Omega_c} \sigma_{ij}(U) \theta_{i,j} = \int_{\mathcal{O}(x^0)} \sigma_{ij}(U) \theta_{i,j} = \int_{\Omega_c} f_i \theta = \int_{\mathcal{O}(x^0)} f_i \theta$$

для любых $\theta \in C_0^\infty(\mathcal{O}(x^0))$, $i = 1, 2$. Данные соотношения при $i = 1, 2$ и определяют выполнение равенства в (10) в смысле распределений в области $\mathcal{O}(x^0)$. Аналогично из (9) получим

$$\int_{\mathcal{O}(x^0)} m_{ij}(\phi) \theta_{i,j} + \int_{\mathcal{O}(x^0)} q_i(u, \phi) \theta = \int_{\mathcal{O}(x^0)} \mu_i \theta, \quad i = 1, 2, \quad (18)$$

$$\int_{\mathcal{O}(x^0)} q_i(u, \phi) \theta_{i,i} = \int_{\mathcal{O}(x^0)} f_3 \theta \quad (19)$$

для любой $\theta \in C_0^\infty(\mathcal{O}(x^0))$. Последние соотношения означают, что уравнения (11), (12) выполняются в смысле распределений в области $\mathcal{O}(x^0)$. Представим уравнения (10)–(12), выполненные в $\mathcal{O}(x^0)$, следующим образом:

$$L(\phi) = \nabla u - (\mu_1, \mu_2), \quad (20)$$

$$M(U) = -(f_1, f_2), \quad (21)$$

$$N(u) = -f_3 - \Lambda \phi_{i,i}, \quad (22)$$

соответственно. Здесь L , M , N — эллиптические операторы.

Далее используем результаты о внутренней гладкости решений эллиптических уравнений (см. [22]). Из (21) следует, что $U \in C_0^\infty(\mathcal{O}(x^0))^2$. Покажем, что

$$\phi \in H_{\text{loc}}^l(\mathcal{O}(x^0))^2, \quad u \in H_{\text{loc}}^l(\mathcal{O}(x^0)) \quad (23)$$

для любого $l = 1, 2, \dots$. В самом деле, из (20) следует, что $\phi \in H_{\text{loc}}^2(\mathcal{O}(x^0))^2$, тогда правая часть в (22) принадлежит $H_{\text{loc}}^1(\mathcal{O}(x^0))$. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что $u \in H_{\text{loc}}^3(\mathcal{O}(x^0))$. Аналогично, поскольку правая часть в (20) принадлежит $H_{\text{loc}}^2(\mathcal{O}(x^0))$, имеем включение $\phi \in H_{\text{loc}}^4(\mathcal{O}(x^0))^2$. Продолжая описанную схему, устанавливаем справедливость (23). Согласно теоремам вложения (см. [21]) заключаем, что

$$\phi \in C^k(\mathcal{O}(x^0))^2, \quad u \in C^k(\mathcal{O}(x^0)) \quad \forall k = 1, 2, \dots,$$

откуда и следует утверждение теоремы.

3. Дополнительная гладкость решения

В данном разделе исследуется регулярность без дополнительных условий на решение ξ и функцию F , описывающую внешние нагрузки. Докажем, что решение при дополнительном условии на поверхность трещины имеет локальную гладкость выше, чем гладкость, доставляемую вариационной постановкой.

Здесь снова обозначим через $x^0 = (x_1^0, x_2^0) \in \Gamma_c$ некоторую фиксированную точку. Сформулируем следующее условие.

Предположение 1. Пусть локально поверхность трещины является частью некоторой плоскости, для которой пересечение $\Gamma_c \cap \mathcal{O}(x^0)$ границы Γ_c с некоторой окрестностью $\mathcal{O}(x^0) \subset \mathbb{R}^2$ точки x^0 параллельно оси Ox_1 (рис. 2).

Заметим, что при выполнении предположения 1 в окрестности $\mathcal{O}(x^0)$ угол α , характеризующий наклон поверхности трещины, постоянен. Обозначим через $R_\delta(x^0) \subset \mathbb{R}^2$ открытый шар радиуса δ с центром в точке x^0 . Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть выполнены условия предположения 1. Тогда имеет место включение $\xi \in H^2(R_\delta(x^0) \cap \Omega_c)^5$ для достаточно малых δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем гладкую функцию φ такую, что $\varphi \equiv 1$ в $R_\delta(x^0)$, $\varphi \equiv 0$ вне $R_{3\delta/2}(x^0)$, $0 \leq \varphi \leq 1$ всюду. Включение $R_{2\delta}(x^0) \subset \mathcal{O}(x^0)$ предполагается выполненным.

Введем обозначения

$$d_{\pm\lambda}p(x) = \lambda^{-1}(p(x \pm \lambda e) - p(x)), \quad \Delta_\lambda = -d_{-\lambda}d_\lambda,$$

e — единичный вектор оси Ox_1 , $0 < |\lambda| < \delta/2$. В этом случае функции

$$u^\lambda = u + \frac{\lambda^2}{2}\varphi^2\Delta_\lambda u, \quad u_i^\lambda = u_i + \frac{\lambda^2}{2}\varphi^2\Delta_\lambda u_i, \quad \phi_i^\lambda = \phi_i + \frac{\lambda^2}{2}\varphi^2\Delta_\lambda \phi_i, \quad i = 1, 2,$$

определены в области Ω_c . В соответствии с вышеуказанными предположениями нормаль ν имеет координаты $(0, 1)$ вблизи x^0 , значит, условие непроникания (2) на $\Gamma_c \cap \mathcal{O}(x^0)$ имеет вид

$$[u_2] + [u] \operatorname{tg} \alpha \geq h[|\phi_2|]. \quad (24)$$

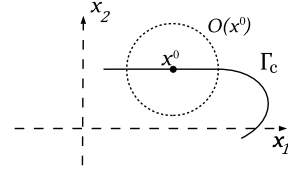


Рис. 2. Прямолинейный участок разреза Γ_c с окрестностью $\mathcal{O}(x^0)$

Легко проверить, что для введенной выше функции φ отображение $G : H(\Omega_c) \rightarrow H(\Omega_c)$, определенное равенством

$$G(p) = p + \frac{\lambda^2}{2} \varphi^2 \Delta_\lambda p,$$

сохраняет неотрицательный знак на $\Gamma_c \cap \mathcal{O}(x^0)$, т. е. если $p \geq 0$ на $\Gamma_c \cap \mathcal{O}(x^0)$, то

$$G(p) \geq 0 \quad \text{на } \Gamma_c \cap \mathcal{O}(x^0).$$

Действительно, для $x \in \Gamma_c \cap \mathcal{O}(x^0)$ имеем

$$p(x) + \frac{\lambda^2}{2} \varphi^2(x) \Delta_\lambda p(x) = (1 - \varphi^2(x))p(x) + \frac{\varphi^2(x)}{2} [p(x - \lambda e) + p(x + \lambda e)] \geq 0.$$

Кроме того, можно заметить следующее свойство линейности:

$$G(Ap_1 + Bp_2) = AG(p_1) + BG(p_2)$$

для любых постоянных $A, B \in \mathbb{R}$. Поскольку ξ удовлетворяет на $\Gamma_c \cap \mathcal{O}(x^0)$ неравенству (24), функция $\xi^\lambda = (u_1^\lambda, u_2^\lambda, u^\lambda, \phi_1^\lambda, \phi_2^\lambda)$ в силу свойств отображения $G : H(\Omega_c) \rightarrow H(\Omega_c)$ также удовлетворяет неравенству

$$[u_2^\lambda] + [u^\lambda] \operatorname{tg} \alpha \geq h[\phi_2^\lambda] \quad \text{на } \Gamma_c \cap \mathcal{O}(x^0).$$

Следовательно,

$$[(U^\lambda)_\nu] + [u^\lambda] \operatorname{tg} \alpha \geq h[(\phi^\lambda)_\nu] \quad \text{на } \Gamma_c.$$

Предыдущие рассуждения позволяют заключить, что $\xi^\lambda \in K$. Подставим ξ^λ в вариационное неравенство в качестве пробной функции. В итоге получаем неравенство

$$\begin{aligned} & \langle m_{ij}(\phi), \varepsilon_{ij}(\varphi^2 \Delta_\lambda \phi) \rangle_c + \langle \sigma_{ij}(U), \varepsilon_{ij}(\varphi^2 \Delta_\lambda U) \rangle_c \\ & + \langle q_i(u, \phi), (\varphi^2 \Delta_\lambda u)_i + \varphi^2 \Delta_\lambda \phi^i \rangle_c \geq \frac{2\langle F, \xi^\lambda - \xi \rangle_c}{\lambda^2}, \end{aligned} \quad (25)$$

где через $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$ для удобства обозначено скалярное произведение в соответствующем пространстве $L_2(\Omega_c)$ (для правой части в $L_2(\Omega_c)^5$). Можно проверить, что разность между выражениями

$$\langle \sigma_{ij}(U), \varepsilon_{ij}(\varphi^2 \Delta_\lambda U) \rangle_c \text{ и } -\langle \sigma_{ij}(d_\lambda \varphi U), \varepsilon_{ij}(d_\lambda \varphi U) \rangle_c$$

может быть оценена сверху правой частью следующего далее неравенства (26) (см. [23]). Аналогично разность между

$$\langle m_{ij}(\phi), \varepsilon_{ij}(\varphi^2 \Delta_\lambda \phi) \rangle_c \text{ и } -\langle m_{ij}(d_\lambda \varphi \phi), \varepsilon_{ij}(d_\lambda \varphi \phi) \rangle_c$$

между

$$\langle u_{,i} + \phi_i, (\varphi^2 \Delta_\lambda u)_i + \varphi^2 \Delta_\lambda \phi_i \rangle_c \text{ и } -\langle (d_\lambda(\varphi u))_{,i} + d_\lambda(\varphi \phi_i), (d_\lambda(\varphi u))_{,i} + d_\lambda(\varphi \phi_i) \rangle_c$$

может быть также оценена сверху той же величиной.

Таким образом, соотношение (25) влечет следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \langle m_{ij}(d_\lambda(\varphi\phi)), \varepsilon_{ij}(d_\lambda(\varphi\phi)) \rangle_c + \langle \sigma_{ij}(d_\lambda(\varphi U)), \varepsilon_{ij}(d_\lambda(\varphi U)) \rangle_c \\ & + \Lambda \langle (d_\lambda(\varphi u),_i + d_\lambda(\varphi\phi_i)), (d_\lambda(\varphi u),_i + d_\lambda(\varphi\phi_i)) \rangle_c \leq (A + B \|d_\lambda(\varphi\xi)\|_{H(\Omega_c)}), \end{aligned} \quad (26)$$

где A, B — положительные величины, не зависящие от λ . Применяя для левой части (26) неравенство (3), находим

$$C_3 \|d_\lambda(\varphi\xi)\|_{H(\Omega_c)}^2 \leq (A + B \|d_\lambda(\varphi\xi)\|_{H(\Omega_c)}),$$

где постоянная $C_3 > 0$ не зависит от λ . Отсюда получаем оценку

$$\|d_\lambda(\varphi\xi)\|_{H(\Omega_c)} \leq c$$

равномерно для всех $\lambda \in (0, \lambda_0]$. Последнее означает (см. [21]), что

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varphi\xi) \in H(\Omega_c).$$

Следовательно, функции $u_{i,11}$, $u_{i,12}$, $\phi_{i,11}$, $\phi_{i,12}$, $i = 1, 2$; $u_{,11}$, $u_{,12}$ принадлежат $L_2(R_\delta(x^0) \cap \Omega_c)$. Вместе с этим равенство (10) может быть представлено так:

$$U_{,22} = \Phi.$$

Функция Φ зависит от f_1 , f_2 , $U_{,12}$, $U_{,11}$ линейно. Ввиду установленных включений имеем $\Phi \in L_2(R_\delta(x^0) \cap \Omega_c)$. Таким образом, производные U до второго порядка включительно принадлежат $L_2(R_\delta(x^0) \cap \Omega_c)$. Рассмотрим теперь уравнение (11). Поскольку u , $\phi_i \in L_2(\Omega_c)$ при $i = 1, 2$, его можно записать в виде $\phi_{,22} = S$. Функция S является линейной комбинацией функций из $L_2(R_\delta(x^0) \cap \Omega_c)$. Перепишем уравнение (12) в виде $u_{,22} = -(\phi_{i,i} + u_{,11}) - \Lambda^{-1} f_3$. Очевидно, что правая часть последнего равенства принадлежит $L_2(R_\delta(x^0) \cap \Omega_c)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
2. Работнов Ю. И. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
3. Левин В. А., Морозов Е. М. Матвиенко Ю. Г. Избранные нелинейные задачи механики разрушения. М.: Физматлит, 2004.
4. Слепян Л. И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981.
5. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.
6. Хлуднев А. М. Задача о равновесии упругой пластины, содержащей наклонную трещину // Прикл. механика и техн. физика. 1997. Т. 38, № 5. С. 117–121.
7. Ковтуненко В. А., Леонтьев А. Н., Хлуднев А. М. Задача о равновесии пластины с наклонным разрезом // Прикл. механика и техн. физика. 1998. Т. 39, № 2. С. 164–174.
8. Хлуднев А. М. Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
9. Lazarev N. P., Rudoy E. M. Optimal size of a rigid thin stiffener reinforcing an elastic plate on the outer edge // Z. Angew. Math. Mech. 2017. V. 97, N 9. P. 1120–1127.
10. Лазарев Н. П. Задача о равновесии полой оболочки Тимошенко, содержащей сквозную трещину // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 3. С. 58–69.
11. Лазарев Н. П. Задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей сквозную трещину // Сиб. журн. индустр. математики. 2011. Т. 14, № 4. С. 32–43.

12. Рудой Е. М. Формула Гриффитса и интеграл Черепанова — Райса для пластины с жестким включением и трещиной // Вестн. НГУ. Сер. математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, № 2. С. 98–117.
13. Khludnev A. M. Thin rigid inclusions with delaminations in elastic plates // Europ. J. Mech. A Solids. 2012. V. 32, N 1. P. 69–75.
14. Неустроева Н. В. Задача о равновесии упругой пластины, содержащей наклонную трещину на границе жесткого включения // Сиб. журн. индустр. математики. 2015. Т. 18, № 2. С. 74–84.
15. Shcherbakov V. Shape optimization of rigid inclusions for elastic plates with cracks // Z. Angew. Math. Phys. 2016. V. 67, N 3. 71.
16. Лазарев Н. П. Задача о равновесии пластины Тимошенко с наклонной трещиной // Прикл. механика и техн. физика. 2013. Т. 54, № 4. С. 171–181.
17. Лазарев Н. П. Итерационный метод штрафа для нелинейной задачи о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину // Сиб. журн. вычисл. математики. 2011. Т. 14, № 4. С. 381–392.
18. Lazarev N. P., Rudoy E. M. Shape sensitivity analysis of Timoshenko's plate with a crack under the nonpenetration condition // Z. Angew. Math. Mech. 2014. V. 94, N 9. P. 730–739.
19. Lazarev N. P., Itou H., Neustroeva N. V. Fictitious domain method for an equilibrium problem of the Timoshenko-type plate with a crack crossing the external boundary at zero angle // Jpn. J. Ind. Appl. Math. 2016. V. 33, N 1. P. 63–80.
20. Пелех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев: Наук. думка, 1973.
21. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
22. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
23. Khludnev A. M., Sokolowski J. Modelling and control in solid mechanics. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser-Verl., 1997.

Статья поступила 18 января 2018 г.

Лазарев Нюргун Петрович

Научно-исследовательский институт математики СВФУ,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000;
nyurgun@ngs.ru

Itou Hiromichi (Итоу Хиромити)

Tokyo University of Science, Department of Mathematics,
1-3 Kagurazaka, Shinjuku-ku, Tokyo 162-8601;
h-itou@rs.tus.ac.jp

Сивцев Петр Васильевич

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
ул. Кулаковского, 42, Якутск 677000;
sivkapetr@mail.ru

Тихонова Ирина Михайловна

Научно-исследовательский институт математики СВФУ,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
IrinaMikh3007@mail.ru

ON THE SOLUTION REGULARITY
OF AN EQUILIBRIUM PROBLEM
FOR THE TIMOSHENKO PLATE
HAVING AN INCLINED CRACK

N. P. Lazarev, H. Itou,
P. V. Sivtsev, and I. M. Tikhonova

Abstract: The equilibrium problem for an transversely isotropic elastic plate (Timoshenko model) with an inclined crack is studied. It is supposed that the crack does not touch the external boundary. For initial state, we assume that opposite crack faces are in contact with each other on a frictionless crack surface. Herewith, the crack is described with the use of a surface satisfying certain assumptions. On the crack curve defining the crack in the middle plane, we impose a nonlinear boundary condition as an inequality describing the nonpenetration of the opposite crack faces. It is assumed that on the exterior boundary of the cracked elastic plate the homogeneous Dirichlet boundary conditions are prescribed. We establish additional smoothness of the solution in comparison with that given in the variational statement. We prove that the solution functions are infinitely smooth under additional assumptions on the function of external loads and the functions of displacements near the curve describing the inclined crack.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.1.12767

Keywords: variational inequality, Timoshenko plate, crack, nonpenetration condition, solution regularity.

REFERENCES

1. Cherepanov G. P., Mechanics of Brittle Fracture [in Russian], Nauka, Moscow (1974); English transl.: McGraw-Hill, New York (1979).
2. Rabotnov Yu. N., Mechanics of a Deformable Rigid Body [in Russian], Nauka, Moscow (1988).
3. Levin V. A., Morozov E. M., and Matvienko Yu. G., Selected Nonlinear Problems in Mechanics of Fracture [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2004).
4. Slepyan L. I., Mechanics of Cracks [in Russian], Sudostroenie, Leningrad (1981).
5. Morozov N. F., Mathematical Problems of the Theory of Cracks [in Russian], Nauka, Moscow (1984).
6. Khludnev A. M., "Equilibrium problem of an elastic plate with an oblique crack," J. Appl. Mech. Tech. Phys., **38**, No. 5, 757–761 (1997).
7. Kovtunen V. A., Leont'ev A. N., and Khludnev A. M., "Equilibrium problem of a plate with an oblique cut," J. Appl. Mech. Tech. Phys., **39**, No. 2, 302–311 (1998).
8. Khludnev A. M., Elasticity Problems in Nonsmooth Domains [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2010).
9. Lazarev N. P. and Rudoy E. M., "Optimal size of a rigid thin stiffener reinforcing an elastic plate on the outer edge," Z. Angew. Math. Mech., **97**, No. 9, 1120–1127 (2017).
10. Lazarev N. P., "The equilibrium problem for a Timoshenko-type shallow shell containing a through crack," J. Appl. Ind. Math., **7**, No. 1, 78–88 (2013).

11. Lazarev N. P., "An equilibrium problem for a Timoshenko plate with a through crack [in Russian]," *Sib. Zh. Ind. Mat.*, **14**, No. 4, 32–43 (2011).
12. Rudoy E. M., "Griffith's formula and Cherepanov–Rice's integral for a plate with a rigid inclusion and a crack," *J. Math. Sci.*, **186**, No. 3, 511–529 (2012).
13. Khludnev A. M., "Thin rigid inclusions with delaminations in elastic plates," *Eur. J. Mech., A, Solids*, **32**, No. 1, 69–75 (2012).
14. Neustroeva N. V., "An equilibrium problem for an elastic plate with an inclined crack on the boundary of a rigid inclusion," *J. Appl. Ind. Math.*, **9**, No. 3, 402–411 (2015).
15. Shcherbakov V., "Shape optimization of rigid inclusions for elastic plates with cracks," *Z. Angew. Math. Phys.*, **67**, No. 3, 71 (2016).
16. Lazarev N. P., "Equilibrium problem for a Timoshenko plate with an oblique crack," *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **54**, No. 4, 662–671 (2013).
17. Lazarev N. P., "An iterative penalty method for a nonlinear problem of equilibrium of a Timoshenko-type plate with a crack," *Numer. Anal. Appl.*, **4**, No. 4, 309–318 (2011).
18. Lazarev N. P. and Rudoy E. M., "Shape sensitivity analysis of Timoshenko's plate with a crack under the nonpenetration condition," *Z. Angew. Math. Mech.*, **94**, No. 9, 730–739 (2014).
19. Lazarev N. P., Itou H., and Neustroeva N. V., "Fictitious domain method for an equilibrium problem of the Timoshenko-type plate with a crack crossing the external boundary at zero angle," *Japan. J. Ind. Appl. Math.*, **33**, No. 1, 63–80 (2016).
20. Pelekh B. L., *Shell Theory with Finite Shear Stiffness* [in Russian], Naukova Dumka, Kiev (1973).
21. Mikhailov V. P., *Partial Differential Equations*, Mir, Moscow (1978).
22. Lions J. L. and Magenes E., *Nonhomogeneous Boundary Value Problems and Applications*, V. 1, Springer-Verlag, Berlin, New York (1972).
23. Khludnev A. M. and Sokolowski J., *Modelling and Control in Solid Mechanics*, Birkhäuser-Verlag, Basel, Boston, Berlin (1997).

Submitted January 18, 2018

Nyurgun P. Lazarev
M. K. Ammosov North-Eastern Federal University,
48 Kulakovsky Street, Yakutsk 677000, Russia
nyurgun@ngs.ru

Hiromichi Itou
Tokyo University of Science,
Department of Mathematics,
1–3 Kagurazaka, Shinjuku-ku, Tokyo 162–8601
h-itou@rs.tus.ac.jp

Petr V. Sivtsev and Irina M. Tikhonova
M. K. Ammosov North-Eastern Federal University,
42 Kulakovsky Street, Yakutsk 677000, Russia
sivkapetr@mail.ru, IrinaMikh3007@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ СОВМЕСТИСТИ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ (ОБЩИЙ СЛУЧАЙ)

Г. А. Рудых, Э. И. Семенов

Аннотация. Исследуется многомерное параболическое уравнение второго порядка с неявным вырождением и с конечной скоростью распространения возмущений. Рассматриваемое уравнение представляется в виде переопределенной (число уравнений превосходит число искомых функций, подлежащих определению) системы дифференциальных уравнений с частными производными. Ясно, что у переопределенной системы дифференциальных уравнений может вообще не существовать решений. Поэтому для установления факта существования ее решений и степени их произвола проводится исследование, связанное с анализом совместности введенной переопределенной системы дифференциальных уравнений. В итоге проведенного исследования получены как достаточные, так и необходимые и достаточные условия совместности переопределенной системы дифференциальных уравнений с частными производными. На основе этих результатов с использованием уравнения Лиувилля и теоремы о потенциальных операторах конструктивно строятся новые точные неотрицательные решения многомерного уравнения нелинейной теплопроводности. Помимо этого получены новые точные неотрицательные решения нелинейных эволюционных уравнений Гамильтона — Якоби, нелинейной теплопроводности и волны Римана, не являющиеся инвариантными с точки зрения групп точечных преобразований и групп Ли — Беклунда. Наконец, получены преобразования Беклунда, связывающие решения исследуемого многомерного уравнения теплопроводности с родственными нелинейными эволюционными уравнениями.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.1.12768

Ключевые слова: многомерное уравнение нелинейной теплопроводности, нелинейное эволюционное уравнение, конечная скорость распространения возмущений, точное неотрицательное решение, преобразование Беклунда.

1. Введение

В работе с использованием уравнения Лиувилля [1, 2] и теоремы о необходимом и достаточном условии потенциальности векторного поля [3, 4] излагается подход, позволяющий в ряде случаев конструктивно строить новые точные

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-08-06680) и Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-8081.2016.9).

неотрицательные решения многомерного уравнения нелинейной теплопроводности с конечной скоростью распространения возмущений [5–7], часть из которых не являются инвариантными с точки зрения групп точечных преобразований и групп Ли — Беклунда [8, 9].

2. Многомерное уравнение нелинейной теплопроводности с неявным вырождением

Рассмотрим многомерное уравнение нелинейной теплопроводности

$$u_t = \nabla \cdot (K(u) \nabla u), \quad u = u(\mathbf{x}, t) : \Omega \times \overline{\mathbb{R}}^+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+, \quad (1)$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область; $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$; $\overline{\mathbb{R}}^+ = [0, +\infty)$; $u(\mathbf{x}, t) \geq 0$ — температура среды; $K(u)$ — функция, определенная при всех $u \in \overline{\mathbb{R}}^+$; $K(u) > 0$ при $u > 0$, причем $K(0) = 0$; $K(u) \in C^2(\mathbb{R}^+) \cap C(\overline{\mathbb{R}}^+)$ — коэффициент нелинейной теплопроводности. Уравнение (1) возникает во многих прикладных задачах и принадлежит к классу так называемых неявно вырождающихся параболических уравнений. Строгая математическая теория этих уравнений берет свое начало в сравнительно недавних работах [5, 10–12]. Всюду в этой работе относительно функции $K(u)$ будем предполагать, что

$$\int_0^1 \frac{K(u)}{u} du < +\infty. \quad (2)$$

Известно [13–15], что сходимость интеграла (2) является необходимым и достаточным условием конечной скорости распространения возмущений в процессах, описываемых уравнением (1). Кроме того, если $K(u) \in C^2(\mathbb{R}^+) \cap C(\overline{\mathbb{R}}^+)$ и выполняется неравенство (2), то уравнение (1) помимо процессов нестационарной фильтрации описывает диффузию и распространение тепла в сплошной среде с большими температурными перепадами [5].

Теперь представим исследуемое уравнение (1) в виде следующей системы:

$$u_t + \nabla \cdot (u \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)) = 0, \quad (3)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = -\frac{K(u)}{u} \nabla u. \quad (4)$$

Система уравнений (3), (4) является переопределенной (число уравнений превосходит число искомых функций, подлежащих определению) относительно $u(\mathbf{x}, t)$. При этом вектор-функция $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет включению $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \in C^1(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$, где $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — открытое множество; $G = \Omega \times I$; $I = \{t : 0 < t < +\infty\}$; Ω — проекция G в $\mathbb{R}^n$. Очевидно, что у переопределенной системы уравнений (3), (4) может вообще не существовать решений. Поэтому для установления факта существования решений и степени их произвола необходимо провести исследование и анализ совместности переопределенной системы (3), (4). Методы исследования совместности переопределенных систем дифференциальных уравнений с частными производными изложены в [16–19].

Отметим, что уравнение нелинейной теплопроводности (1) и линейное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка (3) можно рассматривать как систему уравнений с дифференциальной связью (4). При этом метод дифференциальных связей [17–19] существенно использует теорию совместности систем дифференциальных уравнений. В [20, 21] рассматривалось приложение этого метода для уравнения (1) со степенным коэффициентом теплопроводности.

Предположим, что $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \in C^1(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$, тогда соотношение (3) при заданной вектор-функции $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ является уравнением Лиувилля [1, 2] относительно температуры $u(\mathbf{x}, t)$ для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t).$$

В силу формулы (2) имеет смысл функция

$$\Phi(u) = \int_0^u \frac{K(\xi)}{\xi} d\xi, \quad u \geq 0, \quad \Phi(0) = 0. \quad (5)$$

Помимо этого ввиду монотонности $\Phi(u)$ существует обратная функция $\Phi^{-1}(\eta)$, причем $0 \leq \eta < \Phi(\infty) \leq +\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В работе [22] проведено исследование совместности переопределенной системы уравнений (3), (4) в важном частном случае $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = -A(t)\mathbf{x} - \mathbf{B}(t)$, где $A(t) = [a_{ij}(t)]$ — вещественная симметричная $(n \times n)$ -матрица; $\mathbf{B}(t) = (b_1(t), \dots, b_n(t))'$ — вектор-столбец; $a_{ij}(t), b_i(t) \in C^1(\mathbb{R}^+)$; $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Перейдем к рассмотрению общего случая, когда вектор-функция $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет включению $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \in C^1(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$.

3. Исследование совместности переопределенной системы уравнений (общий случай)

В этом разделе при определенных предположениях относительно вектор-функции $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \in C^1(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$ и с использованием теоремы о потенциальных операторах [3, 4, 23] устанавливается, что скалярная функция $u(\mathbf{x}, t)$, определяемая из соотношения (4) и удовлетворяющая уравнению Лиувилля (3), является точным решением многомерного уравнения нелинейной теплопроводности (1) с конечной скоростью распространения возмущений.

Имеет место следующий основополагающий результат для всех дальнейших исследований.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (2), (5) и компоненты векторного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \in C^1(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$ связаны соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_j(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(\mathbf{x}, t), \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (6)$$

Тогда функция

$$u(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \Phi^{-1}(F(\mathbf{x}, t)) & \text{в области } F(\mathbf{x}, t) > 0, \\ 0 & \text{в области } F(\mathbf{x}, t) \leq 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$F(\mathbf{x}, t) = - \int_0^1 (\mathbf{f}(\tau \mathbf{x}, t), \mathbf{x}) d\tau, \quad (8)$$

определяемая из (4) и удовлетворяющая уравнению Лиувилля (3), является точным неотрицательным решением уравнения нелинейной теплопроводности (1). При этом выполняются соотношения

$$F_t = R(F)\Delta F + |\nabla F|^2, \quad (9)$$

$$\frac{d}{dF} \ln \Phi^{-1}(F) = \frac{1}{R(F)}, \quad (10)$$

$$R(F) = K(\Phi^{-1}(F)), \quad (11)$$

$$\mathbf{f}_t = \nabla(R(F)\nabla \cdot \mathbf{f} - |\mathbf{f}|^2). \quad (12)$$

Кроме того, уравнение (9) (соответственно (12)) является достаточным (необходимым и достаточным) условием совместности переопределенной относительно функции $u(\mathbf{x}, t)$ системы (3), (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим [23], что для потенциальности векторного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n$, определяемого формулой $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \nabla U(\mathbf{x}, t)$, необходимо и достаточно, чтобы его компоненты удовлетворяли соотношению (6). При этом соответствующий потенциал $U(\mathbf{x}, t)$ определяется согласно теореме о потенциальных операторах по формуле

$$U(\mathbf{x}, t) = \int_0^1 (\mathbf{f}(\tau \mathbf{x}, t), \mathbf{x}) d\tau + \mathcal{C}(t),$$

где $\mathcal{C}(t)$ — произвольная функция, зависящая от переменной t . С учетом формулы (5) уравнение (4) может быть записано в виде

$$\nabla \Phi(u) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \quad (13)$$

С другой стороны, так как выполняются равенства (6), согласно теореме о потенциальных операторах из соотношения (13) следует, что

$$\Phi(u) = - \int_0^1 (\mathbf{f}(\tau \mathbf{x}, t), \mathbf{x}) d\tau = F(\mathbf{x}, t), \quad (14)$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Соотношение (14) приводит к справедливости формулы (7), в которой Φ^{-1} — функция, обратная к Φ , существующая в силу монотонности последней. Из формул (13), (14) имеем

$$\nabla F(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \quad (15)$$

Подставляя функцию (7) в уравнение Лиувилля (3) и принимая во внимание формулы (5), (14), приходим к нелинейному эволюционному уравнению типа нелинейной теплопроводности (9) и соотношению (10). При этом уравнение (9) является достаточным условием совместности

$$\nabla \frac{\partial}{\partial t} u = \frac{\partial}{\partial t} \nabla u$$

переопределенной относительно функции $u = u(\mathbf{x}, t)$ системы

$$u_t = \left[\Delta F + \frac{|\nabla F|^2}{K(u)} \right] u, \quad (16)$$

$$\nabla u = \frac{u}{K(u)} \nabla F, \quad (17)$$

получаемой из (3), (4) с учетом формулы (15). Действительно, расписывая условие совместности системы (16), (17) и учитывая, что $u(\mathbf{x}, t) \neq 0$, получим

$$\nabla \frac{\partial}{\partial t} u - \frac{\partial}{\partial t} \nabla u = -\frac{u}{K(u)} \nabla [F_t - R(F) \Delta F - |\nabla F|^2].$$

При этом формулы (7), (10) приводят к цепочке равенств

$$u(\mathbf{x}, t) = \Phi^{-1}(F(\mathbf{x}, t)) = \exp \left(\int \frac{dF}{R(F)} \right). \quad (18)$$

Кроме того, из соотношения (10) с учетом формул (5), (7), (14) следует справедливость функционального соотношения (11). Отметим, что система уравнений (3), (4) имеет также другое представление

$$u_t = \left[-\nabla \cdot \mathbf{f} + \frac{|\mathbf{f}|^2}{K(u)} \right] u, \quad (19)$$

$$\nabla u = -\frac{u}{K(u)} \mathbf{f}. \quad (20)$$

Покажем, что уравнение (12) на вектор-функцию $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$, в котором F определяется посредством формулы (8), является необходимым и достаточным условием совместности переопределенной относительно функции $u = u(\mathbf{x}, t)$ системы (19), (20). В самом деле, расписывая условие совместности системы (19), (20) и исключая из рассмотрения тривиальное решение $u(\mathbf{x}, t) = 0$, имеем

$$\nabla \frac{\partial}{\partial t} u - \frac{\partial}{\partial t} \nabla u = \frac{u}{K(u)} [\mathbf{f}_t - \nabla(R(F) \nabla \cdot \mathbf{f} - |\mathbf{f}|^2)].$$

Итак, если система уравнений (19), (20) совместна, то вектор-функция $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет уравнению (12), и наоборот, если $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет уравнению (12), то система (19), (20) совместна. При этом соотношения (16), (17) и (19), (20) являются преобразованиями Беклунда [24], связывающими соответственно решения $u(\mathbf{x}, t)$, $F(\mathbf{x}, t)$ и $u(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ уравнений (1), (8) и (1), (12). Легко проверить, что функция (7) является решением уравнения (1). Действительно, подставляя (7) в (1) и используя формулы (9)–(11), (18), нетрудно убедиться, что уравнение выполняется тождественно. Теорема доказана.

Отметим, что при $n = 3$ условие (6) означает, что $\nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = 0$, т. е. векторное поле $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ безвихревое.

Следствие 1. Если $R(F) \equiv \alpha > 0$, то уравнения (9), (12) запишутся так:

$$F_t = \alpha \Delta F + |\nabla F|^2, \quad (21)$$

$$\mathbf{f}_t = \alpha \nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \nabla |\mathbf{f}|^2, \quad (22)$$

и являются многомерными аналогами [25, 26] одномерного уравнения Бюргерса

$$u_t + uu_x = \mu u_{xx}$$

где $\mu \in \mathbb{R}^+$ — коэффициент диффузии.

Одномерное уравнение Бюргерса знаменито по нескольким причинам. Во-первых, оно включает в себя типичную нелинейность с типичной тепловой диффузией и поэтому может рассматриваться как нелинейная версия линейного уравнения теплопроводности. Во-вторых, это уравнение можно считать одномерной редукцией не менее известных уравнений Навье — Стокса, так как оно в простейшей из возможных форм описывает баланс между нелинейным конвективным (член uu_x) и диссипативным (член μu_{xx}) процессами. В-третьих, что гораздо замечательнее, данное уравнение может быть линеаризовано при помощи известного преобразования Коула — Хопфа. Кроме того, в этих работах показано, что общее решение уравнения Бюргерса можно получить в явном виде.

Решения уравнений (21), (22) связаны формулой (15). Помимо этого в рассматриваемом случае соотношения (19), (20) принимают вид

$$u_t = \left(\frac{1}{\alpha} |\mathbf{f}|^2 - \nabla \cdot \mathbf{f} \right) u, \quad \nabla u = -\frac{1}{\alpha} u \mathbf{f} \quad (23)$$

и представляет собой преобразование Беклунда — Хопфа, связывающее решение уравнения Бюргерса (22) и линейного уравнения теплопроводности

$$u_t = \alpha \Delta u, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0. \quad (24)$$

С другой стороны, из формулы (18) имеем

$$u(\mathbf{x}, t) = \Phi^{-1}(F(\mathbf{x}, t)) = \exp \left(\frac{1}{\alpha} F(\mathbf{x}, t) \right),$$

причем

$$F(\mathbf{x}, t) = - \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i f_i(\tau \mathbf{x}, t) \right) d\tau + \beta, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

где $F(\mathbf{x}, t)$ — функция, удовлетворяющая уравнению (21). Так как общее решение уравнения (24) хорошо известно, по формулам

$$F(\mathbf{x}, t) = \alpha \ln u(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = -\alpha \nabla \ln u(\mathbf{x}, t)$$

можно найти точные решения уравнений (21), (22). Пусть $R(F) \equiv \alpha > 0$, тогда функция

$$u(\mathbf{x}, t) = \gamma \exp \left(-\frac{1}{\alpha} \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i f_i(\tau \mathbf{x}, t) \right) d\tau \right), \quad \gamma \in \mathbb{R}^+,$$

является точным положительным решением уравнения (24). Кроме того, вектор-функция $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет уравнению Бюргерса (22), а второе из соотношений (23) — преобразование Коула — Хопфа, связывающее решения $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, $u(\mathbf{x}, t)$ уравнений (22), (24).

Следствие 2. Пусть $R(F) = \lambda F$, тогда (9), (12) принимают соответственно вид уравнения нелинейной теплопроводности

$$F_t = \lambda F \Delta F + |\nabla F|^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+, \quad (9')$$

и нелинейного интегродифференциального уравнения

$$\mathbf{f}_t = \nabla \left(-\lambda \int_0^1 (\mathbf{f}(\tau \mathbf{x}, t), \mathbf{x}) d\tau \nabla \cdot \mathbf{f} - |\mathbf{f}|^2 \right) \quad (12')$$

относительно вектор-функции $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n$. При этом уравнение нелинейной теплопроводности (1) согласно формуле (18) конкретизируется и запишется в форме

$$u_t = \nabla \cdot (u^\lambda \nabla u), \quad u = u(\mathbf{x}, t) : \Omega \times \overline{\mathbb{R}}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad (1')$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область; $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Тем самым из теорем 1, 2 работы [22] и теоремы 1 данной статьи следует, что уравнения (9'), (12') обладают явными точными решениями

$$F(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\lambda} (u(\mathbf{x}, t))^\lambda, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = -(u(\mathbf{x}, t))^{\lambda-1} \nabla u(\mathbf{x}, t).$$

При этом $u(\mathbf{x}, t)$ — неотрицательное решение уравнения пористой среды (нестационарной фильтрации) (1'), полученное в работе [22].

Теорема 2. Пусть выполнены условия (2), (5), (6) и компоненты векторного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \in C^1(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$ удовлетворяют соотношению

$$\nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (25)$$

Тогда функция $u(\mathbf{x}, t)$ вида (7), (8), определяемая из (4) и удовлетворяющая уравнению Лиувилля (3), является точным неотрицательным решением многомерных нелинейных эволюционных уравнений типа Гамильтона — Якоби и теплопроводности

$$u_t = \frac{K(u)}{u} |\nabla u|^2, \quad (26)$$

$$u_t = \frac{K^2(u)}{K(u) - uK'(u)} \Delta u, \quad (27)$$

где $K'(u) = \frac{dK(u)}{du}$, $K(u) \neq \gamma u$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$, причем выполняются соотношения

$$F_t = |\nabla F|^2, \quad \Delta F = 0, \quad (28)$$

$$\mathbf{f}_t = -\nabla |\mathbf{f}|^2, \quad (29)$$

$$\frac{d}{dF} \ln \Phi^{-1}(F) = \frac{1}{K(\Phi^{-1}(F))}, \quad \Phi^{-1}(F) \neq 0. \quad (30)$$

Кроме того, уравнение (28) (соответственно (29)) является достаточным (необходимым и достаточным) условием совместности переопределенной относительно $u(\mathbf{x}, t)$ системы уравнений (3), (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 1, приходим к справедливости формул (7), (8) и (13)–(15). При этом соотношения (6) являются необходимыми и достаточными условиями для того, чтобы векторное поле $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n$ было потенциальным. При этом соответствующий потенциал $F(\mathbf{x}, t)$ определяется согласно (8). С другой стороны, в силу условия (25) векторное поле $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n$ соленоидально (несжимаемо). В связи с этим из формул (15), (25) следует, что функция $F(\mathbf{x}, t)$ является гармонической, т. е.

$$\Delta F(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (31)$$

Так как из рассмотрения исключается тривиальное решение $u(\mathbf{x}, t) = 0$, уравнение (31) запишется в виде

$$K(u)\Delta u = \left[\frac{K(u)}{u} - K'(u) \right] |\nabla u|^2, \quad (32)$$

или, что то же самое,

$$\Delta u + \left[\frac{K'(u)}{K(u)} - \frac{1}{u} \right] |\nabla u|^2 = 0, \quad K(u) \neq 0. \quad (33)$$

Подставляя функцию (7) в уравнение Лиувилля (3) и принимая во внимание формулу (31), получим уравнение (28). Соотношения (5), (7), (14) приводят к справедливости равенства (30). Из формул (13), (28) следует уравнение (29). Далее уравнение нелинейной теплопроводности (1) с учетом соотношения (32) может быть преобразовано к нелинейным эволюционным уравнениям (26), (27). Легко проверить, что функция $u(\mathbf{x}, t)$, определяемая согласно (7), (8), удовлетворяет уравнениям (26), (27). Наконец, аналогично, как и в теореме 1, доказывается, что уравнение (28) является достаточным, а уравнение (28) — необходимым и достаточным условием совместности переопределенной системы (3), (4). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что уравнения (28), (29) являются соответственно известными многомерными нелинейными эволюционными уравнениями Гамильтона — Якоби и волны Римана.

Следствие 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда функция (7), (8), удовлетворяющая условию (31), определяет класс точных неотрицательных решений нелинейного эллиптического уравнения (33), отыскиваемых из квадратуры

$$\Phi(u) = \int_0^u \frac{K(\xi)}{\xi} d\xi = F, \quad u \geq 0, \quad (34)$$

где F — гармоническая функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В справедливости этого результата убедимся непосредственной подстановкой функции (7) в исследуемое уравнение (33). Итак, подставляя (7) в (31), приходим к уравнению

$$\Delta\Phi^{-1}(F) + \left[\frac{K'(\Phi^{-1}(F))}{K(\Phi^{-1}(F))} - \frac{1}{\Phi^{-1}(F)} \right] |\nabla\Phi^{-1}(F)|^2 = 0. \quad (35)$$

Так как имеет место зависимость

$$\nabla\Phi^{-1}(F) = \frac{d\Phi^{-1}(F)}{dF} \nabla F$$

и функция $F = F(\mathbf{x}, t)$ гармоническая, т. е. удовлетворяет уравнению (31), то справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \Delta\Phi^{-1}(F) &= \nabla \cdot (\nabla\Phi^{-1}(F)) = \frac{d^2\Phi^{-1}(F)}{dF^2} |\nabla F|^2, \\ |\nabla\Phi^{-1}(F)|^2 &= \left[\frac{d\Phi^{-1}(F)}{dF} \right]^2 |\nabla F|^2. \end{aligned}$$

Далее, пользуясь определением функции, удовлетворяющей соотношению (30), находим, что

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi^{-1}(F)}{dF} &= \frac{\Phi^{-1}(F)}{K(\Phi^{-1}(F))}, \\ \frac{d^2\Phi^{-1}(F)}{dF^2} &= \frac{\Phi^{-1}(F)}{K^2(\Phi^{-1}(F))} - \frac{K'(\Phi^{-1}(F))}{K^3(\Phi^{-1}(F))} (\Phi^{-1}(F))^2. \end{aligned}$$

Тем самым, используя полученные формулы, нетрудно убедиться, что уравнение (35) выполняется тождественно. Наконец, из цепочки равенств (34) следует справедливость формулы (7). Следствие доказано.

ПРИМЕР 1. Пусть $K(u) = u^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Тогда нелинейное эллиптическое уравнение (33) запишется как

$$u(\mathbf{x})\Delta u(\mathbf{x}) + (\lambda - 1)|\nabla u(\mathbf{x})|^2 = 0, \quad u(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+. \quad (36)$$

Из квадратуры (34) получим, что уравнение (36) обладает точным неотрицательным решением

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} (\lambda F(\mathbf{x}))^{1/\lambda} & \text{в области } F(\mathbf{x}) > 0, \\ 0 & \text{в области } F(\mathbf{x}) \leq 0, \end{cases}$$

где $F(\mathbf{x})$ — произвольная гармоническая функция. При этом $F(\mathbf{x})$ связана с функцией $f(\mathbf{x})$ формулой (15). Пусть $n = 2$, возьмем гармоническую функцию вида $F(x_1, x_2) = 3x_1^2x_2 - x_2^3$. Тогда функция

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} (3\lambda x_1^2x_2 - \lambda x_2^3)^{1/\lambda} & \text{в области } 3x_1^2x_2 - x_2^3 > 0, \\ 0 & \text{в области } 3x_1^2x_2 - x_2^3 \leq 0 \end{cases}$$

является точным решением уравнения (36) в двумерном координатном пространстве.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Точные решения некоторых классов нелинейных эллиптических уравнений вида (33) строились в [27, 28]. В частности, в этих исследованиях показано, что точное решение уравнения

$$\Delta u + \frac{1}{2g(u)} \frac{dg(u)}{du} |\nabla u|^2 = 0$$

определяется из квадратуры

$$\int_0^u (g(\xi))^{1/2} d\xi = v,$$

где v — произвольная гармоническая функция.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kaplan W. Some methods for analysis of the flow in phase space // Proc. of the symposium on nonlinear circuit analysis. New York, 1953. P. 99–106.
2. Steeb W. H. Generalized Liouville equation, entropy and dynamic systems containing limit cycles // Physica A. V. 1979. V. 95, N 1. P. 181–190.
3. Вайнберг М. М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М.: Гостехтеориздат, 1956.
4. Berger M. S. Perspectives in nonlinearity. New York; Amsterdam, 1968.
5. Калашников А. С. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // Успехи мат. наук. 1987. Т. 42, вып. 2. С. 135–176.
6. Галактионов В. А., Дородницын В. А., Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А. А. Квазилинейное уравнение теплопроводности: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотика, структуры // Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Итоги науки и техники. М.: ВИНТИ АН СССР, 1987. Т. 28. С. 95–205.
7. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
8. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
9. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
10. Антонцев С. Н. Локализация решений вырождающихся уравнений механики сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1986.
11. Aronson D. G. The porous medium equation. Some problems in nonlinear diffusion. Berlin: Springer-Verl., 1986. (Lecture Notes in Math.; V. 1224).
12. Aronson D. G. Regularity of flows in porous medium: a survey // Nonlinear diffusion equations and their equilibrium states. New York: Springer-Verl., 1988. V. 1, N 1. P. 35–49.
13. Олейник О. А. Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1958. Т. 22, № 5. С. 667–704.
14. Калашников А. С. О возникновении особенностей у решений уравнения нестационарной фильтрации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1967. Т. 7, № 2. С. 440–443.
15. Калашников А. С. Об уравнениях типа нестационарной фильтрации с бесконечной скоростью распространения возмущений // Вестн. МГУ. Сер. математика, механика. 1972. № 6. С. 45–49.
16. Яненко Н. Н. Теория совместности и методы интегрирования систем нелинейных уравнений в частных производных // Тр. IV Всесоюз. мат. съезда. Т. 2. Л.: Наука, 1964. С. 613–621.
17. Рождественский Б. Л. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.
18. Сидоров А. Ф. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984.
19. Шалеев В. П. Метод дифференциальных связей и его приложение к уравнениям механики сплошной среды. Дис. ... докт. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1987.

20. Капцов О. В. Линейные определяющие уравнения для дифференциальных связей // Мат. сб. 1998. Т. 189, № 12. С. 103–118.
21. Капцов О. В. Методы интегрирования уравнений с частными производными. М.: Физматлит, 2009.
22. Рудых Г. А., Семенов Э. И. Исследование совместности переопределенной системы для многомерного уравнения нелинейной теплопроводности (частный случай) // Изв. ИГУ. Сер. Математика. 2016. Т. 18. С. 93–109.
23. Вайнберг М. М. Функциональный анализ. М.: Просвещение, 1979.
24. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989.
25. Богоявленский О. И. Опрокидывающиеся солитоны. М.: Наука, 1991.
26. Holden H. The Burgers equation with a noisy force and the stochastic heat equation // Commun. Part. Diff. Equ. 1994. V. 19, N 1–2. P. 119–141.
27. Бицадзе А. В. Точные решения некоторых классов нелинейных уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 10. С. 1774–1778.
28. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.

Статья поступила 15 декабря 2017 г.

Рудых Геннадий Алексеевич
Иркутский гос. университет,
Институт математики, экономики и информатики,
б. Гагарина, 20, Иркутск 664003
rudykhga@gmail.com

Семенов Эдуард Иванович
Институт динамики систем и теории управления СО РАН им В. М. Матросова,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033
edwseiz@gmail.com

RESEARCH OF COMPATIBILITY
OF THE REDEFINED SYSTEM
FOR THE MULTIDIMENSIONAL NONLINEAR
HEAT EQUATION (GENERAL CASE)

G. A. Rudykh and E. I. Semenov

Abstract: We study the multidimensional parabolic second-order equation with the implicit degeneration and the finite velocity of propagation of perturbations. This equation is given in the form of an overdetermined system of the differential equations with partial derivatives (the number of the equations exceeds the number of the required functions). It is known that an overdetermined system of the differential equations may not be compatible as well as may not have any solutions. Therefore, in order to determine the existence of the solutions and the degree of their arbitrariness the analysis of this overdetermined system is carried out. As a result of the research, the sufficient and the necessary and sufficient compatibility conditions for the overdetermined system of the differential equations with partial derivatives are received. On the basis of these results with the use of the equation of Liouville and the theorem of the potential operators, the exact non-negative solutions of the multidimensional nonlinear heat equation with the finite velocity of propagation of perturbations are constructed. In addition, the new exact non-negative solutions of the nonlinear evolution of Hamilton–Jacobi equations are obtained; the solutions of the nonlinear heat equation and the solutions of Riemann wave equation are also found. Some solutions are not invariant from the point of view of the groups of the pointed transformations and Lie–Bäcklund’s groups. Finally, the transformations of Bäcklund linking the solutions of the multidimensional nonlinear heat equation with the related nonlinear evolution equations are obtained.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.1.12768

Keywords: multidimensional nonlinear heat equation, nonlinear evolution equations, finite velocity of propagation of perturbation, exact nonnegative solutions, Bäcklund transformation.

REFERENCES

1. Kaplan W., “Some methods for analysis of the flow in phase space,” in: Proc. Symp. Nonlinear Circuit Analysis, pp. 99–106, New York (1953).
2. Steeb W. H., “Generalized Liouville equation, entropy and dynamic systems containing limit cycles,” *Physica A*, **95**, No. 1, 181–190 (1979).
3. Vainberg M. M., *Variational Methods for Nonlinear Operators Study* [in Russian], Gostekh-teorizdat, Moscow (1956).
4. Berger M. S., *Perspectives in Nonlinearity*, New York; Amsterdam (1968).
5. Kalashnikov A. S., “Some problems of the qualitative theory of nonlinear degenerate second-order parabolic equations,” *Russ. Math. Surv.*, **42**, No. 2, 135–176 (1987).
6. Galaktionov V. A., Dorodnitsyn V. A., Elenin G. G., Kurdyumov S. P., and Samarskii A. A., “A quasilinear equation with a source: Peaking, localization, symmetry exact solutions, asymptotics, structures,” *J. Sov. Math.*, **41**, No. 5, 1222–1292 (1988).

7. Samarskij A. A., Galaktionov V. A., Kurdyumov S. P., and Mikhajlov A. P., Peaking Models in Problems for Quasilinear Parabolic Equations [in Russian], Nauka, Moscow (1987).
8. Ovsyannikov L. V., Group Analysis of Differential Equations [in Russian], Nauka, Moscow (1978).
9. Ibragimov N. H., Transformation Groups in Mathematical Physics [in Russian], Nauka, Moscow (1983).
10. Antontsev S. N., Localization of Solutions to Degenerate Equations of Continuum Mechanics [in Russian], Lavrentiev Hydrodyn. Inst., Novosibirsk (1986).
11. Aronson D. G., The Porous Medium Equation. Some Problems in Nonlinear Diffusion, Springer-Verl., Berlin (1986) (Lect. Notes Math.; V. 1224).
12. Aronson D. G., "Regularity of flows in porous medium: a survey," in: Nonlinear Diffusion Equations and Their Equilibrium States, **1**, No. 1, pp. 35–49, Springer-Verl., New York (1988).
13. Olejnik O. A., Kalashnikov A. S., and Zhou Yu-lin, "The Cauchy problem and boundary problems for equations of the type of non-stationary filtration [in Russian]," *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, **22**, No. 5, 667–704 (1958).
14. Kalashnikov A. S., "The occurrence of singularities in solutions of the non-steady seepage equation [in Russian]," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, **7**, No. 2, 440–443 (1967).
15. Kalashnikov A. S., "On equations of the type of non-stationary filtration with infinite velocity of perturbation propagation," *Vestn. Moskov. Univ., Ser. I*, No. 6, 45–49 (1972).
16. Yanenko N. N., "Compatibility theory and integration methods for systems of partial differential equations [in Russian]," in: *Tr. Vsesoyuz. Mat. S'ezda*, **2**, pp. 613–621, Nauka, Leningrad (1964).
17. Rozhdestvenskii B. L., Systems of Quasilinear Equations, Nauka, Moscow (1978).
18. Sidorov A. F., Metod Differentsialnyh Svyazey i Ego Prilozheniya v Gazovoy Dinamike [in Russian], Nauka, Novosibirsk (1984).
19. Shapeev V. P., Metod Differentsialnyh Svyazey i Ego Prilozheniya k Uravneniyam Mekhaniki Sploshnoy Sredy [in Russian], Diss. Dokt. Fiz.-Mat. Nauk, Novosibirsk (1987).
20. Kaptsov O. V., "Linear determining equations for differential constraints," *Sb. Math.*, **189**, No. 12, 1839–1854 (1998).
21. Kaptsov O. V., Integration Methods for Partial Differential Equations [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2009).
22. Rudykh G. A. and Semenov E. I., "Research of compatibility of the redefined system for the multidimensional nonlinear heat equation (special case) [in Russian]," *Izv. Irkutsk. Gos. Univ., Ser. Mat.*, **18**, 93–109 (2016).
23. Vainberg M. M., Functional Analysis [in Russian], Prosveshchenie, Moscow (1979).
24. Newell A. C., Solitons in Mathematics and Physics, SIAM (1989).
25. Bogoyavlenskii O. I., Overturning Solitons [in Russian], Nauka, Moscow 1991.
26. Holden H., "The Burgers equation with a noisy force and the stochastic heat equation," *Commun. Partial Differ. Equations*, **19**, No. 1–2, 119–141 (1994).
27. Bitsadze A. V., "Exact solutions of some classes of nonlinear partial differential equations," *Differ. Equations*, **17**, No. 10, 1774–1778 (1981).
28. Bitsadze A. V., Some Classes of Partial Differential Equations [in Russian], Nauka, Moscow (1981).

Submitted December 15, 2017

Gennadii A. Rudykh
Institute of Mathematics, Economics and Information Science,
Irkutsk State University (ISU),
20 Gagarin Boulevard, Irkutsk, 664003, Russia
rudykhga@gmail.com

Eduard I. Semenov
Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory,
134 Lermontov Street, Irkutsk 664033, Russia
edwseiz@gmail.com

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е. М. Стрелецкая, В. Е. Фёдоров, А. Дебуш

Аннотация. Исследуется задача Коши для уравнения распределенного порядка в банаховом пространстве с дробной производной Гerasимова — Капуто и с линейным ограниченным оператором в правой части. Методами теории преобразования Лапласа найдены условия существования и единственности решения задачи в пространстве экспоненциально растущих функций. Решение представлено в виде контурного интеграла от резольвенты ограниченного оператора со сложным аргументом, определяемым видом распределенной производной. Доказана аналитичность полученного решения в правой полуплоскости комплексной плоскости. Полученный общий результат использован при исследовании задачи Коши для одной интегродифференциальной системы уравнений, правая часть которой представляет собой композицию интегрального по пространственным переменным и линейного преобразований неизвестной вектор-функции.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.1.12769

Ключевые слова: эволюционное уравнение, дробная производная Гerasимова — Капуто, задача Коши, уравнение распределенного порядка.

1. Введение и предварительные сведения

Уравнения с распределенными дробными производными встречаются при математическом моделировании сложных систем [1–7]. Существует большое количество работ, посвященных качественному и численному анализу различных уравнений с дробными производными, отметим среди них работы авторов данной статьи [8–19], близкие по методам исследования и посвященные исследованию качественных вопросов разрешимости уравнений дробного порядка в банаховых и локально выпуклых пространствах. В настоящей работе рассматривается задача Коши для уравнения распределенного дробного порядка с производной Гerasимова — Капуто

$$\int_a^b \omega(\alpha) D_t^\alpha x(t) d\alpha = Ax(t), \quad t \geq 0,$$

в банаховом пространстве. Оператор A предполагается линейным и ограниченным. Доказана теорема об однозначной разрешимости этой задачи в пространстве экспоненциально растущих функций, получен вид ее решения, аналитического в правой полуплоскости. Полученный общий результат использован при исследовании одной интегродифференциальной системы уравнений.

При $\beta > 0$ обозначим $g_\beta(t) := t^{\beta-1}/\Gamma(\beta)$ для $t > 0$,

$$J_t^\beta h(t) := (g_\beta * h)(t) := \int_0^t g_\beta(t-s)h(s) ds = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} h(s) ds.$$

Пусть $\alpha > 0$, m — наименьшее целое число, не превосходящее число α , D_t^m — обычная производная порядка $m \in \mathbb{N}$, D_t^α — дробная производная Герасимова — Капуто [20, 21], т. е.

$$D_t^\alpha h(t) := D_t^m J_t^{m-\alpha} \left(h(t) - \sum_{k=0}^{m-1} h^{(k)}(0)g_{k+1}(t) \right).$$

Пусть $\mathfrak{X}$ — банахово пространство, обозначим через $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ банахово пространство всех линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{X}$.

Сформулируем используемую в дальнейшем теорему. Обозначим

$S_{a_0, \theta_0} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - a_0)| < \theta_0, \lambda \neq a_0\}$, $\Sigma_\varphi := \{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \varphi, t \neq 0\}$, $\overline{\mathbb{R}}_+ := \{0\} \cup \mathbb{R}_+$. Преобразование Лапласа функции $x : \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \mathfrak{X}$ будем обозначать через $\hat{x}$.

Теорема 1 [22, теорема 2.6.1]. Пусть $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \in \mathbb{R}$, $R : (a_0, +\infty) \rightarrow \mathfrak{X}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.

1. Функция R имеет аналитическое продолжение $\tilde{R} : S_{a_0, \theta_0} \rightarrow \mathfrak{X}$, при этом

$$\forall \theta \in (\pi/2, \theta_0) \exists K = K(\theta) > 0 \forall \lambda \in S_{a_0, \theta} \quad \|\tilde{R}(\lambda)\|_{\mathfrak{X}} \leq \frac{K(\theta)}{|\lambda - a_0|}.$$

2. Существует такая аналитическая функция $T : \Sigma_{\theta_0 - \pi/2} \rightarrow \mathfrak{X}$, что

$$\forall \theta \in (\pi/2, \theta_0) \exists C = C(\theta) > 0 \forall t \in \Sigma_{\theta - \pi/2} \quad \|T(t)\|_{\mathfrak{X}} \leq C(\theta)e^{a_0 \operatorname{Re} t}$$

и $\hat{T}(\lambda) = R(\lambda)$ при всех $\lambda > a_0$.

2. О решении задачи Коши для эволюционного уравнения распределенного дробного порядка

При $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ рассмотрим задачу Коши

$$x(0) = x_0 \tag{1}$$

для дифференциального уравнения распределенного порядка

$$\int_a^b \omega(\alpha) D_t^\alpha x(t) d\alpha = Ax(t), \quad t \geq 0, \tag{2}$$

где D_t^α — дробная производная Герасимова — Капуто, $0 \leq a < b \leq 1$. Решением задачи (1), (2) будем называть функцию $x \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{X})$ такую, что существует $\int_a^b \omega(\alpha) D_t^\alpha x(t) d\alpha \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{X})$ и выполняются равенства (1) и (2).

Обозначим через $E(K, a_0; \mathfrak{X})$ множество таких функций $x : \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \mathfrak{X}$, что

$$\exists K > 0 \exists a_0 > 0 \forall t \in \overline{\mathbb{R}}_+ \quad \|x(t)\|_{\mathfrak{X}} \leq K e^{a_0 t}.$$

Будем использовать также обозначения

$$\begin{aligned} E(\mathfrak{X}) &:= \bigcup_{K>0} \bigcup_{a_0>0} E(K, a_0; \mathfrak{X}), \quad W(\lambda) := \int_a^b \omega(\alpha) \lambda^\alpha d\alpha, \\ \gamma &= \bigcup_{k=1}^3 \gamma_k, \quad \gamma_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_0, \arg \lambda \in (-\pi, \pi)\} \\ \gamma_2 &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = \pi, \lambda \in [-r_0, -\infty)\}, \\ \gamma_3 &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = -\pi, \lambda \in (-\infty, -r_0]\}. \end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, $x_0 \in \mathfrak{X}$ и функция $\omega : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что при некотором $\beta > 0$ функция $W(\lambda)$ аналитична на множестве $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq \beta, \arg \lambda \in (-\pi, \pi)\}$, при этом

$$\exists C > 0 \exists \delta > 0 \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad (|\lambda| \geq \beta) \Rightarrow (|W(\lambda)| \geq C|\lambda|^\delta).$$

Тогда функция

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{W(\lambda)}{\lambda} (W(\lambda)I - A)^{-1} e^{\lambda t} x_0 d\lambda, \quad r_0 = \max \left\{ \beta, \left(\frac{2\|A\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})}}{C} \right)^{1/\delta} \right\}, \quad (3)$$

является единственным решением задачи (1), (2) в пространстве $E(\mathfrak{X})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $r_0 = \max\{\beta, (2\|A\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})}/C)^{1/\delta}\}$ и $\lambda \in \gamma$ выполняется неравенство $|W(\lambda)| \geq 2\|A\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})}$ и существует оператор $(W(\lambda)I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, при этом

$$\|W(\lambda)(W(\lambda)I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} = \|(I - W(\lambda)^{-1}A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2. \quad (4)$$

Поэтому значения $x(t)$ определены формулой (3) по крайней мере при $t > 0$.

Пусть $R > r_0$,

$$\begin{aligned} \Gamma_R &= \bigcup_{k=1}^4 \Gamma_{k,R}, \quad \Gamma_{1,R} = \gamma_1, \\ \Gamma_{2,R} &= \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = R, \arg \lambda \in (\pi, -\pi)\} \\ \Gamma_{3,R} &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = \pi, \lambda \in [-r_0, -R]\}, \\ \Gamma_{4,R} &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = -\pi, \lambda \in [-R, -r_0]\}, \end{aligned}$$

замкнутый контур Γ_R обходится по часовой стрелке. Введем в рассмотрение еще контуры

$$\begin{aligned} \Gamma_{5,R} &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = \pi, \lambda \in (-R, -\infty)\}, \\ \Gamma_{6,R} &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = -\pi, \lambda \in (-\infty, -R)\}, \end{aligned}$$

тогда $\gamma = \Gamma_{5,R} \cup \Gamma_{6,R} \cup \Gamma_R \setminus \Gamma_{2,R}$.

Перепишем $x(t)$ при $t > 0$ в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} W(\lambda)^{-k} A^k x_0 d\lambda = x_0 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} W(\lambda)^{-k} A^k x_0 d\lambda \\ &= x_0 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} W(\lambda)^{-1} A \sum_{k=0}^{\infty} W(\lambda)^{-k} A^k x_0 d\lambda. \end{aligned}$$

При $t \in [0, 1]$, $\lambda \in \gamma$

$$\left\| \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} W(\lambda)^{-1} A \sum_{k=0}^{\infty} W(\lambda)^{-k} A^k \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} \leq \frac{2C^{-1}e^{r_0}\|A\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})}}{|\lambda|^{1+\delta}}$$

согласно условиям теоремы на функцию W , поэтому

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} W(\lambda)^{-1} A \sum_{k=0}^{\infty} W(\lambda)^{-k} A^k d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} \\ \leq \frac{2C^{-1}e^{r_0}\|A\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})}}{r_0^{\delta}} + \frac{2C^{-1}e^{r_0}\|A\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})}}{2\pi\delta r_0^{\delta}}. \end{aligned}$$

Следовательно, интеграл сходится равномерно по $t \in [0, 1]$ и по непрерывности

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\lambda} W(\lambda)^{-1} A \sum_{k=0}^{\infty} W(\lambda)^{-k} A^k x_0 d\lambda \\ &= x_0 + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\Gamma_R} - \int_{\Gamma_{2,R}} + \int_{\Gamma_{5,R}} + \int_{\Gamma_{6,R}} \right) \frac{1}{\lambda} W(\lambda)^{-1} A \sum_{k=0}^{\infty} W(\lambda)^{-k} A^k x_0 d\lambda = x_0, \end{aligned}$$

так как по теореме Коши

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{1}{\lambda} W(\lambda)^{-1} A \sum_{k=0}^{\infty} W(\lambda)^{-k} A^k d\lambda &= 0, \\ \left\| \int_{\Gamma_{2,R}} \frac{1}{\lambda} W(\lambda)^{-1} A \sum_{k=0}^{\infty} W(\lambda)^{-k} A^k d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} &\leq \frac{4\pi C^{-1}\|A\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})}}{R^{\delta}}, \\ \left\| \int_{\Gamma_{k,R}} \frac{1}{\lambda} W(\lambda)^{-1} A \sum_{k=0}^{\infty} W(\lambda)^{-k} A^k d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} &\leq \frac{4C^{-1}\|A\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})}}{\delta R^{\delta}}, \quad k = 5, 6. \end{aligned}$$

Таким образом, $x \in C(\overline{\mathbb{R}_+}; \mathfrak{X})$, $x(0) = x_0$.

По построению

$$\|x(t)\|_{\mathfrak{X}} \leq \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} \frac{e^{t \operatorname{Re} \lambda}}{|\lambda|} ds \|x_0\|_{\mathfrak{X}} \leq K e^{r_0 t},$$

так как

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^{t \operatorname{Re} \lambda}}{|\lambda|} ds \leq e^{r_0 t} \int_0^{2\pi} e^{r_0 t (\cos \varphi - 1)} d\varphi \leq 2\pi e^{r_0 t},$$

$$\int_{\gamma_k} \frac{e^{t \operatorname{Re} \lambda}}{|\lambda|} ds \leq e^{r_0 t} \int_{-\infty}^{-r_0} \frac{e^{x-r_0}}{x} dx = C_1 e^{r_0 t}, \quad k = 2, 3, \quad t \geq 1.$$

При этом можно взять

$$K = 2\|x_0\|_{\mathfrak{X}} + \frac{2e^{-r_0}}{\pi} \int_{-\infty}^{-r_0} \frac{e^x}{x} dx \|x_0\|_{\mathfrak{X}} + \frac{2}{\pi} \max_{t \in [0,1]} \|x(t)\|_{\mathfrak{X}}.$$

Следовательно, $x \in E(\mathfrak{X})$.

При $\operatorname{Re} \mu > r_0$ выполняется равенство

$$\hat{x}(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{W(\lambda)}{\lambda(\mu - \lambda)} (W(\lambda)I - A)^{-1} x_0 d\lambda.$$

В силу (4) данный интеграл сходится и справедливы равенства

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{k,R}} \frac{W(\lambda)}{\lambda(\mu - \lambda)} (W(\lambda)I - A)^{-1} x_0 d\lambda = 0, \quad k = 2, 5, 6.$$

Поэтому по интегральной формуле Коши и в силу отрицательной ориентации контура Γ_R

$$\hat{x}(\mu) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{W(\lambda)}{\lambda(\mu - \lambda)} (W(\lambda)I - A)^{-1} x_0 d\lambda = \frac{W(\mu)}{\mu} (W(\mu)I - A)^{-1} x_0,$$

при этом $\hat{x}(\mu)$ аналитически продолжима на $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| > r_0, \arg \mu \in (-\pi, \pi)\}$ ввиду аналитичности резольвенты.

Используя также обозначение $\mathfrak{L}$ для преобразования Лапласа, запишем

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} \left[\int_a^b \omega(\alpha) D_t^\alpha x(t) d\alpha \right] (\mu) &= \frac{W(\mu)^2}{\mu} (W(\mu)I - A)^{-1} x_0 - \frac{W(\mu)}{\mu} x_0 \\ &= \frac{W(\mu)}{\mu} (W(\mu)(W(\mu)I - A)^{-1} x_0 - x_0) = A \frac{W(\mu)}{\mu} (W(\mu)I - A)^{-1} x_0 = A \hat{x}(\mu). \end{aligned}$$

Здесь принят во внимание тот факт, что оператор коммутирует со своей резольвентой. Подеиствуем на обе части полученного равенства обратным преобразованием Лапласа и получим равенство (2) во всех точках непрерывности функции x , т. е. при всех $t \geq 0$. Как было замечено, $x \in C(\overline{\mathbb{R}_+}; \mathfrak{X})$, поэтому в силу непрерывности оператора A правая часть уравнения (2) принадлежит этому пространству, а потому и левая часть уравнения также в нем лежит и функция x является решением задачи (1), (2).

Если существуют два решения x_1, x_2 задачи (1), (2) из пространства $E(\mathfrak{X})$, то их разность $y = x_1 - x_2 \in E(\mathfrak{X})$ является решением уравнения (2) и удовлетворяет начальному условию $y(0) = 0$. Подействуем на обе части равенства

$$\int_a^b \omega(\alpha) D_t^\alpha y(t) d\alpha = Ay(t)$$

преобразованием Лапласа и получим

$$W(\lambda)\hat{y}(\lambda) = A\hat{y}(\lambda).$$

Поэтому при $\operatorname{Re} \lambda > r_0$ имеем $\hat{y}(\lambda) = 0$. Значит, $y \equiv 0$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Нетрудно убедиться, что, скажем, $\omega(\alpha) = \operatorname{const}$, $\omega(\alpha) = \alpha^n$, $n \in \mathbb{N}$, или $\omega(\alpha) = c^\alpha$, $c > 0$, удовлетворяют условиям теоремы 2.

Следствие 1. В условиях теоремы 2 семейство операторов

$$\left\{ X(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{W(\lambda)}{\lambda} (W(\lambda)I - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}) : t \in \mathbb{R}_+ \right\},$$

а поэтому и решение (3) задачи (1), (2) аналитически продолжимо в правую полуплоскость $\{t \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} t > 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как замечено при доказательстве теоремы 2,

$$\hat{X}(\mu) = \frac{W(\mu)}{\mu} (W(\mu)I - A)^{-1}$$

является аналитической функцией на множестве

$$\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| > r_0, \arg \mu \in (-\pi, \pi)\}.$$

Поэтому для любого $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$ можно выбрать настолько большое $a_0 > 0$, что $\hat{X}$ будет аналитична в секторе S_{a_0, θ_0} , при этом в силу (4)

$$\left\| \frac{W(\mu)}{\mu} (W(\mu)I - A)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})} \leq \frac{2}{|\mu|} \leq \frac{C}{|\mu - a_0|} \quad \forall \mu \in S_{a_0, \theta_0}$$

при некотором $C = C(\theta_0, a_0)$. По теореме 1 оригинал X этой функции аналитически продолжим в $\Sigma_{\theta_0 - \pi/2}$. Устремив θ_0 к π , получим его аналитичность в $\Sigma_{\pi/2} = \{t \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} t > 0\}$. $\square$

ПРИМЕР. Рассмотрим задачу

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{5}$$

$$\int_a^b \omega(\alpha) D_t^\alpha v(x, t) d\alpha = \int_{\Omega} K(x, \xi) Bv(\xi, t) d\xi, \quad (x, t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+. \tag{6}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, $0 \leq a < b \leq 1$, $\omega : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $(m \times m)$ -матрица B , $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ заданы, $v(x, t) = (v_1(x, t), v_2(x, t), \dots, v_m(x, t))$ — неизвестные функции.

Возьмем $\mathfrak{X} = L_2(\Omega)^m$,

$$(Aw)(x) = \int_{\Omega} K(x, \xi) Bw(\xi) d\xi$$

для $w = (w_1, w_2, \dots, w_m) \in L_2(\Omega)^m$. Тогда $A \in \mathcal{L}(L_2(\Omega)^m)$, и если функция ω удовлетворяет условиям теоремы 2, задача (5), (6) имеет единственное решение в пространстве $E(L_2(\Omega)^m)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Caputo M. Mean fractional-order derivatives, differential equations and filters // Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat. 1995. V. 41. P. 73–84.
2. Caputo M. Diffusion with space memory modelled with distributed order space fractional differential equations // Ann. Geophys. 2003. V. 46, N 2. P. 223–234.
3. Umarov S., Gorenflo R. Cauchy and nonlocal multi-point problems for distributed order pseudo-differential equations // Z. Anal. Anwend. 2005. V. 24. P. 449–466.
4. Meerschaert M. M., Scheffler H.-P. Stochastic model for ultraslow diffusion // Stochastic Process. Appl. 2006. V. 116. P. 1215–1235.
5. Atanacković T. M., Oprić L., Pilipović S. On a nonlinear distributed order fractional differential equation // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 328. P. 590–608.
6. Kochubei A. N. Distributed order calculus and equations of ultraslow diffusion // J. Math. Anal. Appl. 2008. V. 340. 252–280.
7. Jiao Z., Chen Y., Podlubny I. Distributed-order dynamic system. Stability, simulations, applications and perspectives. London: Springer-Verl., 2012.
8. Федоров В. Е., Дебуш А. Один класс вырожденных дробных эволюционных систем в банаховых пространствах // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 12. С. 1616–1622.
9. Федоров В. Е., Гордиевских Д. М. Разрешающие операторы вырожденных эволюционных уравнений с дробной производной по времени // Изв. вузов. Математика. 2015. № 1. С. 71–83.
10. Гордиевских Д. М., Федоров В. Е. Решения начально-краевых задач для некоторых вырожденных систем уравнений дробного порядка по времени // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2015. Т. 12. С. 12–22.
11. Федоров В. Е., Гордиевских Д. М., Плеханова М. В. Уравнения в банаховых пространствах с вырожденным оператором под знаком дробной производной // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 10. С. 1367–1375.
12. Fedorov V. E., Nazhimov R. R., Gordievskikh D. M. Initial value problem for a class of fractional order inhomogeneous equations in Banach spaces // AIP Conf. Proc. 2016. V. 1759. P. 020008.
13. Федоров В. Е., Романова Е. А., Дебуш А. Аналитические в секторе разрешающие семейства операторов вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка // Сиб. журн. чистой и прикл. математики. 2016. Т. 16, № 2. С. 93–107.
14. Костич М., Федоров В. Е. Вырожденные дробные дифференциальные уравнения в локально выпуклых пространствах с сигма-регулярной парой операторов // Уфим. мат. журн. 2016. Т. 8, № 4. С. 100–113.
15. Романова Е. А., Федоров В. Е. Разрешающие операторы линейного вырожденного эволюционного уравнения с производной Капуто. Секториальный случай // Мат. заметки СВФУ. 2016. Т. 23, № 4. С. 58–72.
16. Федоров В. Е., Романова Е. А. Об аналитических в секторе разрешающих семействах операторов сильно вырожденных эволюционных уравнений высокого и дробного порядков // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2017. Т. 137. С. 82–96.
17. Fedorov V. E., Gordievskikh D. M., Baybulatova G. D. Controllability of a class of weakly degenerate fractional order evolution equations // AIP Conf. Proc. 2017. V. 1907. P. 020009.

18. Федоров В. Е., Плеханова М. В., Нажимов Р. Р. Линейные вырожденные эволюционные уравнения с дробной производной Римана — Лиувилля // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 1. С. 140–152.
19. Гордиевских Д. М., Федоров В. Е., Туров М. М. Бесконечномерная и конечномерная ε -управляемость одного класса вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка // Челяб. физ.-мат. журн. 2018. Т. 3, вып. 1. С. 5–26.
20. Герасимов А. Н. Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения // Приклад. математика и механика. 1948. Т. 12. С. 529–539.
21. Caputo M. Lineal model of dissipation whose Q is almost frequency independent. II // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1967. V. 13. P. 529–539.
22. Arendt W., Batty C. J. K., Hieber M., Neubrander F. Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. Basel: Springer-Verl., 2011. (Monogr. Math.; V. 96).

Статья поступила 12 января 2018 г.

Стрелецкая Елизавета Михайловна
Челябинский гос. университет,
кафедра математического анализа,
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск 454001
wwugazi@gmail.com

Федоров Владимир Евгеньевич
Челябинский гос. университет,
кафедра математического анализа,
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск 454001;
Шадринский гос. педагогический университет,
кафедра физико-математического и информационно-технологического образования,
ул. Карла Либкнехта, 3, Курганская область, г. Шадринск 641870;
Южно-Уральский гос. университет (национальный исследовательский университет),
лаборатория функциональных материалов,
пр. Ленина, 76, Челябинск 454080
kar@csu.ru

Амар Дебуш
Университет Гельмы, факультет математики,
П. 401, Гельма 24000, Алжир
amar.debbouche@yahoo.fr

THE CAUCHY PROBLEM FOR DISTRIBUTED ORDER EQUATIONS IN BANACH SPACES

E. M. Streletskaya,
V. E. Fedorov, and A. Debbouche

Abstract: The Cauchy problem for a distributed order equation in a Banach space with the fractional Gerasimov–Caputo derivative and a linear bounded operator in the right-hand side is studied. Existence and uniqueness conditions for the problem solution in the space of exponentially growing functions are found by the methods of the Laplace transformation theory. The solution is presented in the form of a contour integral of the bounded operator resolvent with a complex argument determined by the form of the distributed derivative. The analyticity of the solution in the right half-plane of the complex plane is proved. The general result is applied to the research of the Cauchy problem for an integro-differential system of equations with right-hand side in the form of composition of an integral operator with respect to the spatial variables and the linear transformation of the unknown vector-function.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.1.12769

Keywords: evolution equation, fractional Gerasimov–Caputo derivative, Cauchy problem, distributed order equation.

REFERENCES

1. Caputo M., “Mean fractional-order derivatives, differential equations and filters,” *Ann. Univ. Ferrara, Nuova Ser., Sez. VII*, **41**, 73–84 (1995).
2. Caputo M., “Diffusion with space memory modelled with distributed order space fractional differential equations,” *Ann. Geophys.*, **46**, No. 2, 223–234 (2003).
3. Umarov S. and Gorenflo R., “Cauchy and nonlocal multi-point problems for distributed order pseudo-differential equations,” *Z. Anal. Anwend.*, **24**, 449–466 (2005).
4. Meerschaert M. M. and Scheffler H.-P., “Stochastic model for ultraslow diffusion,” *Stochastic Process. Appl.*, **116**, 1215–1235 (2006).
5. Atanacković T. M., Oparnica L., and Pilipović S., “On a nonlinear distributed order fractional differential equation,” *J. Math. Anal. Appl.*, **328**, 590–608 (2007).
6. Kochubei A. N., “Distributed order calculus and equations of ultraslow diffusion,” *J. Math. Anal. Appl.*, **340**, 252–280 (2008).
7. Jiao Z., Chen Y., and Podlubny I., *Distributed-Order Dynamic System. Stability, Simulations, Applications and Perspectives*, Springer-Verlag, London (2012).
8. Fedorov V. E. and Debbouche A., “A class of degenerate fractional evolution systems in Banach spaces,” *Differ. Equ.*, **49**, No. 12, 1569–1576 (2013).
9. Fedorov V. E. and Gordievskikh D. M., “Resolving operators of degenerate evolution equations with fractional derivative with respect to time,” *Russ. Math.*, **59**, No. 1, 60–70 (2015).
10. Gordievskikh D. M. and Fedorov V. E., “Solutions of initial boundary value problems for some degenerate equations of systems of time-fractional order,” *Izv. Irkutsk. Gos. Univ., Ser. Mat.*, **12**, 12–22 (2015).

11. Fedorov V. E., Gordievskikh D. M., and Plekhanova M. V., "Equations in Banach spaces with a degenerate operator under a fractional derivative," *Differ. Equ.*, **51**, No. 10, 1360–1368 (2015).
12. Fedorov V. E., Nazhimov R. R., and Gordievskikh D. M., "Initial value problem for a class of fractional order inhomogeneous equations in Banach spaces," in: *AIP Conf. Proc.*, **1759**, 020008 (2016).
13. Fedorov V. E., Romanova E. A., and Debbouche A., "Analytic in a sector resolving families of operators for degenerate evolution fractional equations," *J. Math. Sci.*, **228**, No. 4, 380–394 (2018).
14. Kostić M. and Fedorov V. E., "Degenerate fractional differential equations in locally convex spaces with σ -regular pair of operators," *Ufimsk. Mat. Zh.*, **8**, No. 4, 100–113 (2016).
15. Romanova E. A. and Fedorov V. E., "Resolving operators of a linear degenerate evolution equation with Caputo derivative. The sectorial case," *Mat. Zamet. SVFU*, **23**, No. 4, 58–72 (2016).
16. Fedorov V. E. and Romanova E. A., "On analytic in a sector resolving families of operators for strongly degenerate evolution equations of highest and fractional orders," *Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Mat. Prilozh., Temat. Obz.*, **137**, 82–96 (2017).
17. Fedorov V. E., Gordievskikh D. M., and Baybulatova G. D., "Controllability of a class of weakly degenerate fractional order evolution equations," in: *AIP Conf. Proc.*, **1907**, 020009 (2017).
18. Fedorov V. E., Plekhanova M. V., and Nazhimov R. R., "Degenerate linear evolution equations with the Riemann–Liouville fractional derivative," *Sib. Math. J.*, **59**, No. 1, 136–146 (2018).
19. Gordievskikh D. M., Fedorov V. E., and Turov M. M., "Infinite-dimensional and finite-dimensional ε -controllability for a class of fractional order degenerate evolution equations," *Chelyab. Fiz. Mat. Zh.*, **3**, No. 1, 5–26 (2018).
20. Gerasimov A. N., "Generalization of linear deformation laws and their applications to problems of internal friction," *Prikl. Mat. Mekh.*, **12**, 529–539 (1948).
21. Caputo M., "Lineal model of dissipation whose Q is almost frequency independent. II," *Geophys. J. R. Astronom. Soc.*, **13**, 529–539 (1967).
22. Arendt W., Batty C. J. K., Hieber M., and Neubrander F., *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*, 2nd ed., Springer-Verlag, Basel (2011) (Monogr. Math.; V. 96).

Submitted January 12, 2018

Elizaveta M. Streletskaya
Chelyabinsk State University,
129 Kashirin Brothers Street, Chelyabinsk, Russia 454001
wwugazi@gmail.com

Vladimir E. Fedorov
Chelyabinsk State University,
129 Kashirin Brothers Street, Chelyabinsk, Russia 454001;
Shadrinsk State Pedagogical University,
3 Karl Liebknecht Street, Shadrinsk, Russia 641870;
South Ural State University (National Research University),
76 Lenin Avenue, Chelyabinsk, Russia 454080
kar@csu.ru

Amar Debbouche
Guelma University,
401, Guelma, Algeria 24000
amar_debbouche@yahoo.fr

ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ УПРУГОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ТИМОШЕНКО И ПОЛУЖЕСТКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

А. М. Хлуднев, Т. С. Попова

Аннотация. Исследуется краевая задача, описывающая равновесие двумерного упругого тела с двумя тонкими сопрягающимися включениями при наличии отслоения. При этом одно из включений является упругим, а другое — полужестким. Наличие отслоения означает существование трещины между включениями и упругим телом. На берегах трещины задаются нелинейные краевые условия вида неравенств, которые не позволяют противоположным берегам трещин проникать друг в друга. Указанные краевые условия приводят к формулировке проблемы в виде задачи с неизвестным множеством контакта. Приведена как дифференциальная постановка в виде краевой задачи, так и вариационная постановка в виде задачи минимизации функционала энергии на выпуклом множестве допустимых перемещений. Обоснована однозначная разрешимость поставленной задачи. Показана эквивалентность дифференциальной и вариационной постановок. Исследован предельный переход по параметру жесткости тонкого упругого включения. Найдены условия сопряжения как для исходной задачи, так и для предельной.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.1.12770

Ключевые слова: включение Тимошенко, полужесткое включение, упругое тело, трещина, нелинейные краевые условия

1. Формулировка задачи равновесия. Поведение и свойства композитных материалов в значительной степени зависят от свойств связующего и характера его контакта с наполнителем. В качестве наполнителя часто выступают тонкие волокна (включения). В свою очередь, моделирование поведения волокон может быть разным с точки зрения математической модели; при этом качество модели сильно влияет на конечный результат. В последние годы выполнено большое число работ, в которых поведение волокон описывается на основе моделей балок Бернулли — Эйлера и Тимошенко и различных предельных моделей, получаемых после переходов к пределу по физическим параметрам [1–5]. При этом допускалось отслоение волокон от связующего, что с точки зрения математической модели означает наличие разреза (трещины) в области решения. Как известно, классический подход к описанию трещин в деформируемых телах характеризуется линейными краевыми условиями на берегах. При этом модели допускают взаимное проникание берегов, что противоречит практике [6]. В указанных выше работах, относящихся к тонким включениям, на берегах трещин задавались нелинейные краевые условия, не допускающие взаимного проникания берегов. В этом случае рассматриваемые задачи относятся

к классу проблем с неизвестным множеством контакта. По поводу различных краевых задач теории трещин с краевыми условиями взаимного непроникания берегов можно обратиться к [7–23].

Существуют и другие подходы, используемые для описания включений в упругих телах без отслоения [24–28].

Следует также подчеркнуть трудность отыскания краевых условий в точке контакта включений. Указанные точки являются точками сопряжения, поэтому вид соответствующих краевых условий зависит от моделей, используемых для описания включений. Отметим большое число работ, в которых исследовались задачи сопряжения как в случае тонких включений, так и в других ситуациях [29–37].

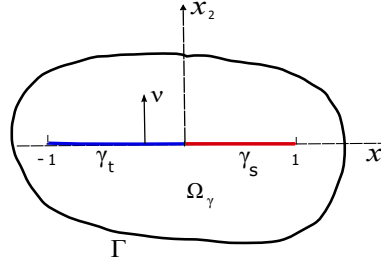
В данной работе исследуется задача сопряжения двух тонких включений, расположенных в упругом теле. Как было отмечено, предельные переходы по параметрам для включений Бернулли — Эйлера и Тимошенко приводят к различным предельным моделям для тонких включений. В частности, можно получить несколько разных с точки зрения моделирования полужестких включений. Мы рассматриваем случай полужесткого включения, полученного из модели Бернулли — Эйлера при переходе параметра жесткости к бесконечности [3]. Указанная модель содержит обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка для определения прогиба тонкого включения с правой частью, учитывающей влияние окружающего упругого тела; касательные перемещения тонкого включения при этом имеют заданную структуру.

Содержание работы таково. В разд. 1 формулируется задача равновесия упругого тела с упругим и полужестким включением. Установлена эквивалентность вариационной и дифференциальной постановок. Найдены условия сопряжения в точке контакта тонких включений. В разд. 2 обоснована возможность предельного перехода по параметру жесткости упругого включения и найдены условия сопряжения в точке контакта.

Приведем формулировку задачи равновесия упругого тела с двумя тонкими включениями. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с гладкой границей Γ , $\gamma \subset \Omega$, $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$, где

$$\gamma_t = (-1, 0) \times \{0\}, \quad \gamma_s = (0, 1) \times \{0\}, \quad \gamma = \gamma_t \cup \gamma_s \cup \{(0, 0)\}.$$

Считаем, что срединная линия тонкого упругого включения совпадает с γ_t , а γ_s совпадает со срединной линией полужесткого включения. Таким образом, γ можно рассматривать как неоднородное включение, состоящее из двух частей γ_t, γ_s . Упругое тело при этом занимает область Ω_γ (рис. 1). Для описания упругого включения используется модель балки Тимошенко (см., например, [38]), а для описания полужесткого включения — модель, полученная из балки Бернулли — Эйлера предельным переходом по параметру жесткости [3]. Пусть $\nu = (0, 1)$ — единичный вектор нормали к γ , а $\tau = (1, 0)$; $A = \{a_{ijkl}\}$, $i, j, k, l = 1, 2$, — заданный положительно определенный тензор коэффициентов

Рис. 1. Упругое тело с включениями γ_t, γ_s

упругости:

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}, \quad i, j, k, l = 1, 2; \quad a_{ijkl} \in L^\infty(\Omega),$$

$$a_{ijkl}\varphi_{ij}\varphi_{kl} \geq c_0|\varphi|^2 \quad \text{для всех } \varphi_{ji} = \varphi_{ij}, c_0 = \text{const} > 0.$$

По повторяющимся индексам производится суммирование. Все величины с двумя нижними индексами в дальнейшем считаются симметричными по этим индексам; $f = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega)^2$ — заданный вектор внешних сил, действующих на упругое тело.

Будем предполагать, что положительный (по отношению к нормали ν) берег включения γ отслаивается, образуя тем самым трещину между упругим телом и включением. На берегах трещины будем задавать краевые условия вида неравенств, обеспечивающие взаимное непроникание берегов. Постановка задачи равновесия упругого тела с включениями γ_t, γ_s состоит в следующем. Найти вектор перемещений $u = (u_1, u_2)$ и тензор напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, определенные в Ω_γ , и функции v, w, φ , определенные для $\gamma, \gamma_t, \gamma_s$ соответственно, а также постоянную c_0 такие, что

$$-\text{div } \sigma = f, \quad \sigma - A\varepsilon(u) = 0 \text{ в } \Omega_\gamma, \quad (1.1)$$

$$-w_{,11} = [\sigma_\tau], -\varphi_{,11} + v_{,1} + \varphi = 0, \quad -v_{,11} - \varphi_{,1} = [\sigma_\nu] \text{ на } \gamma_t, \quad (1.2)$$

$$w = c_0, \quad v_{,1111} = [\sigma_\nu] \text{ на } \gamma_s, \quad (1.3)$$

$$u = 0 \text{ на } \Gamma; \quad w = u_\tau^-, \quad v = u_\nu^- \text{ на } \gamma, \quad (1.4)$$

$$v_{,11} = v_{,111} = 0 \text{ при } x_1 = 1; \quad \varphi + v_{,1} = w_{,1} = \varphi_{,1} = 0 \text{ при } x_1 = -1, \quad (1.5)$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+[u_\nu] = 0 \text{ на } \gamma, \quad (1.6)$$

$$v_{,11}(0+) = -\varphi_{,1}(0-), \quad v_{,111}(0+) = -(v_{,1} + \varphi)(0-), \quad (1.7)$$

$$v_{,1}(0+) = -\varphi(0-); \quad [v(0)] = [w(0)] = 0; \quad w_{,1}(0-) = 0, \quad \int_{\gamma_s} \sigma_\tau^- = 0. \quad (1.8)$$

Здесь $[h] = h^+ - h^-$ — скачок функции h на γ , где $h^\pm$ — значения функции h на положительном и отрицательном берегах разреза в соответствии с выбранным направлением нормали ν ; $[p(0)] = p(0+) - p(0-)$, $p_{,1} = \frac{dp}{dx_1}$; $\varepsilon(u) = \{\varepsilon_{ij}(u)\}$ — тензор деформаций, $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$, $i, j = 1, 2$; $\sigma\nu = (\sigma_{1j}\nu_j, \sigma_{2j}\nu_j)$, $\sigma_\nu = \sigma_{ij}\nu_j\nu_i$, $\sigma_\tau = (\sigma\nu)\tau$, $u_\nu = u\nu$. При этом (1.1) — уравнения равновесия упругого тела и уравнение состояния (закон Гука), а (1.2) представляют уравнения равновесия тонкого включения γ_t . Уравнения для этого тонкого включения в точности соответствуют модели упругой балки Тимошенко. Правые части $[\sigma_\nu], [\sigma_\tau]$ в уравнениях (1.2) описывают силы, действующие на включение со стороны упругого тела. Соотношения (1.3) относятся к полужесткому включению γ_s . В частности, имеем уравнение четвертого порядка для вертикальных (вдоль оси x_2) перемещений этого включения, а горизонтальные (вдоль оси x_1) перемещения постоянны. Первое краевое условие из (1.6) обеспечивает взаимное непроникание берегов трещины. Второе и третье условия (1.4) гарантируют равенство перемещений точек упругого тела и тонкого включения на γ^- . Вторая группа краевых условий (1.5) соответствуют нулевому моменту, нулевой перерезающей силе и нулевой деформации растяжения (сжатия) тонкого включения γ_t в точке $x_1 = -1$. Первые четыре условия (1.8) и условия (1.7) являются условиями сопряжения тонких включений в точке $(0, 0)$. Что касается оставшихся краевых условий (1.6), то они являются типичными при формулировке краевых задач с неизвестной областью контакта (см. [10]). В частности, если в заданной точке x_0 контакт отсутствует, т. е. $[u_\nu(x_0)] > 0$, получаем нулевое значение поверхностной силы: $(\sigma\nu)^+(x_0) = 0$. С другой стороны, если поверхностная сила ненулевая, т. е. $\sigma_\nu^+(x_0) < 0$, то имеем условие контакта $[u_\nu(x_0)] = 0$. Наконец, последнее условие (1.8) обеспечивает равенство нулю сил, действующих вдоль оси x_1 на полужесткое включение γ_s .

Для простоты физические параметры в уравнениях равновесия (1.2) для упругого включения и во втором уравнении (1.3) взяты равными единице. В дальнейшем зависимость от параметра, характеризующего жесткость включения γ_t , будет исследована подробно (см. разд. 3). В частности, будет обоснована возможность предельного перехода по этому параметру при его стремлении к бесконечности.

Как показано ниже, соотношения (1.1)–(1.8) в точности эквивалентны вариационной формулировке задачи минимизации функционала энергии на подходящем множестве функций. При этом функционал энергии будет содержать слагаемые, соответствующие энергии деформирования упругого тела, работе внешних сил, энергии деформирования включения γ_t и энергии изгиба включения γ_s . Приведем вариационную формулировку задачи (1.1)–(1.8). Введем в рассмотрение вспомогательный функционал

$$F(\psi) = \frac{1}{2} \int_{\gamma_t} \{w_{,1}^2 + \varphi_{,1}^2 + (v_{,1} + \varphi)^2\}, \quad \psi = (v, w, \varphi),$$

действующий из $H^1(\gamma_t)^3$ в $\mathbb{R}$. Определим функционал энергии

$$\pi(u, \psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u) \varepsilon(u) - \int_{\Omega_\gamma} f u + F(\psi) + \frac{1}{2} \int_{\gamma_s} v_{,11}^2; \quad \psi = (v, w, \varphi).$$

Здесь и далее для краткости $\sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(u)$ обозначается через $\sigma(u) \varepsilon(u)$. Введем пространство функций

$$H = \{(u, \psi) \mid u \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma)^2, (v, w) \in H^1(\gamma)^2, \varphi \in H^1(\gamma_t); \\ v|_{\gamma_s} \in H^2(\gamma_s), w|_{\gamma_s} \in \mathbb{R}; \psi = (v, w, \varphi)\}$$

и множество допустимых перемещений

$$K = \{(u, \psi) \in H \mid [u_\nu] \geq 0, v = u_\nu^-, w = u_\tau^- \text{ на } \gamma; v_{,1}(0+) = -\varphi(0-)\},$$

где

$$H_\Gamma^1(\Omega_\gamma) = \{\xi \in H^1(\Omega_\gamma) \mid \xi = 0 \text{ на } \Gamma\}.$$

Тогда задача минимизации:

$$\text{найти } (u, \psi) \in K \text{ так, что } \pi(u, \psi) = \inf_K \pi,$$

имеет решение, удовлетворяющее вариационному неравенству

$$(u, \psi) \in K, \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u) + F'(\psi)(\bar{\psi} - \psi) \\ + \int_{\gamma_s} v_{,11}(\bar{v}_{,11} - v_{,11}) \geq 0 \text{ для всех } (\bar{u}, \bar{\psi}) \in K. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Задача (1.9), (1.10) разрешима. Для доказательства разрешимости фактически требуется установить коэрцитивность функционала π на множестве K , так как слабая полунепрерывность снизу этого функционала очевидна. При $(u, \psi) \in K$ и $\alpha > 0$ имеем

$$\pi(u, \psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u) \varepsilon(u) - \int_{\Omega_\gamma} f u + F(\psi) + \frac{1}{2} \int_{\gamma_s} v_{,11}^2 \pm \alpha \int_{\gamma} (v^2 + w^2), \quad \psi = (v, w, \varphi).$$

В силу краевых условий $w = u_\tau^-$, $v = u_\nu^-$ на γ , неравенства Корна и теорем вложения справедливо следующее неравенство при малых α :

$$\frac{1}{4} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u) \varepsilon(u) - \alpha \int_{\gamma} (v^2 + w^2) \geq 0. \quad (1.11)$$

Воспользовавшись леммой, доказанной в [2], получим, что существуют постоянные c_1 , c_2 , c_3 , не зависящие от функций, такие, что

$$\begin{aligned} \alpha \int_{\gamma_t} (v^2 + w^2) + \alpha \int_{\gamma_s} (v^2 + w^2) + \frac{1}{2} \int_{\gamma_t} \{w_{,1}^2 + \varphi_{,1}^2 + (v_{,1} + \varphi)^2\} \\ + \frac{1}{2} \int_{\gamma_s} v_{,11}^2 \geq c_1 \|(v, w, \varphi)\|_{H^1(\gamma_t)^3}^2 + c_2 \|v\|_{H^2(\gamma_s)}^2 + c_3 \|w\|_{H^1(\gamma_s)}^2. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Здесь мы принимаем во внимание тот факт, что $w = \text{const}$ на γ_s . Таким образом, из (1.11), (1.12) вытекает, что

$$\pi(u, \psi) \rightarrow +\infty, \quad \|(u, \psi)\|_H \rightarrow \infty, \quad (u, \psi) \in K, \quad \psi = (v, w, \varphi),$$

что означает коэрцитивность функционала π .

Ниже доказывается, что на классе гладких решений задачи (1.1)–(1.8) и (1.9), (1.10) эквиваленты. Это означает, что все соотношения (1.1)–(1.8) вытекают из (1.9), (1.10) и, наоборот, неравенство (1.9), (1.10) можно вывести из (1.1)–(1.8).

Предложение 1. *Формулировки (1.1)–(1.8) и (1.9), (1.10) эквивалентны на классе достаточно гладких решений.*

Доказательство. Пусть выполнено (1.9), (1.10). Подстановкой в (1.10) тестовых функций вида $(\tilde{u}, \tilde{\psi}) = (u, \psi) \pm (\tilde{u}, 0)$, $\tilde{u} \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)^2$, можно получить уравнение равновесия (см. (1.1)). Второе и третье условия из (1.8) выполнены в силу теорем вложения, так как $v, w \in H^{1/2}(\gamma)$. Подставим в (1.10) функцию $(\tilde{u}, \tilde{\psi}) = (u, \psi) \pm (\tilde{u}, \tilde{\psi})$, $(\tilde{u}, \tilde{\psi}) \in K$, $\tilde{\psi} = (\tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{\varphi})$, $[\tilde{u}_\nu] = 0$ на γ . Получим

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u) \varepsilon(\tilde{u}) - \int_{\Omega_\gamma} f \tilde{u} + \int_{\gamma_t} \{w_{,1} \tilde{w}_{,1} + \varphi_{,1} \tilde{\varphi}_{,1} + (v_{,1} + \varphi)(\tilde{v}_{,1} + \tilde{\varphi})\} + \int_{\gamma_s} v_{,11} \tilde{v}_{,11} = 0.$$

Интегрирование по частям здесь дает

$$\begin{aligned} & - \int_{\gamma} [(\sigma_\nu) \tilde{u}] - \int_{\gamma_t} \{w_{,11} \tilde{w} + (\varphi_{,11} - v_{,1} - \varphi) \tilde{\varphi} + (v_{,11} + \varphi_{,1}) \tilde{v}\} \\ & + \int_{\gamma_s} v_{,1111} \tilde{v} + w_{,1} \tilde{w}|_{-1}^0 + \varphi_{,1} \tilde{\varphi}|_{-1}^0 + (v_{,1} + \varphi) \tilde{v}|_{-1}^0 + v_{,11} \tilde{v}_{,1}|_0^1 - v_{,111} \tilde{v}|_0^1 = 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Выбирая в (1.13) тестовые функции, обладающие свойствами

$$\begin{aligned} \tilde{v} = \tilde{w} = \tilde{\varphi} = 0 \quad \text{при } x_1 = -1; \quad \tilde{w} = c \in \mathbb{R} \quad \text{на } \gamma_s, \\ \tilde{\varphi} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0-, \quad \tilde{v} = \tilde{v}_{,1} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0+, 1, \end{aligned} \quad (1.14)$$

найдем

$$\begin{aligned} & - \int_{\gamma} [\sigma_\nu] \tilde{u}_\nu - \int_{\gamma} [\sigma_\tau \tilde{u}_\tau] - \int_{\gamma_t} \{w_{,11} \tilde{w} + (\varphi_{,11} - v_{,1} - \varphi) \tilde{\varphi} + (v_{,11} + \varphi_{,1}) \tilde{v}\} \\ & + \int_{\gamma_s} v_{,1111} \tilde{v} + (w_{,1} \tilde{w})(0-) = 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

В силу произвольности $\tilde{u}_\tau^+$ получаем $\sigma_\tau^+ = 0$ на γ . Учитывая условия $\tilde{u}_\tau^- = \tilde{w}$, $\tilde{u}_\nu^- = \tilde{v}$ на γ , из (1.15) получим уравнения (1.2) и второе уравнение из (1.3). Более того, поскольку постоянная c из (1.14) выбирается произвольным образом, из (1.15) следует последняя группа условий (1.8).

Вернемся к тождеству (1.13), справедливому для всех указанных выше функций $(\tilde{u}, \tilde{\psi})$. В силу уже доказанных уравнений и краевых условий получим

$$(w, {}_1\tilde{w})|_{-1} + (\varphi, {}_1\tilde{\varphi})|_{-1}^0 + ((v, {}_1 + \varphi)\tilde{v})|_{-1}^0 + (v, {}_{11}\tilde{v}, {}_1)|_0^1 - (v, {}_{111}\tilde{v})|_0^1 = 0. \quad (1.16)$$

Из этого тождества получаем справедливость краевых условий (1.5) для w, v, φ и, таким образом, из (1.16) следует, что

$$(\varphi, {}_1\tilde{\varphi})(0-) + ((v, {}_1 + \varphi)\tilde{v})(0-) - (v, {}_{11}\tilde{v}, {}_1)(0+) + (v, {}_{111}\tilde{v})(0+) = 0.$$

Поскольку $\tilde{v}(0+) = \tilde{v}(0-)$ и $\tilde{\varphi}(0-) = -\tilde{v}, {}_1(0+)$, отсюда убеждаемся в справедливости краевых условий из (1.7). Второе, третье и четвертое условия из (1.6) стандартны для контактных задач с неизвестным множеством контакта с тонкими включениями, поэтому их вывод из (1.9), (1.10) опустим (см. [2, 3, 10]).

Таким образом, из (1.9), (1.10) следуют все соотношения (1.1)–(1.8).

Обратно, пусть выполнены соотношения (1.1)–(1.8). Докажем, что соответствующие функции удовлетворяют вариационному неравенству (1.9), (1.10). Выберем произвольную функцию $(\bar{u}, \bar{\psi}) \in K, \bar{\psi} = (\bar{w}, \bar{v}, \bar{\varphi})$. Из (1.1)–(1.3) следует, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma} (-\operatorname{div} \sigma - f)(\bar{u} - u) - \int_{\gamma_t} (w, {}_{11} + [\sigma_\tau])(\bar{w} - w) - \gamma_t(v, {}_{11} + \varphi, {}_1 + [\sigma_\nu])(\bar{v} - v) + \\ + \int_{\gamma_t} (-\varphi, {}_{11} + v, {}_1 + \varphi)(\bar{\varphi} - \varphi) + \int_{\gamma_s} (v, {}_{1111} - [\sigma_\nu])(\bar{v} - v) = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя здесь по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u) + \int_{\gamma} [\sigma_\nu(\bar{u} - u)] \\ + \int_{\gamma_t} \{w, {}_1(\bar{w}, {}_1 - w, {}_1) + \varphi, {}_1(\bar{\varphi}, {}_1 - \varphi, {}_1) + (v, {}_1 + \varphi)(\bar{v}, {}_1 + \bar{\varphi} - v, {}_1 - \varphi)\} \\ + \int_{\gamma_s} v, {}_{11}(\bar{v}, {}_{11}v, {}_{11}) - \int_{\gamma_s} [\sigma_\nu](\bar{v} - v) - \int_{\gamma_t} \{[\sigma_\tau](\bar{w} - w) + [\sigma_\nu](\bar{v} - v)\} \\ - w, {}_1(\bar{w} - w)|_{-1}^0 - \varphi, {}_1(\bar{\varphi} - \varphi)|_{-1}^0 - (v, {}_1 + \varphi)(\bar{v} - v)|_{-1}^0 \\ + v, {}_{111}(\bar{v} - v)|_0^1 - v, {}_{11}(\bar{v}, {}_1 - v, {}_1)|_0^1 = 0. \quad (1.17) \end{aligned}$$

С учетом краевых условий (1.5), (1.7), первого и последнего из условий (1.8) для вывода вариационного неравенства (1.10) из (1.17) достаточно доказать,

что справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} [\sigma_{\nu}(\bar{u}_{\nu} - u_{\nu})] + \int_{\gamma_t} [\sigma_{\tau}(\bar{u}_{\tau} - u_{\tau})] - \int_{\gamma_s} [\sigma_{\nu}](\bar{v} - v) \\ - \int_{\gamma_t} \{[\sigma_{\tau}](\bar{w} - w) + [\sigma_{\nu}](\bar{v} - v)\} \leq 0. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Однако справедливость неравенства (1.18) легко проверяется с помощью крайевых условий (1.4), (1.6).

Таким образом, из (1.1)–(1.8) получаем (1.9), (1.10). Предложение 1 полностью доказано.

2. Предельный переход по параметру жесткости. В этом разделе введем положительный параметр в модель (1.1)–(1.8). Этот параметр будет характеризовать жесткость тонкого включения γ_t . Целью проводимых ниже рассуждений является обоснование возможности предельного перехода при стремлении указанного параметра к бесконечности. Итак, пусть $\delta > 0$ — параметр. Для каждого δ можно найти единственное решение задачи

$$(u^{\delta}, \psi^{\delta}) \in K, \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\gamma}} \sigma(u^{\delta}) \varepsilon(\bar{u} - u^{\delta}) - \int_{\Omega_{\gamma}} f(\bar{u} - u^{\delta}) + \delta F'(\psi^{\delta})(\bar{\psi} - \psi^{\delta}) \\ + \int_{\gamma_s} v_{,11}^{\delta} (\bar{v}_{,11} - v_{,11}^{\delta}) \geq 0 \text{ для всех } (\bar{u}, \bar{\psi}) \in K. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Задача (2.1), (2.2) соответствует минимизации функционала энергии

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_{\gamma}} \sigma(u) \varepsilon(u) - \int_{\Omega_{\gamma}} f u + \delta F(\psi) + \frac{1}{2} \int_{\gamma_s} v_{,11}^2, \quad \psi = (v, w, \varphi),$$

на множестве K и на классе гладких решений эквивалентна следующей дифференциальной постановке: найти вектор перемещений $u^{\delta} = (u_1^{\delta}, u_2^{\delta})$ и тензор напряжений $\sigma^{\delta} = \{\sigma_{ij}^{\delta}\}$, $i, j = 1, 2$, определенные в Ω_{γ} , и функции v^{δ} , w^{δ} , φ^{δ} , определенные на γ , γ_t соответственно, а также постоянную c_0^{δ} такие, что

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \sigma^{\delta} &= f, \quad \sigma^{\delta} - A \varepsilon(u^{\delta}) = 0 \text{ в } \Omega_{\gamma}, \\ -\delta w_{,11}^{\delta} &= [\sigma_{\tau}^{\delta}], \quad -\delta \varphi_{,11}^{\delta} + \delta v_{,1}^{\delta} + \delta \varphi^{\delta} = 0, \quad -\delta v_{,11}^{\delta} - \delta \varphi_{,1}^{\delta} = [\sigma_{\nu}^{\delta}] \text{ на } \gamma_t, \\ w^{\delta} &= c_0^{\delta}, \quad v_{,1111}^{\delta} = [\sigma_{\nu}^{\delta}] \text{ на } \gamma_s, \\ u^{\delta} &= 0 \text{ на } \Gamma; \quad w^{\delta} = u_{\tau}^{\delta-}, \quad v^{\delta} = u_{\nu}^{\delta-} \text{ на } \gamma, \\ v_{,11}^{\delta} &= v_{,111}^{\delta} = 0 \text{ при } x_1 = 1; \quad \varphi^{\delta} + v_{,1}^{\delta} = w_{,1}^{\delta} = \varphi_{,1}^{\delta} = 0 \text{ при } x_1 = -1, \\ [u_{\nu}^{\delta}] &\geq 0, \quad \sigma_{\nu}^{\delta+} \leq 0, \quad \sigma_{\tau}^{\delta+} = 0, \quad \sigma_{\nu}^{\delta+}[u_{\nu}] = 0 \text{ на } \gamma, \end{aligned}$$

$$v_{,11}^\delta(0+) = -\delta\varphi_{,1}^\delta(0-), \quad v_{,111}^\delta(0+) = -\delta(v_{,1}^\delta + \varphi^\delta)(0-),$$

$$v_{,1}^\delta(0+) = -\varphi^\delta(0-); \quad [v^\delta(0)] = [w^\delta(0)] = 0; \quad w_{,1}^\delta(0-) = 0, \quad \int_{\gamma_s} \sigma_\tau^{\delta-} = 0.$$

Сначала получим априорные оценки решения задачи (2.1), (2.2). Из (2.2) при $\alpha > 0$ имеем

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\delta) \varepsilon(u^\delta) - \int_{\Omega_\gamma} f u^\delta + \delta \int_{\gamma_t} \{(w_{,1}^\delta)^2 + (\varphi_{,1}^\delta)^2 + (v_{,1}^\delta + \varphi^\delta)^2\}$$

$$+ \int_{\gamma_s} (v_{,11}^\delta)^2 \pm \alpha \int_{\gamma} \{(w^\delta)^2 + (v^\delta)^2\} = 0. \quad (2.3)$$

В силу неравенства Корна, краевых условий (1.4) и теорем вложения при малых α имеем

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\delta) \varepsilon(u^\delta) - \alpha \int_{\gamma} \{(w^\delta)^2 + (v^\delta)^2\} \geq 0.$$

Применяя рассуждения, использованные при доказательстве коэрцитивности функционала π , при $\delta \geq \delta_0 > 0$ получим

$$\|u^\delta\|_{H_\Gamma^1(\Omega_\gamma)^2} \leq c, \quad \|(v^\delta, w^\delta)\|_{H^1(\gamma)^2} \leq c, \quad \|v^\delta\|_{H^2(\gamma_s)} + \|\varphi^\delta\|_{H^1(\gamma_t)} \leq c \quad (2.4)$$

и равномерно по δ

$$\delta \int_{\gamma_t} \{(w_{,1}^\delta)^2 + (\varphi_{,1}^\delta)^2 + (v_{,1}^\delta + \varphi^\delta)^2\} \leq c. \quad (2.5)$$

В силу (2.4), (2.5) можно предполагать, что при $\delta \rightarrow \infty$

$$u^\delta \rightarrow u \text{ слабо в } H_\Gamma^1(\Omega_\gamma)^2, \quad v^\delta \rightarrow v \text{ слабо в } H^2(\gamma_s), \quad (2.6)$$

$$(v^\delta, w^\delta) \rightarrow (v, w) \text{ слабо в } H^1(\gamma)^2, \quad \varphi^\delta \rightarrow \varphi \text{ слабо в } H^1(\gamma_t), \quad (2.7)$$

$$w_{,1} = 0, \quad \varphi_{,1} = 0, \quad v_{,1} + \varphi = 0 \text{ на } \gamma_t.$$

Следовательно, существуют постоянные c_1, c_2, c_3 такие, что

$$w(x_1) = c_1, \quad \varphi(x_1) = c_2, \quad v(x_1) = -c_2 x_1 + c_3 \text{ на } \gamma_t.$$

Введем множество допустимых перемещений для предельной задачи

$$K^\infty = \{(u, v) \mid u \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma)^2; \ v|_{\gamma_s} \in H^2(\gamma_s), \ v|_{\gamma_t} \in L(\gamma_t);$$

$$u_\tau^-|_\gamma \in \mathbb{R}; \ [u_\nu] \geq 0, \ v = u_\nu^- \text{ на } \gamma; \ [v_{,1}(0)] = 0\},$$

где

$$L(\gamma_t) = \{l \mid l(x_1) = c_1 x_1 + c_0 \text{ на } \gamma_t; \ c_0, c_1 \in \mathbb{R}\}.$$

При определении множества $L(\gamma_t)$ считается, что постоянные c_0, c_1 произвольны.

Возьмем теперь произвольный элемент $(\bar{u}, \bar{v}) \in K^\infty$. Тогда $\bar{v}(x_1) = b_0 + b_1 x_1$ на γ_t ; $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1$; $\bar{u}_\tau^-|_\gamma = c_0 \in \mathbb{R}$. Положим $\bar{\psi} = (\bar{v}, \bar{w}, \bar{\varphi})$, где $\bar{w} = c_0$ на γ , $\bar{\varphi} = -b_1$ на γ_t . В этом случае $(\bar{u}, \bar{\psi}) \in K$. Подставим элемент $(\bar{u}, \bar{\psi})$ в качестве тестовой функции в (2.2) и перейдем к пределу при $\delta \rightarrow \infty$ на основе сходимости (2.6), (2.7). Получим

$$(u, v) \in K^\infty, \quad (2.8)$$

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u) + \int_{\gamma_s} v_{,11}(\bar{v}_{,11} - v_{,11}) \geq 0 \text{ для всех } (\bar{u}, \bar{v}) \in K^\infty. \quad (2.9)$$

Следует пояснить принадлежность предельного элемента (u, v) множеству K^∞ . В частности, требует пояснения условие $[v_{,1}(0)] = 0$. При $\delta > 0$ мы имели $(u^\delta, \psi^\delta) \in K$, в частности, $v_{,1}^\delta(0+) = -\varphi^\delta(0-)$. В силу указанной сходимости v^δ , φ^δ это условие будет выполнено и в пределе при $\delta \rightarrow \infty$, т. е. $v_{,1}(0+) = -\varphi(0-)$. Однако $\varphi(0-) = c_2$, $v_{,1}(0-) = -c_2$, поэтому $[v_{,1}(0)] = 0$. Кроме того, ясно, что для предельной функции w из (2.7) будем иметь $[w(0)] = 0$ и, таким образом, $w = u_\tau^-|_\gamma \in \mathbb{R}$. Все остальные условия, необходимые для принадлежности множеству K^∞ , для предельного элемента (u, v) очевидны.

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема. Решения задачи (2.1), (2.2) сходятся при $\delta \rightarrow \infty$ в смысле (2.6), (2.7) к решению задачи (2.8), (2.9).

Задача (2.8), (2.9) описывает равновесие упругого тела с тонким включением γ , которое отслаивается на положительном берегу. Более того, часть γ_t включения является жесткой, а часть γ_s — полужесткой.

Приведем дифференциальную формулировку задачи (2.8), (2.9). Требуется найти вектор перемещений $u = (u_1, u_2)$ и тензор напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, определенные в Ω_γ , и функцию v , определенную на γ , а также постоянные b_0, a_0, a_1 такие, что

$$-\operatorname{div} \sigma = f, \quad \sigma - A\varepsilon(u) = 0 \text{ в } \Omega_\gamma, \quad (2.10)$$

$$v_{,1111} = [\sigma_\nu] \text{ на } \gamma_s; \quad v_{,11} = v_{,111} = 0 \text{ при } x_1 = 1, \quad (2.11)$$

$$u = 0 \text{ на } \Gamma; \quad b_0 = u_\tau^-, \quad v = u_\nu^- \text{ на } \gamma, \quad (2.12)$$

$$[v(0)] = 0, \quad [v_{,1}(0)] = 0; \quad v(x_1) = a_0 + a_1 x_1, \quad x_1 \in (-1, 0), \quad (2.13)$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+ [u_\nu] = 0 \text{ на } \gamma; \quad \int_\gamma \sigma_\tau^- = 0, \quad (2.14)$$

$$\int_{\gamma_t} [\sigma_\nu] l - (v_{,111})(0+)l(0-) + v_{,11}(0+)l_{,1}(0-) = 0 \text{ для всех } l \in L(\gamma_t). \quad (2.15)$$

Учитывая структуру элементов пространства $L(\gamma_t)$, заметим, что тождество (2.15) можно переписать в виде двух соотношений

$$-\int_{\gamma_t} [\sigma_\nu] + v_{,111}(0+) = 0, \quad \int_{\gamma_t} [\sigma_\nu] x_1 + v_{,11}(0+) = 0,$$

которые имеют ясный физический смысл.

Предложение 2. *Формулировки (2.8), (2.9) и (2.10)–(2.15) эквивалентны на классе достаточно гладких решений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено (2.8), (2.9). Возьмем в (2.9) тестовую функцию $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u, v) \pm (\tilde{u}, 0)$, $\tilde{u} \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)^2$. Получим уравнение равновесия (см. (2.10)). Далее выберем в (2.9) тестовую функцию вида $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u, v) \pm (\tilde{u}, \tilde{v})$, $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in K^\infty$, $[\tilde{u}_\nu] = 0$ на γ . Будем иметь тождество

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u) \varepsilon(\tilde{u}) - \int_{\Omega_\gamma} f \tilde{u} + \int_{\gamma_s} v_{,11} \tilde{v}_{,11} = 0.$$

Отсюда следует после интегрирования по частям

$$-\int_{\gamma} [(\sigma_\nu) \tilde{u}] + \int_{\gamma_s} v_{,1111} \tilde{v} + v_{,11} \tilde{v}_{,1}|_0^1 - v_{,111} \tilde{v}|_0^1 = 0,$$

или

$$-\int_{\gamma_t} [\sigma_\nu] \tilde{u}_\nu - \int_{\gamma_s} [\sigma_\nu] \tilde{u}_\nu - \int_{\gamma} [\sigma_\tau \tilde{u}_\tau] + \int_{\gamma_s} v_{,1111} \tilde{v} + v_{,11} \tilde{v}_{,1}|_0^1 - v_{,111} \tilde{v}|_0^1 = 0. \quad (2.16)$$

В силу произвольности величин $\tilde{u}_\tau^\pm$ отсюда заключаем, что

$$\sigma_\tau^+ = 0 \text{ на } \gamma; \quad \int_{\gamma} \sigma_\tau^- = 0.$$

Кроме того, из (2.16) получаем

$$v_{,1111} = [\sigma_\nu] \text{ на } \gamma_s; \quad v_{,11} = v_{,111} = 0 \text{ при } x_1 = 1.$$

Итак, из (2.16), обозначая $\tilde{u}_\nu|_{\gamma_t}$ через l , имеем

$$\int_{\gamma_t} [\sigma_\nu] l - (v_{,111})(0+)l(0-) + v_{,11}(0+)l_{,1}(0-) = 0 \text{ для всех } l \in L(\gamma_t),$$

т. е. тождество (2.15). При этом мы воспользовались тем, что $l_{,1}(0-) = \tilde{v}_{,1}(0+)$.

Справедливость оставшихся краевых условий (2.14) сомнений не вызывает. Они стандартны для задач с неизвестным множеством контакта при наличии упругих, жестких или полужестких включений (см. [2, 3, 10]).

Итак, из (2.8), (2.9) вытекают все условия (2.10)–(2.15).

Докажем обратное. Пусть выполнены все соотношения (2.10)–(2.15). Имеем

$$\int_{\Omega_\gamma} (-\operatorname{div} \sigma - f)(\bar{u} - u) + \int_{\gamma_s} (v_{,1111} - [\sigma_\nu])(\bar{v} - v) = 0 \text{ для всех } (\bar{u}, \bar{v}) \in K^\infty.$$

Интегрируя здесь по частям, находим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u) + \int_{\gamma} [\sigma_\nu(\bar{u} - u)] + \int_{\gamma_s} v_{,11}(\bar{v}_{,11} - xv_{,11}) \\ - \int_{\gamma_s} [\sigma_\nu](\bar{v} - v) + v_{,111}(\bar{v} - v)|_0^1 - v_{,11}(\bar{v}_{,1} - v_{,1})|_0^1 = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Для того чтобы доказать справедливость вариационного неравенства (2.9), из (2.17) достаточно установить, что

$$\int_{\gamma} [\sigma_\nu(\bar{u} - u)] + \int_{\gamma_s} v_{,11}(\bar{v}_{,11} - v_{,11}) - \int_{\gamma_s} [\sigma_\nu](\bar{v} - v) + v_{,111}(\bar{v} - v)|_0^1 - v_{,11}(\bar{v}_{,1} - v_{,1})|_0^1 \leq 0. \quad (2.18)$$

Однако справедливость неравенства (2.18) легко проверяется в силу краевых условий (2.14), (2.15).

Предложение 2 доказано.

В заключение отметим, что условия сопряжения для предельной модели (2.10)–(2.15) характеризуются первыми двумя равенствами (2.13) и тождеством (2.15). Горизонтальные перемещения включений γ_t, γ_s в точке $(0, 0)$ совпадают в силу (2.12) и равны b_0 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Khlodnev A. M., Negri M. Crack on the boundary of a thin elastic inclusion inside an elastic body // Z. Angew. Math. Mech. 2012. V. 92. N 5. P. 341–354.
2. Itou H., Khlodnev A. M. On delaminated thin Timoshenko inclusions inside elastic bodies // Math. Meth. Appl. Sci. 2016. V. 39, N 17. P. 4980–4993.
3. Khlodnev A. M., Leugering G. R. Delaminated thin elastic inclusion inside elastic bodies // Math. Mech. Complex Systems. 2014. V. 2. N 1. P. 1–21.
4. Khlodnev A. M., Leugering G. R. On Timoshenko thin elastic inclusions inside elastic bodies // Mathematics and Mechanics of Solids. 2015. V. 20, N 5. P. 495–511.
5. Хлуднев А. М. Оптимальное управление включениями в упругом теле, пересекающими внешнюю границу // Сиб. журн. индустр. математики. 2015. Т. 18. № 4. С. 75–87.
6. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.
7. Khlodnev A. M. Singular invariant integrals for elastic body with delaminated thin elastic inclusion // Quart. Appl. Math. 2014. V. 72, N 4. P. 719–730.
8. Itou H., Khlodnev A. M., Rudoy E. M., Tani A. Asymptotic behaviour at a tip of a rigid line inclusion in linearized elasticity // Z. Angew. Math. Mech. 2012. V. 92, N 9. P. 716–730.
9. Khlodnev A. M., Kovtunen V. A. Analysis of cracks in solids. Southampton; Boston: WIT Press, 2000.
10. Хлуднев А. М. Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
11. Ковтуненко В. А. Инвариантные интегралы энергии для нелинейной задачи о трещине с возможным контактом берегов // Прикл. математика и механика. 2003. Т. 67, вып. 1. С. 109–123.

12. Kovtunen V. A. Primal-dual methods of shape sensitivity analysis for curvilinear cracks with nonpenetration // IMA J. Appl. Math. 2006. V. 71, N 5. P. 635–657.
13. Knees D., Schroder A. Global spatial regularity for elasticity models with cracks, contact and other nonsmooth constraints // Math. Methods Appl. Sci. 2012. V. 35, N 15. P. 1859–1884.
14. Рудой Е. М. Формула Гриффитса и интеграл Черепанова — Райса для пластины с жестким включением и трещиной // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, вып. 2. С. 98–117.
15. Рудой Е. М. Асимптотика функционала энергии для трехмерного тела с жестким включением и трещиной // Прикл. математика и техн. физика. 2011. Т. 52, № 2. С. 114–127.
16. Хлуднев А. М. Задача о трещине на границе жесткого включения в упругой пластине // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2010. № 5. С. 98–110.
17. Лазарев Н. П. Задача о равновесии пологой обложки Тимошенко, содержащей сквозную трещину // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 3. С. 58–69.
17. Хлуднев А. М. О равновесии двуслойной упругой конструкции с трещиной // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 2. С. 144–153.
18. Щербakov В. В. Об одной задаче управления формой тонких включений в упругих телах // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 1. С. 138–147.
19. Щербakov В. В. Существование оптимальной формы тонких жестких включений в пластине Кирхгофа — Лява // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 4. С. 142–151.
20. Lazarev N. P. Shape sensitivity analysis of the energy integrals for the Timoshenko-type plate containing a crack on the boundary of a rigid inclusion // Z. Angew. Math. Phys. 2015. V. 66, N 4. P. 2025–2040.
21. Lazarev N. P., Rudoy E. M. Shape sensitivity analysis of Timoshenko's plate with a crack under the nonpenetration condition // Z. Angew. Math. Mech. 2014. V. 94. P. 730–739.
22. Рудой Е. М., Хлуднев А. М. Односторонний контакт пластины с тонким упругим препятствием // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12, № 2. С. 120–130.
23. Shcherbakov V. V. The Griffith formula and J -integral for elastic bodies with Timoshenko inclusions // Z. Angew. Math. Mech. 2016. V. 96, N 11. P. 1306–1317.
24. Bessoud A.-L., Krasucki F., Serpilli M. Plate-like and shell-like inclusions with high rigidity // Compt. Rend. Math. 2008. V. 346, S. I. P. 697–702.
25. Bessoud A.-L., Krasucki F., Michaille G. Multi-materials with strong interface: Variational modelings // Asymptotic Analysis. 2009. V. 61, N 1. P. 1–19.
26. Pasternak I. M. Plane problem of elasticity theory for anisotropic bodies with thin elastic inclusions // J. Math. Sci. 2012. V. 186, N 1. P. 31–47.
27. Vynnytska L., Savula Y. Mathematical modeling and numerical analysis of elastic body with thin inclusion // Comput. Mech. 2004. V. 50, N 5. P. 533–542.
28. Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Movchan A. B. Asymptotic analysis of fields in a multi-structure. New York: Oxford Univ. Press, 1999. (Oxford Math. Monogr.).
29. Le Dret H. Modeling of the junction between two rods // J. Math. Pure Appl. 1989. V. 68. P. 365–397.
30. Titeux I., Sanchez-Palencia E. Junction of thin plate // Europ. J. Mech. A/Solids. 2000. V. 19, N 3. P. 377–400.
31. Gaudiello A., Zappale E. Junction in a thin multidomain for a forth order problem // Math. Models Methods Appl. Sci. 2006. V. 16, N 12. P. 1887–1918.
32. Gaudiello A., Zappale E. A model of joined beams as limit of a 2D plate // J. Elasticity. 2011. V. 103, N 2. P. 205–233.
33. Ciarlet P. G., Le Dret H., Nzenwa R. Junctions between three dimensional and two dimensional linearly elastic structures // J. Math. Pures Appl. 1989. V. 6. P. 261–295.
34. Faella L., Khludnev A. M., Popova T. S. Junction problem for rigid and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies // Mathematics and Mechanics of Solids. 2017. V. 22, N 4. P. 737–750.
35. Khludnev A. M., Popova T. S. On the mechanical interplay between Timoshenko and semirigid inclusions embedded in elastic bodies // Z. Angew. Math. Mech. . 2017. V. 97, N 11. P. 1406–1417.
36. Khludnev A. M., Popova T. S. Junction problem for rigid and semi-rigid inclusions in elastic bodies // Arch. Appl. Mech. 2016. V. 86, N 9. P. 1565–1577.

- 37. *Khudnev A. M., Popova T. S.* Junction problem for Euler–Bernoulli and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies // *Quart. Appl. Math.* 2016. V. 74, N 4. P. 705–718.
- 38. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. М.: Наука, 1973.

Статья поступила 28 ноября 2017 г.

Хлуднев Александр Михайлович
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Акад. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
khlud@hydro.nsc.ru

Попова Татьяна Семеновна
Северо-Восточный Федеральный университет им. М.К. Аммосова,
ул. Белинского, 58, Якутск 677000
ptsokt@mail.ru

ON JUNCTION PROBLEM FOR ELASTIC
TIMOSHENKO INCLUSION
AND SEMI-RIGID INCLUSION
A. M. Khludnev and T. S. Popova

Abstract: An equilibrium problem for elastic bodies with a thin elastic inclusion and a thin semi-rigid inclusion is investigated. The inclusions are assumed to be delaminated from the elastic bodies, forming therefore a crack between the inclusions and the elastic matrix. Nonlinear boundary conditions are considered at the crack faces to prevent mutual penetration between the crack faces. The inclusions have a joint point. We present both differential formulation in the form of a boundary value problem and a variational formulation in the form of a minimization problem for an energy functional on a convex set of admissible displacements. The unique solvability of the problem is substantiated. Equivalence of differential and variational statements is shown. Passage to the limit is investigated as the rigidity parameter of the elastic inclusion goes to infinity. The limit model is analyzed. Junction boundary conditions are found at the joint point for the considered problem as well as for the limit problem.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.1.12770

Keywords: Timoshenko inclusion, semi-rigid inclusion, elastic body, crack, nonlinear boundary conditions.

REFERENCES

1. Khludnev A. M. and Negri M., “Crack on the boundary of a thin elastic inclusion inside an elastic body,” *Z. Angew. Math. Mech.*, **92**, No. 5, 341–354 (2012).
2. Itou H. and Khludnev A. M., “On delaminated thin Timoshenko inclusions inside elastic bodies,” *Math. Meth. Appl. Sci.*, **39**, No. 17, 4980–4993 (2016).
3. Khludnev A. M. and Leugering G. R., “Delaminated thin elastic inclusion inside elastic bodies,” *Math. Mech. Complex Syst.*, **2**, No. 1, 1–21 (2014).
4. Khludnev A. M. and Leugering G. R., “On Timoshenko thin elastic inclusions inside elastic bodies,” *Math. Mech. Solids*, **20**, No. 5, 495–511 (2015).
5. Khludnev A. M., “Optimal control of inclusions in an elastic body crossing the external boundary [in Russian],” *Sib. Zh. Ind. Mat.*, **18**, No. 4, 75–87 (2015).
6. Morozov N. F., *Mathematical Questions of the Crack Theory* [in Russian], Nauka, Moscow (1984).
7. Khludnev A. M., “Singular invariant integrals for elastic body with delaminated thin elastic inclusion,” *Q. Appl. Math.*, **72**, No. 4, 719–730 (2014).
8. Itou H., Khludnev A. M., Rudoy E. M., and Tani A., “Asymptotic behaviour at a tip of a rigid line inclusion in linearized elasticity,” *Z. Angew. Math. Mech.*, **92**, No. 9, 716–730 (2012).
9. Khludnev A. M. and Kovtunen V. A., *Analysis of Cracks in Solids*, WIT Press, Southampton; Boston (2000).
10. Khludnev A. M., *Problems of Elasticity Theory in Nonsmooth Domains* [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2010).

11. Kovtunen V. A., "Invariant energy integrals for the nonlinear crack problem with possible contact of the crack surfaces," *J. Appl. Math. Mech.*, **67**, No. 1, 99–110 (2003).
12. Kovtunen V. A., "Primal-dual methods of shape sensitivity analysis for curvilinear cracks with nonpenetration," *IMA J. Appl. Math.*, **71**, No. 5, 635–657 (2006).
13. Knees D. and Schroder A., "Global spatial regularity for elasticity models with cracks, contact and other nonsmooth constraints," *Math. Methods Appl. Sci.*, **35**, No. 15, 1859–1884 (2012).
14. Rudoy E. M., "The Griffith formula and Cherepanov–Rice integral for a plate with a rigid inclusion and a crack," *J. Math. Sci., New York*, **186**, No. 3, 511–529 (2012).
15. Rudoy E. M., "Asymptotic behavior of the energy functional for a three-dimensional body with a rigid inclusion and a crack," *J. Appl. Math. Mech.*, **75**, No. 6, 731–738 (2011).
16. Khludnev A. M., "The problem for a crack on the border of a rigid inclusion in a elastic plate [in Russian]," *Izv. Akad. Nauk, Mekh. Tvoryd. Tela*, No. 5, 98–110 (2010).
17. Lazarev N. P., "The equilibrium problem for a Timoshenko-type shallow shell containing a through crack," *J. Appl. Ind. Math.*, **7**, No. 1, 78–88 (2013).
17. Khludnev A. M., "On the equilibrium of a two-layer elastic body with a crack," *J. Appl. Ind. Math.*, **7**, No. 3, 370–379 (2013).
18. Shcherbakov V. V., "On an optimal control problem for the shape of thin inclusions in elastic bodies," *J. Appl. Ind. Math.*, **7**, No. 3, 435–443 (2013).
19. Shcherbakov V. V., "Existence of an optimal shape of the thin rigid inclusions in the Kirchhoff–Love plate," *J. Appl. Ind. Math.*, **8**, No. 1, 97–105 (2014).
20. Lazarev N. P., "Shape sensitivity analysis of the energy integrals for the Timoshenko-type plate containing a crack on the boundary of a rigid inclusion," *Z. Angew. Math. Phys.*, **66**, No. 4, 2025–2040 (2015).
21. Lazarev N. P. and Rudoy E. M., "Shape sensitivity analysis of Timoshenko's plate with a crack under the nonpenetration condition," *Z. Angew. Math. Mech.*, **94**, 730–739 (2014).
22. Rudoy E. M. and Khludnev A. M., "Unilateral contact of a plate with a thin elastic obstacle," *Sib. Zh. Ind. Mat.*, **12**, No. 2, 120–130 (2009).
23. Shcherbakov V. V., "The Griffith formula and J -integral for elastic bodies with Timoshenko inclusions," *Z. Angew. Math. Mech.*, **96**, No. 11, 1306–1317 (2016).
24. Bessoud A.-L., Krasucki F., and Serpilli M., "Plate-like and shell-like inclusions with high rigidity," *Compt. Rend. Math.*, **346**, No. I, 697–702 (2008).
25. Bessoud A.-L., Krasucki F., and Michaille G., "Multi-materials with strong interface: Variational modelings," *Asympt. Anal.*, **61**, No. 1, 1–19 (2009).
26. Pasternak I. M., "Plane problem of elasticity theory for anisotropic bodies with thin elastic inclusions," *J. Math. Sci.*, **186**, No. 1, 31–47 (2012).
27. Vynnytska L. and Savula Y., "Mathematical modeling and numerical analysis of elastic body with thin inclusion," *Comput. Mech.*, **50**, No. 5, 533–542 (2004).
28. Kozlov V. A., Maz'ya V. G., and Movchan A. B., *Asymptotic Analysis of Fields in a Multi-Structure*, Oxford Univ. Press, New York (1999). (Oxford Math. Monogr.).
29. Le Dret H., "Modeling of the junction between two rods," *J. Math. Pure Appl.*, **68**, 365–397 (1989).
30. Titeux I. and Sanchez-Palencia E., "Junction of thin plate," *Eur. J. Mech., A, Solids*, **19**, No. 3, 377–400 (2000).
31. Gaudiello A. and Zappale E., "Junction in a thin multidomain for a fourth order problem," *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **16**, No. 12, 1887–1918 (2006).
32. Gaudiello A. and Zappale E., "A model of joined beams as limit of a 2D plate," *J. Elasticity*, **103**, No. 2, 205–233 (2011).
33. Ciarlet P. G., Le Dret H., and Nzenwa R., "Junctions between three dimensional and two dimensional linearly elastic structures," *J. Math. Pures Appl.*, **6**, 261–295 (1989).
34. Faella L., Khludnev A. M., and Popova T. S., "Junction problem for rigid and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies," *Math. Mech. Solids*, **22**, No. 4, 737–750 (2017).
35. Khludnev A. M. and Popova T. S., "On the mechanical interplay between Timoshenko and semirigid inclusions embedded in elastic bodies," *Z. Angew. Math. Mech.*, **97**, No. 11, 1406–1417 (2017).
36. Khludnev A. M. and Popova T. S., "Junction problem for rigid and semi-rigid inclusions in elastic bodies," *Arch. Appl. Mech.*, **86**, No. 9, 1565–1577 (2016).

- 37.** *Khudnev A. M. and Popova T. S.*, “Junction problem for Euler–Bernoulli and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies,” *Q. Appl. Math.*, **74**, No. 4, 705–718 (2016).
- 38.** *Grigolyuk E. I. and Selezov I. T.*, *Mekhanika Tvyordyh Deformiruemyh Tel. V. 5. Neklassicheskie Teorii Kolebaniy Sterzhney, Platin i Obolochek*, Nauka, Moscow (1973).

Submitted November 28, 2017

Alexander M. Khudnev
Lavrentiev Institute of Hydrodynamics,
15 Lavrentiev Avenue, Novosibirsk 630090, Russia;
Novosibirsk State University,
1 Pirogov Street, Novosibirsk, 630090, Russia
`khlud@hydro.nsc.ru`

Tatyana S. Popova
M. K. Ammosov North-Eastern Federal University,
58 Belinsky Street, Yakutsk 677000, Russia
`ptsokt@mail.ru`

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ В ВИНТОВОМ ПНЕВМОСЕПАРАТОРЕ СТАТИСТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

С. Р. Крылатова, А. И. Матвеев,
И. Ф. Лебедев, Б. В. Яковлев

Аннотация. При математическом моделировании процессов, происходящих в устройствах обогащения полезных ископаемых, появляются задачи определения вероятности местонахождения частицы на рабочих поверхностях устройств. В настоящей работе для решения подобной задачи предлагается статистический подход, т. е. при определении вероятности используется идея метода Гиббса. Рассмотрены проблемы моделирования процессов, происходящих в воздушном винтовом сепараторе. Разработаны математическая модель винтовой поверхности пневмосепаратора, модели движения частицы, потока невзаимодействующих частиц по рабочей поверхности сепаратора и алгоритм определения концентрации потока частиц. Рассчитанное распределение концентрации невзаимодействующих частиц на рабочей поверхности устройства отождествляется с распределением вероятности местонахождения одной частицы. Разработанный алгоритм определения вероятности положения частицы на рабочей поверхности пневмосепаратора может быть использован как элемент более сложной математической модели, например модели, где учитываются взаимодействия между частицами.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.1.12771

Ключевые слова: винтовой сепаратор, концентрация, статистический метод, уравнение движения, поток частиц, обогащение, математическая модель.

Для определения оптимальных параметров [1], и усовершенствования рабочей поверхности [2] винтового пневмосепаратора необходима разработка математической модели процессов, происходящих внутри сепаратора [3, 4]. Пневмосепаратор продувается воздухом с нижней части устройства [5]. Частицы песка, совершая под действием потока воздуха вращательное движение, уходят вверх и выбрасываются из сепаратора. Из-за наклона рабочей поверхности тяжелая частица смещается в центральную часть сепаратора и отделяется [6]. В [7, 8] представлены математические модели движения частицы в винтовом сепараторе. В [9] исследованы процессы сепарации в винтовом сепараторе методом дискретных элементов. В этих исследованиях появляется задача определения вероятности положения частицы на рабочей поверхности в процессе работы устройства. Такая задача может быть использована как основной элемент математической модели коллективного движения частиц в пневмосепараторе [10].

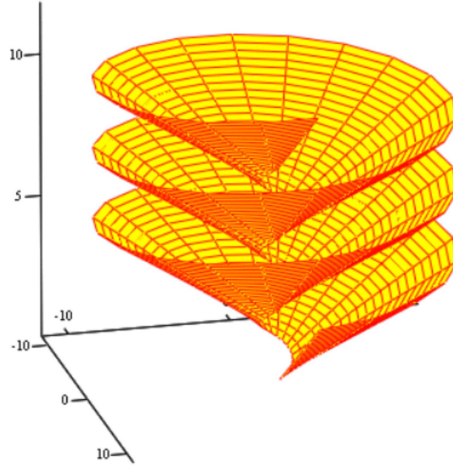


Рис. 1. Рабочая поверхность винтового пневмосепаратора

В настоящей работе для описания движения частицы используется идея метода Гиббса [11, 12], т. е. вместо последовательных (по времени) состояний системы вводится ансамбль, который представляет собой совокупность состояний многих систем с определенными начальными условиями. На первом этапе работы определяется движение одной частицы внутри пневмосепаратора под действием направленного потока воздуха [13]. В качестве рабочей поверхности выбрана винтовая поверхность с определенным углом раствора и аксиальным углом наклона. Математическая модель рабочей поверхности винтового сепаратора получена обобщением модели конической поверхности [14], т. е. добавляется третья аксиальная компонента нормали к поверхности (рис. 1).

Уравнение движения частицы имеет вид [15]

$$m\ddot{\vec{R}} = \vec{F}_b + m\vec{g} + \vec{F}_{тр} + \vec{N}, \quad (15)$$

где $\vec{R} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$ — радиус-вектор частицы, m — ее масса,

$$\vec{F}_b = a(v_0 \cos(\beta) - v_\psi)\vec{e}_\psi + a\left(v_0 \sin(\beta) - \frac{1}{\tan(\alpha)}v_r - \tan(\beta)v_\psi\right)\vec{e}_z$$

— сила действия потока воздуха, a — коэффициент сопротивления при движении тела в воздушной среде, зависящий от характеристики среды, формы и свойств тела, v_0 — скорость потока воздуха, v_ψ — аксиальная составляющая скорости движения тела, $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ — ускорение свободного падения, $\vec{F}_{тр} = -Nf\frac{\vec{v}}{v}$ — сила трения о поверхность, r — расстояние от оси модели до частицы, ψ — угол цилиндрической системы координат, $\vec{e}_r, \vec{e}_\psi, \vec{e}_z$ — базисные векторы цилиндрической системы координат.

Нормаль к рабочей поверхности сепаратора определяется соотношением

$$\vec{e}_N = -\cos(\alpha)\cos(\beta)\vec{e}_r - \sin(\alpha)\sin(\beta)\vec{e}_\psi + \sin(\alpha)\cos(\beta)\vec{e}_z,$$

где $\beta = \arctg(\frac{h}{2\pi R})$ — угол наклона рабочей поверхности по азимутальному направлению, α — угол полураствора конусной поверхности, т. е. угол наклона нормали рабочей поверхности по радиальному направлению.

Нормаль к рабочей поверхности относительно вертикальной оси можно написать в следующем виде:

$$\vec{e}_N = -\sin(\gamma_1) \cos(\gamma_2) \vec{e}_r - \sin(\gamma_1) \sin(\gamma_2) \vec{e}_\psi + \cos(\gamma_1) \vec{e}_z,$$

где γ_1 — угол между нормалью и вертикальной осью, γ_2 — азимут проекции нормали на горизонтальную плоскость,

$$\cos(\gamma_1) = \sin(\alpha) \cos(\beta), \quad \tg(\gamma_2) = -\tg(\alpha) \tg(\beta),$$

$$\vec{N} = \vec{N}(v_\psi, r) = \left(mg \cos(\gamma_1) + \frac{mv_\psi^2}{r} \cos(\gamma_2) \sin(\gamma_1) \right) \vec{e}_n$$

— сила реакции поверхности.

Из (1) получена система дифференциальных уравнений с начальными условиями

$$r(0) = r_0, \quad \psi(0) = \psi_0, \quad z(0) = z_0, \quad v_r(0) = 0, \quad v_\psi(0) = 0, \quad v_z(0) = 0,$$

$$\dot{r} = v_r,$$

$$\dot{\psi} = \frac{v_\psi}{r},$$

$$\dot{z} = \frac{1}{\tg(\alpha)} v_r + \tg(\beta) v_\psi,$$

$$\dot{v}_r = \frac{v_\psi^2}{r} - \frac{N}{m} \cos(\alpha) \cos(\beta) - f \frac{N}{m} \frac{v_r}{v} \tg(\alpha),$$

$$\dot{v}_\psi = \frac{N}{m} \sin(\alpha) \sin(\beta) + \frac{a}{m} (v_0 \cos(\beta) - v_\psi) - \frac{v_r v_\psi}{r} - f \frac{N}{m} \frac{v_\psi}{v},$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_z = -g + \frac{a}{m} \left(v_0 \sin(\beta) - \left(\frac{v_r}{\tg(\alpha)} + \tg(\beta) v_\psi \right) \right) \\ + \frac{N}{m} \sin \alpha \cos \beta - f \frac{N}{m} \frac{1}{v} \left(\frac{1}{\tg(\alpha)} v_r + \tg(\beta) v_\psi \right). \end{aligned}$$

Эта система решается методом Рунге — Кутты, тем самым определяется закон движения частицы по рабочей поверхности. Используя полученный результат, можно определить траектории и законы движения и для системы невзаимодействующих частиц. Совокупность состояний невзаимодействующих частиц принимаем за статистический ансамбль. Ясно, что в начальный момент времени вдоль радиуса винтовой поверхности распределение вероятности положения частицы однородно. Зная начальные условия для невзаимодействующих частиц, можно определить концентрацию частиц на винтовой поверхности в последующие моменты времени. При стационарном случае получается определенное не зависящее от времени распределение плотности частиц на поверхности. Согласно методу Гиббса это распределение отождествляется с распределением

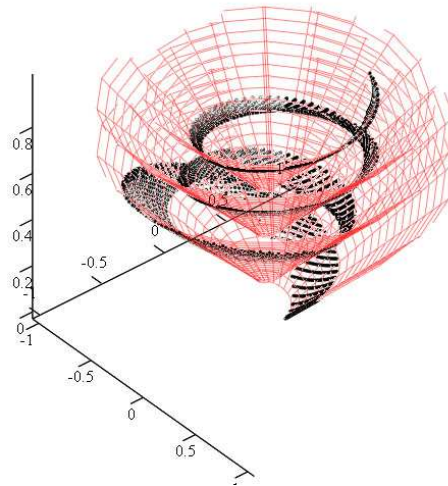


Рис. 2. Распределение концентрации невзаимодействующих частиц

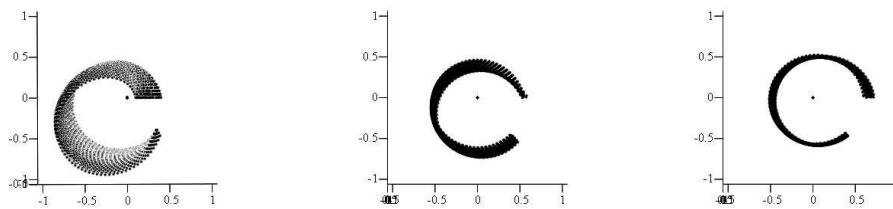


Рис. 3. Распределение частиц на модельной плоскости для трех витков

вероятности местонахождения одной частицы. В качестве примера в работе рассмотрен поток из 30 частиц с равномерным начальным распределением по радиусу (рис. 2). Вероятность местонахождения частицы на рабочей поверхности определяется как концентрация этого потока.

С целью определения концентрации потока частиц рабочую поверхность каждого витка отображаем на плоскость (рис. 3), которую назовем *модельной плоскостью*. Имеем некоторый поток частиц в модельной плоскости с заданными координатами и скоростями в начальный момент времени. Законы движения для каждой частицы известны. Для решения задачи используем вычислительные свойства компьютера. На компьютере строим положение частицы в плоскости за равные промежутки времени (потому что в начальный момент времени поток однородный). В окрестности точки наблюдения (X, Y) выделяем физически бесконечно малую область, например, для плоской задачи окружность радиуса R с центром в точке наблюдения. Относительно этой точки наблюдения определяем расстояние всех точек потока по формуле $L_i = \sqrt{(X - x_i)^2 + (Y - y_i)^2}$.

Следующий шаг: создаем программу, определяющую расстояния до точек,

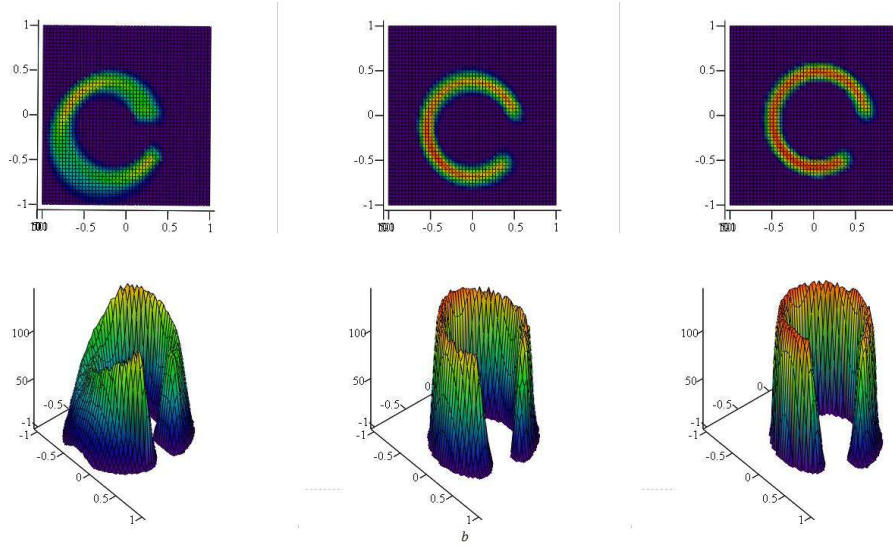


Рис. 4. Распределение концентрации на модельной плоскости.

a — вид сверху, b — вид сбоку

которые лежат только внутри этой окружности:

$$L1_{i,k} = \begin{cases} 0, & \text{если } L_{i,k} > R, \\ L_{i,k}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Расстояния до тех точек, которые лежат вне окружности, зануляются программой. Таким образом получается двумерная матрица данных, определяющая расстояния от центра окружности до точек, лежащих внутри него. Элементы матрицы делятся на значение самих элементов:

$$K_{i,k} = \frac{L1_{i,k}}{L_{i,k}}.$$

Тогда элементами матрицы являются только 0 и 1. Следовательно, суммируя все элементы матрицы

$$k = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{k=0}^n K_{i,k} \right),$$

получаем количество частиц внутри окружности с физически бесконечно малым объемом. Выбирая координаты точек наблюдения и введя соответственно физически бесконечно малые области, определяем количество частиц внутри такой «подвижной» окружности на всей плоскости. Концентрация частиц определяется отношением количества частиц к площади окружности. На рис. 4 представлен график концентрации частиц на модельной плоскости. Согласно модели вероятность нахождения частицы на этой плоскости пропорциональна концентрации.

Изложенный статистический метод определения вероятности положения частицы может быть использован и для других устройств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Матвеев А. И., Филиппов В. Е., Федоров Ф. М., Григорьев А. Н., Яковлев В. Б., Еремеева Н. Г., Слепцова Е. С., Гладышев А. М., Винокуров В. П. Патент № 2167005, 7 В 07 В 7/08. Пневмосепаратор / ИГДС СО РАН; Заявл. 11.06.99; Оpubл. 20.05.2001 // Изобретения. Полезные модели. 2001. № 14. Ч. 2. С. 346.
2. Hasankhoei A. R., Banisi S., Mozafari P. Designing a spiral splitter at the Zarand coal washing plant // Indian J. Sci. Res. 2014. V. 2, N 1. P. 151–156.
3. Шувалов С. И., Андреев А. А. Математическое описание движения частиц в динамическом сепараторе // Вестн. Иван. гос. энерг. ун-та. Вып. 1. Иваново: ИГЭУ, 2005. С. 25–28.
4. Матвеев А. И., Лебедев И. Ф., Никифорова Л. В., Яковлев В. В. Моделирование движения частиц в винтовом пневмосепараторе // Горный информационно-аналитический бюллетень. 2014. № 10. С. 172–178.
5. Барский М. Д., Ревнивец В. И., Соколкин Ю. В. Гравитационная классификация зернистых материалов. М.: Недра, 1974.
6. Филиппов В. Е., Лебедев И. Ф., Матвеев А. И., Григорьев А. Н. Винтовой пневмосепаратор. Патент на изобретение № 2194581, 2002.
7. Kapur P. C., Meloy T. P. Spirals observed // Int. J. Mineral Process. 1998. V. 53. P. 15–28.
8. Das S. K., Godivalla K. M., Panda L., Bhattacharya K. K., Singh R., Mehrotra S. P. Mathematical modeling of separation characteristics of coal-washing spiral // Int. J. Mineral Process. 2007. V. 84. P. 118–132.
9. Mishra B. K., Alok Tripathy. A preliminary study of particle separation in spiral concentrators using DEM // Int. J. Mineral Process. 2010. V. 94. P. 192–195.
10. Германюк Г. Ю. Математическое моделирование движения ансамбля частиц с использованием канонического метода интегрирования: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ижевск, 2010.
11. Гиббс Дж. В. Основные принципы статистической механики. М.; Л.: Гостехиздат, 1946.
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 5. Статистическая физика. М.: Наука, 1976.
13. Karman T. Aerodynamics: Selected topics in the light of their historical development. Ithaca, NY: Cornell Univ. Press, 1954.
14. Фролов С. А. Начертательная геометрия: Учеб. для втузов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1983.
15. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1979.

Статья поступила 15 декабря 2017 г.

Крылатова Сардаана Романовна
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
физико-технический институт,
ул. Кулаковского 48, Якутск 677891
tsubasasardaana@mail.ru

Матвеев Андрей Иннокентьевич, Лебедев Иван Феликсович
Институт горного дела Севера им. Н. В. Черского СО РАН,
пр. Ленина, 43, Якутск 678980
andrei.mati@yandex.ru, ivleb@mail.ru

Яковлев Борис Васильевич
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
физико-технический институт,
ул. Кулаковского 48, Якутск 677891
b-yakovlev@mail.ru

MODELING OF PARTICLE MOTION IN SPIRAL PNEUMOSEPARATOR BY STATISTICAL METHODS

S. R. Krylatova, A. I. Matveev,
I. F. Lebedev, and B. V. Yakovlev

Abstract: In mathematical modeling of mineral processing, there arise problems of determining the probability of the particle presence on the working surfaces of devices. In the paper, we propose a statistical approach to solving such problem, i. e., the idea of the Gibbs method is used. We consider problems of modeling processes in an air spiral separator. A mathematical model of the spiral surface of a pneumoseparator, a model of particle motion, a flux of noninteracting particles along the separator working surface, and an algorithm for determining the particle flux concentration are developed. The calculated distribution of the noninteracting particles concentration on the working surface of the device is identified with the probability distribution of the location of one particle. The developed algorithm for determining the probability of position of a particle on the working surface of the pneumoseparator can be used as an element of a more complex mathematical model, for example, a model where interactions between particles are taken into account.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.1.12771

Keywords: spiral separator, concentration, statistical method, motion equation, particle flow, enrichment, mathematical model.

REFERENCES

1. Matveev A. I., Filippov V. E., Fedorov F. M., Grigoriev A. N., Yakovlev V. B., Ereemeeva N. G., Slepsova E. S., Gladyshev A. M., and Vinokurov V. P., Patent No. 2167005. 20.05.2001.
2. Hasankhoei A. R., Banisi S., and Mozafari P., "Designing a spiral splitter at the Zarand coal washing plant," *Indian J. Sci. Res.*, **1**, No. 2, 151–156 (2014).
3. Shuvalov S. I. and Andreev A. A., "Mathematical description of motion of particles in a dynamic separator," *Vestn. Ivanovsk. Gos. Energ. Univ.*, **1**, 25–28 (2005).
4. Matveev A. I., Lebedev I. F., Nikiforova L. V., and Yakolev B. V., "Modeling of motion of particles in a spiral pneumoseparator," *Mining Inform. Anal. Bull.*, **10**, 172–178 (2014).
5. Barskii M. D., Revnitshev V. I., and Sokolkin Y. V., *Gravitatsionnaya Klassifikatsiya Zernistykh Materialov* [in Russian], Nedra, Moscow (1974).
6. Filippov V. E., Lebedev I. F., Matveev A. I., and Grigoriev A. N., Patent No. 2194581 (2002).
7. Kapur P. C. and Meloy T. P., "Spirals observed," *Int. J. Mineral Process.*, **53**, 15–28 (1998).
8. Das S. K., Godivalla K. M., Panda L., Bhattacharya K. K., Singh R., and Mehrotra S. P., "Mathematical modeling of separation characteristics of coal-washing spiral," *Int. J. Mineral Process.*, **84**, 118–132 (2007).
9. Mishra B. K. and Alok Tripathy, "A preliminary study of particle separation in spiral concentrators using DEM," *Int. J. Mineral Process.*, **94**, 192–195 (2010).
10. Germanyyuk G. Y., *Mathematical Modeling of Particle Set Movement Using Canonical Method of Integration* [in Russian], Diss. Kand. Fiz.-Mat. Nauk, Izhevsk (2010).
11. Gibbs J. W., *Elementary Principles in Statistical Mechanics, Developed with Especial Reference to the Rational Foundation of Thermodynamics*, Dover Publ., New York (1902).

-
12. Landau L. D. and Lifshitz E. M., Theoretical Physics. Vol. 5. Statistical Physics [in Russian], Nauka, Moscow (1976).
 13. Karman T., Aerodynamics: Selected Topics in the Light of Their Historical Development, Cornell Univ. Press, Ithaca, NY (1954).
 14. Frolov S. A., Nachertatelnaya Geometriya [in Russian], Mashinostroenie, Moscow (1983).
 15. Sivukhin D. V., General Course of Physics. Vol. 1. Mechanics, Nauka, Moscow (1979).

Submitted December 15, 2017

Sardaana R. Krylatova
M. K. Ammosov North-Eastern Federal University
Institute of Physics and Technologies,
48 Kulakovsky Street, Yakutsk 677891, Russia
`tsubasasardaana@mail.ru`

Andrey I. Matveev, Ivan F. Lebedev
Chersky Mining Institute of the North,
43 Lenin Avenue, Yakutsk 677980, Russia
`andrei.mati@yandex.ru`, `ivleeb@mail.ru`

Boris V. Yakovlev
M. K. Ammosov North-Eastern Federal University
Institute of Physics and Technologies,
48 Kulakovsky Street, Yakutsk 677891, Russia
`b-yakovlev@mail.ru`

УДК 517.95+532.5

О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ
ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ
И МЕТОДАХ ЕГО РЕШЕНИЯ

В. Н. Ханхасаев, Э. В. Дармахеев

Аннотация. Создание новых технологических процессов, основанных на использовании высокоинтенсивных потоков энергии, вынуждает при определении температурного состояния учитывать конечную скорость распространения тепла. Этот учет может быть осуществлен при помощи гиперболического уравнения теплопроводности, полученного А. В. Лыковым в рамках неравновесной феноменологической термодинамики как следствие обобщения закона Фурье для потоков и уравнения теплового баланса. В прежних работах В. Н. Ханхасаева моделировался процесс коммутационного отключения электрической дуги в спутном потоке газа с использованием этого уравнения. В данной работе развивается математическая модель этого процесса с добавлением периода устойчивого горения дуги до момента отключения, и заменой строго гиперболического уравнения теплопроводности гиперболо-параболическим. Для полученного смешанного уравнения теплопроводности корректно поставлены и численно решаются ряд краевых задач в программных средах Фортран и Маткад с получением полей температур, хорошо согласующихся с имеющимися экспериментальными данными.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.1.12772

Ключевые слова: гиперболо-параболические уравнения, гиперболическое уравнение теплопроводности, схема переменных направлений, уравнения Навье — Стокса, тепловой баланс.

Введение

Несмотря на большой опыт в разработке коммутационных аппаратов и исследовании происходящих в них электродуговых процессов, отраженный, в частности, в монографии А. И. Полтева [1], существует ряд проблем, связанных с изучением квазистационарных и существенно нестационарных процессов в дуге, обдуваемой потоком газа, созданием методов расчета и поиском путей повышения эффективности дутьевых систем для увеличения теплосъема с электрической дуги.

Анализ работы выпускаемых в настоящее время промышленных высоковольтных выключателей классического типа с коммутацией, сопровождающейся возникновением дуги, показывает, что они зачастую не отвечают современным требованиям по уровням отключаемых токов, напряжений на разрыв,

быстродействию и надежности. В работах С. Л. Буянтужева и др. [2] был предложен и экспериментально на первом этапе исследован новый автогазовый способ гашения коммутационной дуги, основанный на принципе возгонки элегаза (SF_6) из одного агрегатного состояния в другое под действием энергии дуги с образованием высокого давления в дугевой камере. На втором этапе необходимо учитывать влияние потока газа в разные стадии горения и гашения дуги от амплитудных до нулевых значений тока, различную геометрию дугевых систем и термохимические эффекты в столбе дуги.

В соответствии с полученными результатами и с целью дальнейшей эффективной доработки этого способа встала задача построения адекватных математических моделей теплообмена и математического аппарата для их описания при определенных режимах работы. В силу тепловой инерции плазмы в области перехода тока через ноль, где находится наиболее удобное время для разъединения электрической цепи, температура дуги достаточно высока (на оси $\approx 7000^\circ \text{K}$), а время гашения и тепловая постоянная времени дуги τ для продольного дутья в воздухе, элегазе или смесях элегаза с азотом имеют длительность от единиц до десятков микросекунд, и тепловое равновесие достигается сравнительно быстро. Поэтому если процессы в области амплитуды тока обычно представляют как установившиеся, описываемые классическим уравнением теплопроводности параболического типа, то дугогашение в области нуля тока необходимо рассматривать как существенно нестационарный процесс, описываемый гиперболической моделью [3–5].

К этой проблеме примыкает моделирование волнового механизма теплопереноса, обусловленного конечной скоростью распространения тепла. Из классической теории переноса известны следующие законы:

$\bar{q}(x, y, z, t) = -\lambda \text{grad } T(x, y, z, t)$ — закон Фурье, λ — коэффициент теплопроводности, $\bar{q}$ — плотность теплового потока, T — температура;

$\bar{q}(x, y, z, t) = -D \text{grad } C(x, y, z, t)$ — закон Фика, D — коэффициент диффузии, $\bar{q}$ — плотность потока диффузии, C — концентрация;

$\bar{q}(x, y, z, t) = -K \text{grad } H(x, y, z, t)$ — закон Дарси, K — коэффициент фильтрации, $\bar{q}$ — поток объемного расхода или скорость фильтрации, H — давление.

Все они имеют одинаковую форму, и в общем виде их можно записать так:

$\bar{q}(x, y, z, t) = -A \text{grad } U(x, y, z, t)$ — обобщенный закон переноса [6], где A — коэффициент переноса, $\bar{q}$ — плотность потока, U — потенциал.

Дифференциальное уравнение переноса, получаемое из данного закона в одномерном случае, имеет параболический тип:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Если продифференцировать фундаментальное решение этого уравнения

$$U(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right) \quad (2)$$

и устремить время к нулю, то будет видно, что скорость переноса потенциала в начальный момент времени равна бесконечности. Решение этого парадокса в

том, что при рассмотрении среды на молекулярном уровне ее нельзя считать сплошной, так как между молекулами находится свободное пространство.

Приближение сплошной среды, подразумевающее у нее отсутствие внутренней структуры, означает, что в интегральных законах сохранения для этой среды можно совершать предельный переход при стремлении объема к нулю. Такой предельный переход позволяет получить уравнение сохранения энергии в дифференциальной форме. С физической точки зрения эта процедура некорректна, так как любая среда всегда состоит из отдельных элементов и имеет свою внутреннюю дискретную структуру [7].

В рамках теории теплопроводности Каттанео и Вернотте [8, 9] в 1958 г. из молекулярно-кинетических представлений, используя гипотезу о конечности продолжительности удара молекул и представления о длине свободного пробега молекул, чисто эмпирически предложили новый обобщенный закон теплопроводности, в котором появилось дополнительное слагаемое $\tau \frac{\partial q}{\partial t}$, учитывающее дискретную молекулярную структуру среды и отвечающее за инерционность тепла. В этом слагаемом τ — время релаксации, т. е. время установления термодинамического равновесия между тепловым потоком и градиентом температуры. Тогда обобщенный закон переноса запишется в следующем виде:

$$\tau \frac{\partial q}{\partial t} + q = -A \operatorname{grad} U. \quad (3)$$

Это дополнительное слагаемое, с одной стороны, позволяет оставаться на уровне макроскопических параметров среды при описании процессов переноса потенциала и не опускаться до уровня молекулярной физики, а с другой стороны, оно учитывает дискретную структуру этой среды. Введение этого слагаемого теоретически обосновал А. В. Лыков [10] в рамках неравновесной феноменологической термодинамики как следствие обобщения соотношения Онзагера для потоков. Классические теории переноса справедливы, если скорость протекания процессов много меньше скорости распространения возмущений в рассматриваемой среде, и такие процессы можно назвать *квазистационарными*.

Ряд работ по теплофизике последних лет В. А. Бубнова [11], А. Г. Шашкова [7], О. Н. Шабловского [12], Г. Н. Кувыркина [13], Г. Я. Бородянского [14], А. С. Макаренко [15], В. Ф. Формалева и И. А. Селина [6] также показали, что для существенно нестационарных процессов теплопроводности гиперболическая модель точнее передает свойства процесса теплопереноса.

Продолжая развивать математическую модель исследуемого процесса, заменим постоянный коэффициент тепловой релаксации τ на функцию от времени $k = k(t)$, а возможно, и $k = k(t, x)$, где $k = 0$ в области параболичности оператора теплопроводности смешанного типа (гиперболо-параболического) второго порядка, а также рассмотрим обратную задачу для установления $k = k(t, x)$ по известным экспериментальным данным. Принимая в качестве решения задачи структурной идентификации математической модели со смешанным оператором теплопроводности с установленным $k = k(t, x)$, в дальнейшем можно

решать различные другие задачи параметрической идентификации, т. е. уточнять другие коэффициенты уравнения.

Для одномерного по пространственным переменным гиперболического уравнения теплопроводности опубликовано достаточно много различных аналитических и численных исследований. Можно порекомендовать работы [7, 10], где имеется сравнение решений классического параболического и обобщенного гиперболического уравнений теплопроводности. Главным выводом является также то, что при малых временах и при высокоинтенсивных тепловых нагрузках гиперболическая математическая модель лучше отображает перенос тепла. В одномерном случае приведем для примера численное решение смешанного уравнения теплопроводности в среде Mathcad-15 [16].

В работах [17, 18] приведены теоретическое обоснование, алгоритм и разностные схемы численного расчета для внутренних точек дискретного разбиения области задания более общего гипербола-параболического уравнения. В настоящей работе, более тесно связанной с процессом тепломассообмена, сконцентрируемся на более подробном описании разностных схем для граничных точек области задания при введении краевых условий третьего рода на основе сохранения теплового баланса и консервативности всей схемы.

1. Постановка двумерной задачи

Рассмотрим уравнение смешанного типа в частных производных 2-го порядка

$$k(\tau) \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} + \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + q_v(x, y, \tau) \quad (4)$$

в цилиндрической области $G = \Omega \times [T_1, T_2]$, $\Omega = [0, l_x] \times [0, l_y]$; $T_1 < 0$, $T_2 > 0$, $l_x > 0$, $l_y > 0$; $\Gamma = \gamma \times [T_1, T_2]$, $\gamma = \partial\Omega$. При этом $k(\tau) = 0$, $\tau \leq 0$; $k(\tau) > 0$, $\tau > 0$; $(x, y, \tau) \in G$, т. е. при $\tau \leq 0$ уравнение (4) параболическое, а при $\tau > 0$ гиперболическое; λ — коэффициент температуропроводности ($\lambda = 70$ из экспериментальных данных), k — коэффициент тепловой релаксации [10], q_v — джоулево тепло (внутренние источники тепла), $q_v = 0$ при $\tau > 0$.

Краевая задача. Найти решение уравнения (4) в области G такое, что

$$\left[\mp \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha_{0x, lx} T \right]_{x=0, lx} = q_{0x, lx}, \quad \left[\mp \lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \alpha_{0y, ly} T \right]_{y=0, ly} = q_{0y, ly}, \quad (5)$$

$$T(x, y, \tau)|_{\tau=T_1} = T_0(x, y), \quad (6)$$

$\alpha_{0x, lx, 0y, ly}$ и $q_{0x, lx, 0y, ly}$ — коэффициенты теплоотдачи и плотности теплового потока поверхностных источников на границе области Ω соответственно, $T_0(x, y)$ — начальное распределение поля температур в момент времени $\tau = T_1$.

2. Основной результат двумерной задачи

Изобразим область переменных (x, y) прямоугольной формы и введем вначале неравномерную пространственную сетку, показанную на рис. 1:

$$\{x_n, y_m\}_{n=1, m=1}^{N, M}, \quad h_{xn} = x_{n+1} - x_n, \quad h_{ym} = y_{m+1} - y_m,$$

и равномерную сетку по времени: $\{\tau_j\}_{j=0}^J$, $\tau_j = T_1 + j\Delta\tau$. Грани элементарных объемов разместим посередине между узловыми точками.

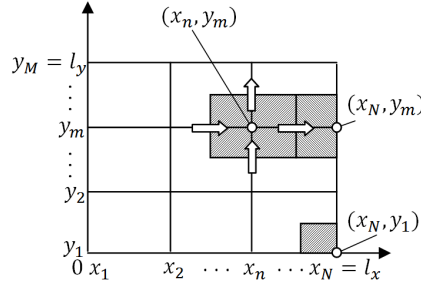


Рис. 1

Сначала составим конечно-разностное уравнение для произвольного внутреннего элементарного объема, содержащего узловую точку (x_n, y_m) . Этот объем окружен четырьмя соседними. Поэтому в уравнении теплового баланса следует учитывать четыре тепловых потока от соседних объемов. Уравнение баланса имеет вид

$$\begin{aligned} & \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \int_{y_{m-1/2}}^{y_{m+1/2}} k \left(\frac{dT^{j+1}}{d\tau} - \frac{dT^j}{d\tau} \right) dydx + \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \int_{y_{m-1/2}}^{y_{m+1/2}} (T^{j+1} - T^j) dydx \\ &= \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left[-P_{n+1/2} + P_{n-1/2} - P_{m+1/2} + P_{m-1/2} + \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \int_{y_{m-1/2}}^{y_{m+1/2}} q_v dydx \right] d\tau, \end{aligned}$$

где $x_{n\pm 1/2} = (x_n + x_{n\pm 1})/2$ и $y_{m\pm 1/2} = (y_m + y_{m\pm 1})/2$.

Для расчета тепловых потоков $P_{n\pm 1/2}$, $P_{m\pm 1/2}$ используются следующие формулы, основанные на обычном законе Фурье:

$$\begin{aligned} P_{n+1/2} &= \lambda \frac{(u_{n,m} - u_{n+1,m})}{h_n} \frac{(h_m + h_{m-1})}{2}, \\ P_{m-1/2} &= \lambda \frac{(u_{n,m-1} - u_{n,m})}{h_{m-1}} \frac{(h_n + h_{n-1})}{2}, \\ P_{n-1/2} &= \lambda \frac{(u_{n-1,m} - u_{n+1,m})}{h_{n-1}} \frac{(h_m + h_{m-1})}{2}, \\ P_{m+1/2} &= \lambda \frac{(u_{n,m} - u_{n,m+1})}{h_m} \frac{(h_n + h_{n-1})}{2}. \end{aligned}$$

Множители $(h_m + h_{m-1})/2$ и $(h_n + h_{n-1})/2$ соответствуют «площадям» граней элементарного объема, через которые проходят тепловые потоки.

Таким образом, из уравнения теплового баланса получаем следующую неявную схему:

$$k \left[\frac{(u_{n,m}^{j+1} - u_{n,m}^j)}{\Delta\tau} - \frac{(u_{n,m}^j - u_{n,m}^{j-1})}{\Delta\tau} \right] \frac{1}{\Delta\tau} \frac{(h_m + h_{m-1})(h_n + h_{n-1})}{4}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{(u_{n,m}^{j+1} - u_{n,m}^j)}{\Delta\tau} \cdot \frac{(h_m + h_{m-1})(h_n + h_{n-1})}{4} \\
 = & \lambda \left[\frac{(u_{n+1,m}^{j+1} - u_{n,m}^{j+1})}{h_n} - \frac{(u_{n,m}^{j+1} - u_{n-1,m}^{j+1})}{h_n} \right] \frac{(h_m + h_{m-1})}{2} \\
 & + \lambda \left[\frac{(u_{n,m+1}^{j+1} - u_{n,m}^{j+1})}{h_m} - \frac{(u_{n,m}^{j+1} - u_{n,m-1}^{j+1})}{h_m} \right] \frac{(h_n + h_{n-1})}{2} \\
 & + \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \int_{y_{m-1/2}}^{y_{m+1/2}} q_v dydx, \quad (7)
 \end{aligned}$$

где $u_{n,m}^j$ — сеточная функция, соответствующая температуре $T(x_n, y_m, \tau_j)$.

С помощью метода теплового баланса несложно составить разностные уравнения и для граничных элементарных объемов. При этом в уравнениях теплового баланса следует учитывать тепловые потоки на границе области в окружающей среду, выражения для которых вытекают из граничных условий (5).

Например, для объема, прилегающего к границе $x = l_x$ и содержащего узел (x_N, y_m) (см. рис. 1.), получим

$$\begin{aligned}
 k & \left[\frac{(u_{N,m}^{j+1} - u_{N,m}^j)}{\Delta\tau} - \frac{(u_{N,m}^j - u_{N,m}^{j-1})}{\Delta\tau} \right] \frac{1}{\Delta\tau} \frac{(h_m + h_{m-1})h_{N-1}}{4} \\
 & + \frac{(u_{N,m}^{j+1} - u_{N,m}^j)}{\Delta\tau} \frac{(h_m + h_{m-1})h_{N-1}}{4} \\
 = & \left[ql_x - \alpha_{lx} u_{N,m}^{j+1} + \lambda \frac{(u_{N-1,m}^{j+1} - u_{N,m}^{j+1})}{h_{N-1}} \right] \frac{(h_m + h_{m-1})}{2} \\
 & + \left[\lambda \frac{(u_{N,m+1}^{j+1} - u_{N,m}^{j+1})}{h_m} - \lambda \frac{(u_{N,m}^{j+1} - u_{N,m-1}^{j+1})}{h_m} \right] \frac{h_{N-1}}{2} + \int_{x_{N-1/2}}^{x_N} \int_{y_{m-1/2}}^{y_{m+1/2}} q_v dydx.
 \end{aligned}$$

Для элементарных объемов, лежащих в углах, надо учитывать температурные потоки в среду с двух смежных граней. Так, для объема, построенного вокруг узла (x_N, y_1) (см. рис. 1.) и имеющего величину $h_{N-1}h_1/4$, получим

$$\begin{aligned}
 k & \left[\frac{(u_{N,1}^{j+1} - u_{N,1}^j)}{\Delta\tau} - \frac{(u_{N,1}^j - u_{N,1}^{j-1})}{\Delta\tau} \right] \frac{1}{\Delta\tau} \frac{h_1 h_{N-1}}{4} + \frac{(u_{N,1}^{j+1} - u_{N,1}^j)}{\Delta\tau} \frac{h_1 h_{N-1}}{4} \\
 = & \left[ql_x - \alpha_{lx} u_{N,1}^{j+1} + \lambda \frac{(u_{N-1,1}^{j+1} - u_{N,1}^{j+1})}{h_{N-1}} \right] \frac{h_1}{2} \\
 & + \left[\lambda \frac{(u_{N,2}^{j+1} - u_{N,1}^{j+1})}{h_1} + q_{0y} - \alpha_{0y} u_{N,1}^{j+1} \right] \frac{h_{N-1}}{2} + \int_{x_{N-1/2}}^{x_N} \int_0^{h_1/2} q_v dydx.
 \end{aligned}$$

Следует отметить, что если в правой части уравнения (7) заменить индекс времени $j+1$ на j , то получим явную схему.

В ходе численного решения по явной разностной схеме [19, 20] значения $u_{n,m}^{j+1}$ вычисляются непосредственно по значениям предыдущих слоев $u_{n,m}^j$ и $u_{n,m}^{j-1}$. Поэтому общее число арифметических действий, необходимое при переходе со слоя на слой, пропорционально числу N^2 узлов сетки на одном слое. Поскольку условие устойчивости явной схемы для данного случая $\Delta\tau \approx h^2$, для расчета до момента времени T_2 число слоев будет иметь порядок N^2 . Таким образом, общее число арифметических действий будет пропорционально N^4 . Если вести расчеты по неявной (устойчивой) схеме, то можно брать шаги $\Delta\tau$ и h одного порядка, т. е. $\Delta\tau \approx h$. Но в этом случае на каждом слое необходимо решать систему N^2 линейных уравнений. Даже с учетом разреженности матрицы системы для ее решения методом Гаусса потребуется число арифметических действий, пропорциональное N^3 . Поскольку при расчете до момента T_2 надо сделать N шагов по времени, для решения всей задачи потребуется около N^4 действий. Таким образом, для двумерной пространственной задачи как явная, так и неявная схемы приводят к одинаковому объему вычислений. На каждую вычисленную точку при $\tau = T_2$ требуется около N^4 операций.

Чтобы сократить число операций, построим неявную разностную схему по локально одномерному методу, которая является более экономичной по сравнению с упомянутыми ранее схемами.

Для начала введем в рассмотрение вспомогательный [21] (полуцелый) слой $\tau_{j+1/2} = \tau_j + \frac{\Delta\tau}{2}$. Для простоты далее будет использоваться равномерная сетка: $x_n = (n-1)h_x$, $y_m = (m-1)h_y$. Тогда разностная схема (7) при равномерной сетке на полуцелом слое $j + 1/2$ примет вид

$$k \frac{(u_{n,m}^{j+1/2} - 2u_{n,m}^j + u_{n,m}^{j-1/2})}{\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)^2} + \frac{u_{n,m}^{j+1/2} - u_{n,m}^j}{\frac{\Delta\tau}{2}} = \Lambda_1 u_{n,m}^{j+1/2} + \Lambda_2 u_{n,m}^j + \frac{q_v}{2}, \quad (8)$$

где

$$\Lambda_1 u_{n,m} = \frac{1}{h_x^2} (u_{n+1,m} - 2u_{n,m} + u_{n-1,m}), \quad \Lambda_2 u_{n,m} = \frac{1}{h_y^2} (u_{n,m+1} - 2u_{n,m} + u_{n,m-1}).$$

Значения на слое $j + 1$ будут вычисляться аналогичным образом по значениям, полученным на $j + 1/2$ полуцелом слое:

$$k \frac{(u_{n,m}^{j+1} - 2u_{n,m}^{j+1/2} + u_{n,m}^j)}{\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)^2} + \frac{u_{n,m}^{j+1} - u_{n,m}^{j+1/2}}{\frac{\Delta\tau}{2}} = \Lambda_1 u_{n,m}^{j+1/2} + \Lambda_2 u_{n,m}^{j+1} + \frac{q_v}{2}. \quad (9)$$

Вычисление решения разностной схемы (8), (9) осуществляется в два этапа. На первом вычисление значений $u_{n,m}$ на полуцелом слое $\tau_{j+1/2}$ ведется прогонкой в направлении оси $0x$. Второй этап — прогонка на слое τ_j по оси $0y$. Поэтому схему называют *локально одномерной* или *схемой переменных направлений*.

Всего на одном слое осуществляется $2N$ прогонок. Следовательно, число арифметических операций на одном слое пропорционально N^2 . В используемой неявной схеме можем положить $\Delta\tau = h$ и тогда для расчета до момента T_2 по времени надо сделать N шагов. Таким образом, трудоемкость решения всей

задачи оценивается числом, имеющим порядок N^3 , что более чем на порядок лучше по сравнению с вышеописанными схемами.

Из-за наличия граничных условий (7) область сеточной функции $u_{n,m}^j$ разбивается на 9 перечисленных ниже участков. Это связано с тем, что в локально одномерном методе при вычислении сеточной функции $u_{n,m}^{j+1/2}$ на первом полушаге в прогонке вдоль оси $0x$ участвуют помимо $u_{n,m}^j$ соседние по y значения $u_{n,m-1}^j, u_{n,m+1}^j$. На втором полушаге производится прогонка вдоль оси $0y$. При этом область сеточной функции будет точно так же разбиваться на 9 таких же участков.

Локально одномерная схема на пространственной сетке, равномерной по каждой из координат x, y , имеет вид

$$\begin{aligned} u_{n+1,m}^{j+1/2} - \left(\frac{h_x^2}{\lambda} \left(\frac{k}{\Delta\tau^2} + \frac{1}{\Delta\tau} \right) + 2 \right) u_{n,m}^{j+1/2} + u_{n-1,m}^{j+1/2} \\ + \frac{h_x^2}{h_y^2} u_{n,m+1}^j + \left(\frac{h_x^2}{\lambda} \left(2 \frac{k}{\Delta\tau^2} + \frac{1}{\Delta\tau} \right) - 2 \frac{h_x^2}{h_y^2} \right) u_{n,m}^j \\ + \frac{h_x^2}{h_y^2} u_{n,m-1}^j + \frac{h_x^2}{\lambda} \left(\frac{q_v}{2} - \frac{k}{\Delta\tau^2} u_{n,m}^{j-1/2} \right) = 0 \end{aligned}$$

для внутренней точки ($n = 2, \dots, N-1, m = 2, \dots, M-1$);

$$\begin{aligned} - \left(1 + \alpha_{lx} \frac{h_x}{\lambda} + \frac{1}{2} \frac{h_x^2}{\lambda} \left(\frac{k}{\Delta\tau^2} + \frac{1}{\Delta\tau} \right) \right) u_{N,m}^{j+1/2} + u_{N-1,m}^{j+1/2} \\ + \frac{1}{2} \frac{h_x^2}{h_y^2} u_{N,m+1}^j + \left(\frac{h_x^2}{\lambda} \left(\frac{k}{\Delta\tau^2} + \frac{1}{2\Delta\tau} \right) - \frac{h_x^2}{h_y^2} \right) u_{N,m}^j \\ + \frac{1}{2} \frac{h_x^2}{h_y^2} u_{N,m-1}^j + \frac{1}{2} \frac{h_x^2}{\lambda} \left(\frac{q_v}{2} - \frac{k}{\Delta\tau^2} u_{N,m}^{j-1/2} \right) = 0 \end{aligned}$$

для точки на стороне прямоугольника (например, $n = N, m = 2, \dots, M-1$);

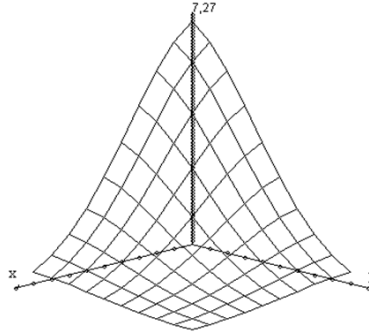
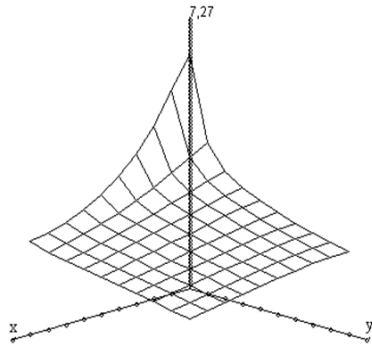
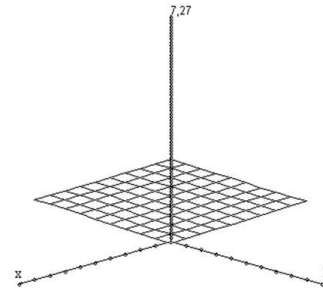
$$\begin{aligned} - \left(1 + \alpha_{lx} \frac{h_x}{\lambda} + \frac{1}{2} \frac{h_x^2}{\lambda} \left(\frac{k}{\Delta\tau^2} + \frac{1}{\Delta\tau} \right) \right) u_{N,1}^{j+1/2} + u_{N-1,1}^{j+1/2} + \frac{h_x^2}{h_y^2} u_{N,2}^j \\ + \left(\frac{h_x^2}{\lambda} \left(\frac{k}{\Delta\tau^2} + \frac{1}{2\Delta\tau} \right) - \frac{h_x^2}{h_y^2} - \alpha_{0y} \frac{h_x}{\lambda} \frac{1}{h_y} \right) u_{N,1}^j \\ + \frac{1}{2} \frac{h_x^2}{\lambda} \left(\frac{q_v}{2} - \frac{k}{\Delta\tau^2} u_{N,1}^{j-1/2} \right) + q_{lx} \frac{h_x}{\lambda} + q_{0y} \frac{h_x^2}{\lambda} \frac{1}{h_y} = 0 \end{aligned}$$

для угловой точки (например, $n = N, m = 1$).

В качестве примера приводим расчеты температурных полей на рис. 2–4, где показан процесс остывания электрической дуги в одной из математических моделей [22].

3. Постановка трехмерной задачи

Перейдем теперь к рассмотрению осесимметрической трехмерной математической модели с добавлением аксиальной координаты z , т. е. с учетом газодинамики дугового разряда, и приведем постановку смешанной краевой задачи,

Рис. 2. Распределение температуры в начальный момент времени $\tau = T_1$ Рис. 3. Распределение температуры
в момент времени $\tau = 0$ Рис. 4. Распределение температуры
в момент времени $\tau = T_2$

являющейся модификацией задачи Рагаллера [23], где параболическое уравнение энергии заменено на два уравнения (10):

Найти поля температуры и скорости системы

$$\begin{aligned}
 k \frac{\partial q}{\partial t} + q &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho v_r) = 0, \\
 \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + \rho v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \rho v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\eta r \frac{\partial v_z}{\partial r}), \\
 \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} \right) &= v_z \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r q),
 \end{aligned} \tag{10}$$

удовлетворяющие начально-краевым условиям

$$\begin{aligned}
 T|_{t=0} &= \varphi_1(r); \quad T|_{r=1} = 0, 3; \quad \frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=0} = 0; \\
 \frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z=0} &= 0; \quad q|_{t=0} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{t=0} = \varphi'_1(r); \\
 q|_{r=0} &= 0; \quad v_z|_{t=0} = v_z|_{r=1} = \left(\frac{2p_0}{\rho} \ln\left(\frac{p}{p_0}\right)\right)^{0,5}; \\
 v_z|_{z=0} &= 0; \quad v_r|_{t=0} = 0; \quad v_r|_{r=0} = 0.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Система уравнений газодинамики, применяемая в работах Рагаллера [23], является частным случаем системы (10) при $k = 0$. Здесь пренебрегается аксиальными теплопроводностью и вязкостью. Импульс предполагается не зависящим от радиальной координаты. Эффекты турбулентного переноса включаются в коэффициенты радиальных теплопроводности и вязкости. Влияние геометрии разрядной трубки отражено в системе уравнений (10) посредством члена с продольным импульсом $p(z)$, для которого хорошей аппроксимацией в момент времени, близкий к моменту прерывания тока, является продольное распределение давления газа.

Для решения поставленных краевых задач для этих систем был составлен и отлажен комплекс программ на языке программирования Фортран для РС с помощью метода изотерм [4]. В трехмерном пространстве были введены радиальная и аксиальная дискретизации и дифференциальная форма уравнений системы была преобразована к изотермам.

Дискретизация основана на следующих фундаментальных свойствах этой гиперболической системы дифференциальных уравнений в частных производных: соседние зоны, расположенные ниже по течению потока, могут быть рассчитаны зона за зоной, начиная с точки стагнации, где система ведет себя как дуга цилиндрической формы и эволюционирует независимо от областей, находящихся ниже по течению. Для каждого интервала времени рассчитываем все зоны в осевом направлении, чтобы также включить в модель токонесящие фазы (сильноточную дугу и бестоковый режим). Этот расчет необходим для вычисления в каждый данный момент полного сопротивления дуги. Средние значения по зоне определяются как среднеарифметические значения по двум соседним изотермам, служащим границами зоны.

Распределение аксиального давления определяется геометрией нагретого газа и изначально заданной разницей в давлении, которая затем меняется в расчете. В данной работе изучается только случай свободно остывающего шнура электрического разряда, т. е. $Q(T) = 0$, а в этом режиме можно пренебречь излучательным переносом энергии. Кроме начального профиля температуры необходимо задать начальное поле скоростей, для которого хорошую аппроксимацию можно получить в адиабатическом приближении (11). Сетка изотерм выбиралась следующим образом: самая дальняя от центра изотерма равна тем-

пературе холодного газа, т. е. 300°K , начальное приращение — 300°K , начальное число изотерм равно 25. После уменьшения числа изотерм в два раза между старыми изотермами проводятся новые [4, 5].

Заключение

1. По приведенным разностным схемам проводится численный расчет на языках Фортран и С++ с гладкими коэффициентами k и q_v с выводом полей температур в различные моменты времени, вид которых говорит об устойчивости примененных разностных схем.

2. В работах [19, 20] численный расчет предлагалось проводить по обычным явной и неявной схемам, которые почти на порядок менее экономичны, чем предложенная здесь локально одномерная схема. Кроме того, в них используются краевые условия первого рода.

3. Система дифференциальных уравнений в частных производных (10), (11) является одним из этапов обобщения классических уравнений Навье — Стокса на пути к более общим уравнениям Бернетта, вытекающим из молекулярно-кинетической теории газов [24].

ЛИТЕРАТУРА

1. Полтев А. И. Конструкции и расчет элегазовых аппаратов высокого напряжения // Л.: Энергия, 1979.
2. Буянтуев С. Л., Беспрозванных М. Н., Баторов С. С., Бородинский Г. Я. Способ гашения сильнотоковой дуги высоковольтного выключателя // Автор. свидетельство СССР №1634042. Гос. рег. 08.10.1990.
3. Буянтуев С. Л., Ханхасаев В. Н. Численное исследование нестационарных процессов в нуле тока // Сб. докладов Всесоюзного семинара проблемного совета ФНЦ АН СССР «Нестационарные дуговые и приэлектродные процессы в электрических аппаратах и плазматронах». Алма-Ата: ИММ АН КазССР, 1991. С. 29–36.
4. Буянтуев С. Л., Ханхасаев В. Н. Об одном обобщении уравнений Навье — Стокса в математических моделях электрической дуги в спутном потоке газа в момент прерывания тока // Электричество. 1996. № 11. С. 17–23.
5. Ханхасаев В. Н., Буянтуев С. Л. Численный расчет одной математической модели электрической дуги в потоке газа // Сб. тр. междунар. науч.-практ. конф. «Энергосберегающие и природоохранные технологии на Байкале», Улан-Удэ: ВСГТУ; БГУ, 2001. С. 168–172.
6. Формалев В. Ф., Селин И. А., Кузнецова Е. Л. Возникновение и распространение тепловых волн в нелинейном анизотропном пространстве // Изв. РАН. Сер. Энергетика. 2010. № 3. С. 136–141.
7. Пашков А. Г., Бубнов В. А., Яновский С. Ю. Волновые явления теплопроводности // М.: УРСС, 2004.
8. Cattaneo G. Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantanée // Compt. Rendus. 1958. V. 247, № 4. P. 431–433.
9. Vernotte P. Les paradoxes de la théorie continue de l'équation de la chaleur // Compt. Rendus. 1958. V. 246, № 22. P. 3154–3155.
10. Лыков А. В. Теплообмен. М.: Энергия, 1972.
11. Бубнов В. А. Молекулярно-кинетическое обоснование уравнения переноса тепла // Инж.-физ. журн. 1975. Т. 28, № 4. С. 670–676.
12. Шабловский О. Н. Распространение плоской ударной тепловой волны в нелинейной среде // Инж.-физ. журн. 1985. Т. 49, № 3. С. 436–443.

13. Кувыркин Г. Н. Термодинамический вывод гиперболического уравнения теплопроводности // Теплофизика высоких температур. 1987. Т. 25, № 1. С. 78–82.
14. Бородинский Г. Я. Релаксационная модель динамики электрической дуги // Тез. докладов 7 Всесоюзной сессии науч. совета по проблемам «Физика низкотемпературной плазмы». Улан-Удэ, 1988. С. 19.
15. Даниленко В. А., Кудинов В. М., Макаренко А. С. Влияние эффектов памяти на образование диссипативных структур при быстропротекающих процессах. Препринт № 83-1 / АН УССР, Ин-т электросварки. Киев, 1983. 58 с.
16. Ханхасаев В. Н., Миждон Г. А. Алгоритм численного расчета смешанного уравнения теплопроводности в одномерном случае // Матер. 6 Междунар. конф. «Математика, ее приложения и математическое образование». Улан-Удэ, 2017. С. 357–359.
17. Ханхасаев В. Н., Местникова Н. Н. Схема переменных направлений для численного решения гипербола-параболического уравнения // Сб. тр. междунар. конф. «Кубатурные формулы, методы Монте-Карло и их приложения». Ин-т космич. и информ.технол. Красноярск: СФУ, 2011. С. 117–120.
18. Ханхасаев В. Н., Местникова Н. Н., Ханхасаева Я. В. Численное решение гипербола-параболического уравнения по схеме переменных направлений // Сб. тр. междунар. науч.-практ. конф. «Инновационные технологии в науке и образовании». Улан-Удэ: БГУ, 2011. С. 79–82.
19. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
20. Романова Н. А. О сходимости разностных схем одной краевой задачи для уравнений смешанного типа. Дис. ... канд. физ-мат. наук / Якутск: Якутский гос. университет, 1994.
21. Дульнев Г. Н. Применение ЭВМ для решения задач теплообмена // М.: Высшая школа, 1990.
22. Ханхасаев В. Н., Дармаханов Э. В. Схема переменных направлений численного решения смешанного уравнения теплопроводности // Матер. семинара с междунар. участием «Актуальные вопросы вещественного и функционального анализа». Улан-Удэ, 2015. С. 122–127.
23. Ragaller K., Egli W., Brand K. Dielectric recovery of an axially blown SF₆-arc after current zero // IEEE. Transactions on Plasma Sci. 1982. V. PS-10, № 3. P. 154–161.
24. Фердигер Дж., Капер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976.

Статья поступила 1 февраля 2018 г.

Ханхасаев Владислав Николаевич, Дармаханов Эрдэни Владимирович
Восточно-Сибирский гос. технологический университет,
кафедра высшей математики
ул. Ключевская, 40А, стр. 1, Улан-Удэ 670013
hanhvladnick@mail.ru, erdenid.90@mail.ru

ON SOME APPLICATIONS
OF THE HYPERBOLIC HEAT EQUATION
AND THE METHODS FOR SOLVING IT
V. N. Khankhasaev and E. V. Darmakheev

Abstract: Creation of new technological processes based on the use of high-intensity energy fluxes makes it necessary to take into account the final rate of heat propagation when determining the temperature state. This account can be realized with the help of the hyperbolic heat equation obtained by A. V. Lykov in the framework of nonequilibrium phenomenological thermodynamics as a consequence of the generalization of the Fourier law for flows and the heat balance equation. In the previous works by V. N. Khankhasaev, the process of switching off the electric arc in a spiral gas flow was simulated using this equation. In this paper, a mathematical model of this process is developed with the addition of a period of steady burning of the arc until the moment of disconnection and replacement of the strictly hyperbolic heat conduction equation by a hyperbolic-parabolic equation. For the resulting mixed heat conduction equation, a number of boundary value problems in the Fortran and Matcad software environments are correctly posed and numerically solved, obtaining temperature fields that are in good agreement with the available experimental data.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.1.12772

Keywords: hyperbolic-parabolic equations, hyperbolic heat equation, alternating direction scheme, Navier–Stokes equations, heat balance.

REFERENCES

1. Poltev A. I., Construction and Calculation of High-Voltage SF6 Apparatuses [in Russian], Energia, Leningrad (1979).
2. Buyantuev S. L., Besprozvannykh M. N., Batorov S. S., and Borodyansky G. Ya., "Method of quenching a high-current arc of a high-voltage switch," USSR Authors' Cert. No. 1634042, Gos. Reg. 08.10.1990.
3. Buyantuev S. L. and Khankhasaev V. N., "Numerical investigation of nonstationary processes at the current zero [in Russian]," in: Sb. Dokl. Vsesoyuz. Semin. "Nonstationary Arc and Near-Electrode Processes in Electrical Apparatuses and Plasma Torches", pp. 29–36, Inst. Mat. Mekh. Akad. Nauk Kazakh. SSR, Alma-Ata (1991).
4. Buyantuev S. L. and Khankhasaev V. N., "On a generalization of the Navier–Stokes equations in mathematical models of an electric arc in a spiral gas flow at the moment of current interruption [in Russian]," *Elektrichestvo*, No. 11, 17–23 (1996).
5. Khankhasaev V. N. and Buyantuev S. L., "Numerical calculation of a mathematical model of an electric arc in a gas flow [in Russian]," in: Sb. Trudov Mezhdunar. Nauchn.-Prakt. Konf. "Energy Saving and Environmental Technologies at Baikal", pp. 168–172, Ulan-Ude (2001).
6. Formalev V. F., Selin I. A., and Kuznetsova E. L., "The occurrence and propagation of thermal waves in a nonlinear anisotropic space [in Russian]," *Izv. Ross. Akad. Nauk., Ser. Energetika*, No. 3, 136–141 (2010).
7. Shashkov A. G., Bubnov V. A., and Yanovsky S. Yu., Wave Phenomena of Thermal Conductivity [in Russian], URSS, Moscow (2004).

8. Cattaneo G., "Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantanée," C. R. Acad. Sci., Paris, **247**, No. 4, 431–433 (1958).
9. Vernotte P., "Les paradoxes de la théorie continue de l'équation de la chaleur," C. R. Acad. Sci., Paris, **246**, No. 22, 3154–3155 (1958).
10. Lykov A. V., Heat and Mass Transfer [in Russian], Energia, Moscow (1972).
11. Bubnov V. A., "Molecular-kinetic substantiation of the heat transfer equation [in Russian]," Inzh.-Fiz. Zh., **28**, No. 4, 670–676 (1975).
12. Shablovsky O. N., "Propagation of a plane shock heat wave in a nonlinear medium [in Russian]," Inzh.-Fiz. Zh., **49**, No. 3, 436–443 (1985).
13. Kuvyrkin G. N., "Thermodynamic derivation of the hyperbolic heat equation [in Russian]," Termofiz. Vysokih Temperatur **25**, No. 1, 78–82 (1987).
14. Borodyansky G. Ya., "Relaxation model of electric arc dynamics [in Russian]," in: Tez. Dokl. 7th Vsesoyuz. Sessii Nauchn. Soveta "Low-Temperature Plasma Physics", pp. 19, Ulan-Ude (1988).
15. Danilenko V. A., Kudinov V. M., and Makarenko A. S., "Influence of memory effects on the formation of dissipative structures during fast processes [in Russian]," Preprint Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst. Elektrosvarki, No. 83-1, Kiev (1983), 58 p.
16. Khankhasaev V. N. and Mizhidon G. A., "Algorithm for numerical calculation of the mixed heat equation in the one-dimensional case," in: Proc. 6th Int. Conf. "Mathematics, its Applications and Mathematical Education", pp. 357–359, Ulan-Ude (2017).
17. Khankhasaev V. N. and Mestnikova N. N., "A scheme of alternating directions for the numerical solution of a hyperbolic-parabolic equation [in Russian]," in: Sb. Trudov Mezhdunar. Konf. "Cubature Formulas, Monte Carlo Methods and Their Applications", pp. 117–120, Inst. Kosmich. Informats. Tekhnol. Sib. Feder. Univ., Krasnoyarsk (2011).
18. Khankhasaev V. N., Mestnikova N. N., and Khankhasaeva Ya. V., "Numerical solution of a hyperbolic-parabolic equation by a scheme of alternating directions [in Russian]," in: Sb. Trudov Mezhdunar. Nauchn.-Prakt. Konf. "Innovative Technologies in Science and Education", pp. 79–82, Buryatsk. Gos. Univ., Ulan-Ude (2011).
19. Ladyzhenskaya O. A., Boundary-Value Problems of Mathematical Physics [in Russian], Nauka, Moscow (1973).
20. Romanova N. A., On the convergence of difference schemes of a boundary-value problem for equations of mixed type. Diss. kand. fiz.-mat. nauk (01.01.02), Yakutsk. Gos. Univ., Yakutsk, 1994, 109 p.
21. Dulnev G. N., The Use of Computers for Solving Heat Transfer Problems [in Russian], Vyssh. Shkola, Moscow (1990).
22. Khankhasaev V. N. and Darmakheev E. V., "A scheme of alternating directions for the numerical solution of the mixed heat equation [in Russian]," in: Mat. Semin. "Aktual'nye Voprosy Veshchestvennogo i Funktsional'nogo Analiza", pp. 122–127, Ulan-Ude (2015).
23. Ragaller K., Egli W., and Brand K., "Dielectric recovery of an axially blown SF₆-arc after current zero," IEEE Trans. Plasma Sci., **PS-10**, No. 3, 154–161 (1982).
24. Ferziger J. and Kaper G., Mathematical Theory of Transport Processes in Gases [in Russian], Mir, Moscow (1976).

Submitted February 1, 2018

Khankhasaev Vladislav Nikolaevich, Darmakheev Erdeni Vladimirovich
 East-Siberian State University of Technology and Management,
 40B, Building 1 Klyuchevskaya Street, Ulan-Ude, 670013 Russia
 hanhvladnick@mail.ru, erdeni.90@mail.ru

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. К публикации в журнале «Математические заметки СВФУ» принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики, механики и информатики. Статьи, опубликованные ранее, а также направленные в другие издания, редакцией не рассматриваются. Редакционный совет вправе воздержаться от принятия статьи к рассмотрению, если она не соответствует профилю журнала.

2. Направляя статью в редакцию журнала, автор (соавторы) на безвозмездной основе передает(ют) издателю на срок действия авторского права по действующему законодательству РФ исключительное право на использование статьи или отдельной ее части (в случае принятия статьи к опубликованию) на территории всех государств, где авторские права в силу международных договоров Российской Федерации являются охраняемыми, в том числе следующие права: на воспроизведение, на распространение, на публичный показ, на доведение до всеобщего сведения, на перевод на иностранные языки (и исключительное право на использование переведенного произведения вышеуказанными способами), на предоставление всех вышеперечисленных прав другим лицам. Одновременно со статьей автор (соавторы) направляет в редакцию подписанный лицензионный договор на право использования научного произведения в журнале. Образец договора высылается авторам по электронной почте вместе с сообщением о принятии статьи к печати.

3. Для рассмотрения статьи на предмет ее публикации в журнале в редакцию представляются текст статьи объемом не более 1,5 авторских листов (18 страниц журнального текста), написанной на русском или, по согласованию с редакцией, на английском языке, а также сопроводительное письмо, в котором сообщается, что статья направляется именно в журнал «Математические заметки СВФУ», и информация об авторе (коллективе авторов) с указанием фамилии, имени и отчества, полного почтового адреса для переписки, места работы, подробного служебного адреса, адреса электронной почты и номера телефона. Статьи объемом более 1,5 авторских листов, как правило, не рассматриваются и могут быть приняты к рассмотрению и опубликованы лишь по специальному решению редакционного совета.

4. Статья должна быть подготовлена с использованием текстового редактора LaTeX и представлена в виде файлов форматов pdf и tex.

5. В начале статьи указывается индекс УДК и/или MSC. Статья сопровождается аннотацией объемом не менее 100 слов, желательно без формул, и списком ключевых слов. Аннотация и список должны быть представлены на русском и английском языках.

6. Список литературы печатается в конце текста. Ссылки на литературу в тексте нумеруются в порядке их появления и даются в квадратных скобках. Ссылки на неопубликованные работы нежелательны. Оформление литературы

должно соответствовать требованиям стандартов (примеры библиографических описаний см. в последних номерах журнала).

7. Издание осуществляет рецензирование всех поступающих в редакцию материалов, соответствующих ее тематике, с целью их экспертной оценки. Все рецензенты являются признанными специалистами по тематике рецензируемых материалов и имеют в течение последних 3 лет публикации по тематике рецензируемой статьи. Рецензии хранятся в редакции издания в течение 5 лет.

8. Принятая к рассмотрению статья направляется на анонимное рецензирование. На основании рецензии редсовет принимает решение о возможности публикации статьи, которое сообщается автору. Автор вправе сообщить свои замечания и возражения к рецензии. Повторное решение редсовета по статье является окончательным.

9. Редакция издания направляет авторам представленных материалов копии рецензий или мотивированный отказ, а также обязуется направлять копии рецензий в Министерство науки и высшего образования Российской Федерации при поступлении в редакцию издания соответствующего запроса.

10. После редакционной подготовки непосредственно перед публикацией автору высылаются корректура. По возможности в наиболее короткие сроки необходимо ее прочесть, внести исправления (правка против авторского оригинала нежелательна) и направить в редакцию. Статья выходит в свет только после получения от автора (коллектива авторов) авторской корректуры, подписанной автором (всеми соавторами) в печать.

11. В соответствии с международными законами об авторском праве Редакция уведомляет авторов журнала об их ответственности за получение ими в случае необходимости письменного разрешения на использование охраняемых авторским правом материалов, таких, как цитаты, воспроизведение данных, иллюстраций и любых иных материалов, которые могут быть использованы в их публикациях, а также о том, что вытекающая отсюда ответственность за нарушение таких авторских прав лежит на авторах. Плата за опубликование с авторов или учреждений, где работают авторы, не взимается, и опубликованные статьи не оплачиваются.

12. Права авторов на использование материалов статей и переводов статей из журнала «Математические заметки СВФУ» в иных публикациях определяются общими международными и российскими законами об авторских правах.