



СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. К. АММОСОВА

ISSN 2411-9326

Математические заметки СВФУ

Том 29
№ 2. 2023

Редакционный совет

Главный редактор: Егоров И. Е., д.ф.-м.н., профессор, СВФУ

Зам. главного редактора: Кожанов А. И., д.ф.-м.н., профессор, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Зам. главного редактора: Попов С. В., д.ф.-м.н., профессор, СВФУ

Ответственный секретарь: Евсеев З. И., СВФУ

Члены редакционного совета:

Бородин О. В., д.ф.-м.н., профессор, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Вабищевич П. Н., д.ф.-м.н., профессор, Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН

Васильев В. И., д.ф.-м.н., профессор, СВФУ

Григорьев Ю. М., д.ф.-м.н., доцент, СВФУ

Зикиров О. С., д.ф.-м.н., профессор, Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Узбекистан

Морозов А. С., д.ф.-м.н., профессор, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Пятков С. Г., д.ф.-м.н., профессор, Югорский государственный университет

Хлуднев А. М., д.ф.-м.н., профессор, Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

Itou H., Ph.D., Professor, Tokyo University of Science, Japan

Ruzhansky M., Professor, Ghent University, Belgium

Tani A., Professor, Keio University, Japan

Xin-Lin Gao, Professor, Southern Methodist University, USA

СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М. К. АММОСОВА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ СВФУ

ОСНОВАН В 1994 ГОДУ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ВЫХОДИТ 4 РАЗА В ГОД

Том 30, № 2 (118)

Апрель—июнь, 2023

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Аюпова Н. Б., Голубятников В. П. Фазовые портреты двух нелинейных моделей кольцевых генных сетей	3
N. B. Ayupova, V. P. Golubaytnikov Phase portraits of two nonlinear models of circular gene networks	12
Григорьев Ю. М., Гаврильева А. А. Аналитическое решение задачи о гармонических колебаниях тела прямоугольной формы в микрополярной теории упругости	14
Yu. M. Grigor'ev, A. A. Gavrilieva A problem of harmonic oscillations of a rectangle in the theory of micropolar elasticity: the analytical solution	27
Егоров И. Е., Федотов Е. Д. Краевая задача на полуоси для обыкновенного дифференциального уравнения с дробной производной Капуто	30
I. E. Egorov, E. D. Fedotov A boundary value problem on the semi-axis for an ordinary differential equation with a fractional Caputo derivative	38
Попова Т. С. Задача о T-образном сопряжении двух тонких включений Тимошенко в двумерном упругом теле	40
T. S. Popova The problem of T-shaped junction of two thin Timoshenko inclusions in a two-dimensional elastic body	53
Пятков С. Г., Соколов О. И. О некоторых классах коэффициентных обратных задач об определении теплофизических параметров в слоистых средах	56

S. G. Pyatkov, O. I. Sokolov <i>On some classes of coefficient inverse problems of recovering thermophysical parameters in stratified media</i>	72
Хоитметов У. А., Собиров Ш. К. <i>Интегрирование нагруженного уравнения МКДФ с источником в классе быстроубывающих функций</i>	75
U. A. Hoitmetov, Sh. Q. Sobirov <i>Integration of the loaded MKDV equation with a source in the class of rapidly decreasing functions</i>	90
N. Vani, D. Vamshee Krishna, B. Rath <i>Sharp bounds associated with the Zalcman conjecture for the initial coefficients and second Hankel determinants for certain subclass of analytic functions</i>	92
Математическое моделирование	
Григорьев В. В. <i>Идентификация скоростей гомогенно-гетерогенной реакции в масштабе пор в пористых средах</i>	101
V. V. Grigoriev <i>Identification of homogeneous-heterogeneous pore-scale reaction rates in porous media</i>	120
Математическая жизнь	
Межгородской научно-исследовательский семинар <i>«Неклассические задачи математической физики»</i>	123

АДРЕС ИЗДАТЕЛЯ:

СВФУ, ул. Белинского, 58, Якутск, 677000

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

СВФУ, ул. Кулаковского, 48, каб. 543, Якутск, 677000

Телефон: 8(4112)32-14-99, Факс: 8(4112)36-43-47;

<http://mzsvfu.ru>

e-mail: zakevseev@gmail.com; yktmatzam@gmail.com;

ivanegorov51@mail.ru

ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ ДВУХ НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ КОЛЬЦЕВЫХ ГЕННЫХ СЕТЕЙ

Н. Б. Аюпова, В. П. Голубятников

Аннотация. Для двух динамических систем кинетического типа, четырехмерной и пятимерной, моделирующих кольцевые генные сети с нелинейной деградацией компонент, получены условия существования периодических траекторий и построены инвариантные области, содержащие все такие траектории. Внутренность каждой из этих областей гомеоморфна тору и содержит на своей границе единственную стационарную точку соответствующей динамической системы.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.54.12.001

Ключевые слова: модели кольцевых генных сетей, фазовые портреты нелинейных динамических систем, стационарные точки, инвариантные области, периодические траектории.

Введение

В соответствии с общими принципами построения моделей генных сетей мы рассматриваем нелинейные динамические системы относительно вектор-функции $X = X(t)$ с неотрицательными координатами $x_j(t)$, которые описывают концентрации взаимодействующих между собой компонент генной сети посредством положительных и отрицательных регуляторных связей (см. [1–4]). Уравнения в таких системах имеют кинетический тип, в них положительные связи описываются монотонно возрастающими гладкими функциями, а отрицательные — монотонно убывающими гладкими функциями. Основная наша задача состоит в нахождении условий существования периодических режимов функционирования моделируемых генных сетей.

1. Математические модели

Рассматривается четырехмерная динамическая система, моделирующая функционирование кольцевой генной сети:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= G_1(x_4) - \Gamma_1(x_1), & \frac{dx_2}{dt} &= \gamma_2(x_1) - \Gamma_2(x_2), \\ \frac{dx_3}{dt} &= \gamma_3(x_2) - \Gamma_3(x_3), & \frac{dx_4}{dt} &= \gamma_4(x_3) - \Gamma_4(x_4). \end{aligned} \quad (1)$$

Работа выполнена в рамках Государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0009.

Во всех уравнениях положительные слагаемые описывают скорости синтеза веществ, участвующих в реакциях, а вычитаемые — скорости их разложения; неотрицательные переменные x_j обозначают концентрации этих веществ. Скорости их разложения описываются монотонно возрастающими гладкими ограниченными функциями Γ_j такими, что $\Gamma_j(0) = 0$. Здесь и далее $j = 1, 2, 3, 4$. Такая модель генной сети с линейными функциями Γ_j рассматривалась в [1].

Скорость синтеза компоненты с концентрацией $x_1(t)$ описывается монотонно убывающей положительной гладкой функцией $G_1(x_4)$. Это означает, что регуляторная связь между компонентами с концентрациями x_4 и x_1 отрицательна. Скорости синтеза остальных компонент моделируемой генной сети описываются монотонно возрастающими гладкими функциями γ_s , здесь и далее $s = 2, 3, 4$; соответствующие им регуляторные связи положительны (см. [1, 2, 5]).

Аналогичная пятимерная модель кольцевой генной сети — молекулярного репрессилатора

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= L_1(y_5) - \Gamma_1(y_1), & \frac{dy_2}{dt} &= L_2(y_1) - \Gamma_2(y_2), & \frac{dy_3}{dt} &= L_3(y_2) - \Gamma_3(y_3), \\ \frac{dy_4}{dt} &= L_4(y_3) - \Gamma_4(y_4), & \frac{dy_5}{dt} &= L_5(y_4) - \Gamma_5(y_5) \end{aligned} \quad (2)$$

рассматривалась в [6–9]. Здесь также неотрицательные переменные y_i обозначают концентрации веществ, участвующих в реакциях. Монотонно убывающие гладкие функции L_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$ описывают отрицательные регуляторные связи, а монотонно возрастающие гладкие функции Γ_i , как и в случае системы (1), описывают деградацию компонент генной сети. Для обеих систем (1) и (2) предполагается, что все функции Γ_i , γ_j ограничены сверху, как и в [5], где были описаны подобные динамические системы, у которых $\Gamma_j(x_j) = \frac{\alpha_j x_j}{\beta_j + x_j}$.

Стационарные точки систем (1) и (2) находятся из уравнений

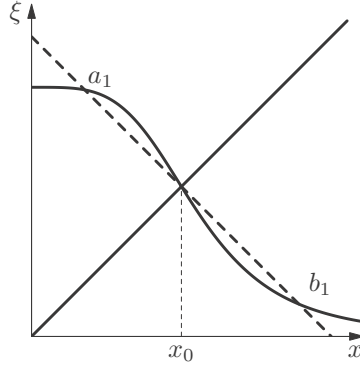
$$x_4^0 = \mathcal{L}_4(x_4^0) := \Gamma_4^{-1}(\gamma_4(\Gamma_3^{-1}(\gamma_3(\Gamma_2^{-1}(\gamma_2(\Gamma_1^{-1}(G_1(x_4^0)))))))) \quad (3)$$

и соответственно

$$y_5^0 = \mathcal{L}_5(y_5^0) := \Gamma_5^{-1}(L_5(\Gamma_4^{-1}(L_4(\Gamma_3^{-1}(L_3(\Gamma_2^{-1}(L_2(\Gamma_1^{-1}(L_1(y_5^0)))))))))) \quad (4)$$

Для того чтобы правые части равенств (3), (4) были определены при всех неотрицательных значениях своих аргументов необходимы дополнительные предположения: для системы (1) $\sup \Gamma_s > \sup \gamma_s$ при всех $s = 2, 3, 4$ и $\sup \Gamma_1 > G_1(0)$, для системы (2) $\sup \Gamma_i > L_i(0)$.

Поскольку правая часть $\mathcal{L}_4(x)$ уравнения (3) является композицией одной монотонно убывающей и семи монотонно возрастающих функций, она сама монотонно убывает, и ее график имеет в точности одну точку пересечения с прямой $\xi = x$. Правая часть \mathcal{L}_5 уравнения (4) также монотонно убывает по y , тем самым и это уравнение имеет единственное решение (рис. 1, где пунктиром обозначен график линейной функции $\xi = \varphi(x) := 2x_4^0 - x$ при $0 \leq x \leq 2x_4^0$). Для $x > 2x_4^0$ полагаем $\varphi(x) = 0$. Поскольку $\varphi(\varphi(x)) = x$ при $0 \leq x \leq 2x_4^0$, точки пересечения $(a_1, \varphi(a_1))$ и $(b_1, \varphi(b_1))$ прямой $\xi = 2x_4^0 - x$ с графиком функции

Рис. 1. Построение инвариантной области \mathcal{Q}^4 .

$\xi = \mathcal{L}(x)$ лежат также и на графике итерации $\xi = \mathcal{L}(\mathcal{L}(x))$. Здесь $2x_4^0 > \mathcal{L}(0)$; это условие выполняется для неустойчивых стационарных точек систем вида (1), см. ниже неравенства (7).

Такие наблюдения о монотонности композиций были сделаны во многих работах, посвященных геометрическому анализу фазовых портретов подобных динамических систем произвольных размерностей (см., например, [1, 5, 8]).

Если $x = x_4^0$ — решение уравнения (3), то остальные координаты x_1^0 , x_2^0 и x_3^0 стационарной точки \mathcal{S}_4 системы (1) имеют вид

$$x_1^0 = \Gamma_1^{-1}(G_1(x_4^0)); \quad x_2^0 = \Gamma_2^{-1}(\gamma_2(\Gamma_1^{-1}(G_1(x_4^0)))); \quad x_3^0 = \Gamma_3^{-1}(\gamma_4(x_2^0)). \quad (5)$$

Аналогичным образом решение $y = y_5^0$ уравнения (4) единственным образом определяет стационарную точку \mathcal{S}_5 системы (2) (см. [10]).

Обозначим через k_j , k_i вычисленные в стационарных точках производные функций Γ_j и Γ_i ; производные убывающих функций G_1 и L_i , вычисленные в стационарных точках, обозначим через $-q_1$ и соответственно $-p_i$, и производные функций γ_s обозначим через m_s .

Устойчивость точек \mathcal{S}_4 и \mathcal{S}_5 определяется корнями характеристических многочленов матриц линеаризаций M_4 и соответственно M_5 систем (1) и (2):

$$M_4 = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 & -q_1 \\ m_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & m_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & 0 & m_4 & -k_4 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_3 & -k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_4 & -k_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p_5 & -k_5 \end{pmatrix}.$$

Эти характеристические многочлены приводятся к виду

$$P_4(\lambda) = (\lambda + k_1)(\lambda + k_2)(\lambda + k_3)(\lambda + k_4) + q_1 m_2 m_3 m_4,$$

соответственно

$$P_5(\lambda) = (\lambda + k_1)(\lambda + k_2)(\lambda + k_3)(\lambda + k_5)(\lambda + k_4) + p_1 p_2 p_3 p_4 p_5.$$

Отметим, что в стационарных точках производные убывающих функций \mathcal{L}_4 и \mathcal{L}_5 имеют вид

$$\frac{d\mathcal{L}_4}{dx} = -\frac{q_1 m_2 m_3 m_4}{k_1 k_2 k_3 k_4}, \quad \frac{d\mathcal{L}_5}{dx} = -\frac{p_1 p_2 p_3 p_4 p_5}{k_1 k_2 k_3 k_4 k_5}.$$

В интересующем нас случае неустойчивых стационарных точек произведение $q_1 m_2 m_3 m_4$ достаточно велико по сравнению с $k_1 k_2 k_3 k_4$, а $p_1 p_2 p_3 p_4 p_5$ достаточно велико по сравнению с $k_1 k_2 k_3 k_4 k_5$, точные оценки можно получить из критерия Рауса — Гурвица [11]. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что

$$\frac{q_1 m_2 m_3 m_4}{k_1 k_2 k_3 k_4} > 1, \quad \frac{p_1 p_2 p_3 p_4 p_5}{k_1 k_2 k_3 k_4 k_5} > 1. \quad (7)$$

В этом случае производная функции $\xi = \mathcal{L}_4(\mathcal{L}_4(x))$ при $x = x_4^0$ и производная функции $\xi = \mathcal{L}_5(\mathcal{L}_5(y))$ при $y = y_5^0$ строго больше единицы.

Лемма 1. Каждое из уравнений $x = \mathcal{L}_4(\mathcal{L}_4(x))$, $y = \mathcal{L}_5(\mathcal{L}_5(y))$ при выполнении неравенства (7) имеет по крайней мере три положительных решения $a_4 < x_4^0 < b_4$ и соответственно $\alpha_5 < y_5^0 < \beta_5$.

На рис. 1 изображены пересечения графиков $\xi = x_4$ и $\xi = \mathcal{L}_4(x_4)$. Подобные геометрические построения, использующие итерации монотонно убывающих функций, проделывались и при анализе фазовых портретов моделей генных сетей других размерностей (см. [2, 12]).

2. Геометрические построения в фазовых портретах

Для нахождения условий существования циклов рассматриваемых динамических систем (1) и (2) построим компактные инвариантные области в их фазовых портретах. Область \mathcal{Q} называется *инвариантной*, если траектории ее точек не покидают эту область при $t \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим подробно случай системы (1), все описанные ниже построения почти дословно воспроизводятся и для пятимерной системы (2).

Будем искать такие $a_4 < b_4$, $a_4 < x_4^0 < b_4$, что $\mathcal{L}_4(a_4) = b_4$ и $\mathcal{L}_4(b_4) = a_4$.

Пусть $a_4 < x_0 < b_4$ — ближайшие к x_4^0 решения уравнения $x = \mathcal{L}_4(\mathcal{L}_4(x))$, т. е. $a_4 = \mathcal{L}_4(b_4)$, $b_4 = \mathcal{L}_4(a_4)$.

На грани $x_4 = b_4$ для наших построений нужно неравенство $\dot{x}_4 = \gamma_4(x_3) - \Gamma_4(b_4) \leq 0$.

На грани $x_4 = a_4$ нужно неравенство $\dot{x}_4 = \gamma_4(x_3) - \Gamma_4(a_4) \geq 0$.

Значит, $\gamma_4^{-1}(\Gamma_4(a_4)) \leq x_3 \leq \gamma_4^{-1}(\Gamma_4(b_4))$ — это ребро $[a_3, b_3]$ инвариантного параллелепипеда \mathcal{Q}^4 системы (1).

На грани $x_3 = \gamma_4^{-1}(\Gamma_4(b_4)) = b_3$ нужно неравенство $\dot{x}_3 = \gamma_3(x_2) - \Gamma_3(b_3) \leq 0$.

На грани $x_3 = \gamma_4^{-1}(\Gamma_4(a_4)) = a_3$ нужно неравенство $\dot{x}_3 = \gamma_3(x_2) - \Gamma_3(a_3) \geq 0$.

Значит, $\gamma_3^{-1}(\Gamma_3(\gamma_4^{-1}(\Gamma_4(a_4)))) \leq x_2 \leq \gamma_3^{-1}(\Gamma_3(\gamma_4^{-1}(\Gamma_4(b_4))))$ — это ребро $[a_2, b_2]$ параллелепипеда \mathcal{Q}^4 .

Из определения

$$a_4 = \Gamma_4^{-1}(\gamma_4(\Gamma_3^{-1}(\gamma_3(\Gamma_2^{-1}(\gamma_2(\Gamma_1^{-1}(G_1(b_4)))))))$$

следует, что

$$\begin{aligned} a_2 &= \gamma_3^{-1}(\Gamma_3(\gamma_4^{-1}(\Gamma_4(a_4)))) = \Gamma_2^{-1}(\gamma_2(\Gamma_1^{-1}(G_1(b_4)))), \\ b_2 &= \gamma_3^{-1}(\Gamma_3(\gamma_4^{-1}(\Gamma_4(b_4)))) = \Gamma_2^{-1}(\gamma_2(\Gamma_1^{-1}(G_1(a_4)))). \end{aligned}$$

Аналогично находится ребро $[a_1, b_1]$ параллелепипеда \mathcal{Q}^4 .

Всюду в этой работе изучается только *Случай Общего Положения* [13], когда графики всех рассматриваемых функций пересекаются трансверсально.

Лемма 2. *Параллелепипед $\mathcal{Q}^4 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \times [a_4, b_4]$ является инвариантной областью системы (1). Описанная уравнениями (3) стационарная точка \mathcal{S}_4 системы (1) лежит во внутренней области \mathcal{Q}^4 .*

Подобным же образом строится и инвариантный параллелепипед \mathcal{Q}^5 динамической системы (2): Пусть $\alpha_5 < y_5^0 < \beta_5$ — корни уравнения $y = \mathcal{L}_5(\mathcal{L}_5(y))$ такие, что $\mathcal{L}_5(\alpha_5) = \beta_5$ и $\mathcal{L}_5(\beta_5) = \alpha_5$. Отрезок $[\alpha_5, \beta_5]$ — это ребро инвариантного параллелепипеда

$$\mathcal{Q}^5 = [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2] \times [\alpha_3, \beta_3] \times [\alpha_4, \beta_4] \times [\alpha_5, \beta_5]$$

системы (2). Остальные его ребра строятся точно так же, как и у инвариантного параллелепипеда \mathcal{Q}^4 . Стационарная точка \mathcal{S}_5 системы (2) лежит во внутренней области \mathcal{Q}^5 .

При моделировании генных сетей произвольных размерностей с целью локализации положения циклов в фазовых портретах соответствующих динамических систем подобные инвариантные области вида $[0, b_1] \times [0, b_2] \dots \times [0, b_n]$, у которых половина граней лежит на координатных плоскостях, конструировались и ранее (см. [14–17]). Построенные инвариантные параллелепипеды \mathcal{Q}^4 , \mathcal{Q}^5 расположены во внутренностях положительных октантов пространств \mathbb{R}^4 и \mathbb{R}^5 .

Плоскости $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, $x_3 = x_3^0$, $x_4 = x_4^0$ разбивают \mathcal{Q}^4 на 16 более мелких параллелепипедов, которые будем называть *блоками* и, следуя [1, 5] (см. также [6, 8]), будем нумеровать бинарными мульти-индексами $\{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4\}$ по правилу: $\varepsilon_j = 0$, если для всех точек блока выполнены неравенства $a_j \leq x_j < x_j^0$, и $\varepsilon_j = 1$, если для всех его точек $x_j^0 \leq x_j \leq b_j$.

Следующая кольцевая диаграмма описывает переходы траекторий системы (1) по восьми блокам разбиения параллелепипеда \mathcal{Q}^4 :

$$\begin{array}{ccccccc} \{1111\} & \xrightarrow{\varphi^1} & \{0111\} & \longrightarrow & \{0011\} & \longrightarrow & \{0001\} \\ \uparrow & & & & & & \downarrow \\ \{1110\} & \longleftarrow & \{1100\} & \longleftarrow & \{1000\} & \longleftarrow & \{0000\}. \end{array} \quad (8)$$

Обозначим через W_1 объединение перечисленных в диаграмме (8) блоков и рассмотрим пересечения «соседних» блоков этой области:

$$F_0 = \{1111\} \cap \{0111\}, F_1 = \{0111\} \cap \{0011\}, \dots, F_7 = \{1110\} \cap \{1111\}.$$

Из монотонности функций G_1, γ_s, Γ_j так же, как и в [1, 8], где рассматривался случай линейных функций Γ_j , следует, что для любой внутренней точки блока $\{1111\}$ ее траектория выходит из него только через трехмерную грань F_0 — в блок $\{0111\}$, согласно стрелке φ_1 диаграммы (8). Через все остальные грани блока $\{1111\}$ траектории системы (1) могут только заходить в него. Точно таким же образом для любой внутренней точки любого из восьми блоков, перечисленных в диаграмме (8), ее траектория выходит из него только в тот соседний блок, в который указывает соответствующая стрелка этой диаграммы.

Объединение оставшихся восьми блоков разбиения параллелепипеда \mathcal{Q}^4 обозначим через W_3 . Комбинаторика поведения траекторий точек этой области выглядит сложнее, например, из блока $\{1011\}$ траектории системы (1) могут выходить в один из трех блоков: $\{1111\}$, $\{0011\}$ и $\{1001\}$ (см. [6]). Здесь нижний индекс 3 указывает на возможность выхода из блока через три его грани, а индекс 1 в W_1 означает единственность направления выхода из блока.

Подобным же образом плоскости $y_i = y_i^0$ разбивают инвариантный параллелепипед \mathcal{Q}^5 на 32 блока, занумерованных бинарными мульти-индексами $\{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5\}$, как и выше, см. также [7, 9, 10], где для пятимерных динамических систем вида (2) с линейными функциями Γ_i и гладкими либо ступенчатыми монотонно убывающими функциями L_i была построена диаграмма переходов траекторий из блока в блок:

$$\begin{array}{ccccccccc} \{10101\} & \longrightarrow & \{00101\} & \longrightarrow & \{01101\} & \longrightarrow & \{01001\} & \longrightarrow & \{01011\} \\ \uparrow & & & & & & & & \downarrow \\ \{10100\} & \longleftarrow & \{10110\} & \longleftarrow & \{10010\} & \longleftarrow & \{11010\} & \longleftarrow & \{01010\}. \end{array} \quad (9)$$

Для каждого из перечисленных здесь пятимерных блоков траектории его внутренних точек выходят из него только в один соседний блок — в тот, в который указывает соответствующая стрелка диаграммы (9). Из блоков $\{11111\}$ и $\{00000\}$ этого разбиения траектории системы (2) могут выходить в любой из пяти соседних блоков. Для оставшихся двадцати блоков разбиения области \mathcal{Q}^5 диаграмма переходов траекторий из блока в блок описана в [7].

Аналогичные диаграммы для других моделей кольцевых генных сетей с линейными функциями Γ_j конструировались в [1, 14, 15, 17] с целью доказательства существования циклов в объединениях блоков, образующих такие диаграммы.

3. Существование циклов

Траектории всех точек грани F_0 после восьми шагов по диаграмме (8) возвращаются на эту грань. Композиция $\Phi_4 : F_0 \rightarrow F_0$ всех этих восьми сдвигов

вдоль траекторий системы (1) является отображением Пуанкаре цикла, существование которого установим ниже.

Введем, как и выше, обозначения

$$\mathcal{F}_0 = \{10101\} \cap \{00101\}, \mathcal{F}_1 = \{00101\} \cap \{01101\}, \dots, \mathcal{F}_9 = \{10100\} \cap \{10101\}.$$

Траектории всех точек четырехмерной грани \mathcal{F}_0 после десяти шагов по диаграмме (9) возвращаются на \mathcal{F}_0 . Обозначим через $\Phi_5 : \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_0$ композицию десяти сдвигов по блокам диаграммы (9) вдоль траекторий системы (2). Отметим, что $\Phi_4(\mathcal{S}_4) = \mathcal{S}_4$ и $\Phi_5(\mathcal{S}_5) = \mathcal{S}_5$, поскольку точки \mathcal{S}_4 и \mathcal{S}_5 стационарны.

В целом ряде публикаций [5, 10, 18, 19] и др. доказательства существования циклов у динамических систем, подобных (1) и (2), выводятся из теоремы Боля — Брауэра о неподвижной точке — «принцип тора» (см. [20]). Однако во всех этих рассуждениях стационарные точки указанных систем являются неподвижными для соответствующих отображений Пуанкаре. Поэтому для доказательства существования цикла, состоящего более чем из одной точки, из граней F_0 , \mathcal{F}_0 и т. п. приходится вырезать окрестности $U(\mathcal{S}_4)$, $U(\mathcal{S}_5)$ стационарных точек так, чтобы при отображениях Пуанкаре усеченные грани $\widehat{F}_0 = F_0 \setminus U(\mathcal{S}_4)$, $\widehat{\mathcal{F}}_0 = \mathcal{F}_0 \setminus U(\mathcal{S}_5)$ и др. отображались в себя.

Если стационарная точка такой системы устойчива, описанное построение невозможно, поскольку с каждым обходом соответствующей диаграммы траектории будут экспоненциально приближаться к стационарной точке.

Если же стационарная точка неустойчива и гиперболична, т. е. в этой точке матрица линеаризации системы не имеет мнимых корней, то в силу теоремы Гробмана — Хартмана [21] в некоторой окрестности стационарной точки такую динамическую систему можно линеаризовать с помощью непрерывной замены переменных, и тогда усеченные грани будут переводиться в себя соответствующим отображением Пуанкаре.

В частности, если у системы (1) стационарная точка гиперболична, то из принципа аргумента следует, что матрица M_4 имеет два комплексно-сопряженных собственных числа $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ с положительными вещественными частями и два собственных числа $\lambda_3 = \bar{\lambda}_4$ с отрицательными вещественными частями (см. [11]). Так же, как и в [18], проверяется, что в линеаризующей системе координат теоремы Гробмана — Хартмана у стационарной точки \mathcal{S}_4 существует такая окрестность $U^4 = D_1^2 \times D_3^2$, что двумерный диск D_1^2 лежит в плоскости, порожденной собственными числами λ_1 , λ_2 , и его граница лежит во внутренней области W_1 , а диск D_3^2 лежит в плоскости, порожденной λ_3 и λ_4 , и его граница лежит во внутренней области W_3 .

Через поверхность $D_1^2 \times \partial D_3^2$, лежащую на границе ∂U^4 окрестности U^4 , траектории системы (1) входят в окрестность U^4 , а через поверхность $\partial D_1^2 \times D_3^2$ они из этой окрестности выходят. Если диск D_1^2 достаточно мал, то все блоки, образующие инвариантную область W_1 , пересекаются с границей ∂U^4 только в точках поверхности $\partial D_1^2 \times D_3^2$. Следовательно, траектории точек усеченной грани $\widehat{F}_0 \setminus (F_0 \cap U^4)$ при обходе вдоль стрелок диаграммы (8) не попадают

в окрестность U^4 , и при отображении Пуанкаре Φ_4 эта грань переходит сама в себя. Поскольку \hat{F}_0 компактна и гомеоморфна шару, из теоремы Боля — Брауэра следует существование точки $P_0 \in \hat{F}_0$ такой, что $\Phi_4 = P_0$, и, значит, траектория точки P_0 является циклом.

Все эти построения подобным же образом воспроизводятся и для случая динамической системы (2).

Теорема. 1. Если стационарная точка динамической системы (1) гиперболична, то у этой системы существует по крайней мере один цикл, проходящий по блокам, образующим диаграмму (8) согласно ее стрелкам.

2. Если стационарная точка динамической системы (2) гиперболична, то у этой системы существует по крайней мере один цикл, проходящий по блокам, образующим диаграмму (9) согласно ее стрелкам.

Полученные результаты допускают обобщения на модели генных сетей других размерностей, у которых окрестности неустойчивых стационарных точек (в том числе и неединственных) допускают разбиения на блоки и построение диаграмм вида (8) и (9), а также на динамические системы с правыми частями более общего вида, моделирующие генные сети с посттранскрипционной регуляцией (см. [19, 22]).

Благодарность. Авторы искренне благодарны Ю. Г. Матушкину за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Glass L., Pasternack J. S. Stable oscillations in mathematical models of biological control systems // J. Math. Biol. 1978. V. 6. P. 207–223.
2. Likhoshvai V. A., Kogai V. V., Fadeev S. I., Khlebodarova T. M. On the chaos in gene networks // J. Bioinform. Comput. Biol. 2013. V. 11. Article ID 1340009.
3. Gedeon T., Pernarowski M., Wilander A. Cyclic feedback systems with quorum sensing coupling // Bull. Math. Biol. 2016. V. 78, N 6. P. 1291–1317.
4. Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Существование и устойчивость релаксационного цикла в математической модели репрессилатора // Мат. заметки. 2017. Т. 101, № 1. С. 58–67.
5. Hastings S., Tyson J., Webster D. Existence of periodic solutions for negative feedback cellular control system // J. Differ. Equ. 1977. V. 25. P. 39–64.
6. Ayupova N. B., Golubyatnikov V. P. On two classes of non-linear dynamical systems: the four-dimensional case // Sib. Math. J. 2015. V. 56, N 2. P. 231–236.
7. Golubyatnikov V. P., Gradov V. S. Non-uniqueness of cycles in piecewise-linear models of circular gene networks // Sib. Adv. Math. 2021. V. 31, N 1. P. 1–12.
8. Golubyatnikov V. P., Minushkina L. S. On uniqueness and stability of a cycle in one gene network // Sib. Electron. Math. Rep. 2021. V. 18, N 1. P. 464–473.
9. Ayupova N. B., Golubyatnikov V. P. On structure of phase portrait of one 5-dimensional circular gene network model // J. Appl. Ind. Math. 2021. V. 15, N 4. P. 376–383.
10. Golubyatnikov V. P., Golubyatnikov I. V., Likhoshvai V. A. On the existence and stability of cycles in five-dimensional models of gene networks // Numer. Anal. Appl. 2010. V. 3, N 4. P. 329–335.
11. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Физматгиз, 1967.
12. Khlebodarova T. M., Kogai V. V., Fadeev S. I., Likhoshvai V. A. Chaos and hyperchaos in simple gene network with negative feedback and time delays // J. Bioinform. Comput. Biol. 2017. V. 15, N 2. Article ID 1650042.

13. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. М.: МЦНМО, 2009.
14. Гайдов Ю. А. Об устойчивости периодических траекторий в некоторых моделях генных сетей // Сиб. журн. индустр. математики. 2008. Т. 11, № 1. С. 57–62.
15. Казанцев М. В. О некоторых свойствах графов доменов динамических систем // Сиб. журн. индустр. математики. 2015. Т. 18, № 4. С. 42–49.
16. Голубятников В. П., Кириллова Н. Е. Фазовые портреты двух моделей генных сетей // Мат. заметки СВФУ. 2021. Т. 28, № 1. С. 3–11.
17. Ivanov V. V. Attracting limit cycle of an odd-dimensional circular gene network model // J. Appl. Ind. Math. 2022. V. 16, N 3. P. 409–415.
18. Кириллова Н. Е. Об инвариантных поверхностях в моделях генных сетей // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23, № 4. С. 69–76.
19. Golubyatnikov V. P., Likhoshvai V. A., Ratushny A. V. Existence of closed trajectories in 3-D gene networks // J. Three Dimensional Images 3D Forum. Japan. 2004. V. 18, N 4. P. 96–101.
20. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: изд-во Моск. ун-та, 1984.
21. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
22. Чумаков Г. А., Чумакова Н. А. Гомоклинические циклы в одной модели генной сети. Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 14. С. 97–106.

Поступила в редакцию 22 марта 2023 г.

После доработки 22 марта 2023 г.

Принята к публикации 29 мая 2023 г.

Аюпова Наталья Борисовна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
ayupova@math.nsc.ru

Голубятников Владимир Петрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский военный институт им. И. К. Яковлева войск национальной гвардии РФ
Ключ-Камышенское плато, 6/2, Новосибирск 630114
golubyatn@yandex.ru

PHASE PORTRAITS OF TWO NONLINEAR
MODELS OF CIRCULAR GENE NETWORKS
N. B. Ayupova and V. P. Golubaytnikov

Abstract: For two dynamical systems of dimensions 4 and 5 which simulate circular gene networks with non-linear degradation of their components we find conditions for existence of periodic trajectories and construct invariant domains which contain all these trajectories. Interiors of both domains are homeomorphic to torus, and the boundary of each of them contains a unique equilibrium point of the corresponding dynamical system.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.54.12.001

Keywords: circular gene network model, phase portrait of non-linear dynamical system, equilibrium point, invariant domain, periodic trajectory.

REFERENCES

1. Glass L. and Pasternack J. S., “Stable oscillations in mathematical models of biological control systems,” *J. Math. Biol.*, **6**, 207–223 (1978).
2. Likhoshvai V. A., Kogai V. V., Fadeev S. I., and Khlebodarova T. M., “On the chaos in gene networks,” *J. Bioinform. Comput. Biol.*, **11**, article No. 1340009 (2013).
3. Gedeon T., Pernarowski M., and Wilander A., “Cyclic feedback systems with quorum sensing coupling,” *Bull. Math. Biol.*, **78**, No. 6, 1291–1317 (2016).
4. Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., and Rozov N. Kh., “Existence and stability of the relaxation cycle in a mathematical repressilator model,” *Math. Notes*, **101**, No. 1, 71–86 (2017).
5. Hastings S., Tyson J., and Webster D., “Existence of periodic solutions for negative feedback cellular control system,” *J. Differ. Equ.*, **25**, 39–64 (1977).
6. Ayupova N. B. and Golubyatnikov V. P., “On two classes of non-linear dynamical systems: the four-dimensional case,” *Sib. Math. J.*, **56**, No. 2, 231–236 (2015).
7. Golubyatnikov V. P. and Gradov V. S., “Non-uniqueness of cycles in piecewise-linear models of circular gene networks,” *Sib. Adv. Math.*, **31**, No. 1, 1–12 (2021).
8. Golubyatnikov V. P. and Minushkina L. S., “On uniqueness and stability of a cycle in one gene network,” *Sib. Electron. Math. Rep.*, **1**, No. 1, 464–473 (2021).
9. Ayupova N. B. and Golubyatnikov V. P., “On structure of phase portrait of one 5-dimensional circular gene network model,” *J. Appl. Ind. Math.*, **15**, No. 3, 376–383 (2021).
10. Golubyatnikov V. P., Golubyatnikov I. V., and Likhoshvai V. A., “On the existence and stability of cycles in five-dimensional models of gene networks,” *Numer. Anal. Appl.*, **3**, No. 4, 329–335 (2010).
11. Gantmacher F. R., *The Theory of Matrices*, vol. 1, Chelsea Publ. Co. (1984).
12. Khlebodarova T. M., Kogai V. V., Fadeev S. I., and Likhoshvai V. A., “Chaos and hyperchaos in simple gene network with negative feedback and time delays,” *J. Bioinform. Comput. Biol.*, **15**, No. 2, article No. 1650042 (2017).
13. Arnold V. I., Gusein-Zade S. M., and Varchenko A. N., *Singularities of Differentiable Maps*, Birkhäuser, Boston (1985).
14. Gaidov Yu. V., “On the stability of periodic trajectories in some gene network models,” *J. Appl. Ind. Math.*, **4**, No. 1, 43–47 (2010).

15. Kazantsev M. V., "On some properties of the domain graphs of dynamical systems [in Russian]," *Sib. Zh. Ind. Mat.*, **56**, No. 4, 42–48 (2015).
16. Golubyatnikov V. P. and Kirillova N. E., "Phase portraits of two gene networks models [in Russian]," *Mat. Zamet. SVFU*, **28**, No. 1, 3–11 (2021).
17. Ivanov V. V., "Attracting limit cycle of an odd-dimensional circular gene network model," *J. Appl. Ind. Math.*, **16**, No. 3, 409–415 (2022).
18. Kirillova N. E., "On invariant surfaces in gene network models," *J. Appl. Ind. Math.*, **14**, No. 4, 666–671 (2020).
19. Golubyatnikov V. P., Likhoshvai V. A., and Ratushny A. V., "Existence of closed trajectories in 3-D gene networks," *J. Three Dimensional Images 3D Forum, Japan*, **18**, No. 4, 96–101 (2004).
20. Petrovskii I. G., *Lectures on the Theory of Ordinary Differential Equations* [in Russian], Nauka, Moscow (1970).
21. Hartman Ph., *Ordinary Differential Equations*, 2nd ed., SIAM (1982).
22. Chumakov G. A. and Chumakova N. A., "Homoclinic cycles in a gene network model [in Russian]," *Mat. Zamet. SVFU*, **21**, No. 4, 97–106 (2014).

Submitted March 22, 2023

Revised March 22, 2023

Accepted May 29, 2023

Natalya B. Ayupova
 Sobolev Institute of Mathematics,
 4 Koptyug Avenue, Novosibirsk 630090, Russia
 ayupova@math.nsc.ru

Vladimir P. Golubyatnikov
 Sobolev Institute of Mathematics,
 4 Koptyug Avenue, Novosibirsk 630090, Russia;
 Novosibirsk Military Institute of Russian National Guard Forces,
 4/2 Klyuch-Kamyshenskoe Plateau, Novosibirsk 630114, Russia
 golubyatn@yandex.ru

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ
О ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ
ТЕЛА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ
В МИКРОПОЛЯРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
Ю. М. Григорьев, А. А. Гаврильева

Аннотация. Рассматривается плоская задача о собственных гармонических колебаниях прямоугольника со смешанными краевыми условиями в рамках линейной микрополярной теории упругости. Микрополярная модель или модель Коссера применяется для многих современных материалов с микроструктурой, когда элементарная частица сплошной среды имеет шесть степеней свободы. Предложен метод решения, когда исходная краевая задача разделяется на отдельные последовательности согласованных скалярных краевых задач, отвечающих и за вращательную компоненту. Выявлено, что в микрополярной среде возникают два «сорта частот» собственных колебаний прямоугольника, одна из которых ограничена снизу, тогда как в классической среде существует только один «сорт» собственных частот и таких ограничений нет. Предложенный метод может быть развит на случай других граничных условий и на трехмерный случай.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.93.57.002

Ключевые слова: модель Коссера, микрополярная теория упругости, собственные колебания, прямоугольник.

Введение

Механика обобщенных сплошных сред имеет более чем столетнюю историю и берет свое начало со знаменитой книги братьев Коссера [1]. В этой книге авторы обобщили предыдущие подходы других исследователей к построению модели упругих сред с кинематически независимыми поступательными и вращательными степенями свободы. В теории Коссера, в отличие от классической теории упругости, каждая точка среды характеризуется двумя независимыми векторами смещения и вращения. Эта основополагающая работа братьев Коссера не была своевременно оценена.

Однако после некоторого забвения идеи Коссера были переоткрыты и развиты в работах [2–6] и др., появились основы новых теорий обобщенных сред. Сейчас теории микрополярной, микроморфной, градиентной упругости и т. д. описаны в монографиях [7–14] и др., в тысячах статей. Причина такого возрождения моделей обобщенных сред заключается в том, что некоторые эффекты механического поведения твердых тел и жидкостей не могли быть объяснены

с помощью имеющихся классических моделей. На первое время оказалось, что для практических приложений разработанные модели оказались мало полезными. Причиной этого был разрыв между уровнем формулировки определяющих уравнений и возможностями идентификации параметров материала. Таких новых параметров было гораздо больше, чем в классических моделях. С началом 2000-х годов ситуация изменилась. Доступность гораздо больше вычислительных возможностей позволяет численно моделировать очень сложные задачи. Внимание к большому количеству материалов со сложной микроструктурой значительно повысилось в связи с возрастающими практическими запросами, связанными с современными технологиями.

Большую популярность имеет микрополярная теория упругости (МТУ), разработанная на основе модели упругой среды Коссера. В русскоязычной литературе для МТУ иногда пользуются термином «моментная теория упругости». МТУ используется для описания сред с микроструктурой, таких как: зернистые среды, включая кирпичную кладку; композиты, включая композиты со случайными частицами; балочно-решетчатые материалы, включая пенопласты и другие пористые материалы; теория тонкостенных конструкций; магнитные жидкости и жидкие кристаллы; кости, биокерамика, геоматериалы и другие среды с вращательными взаимодействиями (см., например, [14]).

В данной работе исследуется задача МТУ для упругой изотропной однородной модели среды Коссера, характеризующейся шестью упругими константами [8]: две постоянные Ламе и четыре новые константы, отвечающие за микроструктуру. Несмотря на достаточное развитие основ МТУ известно лишь ограниченное количество точных аналитических решений задач равновесия и колебаний микрополярных упругих тел конечных размеров. При этом только некоторые из них подходят для разработки методов идентификации микрополярных констант упругости по лабораторным измерениям.

Точные аналитические решения для круговых цилиндров получены в [15–20]. Эти решения были распространены на изотропные полые цилиндры в работе [21]. Первая попытка определить все шесть констант упругости, основанная на решениях задач о кручении круглого цилиндра и изгибе прямоугольной пластины, была предпринята Готье и Джасманом [16, 22]. В [23] Чаухан из точных аналитических решений вывел эффект увеличения макроскопической жесткости для полукруглого кольца прямоугольного сечения, изгибаемого равнодействующими поперечного радиального сдвига. В работе [24] Сингх получил точные аналитические решения для областей со сферическими границами. В [25] Р. Меладзе получил точные аналитические решения основных задач равновесия микрополярного упругого шара в терминах абсолютно и равномерно сходящихся рядов. В [26] проведен параметрический анализ точных аналитических решений некоторых одномерных и двумерных задач деформации пластины и шайбы, при этом введенные макропараметры микрополярной среды могут быть

конструктивно экспериментально измерены. Имеются успешные работы Лейка и Янга по экспериментальному определению микрополярных упругих констант кости, полимерных и металлических пен [27, 28] и др. В [29] можно найти широкий литературный обзор по экспериментальному определению микрополярных упругих констант.

Для параллелепипеда и прямоугольника известны некоторые точные аналитические решения. В [30] Н. Г. Хомасуридзе показал, что для параллелепипеда в случае согласованных краевых условий возникают задачи Дирихле или Неймана для дивергенции векторного поля смещения. В развитие этих результатов в работах [31–33] разработаны основы метода получения точных аналитических решений задач равновесия и колебания микрополярного прямоугольника. В [34] получено точное аналитическое решение задачи равновесия микрополярного прямоугольника, на границе которого заданы нормальные напряжения, касательные составляющие вектора перемещения и моментных напряжений. Вместе с тем для частного случая граничных условий выделено слабое, отвечающее за микрополярный эффект — повышение жесткости прямоугольника.

Выше были отмечены все известные работы, в которых имеются точные аналитические решения статических задач микрополярной упругости в ограниченных областях в \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 .

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы в рамках микрополярной теории упругости получить точное аналитическое решение задачи о собственных гармонических колебаний тела прямоугольной формы со смешанными краевыми условиями: когда на границе заданы нулевые касательные компоненты напряжений, нормальные компоненты вектора перемещения и вектора вращения.

1. Основные соотношения микрополярной теории упругости

Введем декартовы координаты x_i , здесь и всюду в дальнейшем латинские индексы принимают значения от 1 до 3: $i = 1, 2, 3$. В среде Коссера движение каждой частицы среды описывается независимыми векторами перемещения \mathbf{u} и вращения $\boldsymbol{\omega}$, их компоненты соответственно обозначаются u_i и ω_i .

Уравнения движения в МТУ при отсутствии массовых сил и моментов имеют вид [8]

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ji,j} = \rho \ddot{u}_i, \quad \sum_{j=1}^3 \mu_{ji,j} + \sum_{j,k=1}^3 e_{ijk} \sigma_{jk} = j \ddot{\omega}_i, \quad (1.1)$$

где σ_{ji} — компоненты несимметричного тензора силовых напряжений, μ_{ji} — компонента тензора моментных напряжений; e_{ijk} — антисимметричный тензор Леви-Чивита, ρ — плотность среды, j — локальная динамическая характеристика среды (плотность момента инерции, мера инерции при вращении); точка

вверху буквы означает частную производную по времени; здесь и далее запятая и переменная в индексе обозначают соответствующую частную производную.

Геометрические соотношения для компоненты тензора деформаций γ_{ji} и компоненты тензора изгиба-кручения χ_{ij} имеют вид

$$\gamma_{ji} = u_{i,j} - \sum_{k=1}^3 e_{kji} \omega_k, \quad \chi_{ji} = \omega_{i,j}. \quad (1.2)$$

Компоненты γ_{ii} тензора деформаций идентичны компонентам тензора деформаций в классическом случае, а компоненты γ_{ij} , где $i \neq j$, тензора деформаций характеризуют отличие вектора вращения $\boldsymbol{\omega}$ от половины вектора вихря перемещения $\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}$; компоненты χ_{ii} описывают крутильные деформации, а компоненты χ_{ij} , где $i \neq j$, — изгибные.

Определяющие уравнения МТУ (закон Гука) для изотропной однородной центрально-симметричной среды Коссера имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \gamma_{kk} + (\mu + \alpha) \gamma_{ij} + (\mu - \alpha) \gamma_{ji}, \\ \mu_{ij} &= \beta \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \chi_{kk} + (\gamma + \varepsilon) \chi_{ij} + (\gamma - \varepsilon) \chi_{ji}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где λ, μ — постоянные Ламе; $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ — микрополярные упругие постоянные среды, отвечающие за микроструктуру. Из условия положительности внутренней энергии вытекают следующие неравенства для упругих постоянных [7, 35]:

$$\mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0, \quad \alpha > 0, \quad \gamma > 0, \quad \varepsilon > 0, \quad 3\beta + 2\gamma > 0. \quad (1.4)$$

При подстановке формул (1.3) в уравнения движения в напряжениях (1.1) получаем уравнения движения в перемещениях-вращениях:

$$\begin{aligned} (\mu + \alpha) \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu - \alpha) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + 2\alpha \nabla \times \boldsymbol{\omega} &= \rho \ddot{\mathbf{u}}, \\ (\gamma + \varepsilon) \Delta \boldsymbol{\omega} + (\beta + \gamma - \varepsilon) \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) + 2\alpha \nabla \times \mathbf{u} - 4\alpha \boldsymbol{\omega} &= j \ddot{\boldsymbol{\omega}}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Компоненты поверхностных усилий \mathbf{T} и моментов \mathbf{M} , действующих на границе области, даются соответственно формулами $T_i = \sum_j \sigma_{ji} n_j$, $M_i = \sum_j \mu_{ji} n_j$, где n_i — компоненты единичного вектора внешней нормали.

2. Постановка задачи

Рассматриваются собственные гармонические колебания тела прямоугольной формы в виде бесконечно длинного прямоугольного параллелепипеда в случае отсутствия массовых сил и массовых моментов, действующих на тело; а само тело помещено в гладкий жесткий котлован с размерами, совпадающими с его размерами. В случае плоской деформации при этом возникает задача о деформации прямоугольника при однородных краевых условиях.

Пусть прямоугольник заполняет область

$$P \equiv \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b\},$$

а собственные гармонические колебания имеют частоту и форму в виде

$$\mathbf{u} = (u_1(x, y), u_2(x, y), 0) e^{i\tau t}, \quad \boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega(x, y)) e^{i\tau t}, \quad (2.1)$$

где $i = \sqrt{-1}$, τ — круговая частота, $u_1(x, y), u_2(x, y), \omega(x, y)$ — амплитуды векторов перемещения и вращения. Физический смысл имеют только вещественные части данных комплекснозначных функций.

Далее определяются амплитуды деформаций согласно (1.2):

$$\gamma_{xx} = u_{1,x}, \quad \gamma_{xy} = u_{2,x} - \omega, \quad \gamma_{yx} = u_{1,y} + \omega, \quad \gamma_{yy} = u_{2,y}, \quad \chi_{xz} = \omega_{,x}, \quad \chi_{yz} = \omega_{,y}, \quad (2.2)$$

и амплитуд напряжений согласно (1.3) — закон Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu u_{1,x}, \quad \sigma_{yy} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu u_{2,y}, \quad \sigma_{zz} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}, \\ \text{(а)} \quad \sigma_{xy} &= (\mu + \alpha) u_{2,x} + (\mu - \alpha) u_{1,y} - 2\alpha \omega, \\ \text{(б)} \quad \sigma_{yx} &= (\mu + \alpha) u_{1,y} + (\mu - \alpha) u_{2,x} + 2\alpha \omega, \\ \mu_{xz} &= B\omega_{,x}, \quad \mu_{yz} = B\omega_{,y}, \quad \mu_{zx} = (\gamma - \varepsilon)\omega_{,x}, \quad \mu_{zy} = (\gamma - \varepsilon)\omega_{,y}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Наконец, после подстановки выражений (2.1)–(2.3) в основные соотношения (1.1)–(1.3) возникает следующая задача о нахождении собственных гармонических колебаний (2.1) прямоугольника со смешанными однородными краевыми условиями:

$$\begin{aligned} \text{(а)} \quad & (\mu + \alpha)\Delta u_1 + (\lambda + \mu - \alpha)(\nabla \cdot \mathbf{u})_{,x} + 2\alpha \nabla \times \omega_{,y} + \rho\tau^2 u_1 = 0, \\ & (\mu + \alpha)\Delta u_2 + (\lambda + \mu - \alpha)(\nabla \cdot \mathbf{u})_{,y} - 2\alpha \nabla \times \omega_{,x} + \rho\tau^2 u_2 = 0, \\ \text{(б)} \quad & B\Delta\omega + 2\alpha(u_{2,x} - u_{1,y}) - 4\alpha\omega + j\tau^2\omega = 0 \text{ в } P; \\ \text{(в), (г)} \quad & \sigma_{xy}|_{x=a,0} \equiv \tilde{\sigma}_{xy}(y) = 0, \quad \sigma_{yx}|_{y=b,0} \equiv \tilde{\sigma}_{xy}(x) = 0, \\ \text{(д), (е)} \quad & u_1|_{x=a,0} \equiv \tilde{u}_1(y) = 0, \quad u_2|_{y=b,0} \equiv \tilde{u}_2(x) = 0, \\ \text{(ё)} \quad & \omega|_{x=a,0} \equiv \tilde{\omega}(y) = 0, \quad \omega|_{y=b,0} \equiv \tilde{\omega}(x) = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь $B \equiv \gamma + \varepsilon$ и $B > 0$ (1.4), следовательно, в случае плоской деформации (2.1) имеются четыре микрополярно-упругие постоянные.

Отметим, что смешанные краевые условия задачи (2.4) является однородными краевыми условиями V типа по классификации В. Д. Купрадзе [7].

3. Метод согласованных краевых задач

Введем векторную вспомогательную функцию

$$\mathbf{f} \equiv (\mu + \alpha)\nabla \times \mathbf{u}, \quad \mathbf{f} = (0, 0, (\mu + \alpha)(u_{2,x} - u_{1,y})) \equiv (0, 0, f_3(x, y)), \quad (3.1)$$

где согласно (1.4) $\mu + \alpha > 0$.

3.1. Безвихревое решение.

Теорема 1. Пусть $\mathbf{u} \in C^3(P) \cap C^2(\bar{P})$ и для векторной вспомогательной функции (3.1)

$$\mathbf{f} = 0. \quad (3.1.1)$$

Тогда имеются два вида решений задачи (2.4):

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{b}y\right), \quad u_1 \neq 0, \\ u_2(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \frac{\pi m/b}{\pi n/a} \cos\left(\frac{\pi n}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b}y\right), \quad u_2 \neq 0, \\ \omega(x, y) &= 0, \\ \tau_{nm}^2 &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right), \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

и

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= 0, \quad u_2(x, y) = 0, \\ \omega(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b}y\right), \\ \tau_{nm}^2 &= \frac{1}{j} \left(4\alpha + B\pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\mathbf{f} = 0$ возникает краевая задача для амплитуды вращения ω (2.1) согласно (2.4(б)) и (2.4(ё)) в следующем виде:

$$\Delta\omega + \left(\frac{j\tau^2 - 4\alpha}{B} \right) \omega = 0 \text{ в } P; \quad \omega = 0 \text{ на } \partial P. \quad (3.1.4)$$

Покажем, что $\lambda + 2\mu > 0$. От противного, пусть $\lambda \leq -2\mu$. Тогда согласно (1.4) $\lambda \leq -2\mu < 0$. Рассмотрим неравенство $3\lambda + 2\mu > 0$ (1.4) или $2\lambda + (\lambda + 2\mu) > 0$, тогда $2\lambda > -(\lambda + 2\mu) \geq 0$; пришли к противоречию.

Покажем, что скалярная вспомогательная функция в виде

$$f \equiv (\lambda + 2\mu) \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (3.1.5)$$

удовлетворяет уравнению 2-го порядка и для нее выполняются краевые условия Неймана.

Применив $\nabla \cdot$ к уравнениям (2.4(а)), получим

$$(\lambda + 2\mu) \Delta(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \rho \tau^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \Leftrightarrow \Delta f + \frac{\rho \tau^2}{\lambda + 2\mu} f = 0.$$

Найдем краевые условия для вспомогательной функции f . Согласно закону Гука (2.3(а))

$$\begin{aligned} \sigma_{xy,y} &= (\mu + \alpha) u_{2,xy} + (\mu - \alpha) u_{1,yy} - 2\alpha \omega_{,y} \\ \Leftrightarrow \sigma_{xy,y} &= (\mu + \alpha) ((\nabla \cdot \mathbf{u})_{,x} - u_{1,xx}) + (\mu - \alpha) u_{1,yy} - 2\alpha \omega_{,y}. \end{aligned}$$

Выражая $u_{1,xx}$ с помощью уравнения движения для компоненты перемещения u_1 (2.4(а)), получим

$$\sigma_{xy,y} = (\lambda + 2\mu)(\nabla \cdot \mathbf{u})_{,x} + 2\mu u_{1,yy} + \rho\tau^2 u_1.$$

На границе $x = a, 0$ это выражение преобразуется в

$$(\nabla \cdot \mathbf{u})_{,x}|_{x=a,0} = 0 \Leftrightarrow f_{,x}|_{x=a,0} = 0,$$

так как на этой границе компоненты σ_{xy} (2.4(в)), u_1 (2.4(д)) не зависят от y и $u_1 = 0$ (2.4(д)). Аналогично

$$(\nabla \cdot \mathbf{u})_{,y}|_{y=b,0} = 0 \Leftrightarrow f_{,y}|_{y=b,0} = 0.$$

Таким образом, для вспомогательной скалярной функции (3.1.5) получили искомую задачу

$$\Delta f + \frac{\rho\tau^2}{\lambda + 2\mu}f = 0 \text{ в } P; \quad f_{,x}|_{x=a,0} = 0, \quad f_{,y}|_{y=b,0} = 0. \quad (3.1.6)$$

Итак, ищем решение $(u_1(x, y), u_2(x, y), \omega(x, y), \tau)$, удовлетворяющее соотношению (3.1.1) и краевым задачам (3.1.4), (3.1.6). Краевые задачи можно решить методом разделения переменных [36].

Решение краевой задачи (3.1.6) имеет вид

$$f = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm}^f \cos\left(\frac{\pi n}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{b}y\right), & \tau_{nm}^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}\pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right); \\ f = 0, & \tau \text{ любое.} \end{cases} \quad (3.1.7)$$

В первом случае решение краевой задачи (3.1.4) может быть только $\omega = 0$ и, учитывая (3.1.1), получим решение исходной задачи (2.4) в виде (3.1.2).

Во втором случае при любом τ решение краевой задачи (3.1.4) имеет вид

$$\begin{aligned} \omega(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b}y\right), \\ \tau_{nm}^2 &= \frac{1}{j} \left(4\alpha + B\pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Учитывая (3.1.1) и граничные условия (2.4(д)), (2.4(е)), получим, что $u_1(x, y) = 0$ и $u_2(x, y) = 0$. Стало быть, решение исходной задачи имеет вид (3.1.3). \square

Таким образом, безвихревое решение ($\mathbf{f} = 0$) имеет вид (3.1.2) и (3.1.3). Одно решение (3.1.2) отвечает классическому рассмотрению задачи гармонических колебаний прямоугольника ($\alpha = 0$), другое (3.1.3) — микрополярному бездивергентному случаю ($f = 0$).

3.2. Вихревое решение.

Теорема 2. Пусть $\mathbf{u} \in C^5(P) \cap C^3(\bar{P})$ и векторная вспомогательная функция $\mathbf{f} \neq 0$ (3.1). Тогда решение исходной задачи (2.4) имеет вид

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm}^1 \sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{b}y\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm}^2 \sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{b}y\right),$$

$$u_2(x, y) = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi n/a}{\pi m/b} C_{nm}^1 \cos\left(\frac{\pi n}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b}y\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi n/a}{\pi m/b} C_{nm}^2 \cos\left(\frac{\pi n}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b}y\right),$$

$$\omega(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm}^1 \frac{2\alpha\left(\frac{\pi m}{b} + \frac{\pi^2 n^2/a^2}{\pi m/b}\right)}{B\pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) + 4\alpha - j\tau_{1nm}^2} \sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b}y\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm}^2 \frac{2\alpha\left(\frac{\pi m}{b} + \frac{\pi^2 n^2/a^2}{\pi m/b}\right)}{B\pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) + 4\alpha - j\tau_{2nm}^2} \sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b}y\right),$$

$$\begin{aligned} \tau_{1,2nm}^2 = & \frac{1}{2j\rho} \left(\pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) (j(\mu + \alpha) + B\rho) + 4\rho\alpha \right. \\ & \pm \left[\pi^4 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)^2 (j(\mu + \alpha) - B\rho)^2 \right. \\ & \left. \left. + \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) (8\alpha\rho(j\alpha + B\rho - j\mu)) + 16\rho^2\alpha^2 \right]^{1/2} \right). \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что вспомогательная векторная функция \mathbf{f} удовлетворяет уравнению 4-го порядка и для нее выполняются краевые условия типа Рикье.

Применим $\nabla \times$ к уравнению (2.4(a)). Используя определение для \mathbf{f} (3.1), свойства $\nabla \times \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \equiv 0$, $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) \equiv \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) - \Delta \boldsymbol{\omega}$ и для плоской деформации $(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) = 0$, придем к соотношению

$$(a) \quad \Delta \mathbf{f} - 2\alpha \Delta \boldsymbol{\omega} + \rho \tau^2 \frac{\mathbf{f}}{\mu + \alpha} = 0 \Leftrightarrow (б) \quad \Delta \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2\alpha} \left(\Delta \mathbf{f} + \rho \tau^2 \frac{\mathbf{f}}{\mu + \alpha} \right). \quad (3.2.2)$$

Применим Δ к уравнению (2.4(б)). Используя определение для \mathbf{f} (3.1), придем к

$$-\Delta^2 \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{B} \left(\frac{2\alpha}{\mu + \alpha} \Delta \mathbf{f} + (j\tau^2 - 4\alpha) \Delta \boldsymbol{\omega} \right). \quad (3.2.3)$$

Применим Δ к уравнению (3.2.2(а)). Используя (3.2.3) и (3.2.2(б)), придем к уравнению для вспомогательной функции \mathbf{f} :

$$\begin{aligned} \Delta^2 \mathbf{f} + \frac{((\mu + \alpha)j + \rho B)\tau^2 - 4\alpha\mu}{B(\mu + \alpha)} \Delta \mathbf{f} + \frac{\rho\tau^2(j\tau^2 - 4\alpha)}{B(\mu + \alpha)} \mathbf{f} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\Delta + \lambda_1^2)(\Delta + \lambda_2^2) \mathbf{f} &= 0, \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 &= \frac{((\mu + \alpha)j + \rho B)\tau^2 - 4\alpha\mu}{B(\mu + \alpha)}, \quad \lambda_1^2 \lambda_2^2 = \frac{\rho\tau^2(j\tau^2 - 4\alpha)}{B(\mu + \alpha)}. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Найдем краевые условия для функции \mathbf{f} . Используя выражение для $u_{2,x}$, из закона Гука (2.3(а)) получим

$$\mathbf{f} = (0, 0, \sigma_{xy} - 2\mu u_{1,y} + 2\alpha\omega).$$

На границе $x = a, 0$ согласно (2.4(в)), (2.4(д)), (2.4(е)) это выражение равно нулю:

$$\mathbf{f}|_{x=a,0} = 0. \quad (3.2.5)$$

Аналогично получим

$$\mathbf{f} = (0, 0, -\sigma_{yx} + 2\mu u_{2,x} - 2\alpha\omega), \quad \mathbf{f}|_{y=b,0} = 0. \quad (3.2.6)$$

Тем самым функция \mathbf{f} обращается в нуль в точках границы.

Подставляя в (3.2.2(а)) выражение для $\Delta\omega$ из (2.4(б)), получим

$$\Delta \mathbf{f} = -\frac{B\rho\tau^2 + 4\alpha^2}{B(\mu + \alpha)} \mathbf{f} + \frac{2\alpha}{B}(4\alpha - j\tau^2)\omega. \quad (3.2.7)$$

Отсюда согласно граничным условиям (2.4(ё)), (3.2.5), (3.2.6) получим, что значения $\Delta \mathbf{f}$ обращаются в нуль на границе прямоугольника.

Таким образом, для векторной функции \mathbf{f} (3.1) получили искомую задачу:

$$\begin{aligned} (\Delta + \lambda_1^2)(\Delta + \lambda_2^2) \mathbf{f} &= 0 \text{ в } P; \\ \Delta \mathbf{f} &= 0, \quad \mathbf{f} = 0 \text{ на } \partial P, \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 &= \frac{((\mu + \alpha)j + \rho B)\tau^2 - 4\alpha\mu}{B(\mu + \alpha)}, \quad \lambda_1^2 \lambda_2^2 = \frac{\rho\tau^2(j\tau^2 - 4\alpha)}{B(\mu + \alpha)}. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Учитывая соотношение для $\Delta \mathbf{f}$ (3.2.7) и граничное условие (2.4(ё)), получим, что решение для задачи Рикье (3.2.8) имеет вид $\mathbf{f} = C_1^f \mathbf{f}^1 + C_2^f \mathbf{f}^2$, где C_1^f, C_2^f — произвольные постоянные, а $\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2$ удовлетворяют следующим двум задачам Штурма — Лиувилля:

$$(\Delta + \lambda_1^2) \mathbf{f}^1 = 0 \text{ в } P, \quad \mathbf{f}^1 = 0 \text{ на } \partial P, \quad (3.2.9.1)$$

$$(\Delta + \lambda_2^2) \mathbf{f}^2 = 0 \text{ в } P, \quad \mathbf{f}^2 = 0 \text{ на } \partial P, \quad (3.2.9.2)$$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{((\mu + \alpha)j + \rho B)\tau^2 - 4\alpha\mu}{B(\mu + \alpha)}, \quad \lambda_1^2 \lambda_2^2 = \frac{\rho\tau^2(j\tau^2 - 4\alpha)}{B(\mu + \alpha)}.$$

Итак, пусть векторная вспомогательная функция ненулевая $\mathbf{f} \neq 0$, тогда в силу произвольности постоянных $C_1^{\mathbf{f}}, C_2^{\mathbf{f}}$ решаем отдельно две последовательности задач. Первая последовательность: решаем краевую задачу (3.2.9.1) для ненулевой компоненты f_3 . Тогда при известной f_3 уравнение (2.4(б)) для амплитуды вращения (2.1) преобразуется в следующую краевую задачу:

$$\Delta\omega + \left(\frac{j\tau^2 - 4\alpha}{B}\right)\omega = -\frac{2}{B}\frac{\alpha}{\mu + \alpha}f_3 \text{ в } P, \quad \omega = 0 \text{ на } \partial P. \quad (3.2.10)$$

Далее, зная ω и f_3 , для амплитуд перемещения получаем следующие краевые задачи, используя определение (3.1), согласно (2.4(а)), (2.4(е)), (3.2.6):

$$\Delta u_1 + \frac{\rho\tau^2}{\lambda + 2\mu}u_1 = -\frac{1}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\lambda + \mu - \alpha}{\mu + \alpha} f_{3,y} + 2\alpha\omega_{,y} \right) \text{ в } P, \quad (3.2.11)$$

$$u_1|_{x=a,0} = u_{1,y}|_{y=b,0} = 0,$$

и согласно (2.4(а)), (2.4(д)), (3.2.5)

$$\Delta u_2 + \frac{\rho\tau^2}{\lambda + 2\mu}u_2 = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\lambda + \mu - \alpha}{\mu + \alpha} f_{3,x} + 2\alpha\omega_{,x} \right) \text{ в } P. \quad (3.2.12)$$

$$u_2|_{y=b,0} = u_{2,x}|_{x=a,0} = 0.$$

Такие же задачи получаем для второй последовательности краевых задач (3.2.9.2), (3.2.10), (3.2.11), (3.2.12), заменяя λ_1^2 на λ_2^2 . Эти последовательности задач решаются стандартными методами математической физики, например, методом разделения переменных [36].

Итак, решение краевой задачи Штурма — Лиувилля (3.2.9.1) и (3.2.9.2) имеет вид

$$f_3^{1,2} = (\mu + \alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\pi m}{b} C_{u1_{nm}}^{1,2} - \frac{\pi n}{a} C_{u2_{nm}}^{1,2} \right) \sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b}y\right), \quad (3.2.13)$$

$$(\lambda_{1,2}^2)_{nm} = \pi \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right),$$

где $C_{u1_{nm}}^{1,2}, C_{u2_{nm}}^{1,2}$ определяются из начальных условий при $t = 0$ для амплитуд перемещения $u_1(x, y), u_2(x, y)$. Далее находим решение для каждого значения n, m (индекс n, m опускаем).

Выражая λ_2^2 через λ_1^2 в соотношениях (3.2.9), приходим к квадратному уравнению для τ^2 :

$$\frac{j\rho}{B(\mu + \alpha)\lambda_1^2}\tau^4 - \left(\frac{j(\mu + \alpha) + B\rho}{B(\mu + \alpha)} + \frac{4\alpha\rho}{B(\mu + \alpha)\lambda_1^2} \right) \tau^2 + \lambda_1^2 + \frac{4\alpha\mu}{B(\mu + \alpha)} = 0. \quad (3.2.14)$$

В силу того, что свободный член $\lambda_1^2 + \frac{4\alpha\mu}{B(\mu + \alpha)}$ и множитель $\frac{j\rho}{B(\mu + \alpha)\lambda_1^2}$ при τ^4 положительны, а множитель $\left(\frac{j(\mu + \alpha) + B\rho}{B(\mu + \alpha)} + \frac{4\alpha\rho}{B(\mu + \alpha)\lambda_1^2} \right)$ при τ^2 отрицателен, всегда существует два положительных корня τ_1^2, τ_2^2 , если показать, что дискриминант всегда положителен, т. е. выполняется неравенство

$$d(\lambda_1^2) \equiv (j(\alpha + \mu) - B\rho)^2\lambda_1^4 + 8\alpha\rho(j\alpha + B\rho - j\mu)\lambda_1^2 + 16\alpha^2\rho^2 > 0. \quad (3.2.15)$$

Действительно, минимальное значение имеет вид

$$d_{\min} = \frac{64j\rho^2\alpha^3(j\mu - B\rho)}{(j(\mu + \alpha) - B\rho)^2}, \quad (3.2.16)$$

если $j\mu - B\rho > 0$, то $d_{\min} > 0$, тогда и $d(\lambda_1^2) > 0$; если $j\mu - B\rho \leq 0$, то $j\alpha + B\rho - j\mu > 0$, тогда и $d(\lambda_1^2) > 0$.

Таким образом, всегда существуют два положительных корня

$$\begin{aligned} \tau_{1,2}^2 = & \frac{1}{2j\rho} [\lambda_1^2(j(\mu + \alpha) + B\rho) + 4\rho\alpha \\ & \pm (\lambda_1^4(j(\mu + \alpha) - B\rho)^2 + \lambda_1^2(8\alpha\rho(j\alpha + B\rho - j\mu)) + 16\rho^2\alpha^2)^{1/2}], \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

при этом

$$\tau_1^2 > \frac{4\alpha}{j}, \quad \frac{4\alpha}{j} > \tau_2^2 > 0. \quad (3.2.18)$$

Для краевой задачи Штурма — Лиувилля (3.2.9.2) при $\lambda_2^2 = \pi(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2})$ получим то же самое соотношение для τ^2 (3.2.14).

Итак, при $\tau^2 = \tau_1^2$ решаем краевую задачу для амплитуды вращения (3.2.10), для амплитуд перемещения (3.2.11), (3.2.12) получим

$$\begin{aligned} \omega^1(x, y) &= C_{u1}^1 \frac{2\alpha(\frac{\pi m}{b} + \frac{\pi^2 n^2/a^2}{\pi m/b})}{B\pi^2(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}) + 4\alpha - j\tau_1^2} \sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b}y\right), \\ u_1^1(x, y) &= C_{u1}^1 \sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{b}y\right), \\ u_2^1(x, y) &= -\frac{\pi n/a}{\pi m/b} C_{u1}^1 \cos\left(\frac{\pi n}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b}y\right). \end{aligned}$$

Такое же решение получим при $\tau^2 = \tau_2^2$, заменяя τ_1^2 на τ_2^2 . Таким образом, если $\mathbf{f} \neq 0$, то решение исходной линейной задачи (2.4) имеет вид (3.2.1). \square

Таким образом, вихревое решение $\mathbf{f} \neq 0$ (3.1) приводит к краевой задаче (3.2.8) для вспомогательной векторной функции (3.1) и решение исходной задачи (2.4) имеет вид (3.2.1) с двумя микрополярными «сортами» собственных частот, при этом одна частота ограничена снизу: $\tau_1^2 > \frac{4\alpha}{j}$, а вторая сверху: $\tau_2^2 < \frac{4\alpha}{j}$ (3.2.18).

4. Заключение

В случае плоской деформации получено точное аналитическое решение краевой задачи о собственных гармонических колебаниях бесконечно длинного прямоугольного параллелепипеда, помещенного в гладкий (без трения) жесткий котлован с размерами, совпадающими с его размерами, в микрополярной упругости. В отличие от плоской статической задачи о равновесии прямоугольника в микрополярной теории упругости [34] дано решение плоской задачи о колебаниях прямоугольника в микрополярной теории упругости непредставимо в виде

суммы классического и микрополярного решений. В микрополярной среде возникают два «сорта частот» собственных колебаний прямоугольника, одна из которых ограничена снизу, тогда как в классической среде существует только один «сорт» собственных частот. Полученное точное решение может быть использовано для разработки метода идентификации микрополярных параметров среды Коссера по лабораторным измерениям, может также служить тестовым примером для различных численных методов нахождения частот собственных колебаний. Предложенный метод может быть развит на случай других граничных условий и на трехмерный случай.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cosserat E., Cosserat F. *Theorie des corps deformables*. Paris: Herman et Fils, 1909.
2. Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В. Основные уравнения теории упругости с вращательным взаимодействием частиц // *Физика твердого тела*. 1960. Т. 2, № 9. С. 1399–1409.
3. Mindlin R., Tiersten H. Effects of couple-stresses in linear elasticity // *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1962. V. 11, N 1. P. 415–448. <https://doi.org/10.1007/BF00253946>.
4. Koiter W. T. Couple-stress in the theory of elasticity // *Proc. K. Ned. Akad. Wet.* 1964. V. 67. P. 17–44.
5. Пальмов В. А. Основные уравнения теории несимметричной упругости // *Прикл. математика и механика*. 1964. Т. 28, № 3. С. 401–408.
6. Eringen A. Linear theory of micropolar elasticity // *J. Math. Mech.* 1966. V. 15, N 6. P. 909–923.
7. Купразде В. Д. Трехмерные задачи систематической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976.
8. Nowacki W. *Theory of asymmetric elasticity*. Oxford: Pergamon Press, 1986.
9. Eringen A. C. *Microcontinuum field theories. I. Foundations and solids*. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1999.
10. Ерофеев В. И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999.
11. Altenbach H., Maugin G. A., Erofeev V. *Mechanics of generalized continua*. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2011. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-19219-7>
12. Dyszlewicz J. *Micropolar theory of elasticity*. Berlin: Springer-Verl., 2012. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7>.
13. Altenbach H., Forest S. *Generalized continua as models for classical and advanced materials*. Springer, 2016. (Adv. Struct. Mat.; V. 42).
14. Eremeyev V. A., Lebedev L. P., Altenbach H. *Foundations of micropolar mechanics*. Heidelberg: Springer-Verl., 2013. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-28353-6>.
15. Smith A. C. Torsion and vibrations of cylinders of a micropolar elastic solid // *Recent Adv. Eng. Sci.* 1970. V. 5, N 2. P. 129–137.
16. Gauthier R. D., Jahsman W. E. A quest for micropolar elastic constants // *J. Appl. Mech.* 1975. V. 42, N 2. P. 369–374.
17. Reddy Krishna G. V., Venkatasubramanian N. K. Saint-Venant's problem for a micropolar elastic circular cylinder // *Int. J. Eng. Sci.* 1976. V. 14, N 11. P. 1047–1057.
18. Ieşan D., Chirița S. Saint-Venant's problem for composite micropolar elastic cylinders // *Int. J. Eng. Sci.* 1979. V. 17, N 5. P. 573–586.
19. Chirița S. Deformation of loaded micropolar elastic cylinders // *Int. J. Eng. Sci.* 1981. V. 19. P. 845–853.
20. Gauthier R. D. *Experimental investigations on micropolar media* // *Mechanics of Micropolar Media*. Singapore: World Sci., 1982. P. 395–463.
21. Taliercio A. Torsion of micropolar hollow circular cylinders // *Mech. Res. Commun.* 2010. V. 34. P. 406–411.

22. Gauthier R., Jahsman W. Bending of a curved bar of micropolar elastic material // J. Appl. Mech. 1976. V. 43. P. 502–503.
23. Chauhan R. S. Couple stresses in a curved bar // Int. J. Eng. Sci. 1969. V. 7. P. 895–903.
24. Singh S. J. A spherical cavity in a micropolar medium and related problems // Gerlands Beitrage zur Geophysik. Leipzig, 1975. V. 84. P. 55–66.
25. Меладзе Р. В. Решение III и IV краевых задач статической теории микрополярной упругости для шара // Тр. ИПМ им. В. Векуа. 1987. Т. 84. С. 55–66.
26. Kulesh M. A., Matveenko V. P., Shardakov I. N. Parametric analysis of analytical solutions to one-and two-dimensional problems in couple-stress theory of elasticity // Z. Angew. Math. Mech. 2003. V. 23, N 4. P. 238–48.
27. Yang J. F. C., Lakes S. Experimental study of micropolar and couple stress elasticity in compact bone in bending // Biomech. 1981. V. 15. P. 91–98.
28. Yang J. F. C., Lakes S. Transient study of couple stress effects in human compact bone: Torsion // J. Biomech. 1982. V. 103. P. 275–279.
29. Hassanpour S., Heppler G. R. Micropolar elasticity theory: a survey of linear isotropic equations, representative notations, and experimental investigations // Math. Mech. Solids. 2017. V. 22, N 2. P. 224–242.
30. Хомасуридзе Н. Г. О решении трехмерных граничных задач безмоментной и моментной теорий упругости // Исследование некоторых уравнений математической физики. Тбилиси: Изд-во Тбил. гос. ун-та, 1972. Вып. 1. С. 123–147.
31. Григорьев Ю. М. Аналитическое решение некоторых основных задач классической и моментной теорий упругости для прямоугольного параллелепипеда // Моделирование в механике. 1992. Т. 6, № 4. С. 21–26.
32. Григорьев Ю. М. Аналитическое решение задачи о равновесии прямоугольника в моментной теории упругости // Вестн. СВФУ. 2007. № 4. С. 19–26.
33. Григорьев Ю. М. Аналитическое решение задачи о гармонических колебаниях прямоугольника в моментной теории упругости // Моделирование и механика. Красноярск: СибГАУ, 2012. С. 37–42.
34. Grigor'ev Yu. M., Gavrilieva A. A. An equilibrium of a micropolar elastic rectangle with mixed boundary conditions // Continuum Mech. Thermodyn. 2019. V. 31, N 6. P. 1699–1718.
35. Hassanpour S., Heppler G. R. Micropolar elasticity theory: a survey of linear isotropic equations, representative notations, and experimental investigations // Math. Mech. Solids. 2017. V. 22, N 2. P. 224–242.
36. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во Сиб. отд-ния АН СССР, 1962.

Поступила в редакцию 14 марта 2023 г.

После доработки 13 мая 2023 г.

Принята к публикации 29 мая 2023 г.

Григорьев Юрий Михайлович

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,

ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000;

Академия наук Республики Саха (Якутия),

пр. Ленина, 33, Якутск 677007

griguum@yandex.ru

Гаврильева Анна Андреевна

ФИЦ «Якутский научный центр СО РАН»,

Обособленное подразделение

Институт физико-технических проблем Севера им. В. П. Ларионова СО РАН,

ул. Октябрьская, 1, Якутск 677980

gav-ann@yandex.ru

A PROBLEM OF HARMONIC OSCILLATIONS
OF A RECTANGLE IN THE THEORY
OF MICROPOLAR ELASTICITY:
THE ANALYTICAL SOLUTION

Yu. M. Grigor'ev and A. A. Gavrilieva

Abstract: We consider the plane problem of natural harmonic oscillations of a rectangle with mixed boundary conditions in the framework of the linear micropolar theory of elasticity. The micropolar or Cosserat model is used for many modern materials with microstructure, when an elementary particle of a continuous medium has six degrees of freedom. A method for solving the original boundary value problem, when it is divided into separate sequences of consistent scalar boundary value problems, including one for rotational component, is proposed. It was revealed that in a micropolar medium there are two «sorts» of natural oscillations of a rectangle, one of which is bounded from below, while in a classical medium there is only one «sort» of natural oscillations and there are no such restrictions. The proposed method can be developed for the case of other boundary conditions and for the three-dimensional case.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.93.57.002

Keywords: Cosserat model, micropolar theory of elasticity, natural oscillations, rectangle.

REFERENCES

1. Cosserat E. and Cosserat F., *Theorie des Corps Deformables*, Herman et Fils, Paris (1909).
2. Aero E. L. and Kuvshinskij E. V., "Basic equations of elasticity theory with rotational interaction of particles [in Russian]," *Fizika Tvyordogo Tela*, **2**, No. 9, 1399–1409 (1960).
3. Mindlin R. and Tiersten H., "Effects of couple-stresses in linear elasticity," *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **11**, No. 1, 415–448 (1962).
4. Koiter W. T., "Couple-stress in the theory of elasticity," *Proc. K. Ned. Akad. Wet.*, North-Holland Publ., **67**, 17–44 (1964).
5. Pal'mov V. A., "Basic equations of the theory of asymmetric elasticity [in Russian]," *Prikl. Mat. Mekh.*, **28**, No. 3, 401–408 (1964).
6. Eringen A., "Linear theory of micropolar elasticity," *J. Math. Mech.*, **15**, No. 6, 909–923 (1966).
7. Kuprazde V. D., *Three-Dimensional Problems of the Systematic Theory of Elasticity and Thermoelasticity* [in Russian], Nauka, Moscow (1976).
8. Nowacki W., *Theory of Asymmetric Elasticity*, Pergamon Press, Oxford (1986).
9. Eringen A. C., *Microcontinuum Field Theories, I: Foundations and Solids*, Springer, Berlin; Heidelberg; New York (1999).
10. Erofeev V. I., *Wave Processes in Solids with Microstructure* [in Russian], Izdat. Mosk. Univ., Moscow (1999).
11. Altenbach H., Maugin G. A., and Erofeev V., *Mechanics of Generalized Continua*, Springer, Berlin; Heidelberg (2011).

12. *Dyzlewicz J.* Micropolar Theory of Elasticity, Springer, Berlin (2012).
13. *Altenbach H. and Forest S.*, Generalized Continua as Models for Classical and Advanced Materials, Springer (2016) (Adv. Struct. Mat.; vol. 42).
14. *Eremeyev, V. A., Lebedev L. P., and Altenbach H.*, Foundations of Micropolar Mechanics, Springer, Heidelberg (2013).
15. *Smith A. C.*, "Torsion and vibrations of cylinders of a micropolar elastic solid," Recent Adv. Eng. Sci., **5**, No. 2, 129–137 (1970).
16. *Gauthier R. D. and Jahsman W. E.*, "A quest for micropolar elastic constants," J. Appl. Mech., **42**, No. 2, 369–374 (1975).
17. *Krishna Reddy G. V. and Venkatasubramanian N. K.*, "Saint-Venant's problem for a micropolar elastic circular cylinder," Int. J. Eng. Sci., **14**, No. 11, 1047–1057 (1976).
18. *Ieşan D. and Chiriță S.*, "Saint-Venant's problem for composite micropolar elastic cylinders," Int. J. Eng. Sci., **17**, No. 5, 573–586 (1979).
19. *Chiriță S.*, "Deformation of loaded micropolar elastic cylinders," Int. J. Eng. Sci., **19**, 845–853 (1981).
20. *Gauthier R. D.*, "Experimental investigations on micropolar media," in: Mechanics of Micropolar Media, pp. 395–463, World Sci., Singapore (1982).
21. *Taliercio A.*, "Torsion of micropolar hollow circular cylinders," Mech. Res. Commun., **34**, 406–411 (2010).
22. *Gauthier R. and Jahsman W.*, "Bending of a curved bar of micropolar elastic material," J. Appl. Mech., **43**, 502–503 (1976).
23. *Chauhan R. S.*, "Couple stresses in a curved bar," Int. J. Eng. Sci., **7**, 895–903 (1969).
24. *Singh S. J.*, "A spherical cavity in a micropolar medium and related problems," Gerlands Beitr. Geophys., Leipzig, **84**, 55–66 (1975).
25. *Meladze R. V.*, "Solution III and IV of boundary value problems of the static theory of micropolar elasticity for a ball [in Russian]," Tr. IPM im. V. Vekua, **84**, 55–66 (1987).
26. *Kulesh M. A., Matveenko V. P., and Shardakov I. N.*, "Parametric analysis of analytical solutions to one- and two-dimensional problems in couple-stress theory of elasticity," Z. Angew. Math. Mech., **23**, No. 4, 238–248 (2003).
27. *Yang J. F. C. and Lakes S.*, "Experimental study of micropolar and couple stress elasticity in compact bone in bending," Biomech., **15**, 91–98 (1981).
28. *Yang J. F. C. and Lakes S.*, "Transient study of couple stress effects in human compact bone: Torsion," J. Biomech., **103**, 275–279 (1982).
29. *Hassanpour S. and Heppler G. R.*, "Micropolar elasticity theory: a survey of linear isotropic equations, representative notations, and experimental investigations," Math. Mech. Solids, **22**, No. 2, 224–242 (2017).
30. *Homasuridze H. G.*, "On the solution of three-dimensional boundary problems of the momentless and moment theories of elasticity [in Russian]," in: Study of Some Equations of Mathematical Physics, No. 1, pp. 123–147, Izdat. Tbilis. Gos. Univ., Tbilisi (1972).
31. *Grigor'ev Yu. M.*, "Analytical solution of some basic problems of classical and moment theories of elasticity for a rectangular parallelepiped [in Russian]," Model. Mekh., **6**, No. 4, 21–26 (1992).
32. *Grigor'ev Yu. M.*, "Analytical solution of the rectangle equilibrium problem in the moment theory of elasticity [in Russian]," Vestn. SVFU, No. 4, 19–26 (2007).
33. *Grigor'ev Yu. M.*, "Analytical solution of the problem of harmonic oscillations of a rectangle in the moment theory of elasticity [in Russian]," in: Modelling and Mechanics, pp. 37–42, SibGAU, Krasnoyarsk (2012).
34. *Grigor'ev Yu. M. and Gavrilieva A. A.*, "An equilibrium of a micropolar elastic rectangle with mixed boundary conditions," Continuum Mech. Thermodyn., **31**, No. 6, 1699–1718 (2019).
35. *Hassanpour S. and Heppler G. R.*, "Micropolar elasticity theory: a survey of linear isotropic equations, representative notations, and experimental investigations," Math. Mech. Solids, **22**, 224–242 (2017).
36. *Budak B. M., Tikhonov A. N., and Samarsky A. A.*, Collection of Problems in Mathematical

Physics [in Russian], Nauka, Moscow (1980).

Submitted March 14, 2023

Revised May 13, 2023

Accepted May 29, 2023

Yuriy M. Grigor'ev
Ammosov North-Eastern Federal University,
Theoretical Physics Department,
58 Belinsky Street, Yakutsk, 677000 Russia;
Academy of Sciences of the Republic of Sakha (Yakutia),
33 Lenin Avenue, Yakutsk 677007, Russia.
`grigyum@yandex.ru`.

Anna A. Gavrilieva
Larionov Institute of the Physical-Technical Problems of the North
of the Siberian Branch of the RAS,
Division of Federal Research Centre
"The Yakut Scientific Centre of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,"
1 Oktyabrskaya street, Yakutsk 677980, Russia
`gav-ann@yandex.ru`

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА НА ПОЛУОСИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО

И. Е. Егоров, Е. Д. Федотов

Аннотация. Рассмотрена однозначная разрешимость краевой задачи на полуоси для обыкновенного дифференциального уравнения высокого порядка с дробной производной Капуто и постоянными коэффициентами в классе ограниченных функций, где порядок дробной производной Капуто лежит на промежутке $(0, 1)$. Высокие порядки дробной производной получаются путем композиции дробных производных Капуто. Дробная производная Капуто при целых порядках совпадает с классическим понятием производной, при этом рассматриваемая задача становится классической краевой задачей на полуоси для обыкновенного дифференциального уравнения высокого порядка. Для рассматриваемого уравнения построена фундаментальная система решений в классе ограниченных функций. Получены условия типа Лопатинского для граничных операторов, при которых краевая задача однозначно разрешима в классе ограниченных функций.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.49.50.003

Ключевые слова: производная Капуто, краевая задача, решение, оценка.

1. Введение

Теория краевых задач для классических обыкновенных дифференциальных уравнений развивается во многих работах [1–4]. Интерес к исследованию краевых задач для дифференциальных уравнений с дробной производной вызван их применениями в прикладных задачах физики, механики, химии и др., в которых дробные производные описывают наиболее адекватно различные процессы с памятью и наследственными свойствами [5–15].

Похожие постановки задач рассматривались в [16–22]. Однако во всех этих работах в случае производных Капуто дифференциальные уравнения рассматриваются только в классе неограниченных функций. В [23] рассматриваются различные краевые постановки, но не исследуются ограниченные решения. В

Работа И. Е. Егорова (разд. 1, 2) выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (грант № FSRG-2020-0006), работа Е. Д. Федотова (разд. 3) выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение от 02.02.2022 № 075-02-2022-881.

данной работе рассматривается краевая задача на полуоси $t > 0$ для однородного обыкновенного дифференциального уравнения высокого порядка с производной Капуто и постоянными коэффициентами. Получены условия Лопатинского для граничных операторов [4], при которых краевая задача однозначно разрешима в классе ограниченных и абсолютно непрерывных функций.

2. Предварительные сведения

2.1. Дробные интеграл и производные. Как известно, существует большое количество разных определений дробных производных, являющихся обобщением производных целого порядка. В данной работе будем использовать определение дробной производной Капуто [5–15] при $\alpha \in (0, 1)$.

Производная Капуто определена следующей формулой:

$$\partial_{0t}^{\alpha} \phi(t) = \mathcal{J}_{0t}^{1-\alpha} \frac{d}{dt} \phi(t), \quad \alpha \in (0, 1),$$

где $\mathcal{J}_{0t}^{\alpha}$ — дробный интеграл Римана — Лиувилля, определяемый формулой

$$\mathcal{J}_{0t}^{\alpha} \phi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \phi(\tau) d\tau.$$

2.2. Функция Миттаг-Леффлера. Пусть $0 < \alpha < 2$ и $\alpha\pi/2 < \mu < \min(\alpha\pi, \pi)$. Введем обозначения

$$C_{\alpha}^{-} = \{z \mid \mu \leq |\arg(z)| \leq \pi\}, \quad C_{\alpha}^{+} = \{z \mid |\arg(z)| < \mu\}.$$

Функция Миттаг-Леффлера определена следующим рядом [5–7]:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\beta + \alpha k)}, \quad \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R},$$

при этом $E_{\alpha}(z) = E_{\alpha, 1}(z)$.

При $|z| \rightarrow \infty$ и $z \in C_{\alpha}^{+}$ имеем следующую асимптотику:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{(1-\beta)/\alpha} \exp(z^{1/\alpha}) - \sum_{k=1}^N \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + O(|z|^{-1-N}).$$

Также при $0 < \alpha < 2$, $\beta \in \mathbb{R}$ существуют такие $C_1, C_2, C_3 > 0$, что [7]

$$\begin{aligned} |E_{\alpha, \beta}(z)| &\leq C_1(1 + |z|)^{(1-\beta)/\alpha} \exp(\operatorname{Re}(z^{1/\alpha})) + \frac{C_2}{1 + |z|}, \quad z \in C_{\alpha}^{+}, \\ |E_{\alpha, \beta}(z)| &\leq \frac{C_3}{1 + |z|}, \quad z \in C_{\alpha}^{-}. \end{aligned} \tag{1}$$

Рассмотрим производные функции Миттаг-Леффлера:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} E_{\alpha, \beta}(z) &= \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\beta + \alpha k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k z^{k-1}}{\Gamma(\beta + \alpha k)} = z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k z^k}{\Gamma(\beta + \alpha k)} \\ &= (\alpha z)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha k + \beta - 1) z^k - (\beta - 1) z^k}{\Gamma(\beta + \alpha k)} = \frac{1}{\alpha z} (E_{\alpha, \beta-1}(z) - (\beta - 1) E_{\alpha, \beta}(z)). \end{aligned}$$

Их можно получить в другой записи:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{kz^{k-1}}{\Gamma(\beta + \alpha k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)z^k}{\Gamma(\beta + \alpha + \alpha k)} = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha k + \alpha + \beta - 1)z^k - (\beta - 1)z^k}{\Gamma(\beta + \alpha + \alpha k)},$$

$$\frac{d}{dz} E_{\alpha, \beta}(z) = \frac{1}{\alpha} (E_{\alpha, \beta + \alpha - 1}(z) - (\beta - 1)E_{\alpha, \beta + \alpha}(z)).$$

Объединяя оценку (1) для обеих записей $\frac{d}{dz} E_{\alpha, \beta}(z)$, получим

$$\left| \frac{d}{dz} E_{\alpha, \beta}(z) \right| \leq \frac{C}{1 + |z|^2}, \quad 0 < \alpha < 2, \quad z \in C_{\alpha}^{-}.$$

Аналогичную оценку получим и для n -й производной:

$$\left| \frac{d^n}{dz^n} E_{\alpha, \beta}(z) \right| \leq \frac{C}{1 + |z|^{n+1}}, \quad 0 < \alpha < 2, \quad z \in C_{\alpha}^{-}.$$

3. Постановка задачи и разрешимость краевой задачи

Рассмотрим дробно-дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами

$$P_m(\partial_{0t}^{\alpha}) = \sum_{k=0}^m a_k (\partial_{0t}^{\alpha})^k, \quad 0 < \alpha < 1,$$

при этом $a_m = 1$. Предположим, что уравнение $P_m(\lambda) = 0$ не имеет корней таких, что $|\arg \lambda| = \pi\alpha/2$. Введем множества

$$\mathbb{C}_{\alpha}^{-} = \{z : \pi\alpha/2 < |\arg z| \leq \pi\}, \quad \mathbb{C}_{\alpha}^{+} = \{z : |\arg z| < \pi\alpha/2\}.$$

Обозначим через λ_k^{-} корни уравнения $P_m(\lambda) = 0$ такие, что $\lambda \in \mathbb{C}_{\alpha}^{-}$, и через λ_k^{+} — такие, что $\lambda \in \mathbb{C}_{\alpha}^{+}$. Определим полиномы

$$L^{-}(\lambda) = \prod_{k=1}^n (\lambda - \lambda_k^{-}), \quad L^{+}(\lambda) = \prod_{k=1}^{m-n} (\lambda - \lambda_k^{+}),$$

при этом в случае $n = m$ полагаем $L^{+}(\lambda) = 1$.

Рассмотрим краевую задачу вида

$$P_m(\partial_{0t}^{\alpha})u = 0, \quad t > 0, \quad b_j(\partial_{0t}^{\alpha})u|_{t=0} = \phi_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad \sup_{t>0} |u(t)| < \infty, \quad (2)$$

где $b_j(\partial_{0t}^{\alpha})$ — дифференциальные операторы порядка $m_j \leq m - 1$. Также предполагаем, что многочлены $b_j(\lambda)$ линейно независимы.

Решение ищем в классе функций, ограниченных на полуоси и таких, что

$$u \in C([0, \infty]), \quad (\partial_{0t}^{\alpha})^s u \in C([0, \infty]), \quad s = 1, \dots, m,$$

$$\left(\frac{d}{dt} \right)^s u \in C((0, \infty]), \quad s = 1, \dots, m.$$

Представим многочлены $b_j(\lambda)$ в виде

$$b_j(\lambda) = q_j(\lambda)L^{-}(\lambda) + \beta_j(\lambda), \quad (3)$$

где $q_j(\lambda)$ и $\beta_j(\lambda)$ — многочлены и при этом степень последнего не превышает $n - 1$. Пусть $\beta_j(\lambda) = \beta_{j1} + \beta_{j2}\lambda + \dots + \beta_{jn}\lambda^{n-1}$. Введем матрицу

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \dots & \beta_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n-1,1} & \beta_{n-1,2} & \dots & \beta_{n-1,n} \\ \beta_{n,1} & \beta_{n,2} & \dots & \beta_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Далее полагаем, что граничные операторы удовлетворяют условию Лопатинского

$$\det B \neq 0. \quad (4)$$

Лемма 1. Пусть λ_j — корень уравнения $P_m(\lambda) = 0$ с кратностью $m_j \leq m$. Тогда функция

$$u_k(t) = \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^k E_\alpha(\lambda t^\alpha) \Big|_{\lambda=\lambda_j}, \quad 0 \leq k \leq m_j - 1,$$

является решением уравнения

$$P_m(\partial_{0t}^\alpha)u = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$P_m(\partial_{0t}^\alpha)E_\alpha(\lambda t^\alpha) = P_m(\lambda)E_\alpha(\lambda t^\alpha).$$

Дифференцируя данное равенство по λ , получаем

$$P_m(\partial_{0t}^\alpha) \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^k E_\alpha(\lambda t^\alpha) = \sum_{j=0}^k C_k^j \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^j P_m(\lambda) \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^{k-j} E_\alpha(\lambda t^\alpha).$$

Пологая в последнем равенстве $\lambda = \lambda_j$, будем иметь

$$P_m(\partial_{0t}^\alpha)u_k(t) = 0, \quad t > 0,$$

так как

$$\left(\frac{d}{d\lambda} \right)^s P_m(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_j} = 0, \quad 0 \leq s \leq k \leq m_j - 1.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Последовательность

$$u_k(t) = \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^j E_\alpha(\lambda t^\alpha) \Big|_{\lambda=\lambda_k}, \quad j = 0, \dots, m_k - 1, \quad k = 1, \dots, p,$$

линейно независима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для некоторых постоянных $C_{k,j}$ имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^{m_k-1} C_{k,j} \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^j E_\alpha(\lambda t^\alpha) \Big|_{\lambda=\lambda_k} = 0.$$

Применив к нему преобразование Лапласа по t , получим [22]

$$\sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^{m_{k-1}} C_{k,j} \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^j \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_k} = 0.$$

Преобразование Лапласа для функции Миттаг-Леффлера можно получить суммированием почленного преобразования Лапласа ряда, которым определена данная функция. Избавимся от $s^{\alpha-1}$ в числителе и далее произведем замену $s^\alpha = y$:

$$\sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^{m_{k-1}} C_{k,j} \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^j \frac{1}{y - \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_k} = 0.$$

Проведем обратное преобразование Лапласа по y :

$$0 = \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^{m_{k-1}} C_{k,j} \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^j e^{\lambda x} \Big|_{\lambda=\lambda_k} = \sum_{k=1}^p e^{\lambda_k x} \left[\sum_{j=0}^{m_{k-1}} C_{k,j} x^j \right].$$

Из последнего видно, что равенство выполняется, только если все $C_{k,j} = 0$. Лемма доказана.

Теорема 1. Краевая задача (2) имеет единственное решение при любых ϕ_j тогда и только тогда, когда b_j линейно независимы, т. е. выполнено (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $u(t)$ — решение уравнения $P_m(\partial_{0t}^\alpha)u = 0$ и $|u(t)| < \infty$ при $t \geq 0$, то $u(t)$ будет также решением уравнения

$$L^-(\partial_{0t}^\alpha)u(t) = 0. \quad (5)$$

Действительно, поскольку $P_m(\lambda) = L^-(\lambda)L^+(\lambda)$ и $L^-(\lambda)$ взаимно прост с $L^+(\lambda)$ то

$$u(t) = \sum_{k=1}^n c_k u_k^-(t) + \sum_{k=1}^{m-n} d_k u_k^+(t) = u^-(t) + u^+(t),$$

где $u_k^-(t)$ — фундаментальная система решений (5), а $u_k^+(t)$ соответственно для $L^+(\partial_{0t}^\alpha)u(t) = 0$.

В качестве фундаментальной системы решений уравнения (5) можно взять систему

$$u_k^-(t) = \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^j E_\alpha(\lambda t^\alpha) \Big|_{\lambda=\lambda_k^-}, \quad j = 0, \dots, m_k - 1,$$

где m_k — кратность корня λ_k^- и $m_1 + m_2 + \dots + m_p = n$. Аналогично можно выбрать $u_k^+(t)$ для $L^+(\partial_{0t}^\alpha)u(t) = 0$, ν_k — кратность корня λ_k^+ и $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_q = m - n$.

Учитывая, что $\lambda_k^- \in \mathbb{C}_\alpha^-$, а также соответствующие оценки для функции Миттаг-Леффлера, заключаем, что $|u^-(t)| < \infty$ при $t \geq 0$. С другой стороны, $|u^+(t)| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Поэтому если $u(t)$ — ограниченное решение уравнения

$P_m(\partial_{0t}^\alpha)u = 0$, то $d_k = 0$, т. е. $u(t) = u^-(t)$. Учитывая вышесказанное, заключаем, что решение краевой задачи (2) при $f(t) = 0$ сводится к нахождению решения краевой задачи

$$L^-(\partial_{0t}^\alpha)u = 0, \quad t > 0, \quad \beta_j(\partial_{0t}^\alpha)u|_{t=0} = \phi_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Эта задача эквивалентна следующей задаче:

$$\partial_{0t}^\alpha \mathbf{u}(t) = A\mathbf{u}(t), \quad t > 0, \quad B\mathbf{u}(t)|_{t=0} = \Phi, \quad (6)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n^- & -a_{n-1}^- & \dots & -a_1^- \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \dots & \beta_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n-1,1} & \beta_{n-1,2} & \dots & \beta_{n-1,n} \\ \beta_{n,1} & \beta_{n,2} & \dots & \beta_{n,n} \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \dots \\ \phi_{n-1} \\ \phi_n \end{pmatrix}$$

и элементы a_j^- , $\beta_{i,j}$ являются коэффициентами многочленов

$$L^-(\lambda) = \prod_{k=1}^n (\lambda - \lambda_k^-) = \sum_{j=0}^n a_j^- \lambda^{n-j}, \quad \beta_i(\lambda) = \sum_{j=1}^n \beta_{j,i} \lambda^{j-1}. \quad (7)$$

Также $\mathbf{u}(t) = (u(t), \partial_{0t}^\alpha u(t), \dots, (\partial_{0t}^\alpha)^{n-1} u(t))$.

Решение задачи (6) можно записать в виде $\mathbf{u}(t) = E_\alpha(At^\alpha)c$, и при этом $Bc = \Phi$. Однозначная разрешимость c при любых ϕ_j соответствует линейной независимости β_j , или же $\det(B) \neq 0$.

Теорема 2. Если выполнено условие Лопатинского (4), то краевая задача (2) однозначно разрешима при любых ϕ_j , $j = 1, \dots, n$, и справедлива оценка

$$|u(t)| \leq c \sum_{j=1}^n |\phi_j| \quad (8)$$

где $c > 0$ не зависит от ϕ_1, \dots, ϕ_n .

Доказательство. В силу теоремы 1 из условия Лопатинского следует единственность решения краевой задачи (2). Пусть b^{kj} — элементы обратной матрицы Лопатинского B^{-1} и a_j^- определены в (7), причем $a_0^- = 1$. Введем полиномы

$$L_k^-(\lambda) = \sum_{j=0}^k a_j^- \lambda^{k-j}, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad N_j(\lambda) = \sum_{k=1}^n b^{kj} L_{n-k}^-(\lambda), \quad j = 1, \dots, n.$$

Тогда решение краевой задачи (2) имеет вид

$$u(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\phi_j}{2\pi i} \int_{\Gamma^-} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha) N_j(\lambda)}{L^-(\lambda)} d\lambda, \quad (9)$$

контур Γ^- содержит все λ_k^- и лежит внутри \mathbb{C}_α^- .

В силу теоремы Коши имеем

$$P_m(\partial_{0t}^\alpha)u(t) \equiv \sum_{j=1}^n \frac{\phi_j}{2\pi i} \int_{\Gamma^-} E_\alpha(\lambda t^\alpha) L^+(\lambda) N_j(\lambda) d\lambda = 0.$$

Выполнение краевых условий следует из равенств [4]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^-} \frac{b_k(\lambda) N_j(\lambda)}{L^-(\lambda)} d\lambda = \delta_j^k, \quad k, j = 1, \dots, n.$$

Используя п. 2 и оценивая контурный интеграл в (9), получаем оценку (8). Теорема доказана.

Благодарность. Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам за ряд полезных замечаний и рекомендации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Физматлит, 2009.
2. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1970.
3. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
4. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. кн., 1998.
5. Oldham K. B., Spanier J. The fractional calculus. New York: Acad. Press, 1974.
6. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
7. Podlubny I. Fractional differential equations. San Diego: Acad. Press, 1999.
8. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.
9. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005.
10. Мамчур М. О. Краевые задачи для уравнений и систем уравнений с частными производными дробного порядка. Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2013.
11. Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent // Ann. Geofis. 1966. V. 19. P. 383–393.
12. Марзан С. А. Нелинейное дифференциальное уравнение дробного порядка с дробной производной Капуто в пространстве непрерывных функций // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. Минск, 2004. Т. 12, № 2. С. 99–103.
13. Kilbas A. A., Marzan S. A. Cauchy problem for differential equation with Caputo derivative // Fract. Calc. Appl. Anal. 2004. V. 7, N 3. P. 297–321.
14. Kilbas A. A. New trends on fractional integral and differential equations // Тр. геометрического семинара. Казанский гос. ун-т. Уч. зап. Сер. физ.-мат. науки. 2005. Т. 147, № 1. С. 72–106.
15. Gomoyunov M. I. On representation formulas for solutions of linear differential equations with Caputo fractional derivatives // Fractional Calc. Appl. Anal. 2020. V. 23, N 4. P. 1141–1160. <https://doi.org/10.1515/fca-2020-0058>.
16. Atanackovic T., Dolicanin D., Pilipovic S., Stankovic B. Cauchy problems for some classes of linear fractional differential equations // Fract. Calc. Appl. Anal. 2014. V. 17, N 4. P. 1039–1059. DOI: 10.2478/s13540-014-0213-1.
17. Bonilla B., Rivero M., Trujillo J. J. On systems of linear fractional differential equations with constant coefficients // Appl. Math. Comput. 2007. V. 187, N 1. 68778. DOI: 10.1016/j.amc.2006.08.104.
18. Chikriy A. A., Matichin I. I. Presentation of solutions of linear systems with fractional derivatives in the sense of Riemann–Liouville, Caputo and Miller–Ross // J. Autom. Inf. Sci. 2008. V. 40, N 6. P. 1–11. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v40.i6.10.

19. Diethelm K. The analysis of fractional differential equations. An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type. Berlin: Springer-Verl., 2010. (Lect. Notes Math.; V. 2004).
20. Duan J. A generalization of the Mittag-Leffler function and solution of system of fractional differential equations // Adv. Differ. Equ. 2018. Art. no. 239. DOI: 10.1186/s13662-018-1693-9.
21. Idczak D., Kamocki R. On the existence and uniqueness and formula for the solution of R-L fractional Cauchy problem in R^n // Fract. Calc. Appl. Anal. 2011. V. 14, N 4. P. 538–553. DOI: 10.2478/s13540-011-0033-5.
22. Bateman Manuscript Project. Higher Transcendental Functions (H. Bateman, A. Erdélyi, ed.). V. 3. New York: McGraw-Hill, 2006.
23. Ahmad B., Henderson J., Luca R. Boundary value problems for fractional differential equations and systems. Hackensack, NJ: World Sci., 2021 (Trends Abstract Appl. Anal.; V. 9).

Поступила в редакцию 15 февраля 2022 г.

После доработки 2 мая 2023 г.

Принята к публикации 29 мая 2023 г.

Егоров Иван Егорович

Научно-исследовательский институт математики СВФУ,

ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000

ivanegorov51@mail.ru

Федотов Егор Дмитриевич

Якутское отделение Регионального

научно-образовательного математического центра

«Дальневосточный центр математических исследований»

ул. Белинского, 58, Якутск 677891

egorfedotov2011@gmail.com

A BOUNDARY VALUE PROBLEM
ON THE SEMI-AXIS FOR AN ORDINARY
DIFFERENTIAL EQUATION
WITH A FRACTIONAL CAPUTO DERIVATIVE
I. E. Egorov and E. D. Fedotov

Abstract: The paper considers the unique solvability of a boundary value problem on the semiaxis for a higher-order ordinary differential equation with a fractional Caputo derivative and constant coefficients in the class of bounded functions, where the order of the fractional Caputo derivative lies in the interval $(0, 1)$. Higher orders of the fractional derivative are obtained by composing fractional Caputo derivatives. A special case of the fractional Caputo derivative for integer orders of the derivative coincides with the classical concept of the derivative and the problem under consideration becomes a classical boundary value problem on the half-axis for a higher-order ordinary differential equation. For the equation under consideration, a fundamental system of solutions in the class of bounded functions is constructed. Conditions of the Lopatinsky type for boundary operators are obtained under which the boundary value problem is uniquely solvable in the class of bounded functions.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.49.50.003

Keywords: Caputo derivative, boundary value problem, solution, estimate.

REFERENCES

1. *Petrovsky I. G.*, Lectures on the Theory of Ordinary Differential Equations [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2009).
2. *Pontryagin L. S.*, Ordinary Differential Equations [in Russian], Nauka, Moscow (1970).
3. *Hartman F.*, Ordinary Differential Equations [in Russian], Mir, Moscow (1970).
4. *Demidenko G. V. and Uspensky S. V.*, Equations and Systems That Are Not Resolved with Respect to the Highest Derivative [in Russian], Nauchn. Kniga, Novosibirsk (1998).
5. *Oldham K. B. and Spanier J.*, The Fractional Calculus, Acad. Press, New York (1974).
6. *Samko S. G., Kilbas A. A., and Marichev O.I.*, Fractional Integrals and Derivatives and Some of Their Applications [in Russian], Nauka i Tekhnika, Minsk (1987).
7. *Podlubny I.*, Fractional Differential Equations, Acad. Press, San Diego (1999).
8. *Nakhushev A. M.*, Fractional Calculus and Its Applications [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2003).
9. *Pskhu A. V.*, Equations in Partial Derivatives of Fractional Order [in Russian], Nauka, Moscow (2005).
10. *Mamchuev M. O.*, Boundary Value Problems for Equations and Systems of Equations with Partial Derivatives of Fractional Order [in Russian], Izdat. KBNTs RAN, Nalchik (2013).
11. *Caputo M.*, "Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent," *Ann. Geofis.*, **19**, 383–393 (1966).
12. *Marzan S. A.*, "Nonlinear differential equation of fractional order with fractional Caputo derivative in the space of continuous functions," *Tr. Inst. Mat. NAN Belarusi, Minsk*, **12**, No. 2, 99–103 (2004).

13. Kilbas A. A and Marzan S. A., "Cauchy problem for differential equation with Caputo derivative," *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **7**, No. 3, 297–321 (2004).
14. Kilbas A. A., "New trends on fractional integral and differential equations," *Uch. Zap. Kazan. Gos. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, **147**, No. 1, 72–106 (2005).
15. Gomoyunov M. I., "On representation formulas for solutions of linear differential equations with Caputo fractional derivatives," *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **23**, No. 4, 1141–1160 (2020).
16. Atanackovic T., Dolicanin D., Pilipovic S., and Stankovic B., "Cauchy problems for some classes of linear fractional differential equations," *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **17**, No. 4, 1039–1059 (2014).
17. Bonilla B., Rivero M., and Trujillo J. J., "On systems of linear fractional differential equations with constant coefficients," *Appl. Math. Comput.*, **187**, No. 1, 68–78 (2007).
18. Chikriy A. A. and Matichin I. I., "Presentation of solutions of linear systems with fractional derivatives in the sense of Riemann–Liouville, Caputo and Miller–Ross," *J. Autom. Inf. Sci.*, **40**, No. 6, 1–11 (2008).
19. Diethelm K., *The Analysis of Fractional Differential Equations, An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*, Springer, Berlin (2010) (Lect. Notes Math.; vol. 2004).
20. Duan J., "A generalization of the Mittag-Leffler function and solution of system of fractional differential equations," *Adv. Differ. Equ.*, Article No. 239 (2018).
21. Idczak D. and Kamocki R., "On the existence and uniqueness and formula for the solution or R-L fractional Cauchy problem in R^n ," *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **14**, No. 4, 538–553 (2011).
22. *Bateman Manuscript Project*, *Higher Transcendental Functions* (H. Bateman and A. Erdélyi, ed.), vol. 3, McGraw-Hill, New York (1953).
23. Ahmad B., Henderson J., and Luca R., *Boundary Value Problems for Fractional Differential Equations and Systems*, World Sci., Hackensack, NJ (2021) (Trends Abstract Appl. Anal.; vol. 9).

Submitted February 15, 2022

Revised May 2, 2023

Accepted May 29, 2023

Ivan E. Egorov
 Ammosov North-Eastern Federal University,
 Scientific Research Institute of Mathematics,
 58 Belinsky Street, Yakutsk 677891, Russia
 ivanegorov51@mail.ru

Egor D. Fedotov
 Yakutsk Branch of the Regional Scientific and Educational Mathematical Center
 "Far Eastern Center of Mathematical Research,"
 48 Kulakovskiy Street, Yakutsk 677000, Russia
 egorfedotov2011@gmail.com

ЗАДАЧА О Т-ОБРАЗНОМ СОПРЯЖЕНИИ ДВУХ ТОНКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ ТИМОШЕНКО В ДВУМЕРНОМ УПРУГОМ ТЕЛЕ

Т. С. Попова

Аннотация. Исследуется задача о равновесии двумерного упругого тела, содержащего два контактирующих тонких включения прямолинейной формы. Включения являются упругими и моделируются в рамках теории балок Тимошенко. Включения пересекаются под прямым углом, и одно из включений отслаивается от упругой матрицы, образуя трещину. Задача ставится как вариационная, при этом получена полная дифференциальная формулировка в виде краевой задачи, в том числе в общей точке включений выписаны условия сопряжения. На берегах разреза задаются граничные условия вида неравенств. Доказана эквивалентность вариационной и дифференциальной постановок задачи при условии достаточной гладкости решений. Обоснован предельный переход по параметру жесткости одного из включений.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.88.57.004

Ключевые слова: вариационное неравенство, включение Тимошенко, тонкое упругое включение, трещина, условия непроникания, нелинейные граничные условия, задача сопряжения.

1. Введение

Задачи о сопряжении тонких включений в упругом теле могут возникать при моделировании деформирования композитов с тонкими хаотично расположенными короткими волокнами. При этом концентрации напряжений, возникающие вблизи тонких включений, осложнены проблемой контакта между включениями, а также их возможным отслоением от упругой матрицы. Задачи сопряжения актуальны с математической точки зрения и требуют корректного обоснования, а также с точки зрения приложений, некоторые примеры и теоремы можно найти в [1]. Одним из подходов при математическом моделировании тонкого упругого включения является использование моделей тонких упругих балок (см., например, [2–6]). Тогда постановка задачи о равновесии системы, состоящей из упругого тела с расположенными в нем контактирующими тонкими включениями, приводит к изучению контактного взаимодействия тел разных размерностей (двумерная упругая матрица и тонкое одномерное включение), а также сопряжения двух и более включений. В работах [7, 8] исследованы

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-00469), <https://rscf.ru/project/23-21-00469/>.

задачи о сопряжении тонкого включения Тимошенко с другими видами тонких включений при их концевом контакте, т. е. при расположении включений на одной прямой. Задачи о Т-образных сопряжениях включений Бернулли — Эйлера и тонких жестких включений рассмотрены в [9, 10]. В настоящей работе рассматривается задача об ортогональном Т-образном сопряжении двух тонких упругих включений, моделируемых в рамках теории балки Тимошенко и расположенных в двумерном упругом теле. Изучены случаи отслаивания одного из включений и случай без отслоения. Одной из целей исследования является получение условий сопряжения в точке контакта. Полученные условия сравнивались с известными соотношениями для контактирующих балок и стержней, а также с условиями, характерными для различных дефектов балок таких, как трещины и разрезы [11–16]. Отслоение включения моделируется как трещина, на одном из берегов которой прикреплено тонкое включение. На берегах трещины задаются краевые условия типа неравенств, исключающие взаимное проникание точек противоположных берегов трещины друг в друга. Нелинейность данного вида граничных условий приводит к необходимости привлечения методов вариационных неравенств для исследования поставленной задачи. С помощью этого метода получен полный вид краевой задачи и показано, что дифференциальная и вариационная формулировки являются в определенном смысле эквивалентными. Отдельно рассмотрена задача с параметром, характеризующим жесткость одного из включений. Доказано, что при стремлении данного параметра к бесконечности упругое включение переходит в тонкое жесткое, приведено точное обоснование предельного перехода. Для случая включений без отслоения задача минимизации функционала энергии ставится на всем пространстве, а не на множестве, определяемом с помощью нелинейных граничных условий, как в случае с трещиной отслоения. Вариационная формулировка в случае неотслоившегося включения имеет вид уравнения.

Формулировки различных задач о трещинах и основные подходы для их изучения подробно изложены в [17, 18]. Отметим, что указанный подход применим и для задач о равновесии неупругих тел с трещинами [19–23], а также позволяет строить алгоритмы численного решения, соответствующие результаты для модели одного включения Тимошенко можно найти в [24]. Модели тонких жестких включений, в том числе корректность постановок, численное моделирование, случаи взаимодействия жестких включений изучались в [25–29]. Сопряжения упругих объектов разных размерностей изучались в [30], задачи сопряжения балок и пластин — в [31–33].

2. Постановка задачи

Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset R^2$ с липшицевой границей Γ , при этом $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$. Единичный вектор нормали к Γ обозначим через n . В области Ω рассмотрим пересекающиеся линии γ и γ_3 , где $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{(0, 0)\}$, $\gamma_1 = (-1, 0) \times \{0\}$, $\gamma_2 = (0, 1) \times \{0\}$, $\gamma_3 = \{0\} \times (-1, 0)$. При этом будем считать, что $(\bar{\gamma} \cup \bar{\gamma}_3) \subset \Omega$. Введем обозначение для области с разрезом: $\Omega_c = \Omega \setminus \left(\bigcup_{i=1}^3 \bar{\gamma}_i \right)$ (рис. 1).

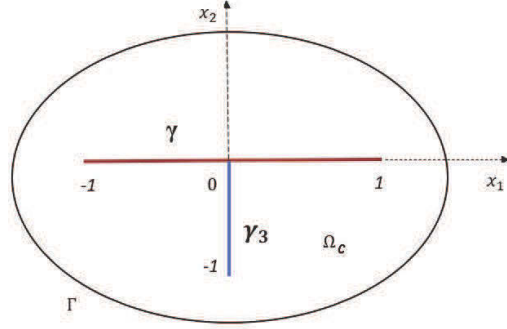


Рис.1. Т-образное сопряжение тонких включений.

Область Ω_c задает форму двумерного тела из упругого материала, линии γ и γ_3 соответствуют двум сопрягающимся включениям. Поскольку точка сопряжения является внутренней для включения γ , то постановка задачи включает отдельные части γ_1 и γ_2 для этого включения, которые будем рассматривать как отдельные включения, соединенные между собой в условиях идеального сцепления. Тело закреплено по краю вдоль кривой Γ_D и испытывает внешние нагрузки на Γ_N .

Считаем также, что область Ω_c с помощью кривых Σ и S может быть разбита на подобласти Ω_I , $I = 0, 1, 2$, с липшицевыми границами таким образом, чтобы выполнялись условия $\gamma \subset \Sigma$, $\gamma_3 \subset S$, $(0, 0) \in \partial S$, $\text{meas}(\partial\Omega_I \cap \Gamma_D) > 0$, $I = 0, 1, 2$. Единичные векторы нормали и касательной к Σ и S обозначим через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ и $\tau = (\nu_2, -\nu_1)$. Заметим, что

$$\nu = \begin{cases} (0, 1) & \text{на } \gamma, \\ (1, 0) & \text{на } \gamma_3, \end{cases} \quad \tau = \begin{cases} (1, 0) & \text{на } \gamma, \\ (0, -1) & \text{на } \gamma_3. \end{cases}$$

Будем считать, что горизонтальное включение γ отслаивается от упругой матрицы с образованием трещины. При этом разрез, соответствующий трещине, имеет два берега γ^+ и γ^- , и включение остается прикрепленным к нижнему берегу γ^- . Вертикальное включение γ_3 не имеет отслоений.

Пусть вектор-функция $u = (u_1, u_2)$ задает перемещения точек тела Ω_c , при этом u_i соответствует перемещениям вдоль оси x_i , $i = 1, 2$. Для компонент тензора деформаций и тензора напряжений тела введем следующие формулы:

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, \quad \sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, 2,$$

где $\xi_{,j} = \frac{\partial \xi}{\partial x_j}$. Коэффициенты $a_{ijkl}(x)$, $i, j, k, l = 1, 2$, — компоненты тензора модулей упругости A , удовлетворяющие условиям

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij},$$

$$a_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geq c_0|\xi|^2 \quad \forall \xi_{ij} = \xi_{ji},$$

где c_0 — положительная постоянная. Всюду в тексте по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Тонкие упругие включения γ и γ_3 моделируются в рамках теории тонкой балки Тимошенко. Для описания модели данных включений Тимошенко введем вектор-функции $\psi^{(I)} = (w^{(I)}, v^{(I)}, \varphi^{(I)})$, $I = 1, 2, 3$, где $w^{(I)}$ и $v^{(I)}$ — перемещения точек оси включения γ_I вдоль осей x_1 и x_2 соответственно, $\varphi^{(I)}$ — угол поворота нормального сечения γ_I . Поскольку включение γ отслаивается от упругой матрицы с образованием трещины, перемещения точек на противоположных берегах разреза γ могут не совпадать. Для значений некоторой функции ξ на берегах γ^+ и γ^- введем обозначения с верхним индексом: ξ^+ и ξ^- , также введем обозначение для скачка функции на берегах разреза: $[\xi] = \xi^+ - \xi^-$. Аналогичное обозначение будет использовано и для скачка на γ_3 . Горизонтальное включение отслаивается от берега γ^+ и прикреплено к берегу γ^- , поэтому на γ^- задаются условия склейки перемещений точек тела и включения: $u_1^- = w^{(I)}$, $u_2^- = v^{(I)}$ на γ_I , $I = 1, 2$. Вертикальное включение не отслаивается, поэтому на γ_3 выполнены условия $u_1 = w^{(3)}$, $u_2 = v^{(3)}$. В дальнейшем все функции, заданные на γ_1 , γ_2 , будем отождествлять с функциями одной переменной x_1 , а функции, заданные на γ_3 , — с функциями переменной x_2 .

Вначале приведем дифференциальную формулировку рассматриваемой задачи о равновесии двумерного упругого тела, содержащего сопрягающиеся тонкие упругие включения. Для заданной на Γ_N функции $f = (f_1, f_2)$ внешних нагрузок найти в Ω_c поле перемещений $u = (u_1, u_2)$ точек тела и тензор напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}(u)\}$, $i, j = 1, 2$, кроме того, на γ_I найти функции $\psi^{(I)} = (w^{(I)}, v^{(I)}, \varphi^{(I)})$, $I = 1, 2, 3$, такие, что выполнены уравнения равновесия

$$-\operatorname{div} \sigma = 0 \quad \text{в } \Omega_c \quad (1)$$

и краевые условия на внешней границе:

$$u = 0 \text{ на } \Gamma_D, \quad \sigma(u)n = f \text{ на } \Gamma_N, \quad (2)$$

где $\sigma n = (\sigma_{1j}n_j, \sigma_{2j}n_j)$, $j = 1, 2$. На γ_1 , γ_2 и γ_3 выполняются уравнения равновесия, соответствующие модели упругой балки Тимошенко:

$$-w_{,11}^{(I)} = [\sigma_\tau], \quad -v_{,11}^{(I)} - \varphi_{,1}^{(I)} = [\sigma_\nu], \quad -\varphi_{,11}^{(I)} + v_{,1}^{(I)} + \varphi^{(I)} = 0 \text{ на } \gamma_I, \quad I = 1, 2, \quad (3)$$

$$v_{,22}^{(3)} = [\sigma_\tau], \quad -w_{,22}^{(3)} - \varphi_{,2}^{(3)} = [\sigma_\nu], \quad -\varphi_{,22}^{(3)} + w_{,2}^{(3)} + \varphi^{(3)} = 0 \text{ на } \gamma_3, \quad (4)$$

где $\sigma\nu = (\sigma_{1j}\nu_j, \sigma_{2j}\nu_j)$, $\sigma_\nu = \sigma_{ij}\nu_j\nu_i$, $\sigma_\tau = (\sigma\nu)\tau$, $i, j = 1, 2$. Скачки $[\sigma_\nu]$ и $[\sigma_\tau]$ нормальных и касательных напряжений в правых частях уравнений (3) и (4) выражают воздействие на балку окружающей упругой среды. В концевых точках включений, кроме точки сопряжения $(0, 0)$, выполняются граничные условия, соответствующие условиям свободных концов балки:

$$w_{,1}^{(I)} = v_{,1}^{(I)} + \varphi^{(I)} = \varphi_{,1}^{(I)} = 0 \quad \text{при } x_1 = (-1)^I, \quad I = 1, 2, \quad (5)$$

$$v_{,2}^{(3)} = w_{,2}^{(3)} + \varphi^{(3)} = \varphi_{,2}^{(3)} = 0 \quad \text{при } x_2 = -1. \quad (6)$$

Кроме того, на γ_1 , γ_2 и γ_3 задаются условия склейки перемещений точек упругого тела и включений:

$$u_1^- = w^{(I)}, \quad u_2^- = v^{(I)} \text{ на } \gamma_I, \quad I = 1, 2, \quad u_1 = w^{(3)}, \quad u_2 = v^{(3)} \text{ на } \gamma_3. \quad (7)$$

Следующая группа условий составляет систему условий сопряжения в точке контакта включений:

$$w^{(1)}(0) = w^{(2)}(0) = w^{(3)}(0), \quad v^{(1)}(0) = v^{(2)}(0) = v^{(3)}(0), \quad \varphi^{(1)}(0) = \varphi^{(2)}(0), \quad (8)$$

$$w_{,2}^{(3)}(0) + \varphi^{(3)}(0) = w_{,1}^{(2)}(0) - w_{,1}^{(1)}(0), \quad v_{,2}^{(3)}(0) = v_{,1}^{(2)}(0) - v_{,1}^{(1)}(0), \quad (9)$$

$$\varphi_{,1}^{(1)}(0) = \varphi_{,1}^{(2)}(0), \quad \varphi_{,2}^{(3)}(0) = 0. \quad (10)$$

Из условий (8) следует совпадение горизонтальных и вертикальных перемещений всех включений, а также углов поворота для γ_1 и γ_2 . Угол поворота γ_3 не участвует в условиях сопряжения (8), поскольку в точке сопряжения включения γ и γ_3 не соединены. Случай идеального сцепления между включениями γ и γ_3 требует отдельного рассмотрения. Условия (9) характеризуют соотношения для продольных и поперечных сил для γ_1 , γ_2 и γ_3 . Условия (10) показывают, что изгибающие моменты γ_1 и γ_2 также совпадают, в то время как изгибающий момент γ_3 в точке сопряжения равен нулю. Кроме того, на γ выполнен стандартный набор краевых условий, описывающих возможный контакт берегов трещины, включая условие их взаимного непроникания (первое из представленных соотношений):

$$[u]\nu \geq 0, \quad \sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+[u]\nu = 0 \quad \text{на } \gamma. \quad (11)$$

3. Вариационная формулировка задачи

Введем обозначения

$$\chi = (u, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \psi^{(3)}), \quad H_{\Gamma_D}^1(\Omega_c)^2 = \{u \in H^1(\Omega_c)^2 \mid u = 0 \text{ на } \Gamma_D\}$$

и рассмотрим пространство

$$H = \{\chi \mid u \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega_c)^2; \psi^{(I)} \in H^1(\gamma_I)^3, \quad I = 1, 2, 3\}.$$

Множество допустимых функций определим следующим образом:

$$K = \{\chi \in H \mid u_1^- = w^{(I)}, \quad u_2^- = v^{(I)} \text{ на } \gamma_I, \quad I = 1, 2, \\ u_1 = w^{(3)}, \quad u_2 = v^{(3)} \text{ на } \gamma_3, \quad [u]\nu \geq 0 \text{ на } \gamma, \quad \varphi^{(1)}(0) = \varphi^{(2)}(0)\}.$$

Краевую задачу (1)–(11) можно сформулировать в вариационной форме как задачу минимизации функционала энергии

$$\begin{aligned} \Pi(\chi) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_c} \sigma(u) \varepsilon(u) dx - \int_{\Gamma_N} f u ds \\ & + \frac{1}{2} \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} ((w_{,1}^{(I)})^2 + (\varphi_{,1}^{(I)})^2 + (v_{,1}^{(I)} + \varphi)^2) ds \\ & + \frac{1}{2} \int_{\gamma_3} ((v_{,2}^{(3)})^2 + (\varphi_{,1}^{(3)})^2 + (w_{,2}^{(3)} + \varphi)^2) ds \end{aligned}$$

на множестве K . Здесь принято обозначение $\sigma(u) \varepsilon(u) = \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(u)$, $i, j = 1, 2$.

Для вектор-функций $\xi = (p, q, r)$, $\bar{\xi} = (\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$, а также $\phi = (k, l, m)$, $\bar{\phi} = (\bar{k}, \bar{l}, \bar{m})$ введем в рассмотрение следующие билинейные формы:

$$\Phi(\xi, \bar{\xi}) = p_{,1}\bar{p}_{,1} + r_{,1}\bar{r}_{,1} + (q_{,1} + r)(\bar{q}_{,1} + \bar{r}),$$

$$\Psi(\phi, \bar{\phi}) = l_{,2}\bar{l}_{,2} + m_{,2}\bar{m}_{,2} + (k_{,2} + m)(\bar{k}_{,2} + \bar{m}).$$

В принятых обозначениях функционал энергии можно выписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Pi(\chi) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_c} \sigma(u) \varepsilon(u) dx - \int_{\Gamma_N} f u ds \\ & + \frac{1}{2} \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} \Phi(\psi^{(I)}, \psi^{(I)}) ds + \frac{1}{2} \int_{\gamma_3} \Psi(\psi^{(3)}, \psi^{(3)}) ds. \end{aligned}$$

Таким образом, вариационная формулировка состоит в следующем: найти элемент $\chi \in K$, доставляющий минимум функционалу Π :

$$\Pi(\chi) = \inf_{\bar{\chi} \in K} \Pi(\bar{\chi}). \quad (12)$$

Задача (12) имеет единственное решение, удовлетворяющее вариационному неравенству [2]:

$$\begin{aligned} \chi \in K : & \int_{\Omega_c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) dx \\ & + \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} \Phi(\psi^{(I)}, \bar{\psi}^{(I)} - \psi^{(I)}) ds + \int_{\gamma_3} \Psi(\psi^{(3)}, \bar{\psi}^{(3)} - \psi^{(3)}) ds \\ & \geq \int_{\Gamma_N} f(\bar{u} - u) ds \quad \forall \bar{\chi} = (\bar{u}, \bar{\psi}^{(1)}, \bar{\psi}^{(2)}, \bar{\psi}^{(3)}) \in K. \end{aligned} \quad (13)$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. Задача (1)–(11) эквивалентна вариационному неравенству (13) при условии достаточной гладкости решений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены все соотношения (1)–(11). Возьмем $\bar{\chi} \in K$ и умножим уравнение (1) на $\bar{u} - u$, уравнения (3) на $\bar{w}^{(I)} - w^{(I)}$, $\bar{v}^{(I)} - v^{(I)}$, $\bar{\varphi}^{(I)} - \varphi^{(I)}$, $I = 1, 2$, а уравнения (4) — на $\bar{v}^{(3)} - v^{(3)}$, $\bar{w}^{(3)} - w^{(3)}$, $\bar{\varphi}^{(3)} - \varphi^{(3)}$ соответственно. Проинтегрируем первое из полученных равенств по Ω_c , а остальные — по γ_1 , γ_2 , γ_3 , просуммируем их и получим

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_c} \operatorname{div} \sigma(u) (\bar{u} - u) dx - \sum_{I=1}^2 \left(\int_{\gamma_I} (-w_{,11}^{(I)}) (\bar{w}^{(I)} - w^{(I)}) ds \right. \\ & \left. + \int_{\gamma_I} (-v_{,11}^{(I)} - \varphi_{,1}^{(I)}) (\bar{v}^{(I)} - v^{(I)}) ds + \int_{\gamma_I} (-\varphi_{,11}^{(I)} + v_{,1}^{(I)} + \varphi^{(I)}) (\bar{\varphi}^{(I)} - \varphi^{(I)}) ds \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\gamma_3} (-v_{,22}^{(3)}) (\bar{v}^{(3)} - v^{(3)}) ds + \int_{\gamma_3} (-w_{,22}^{(3)} - \varphi_{,2}^{(3)}) (\bar{w}^{(3)} - w^{(3)}) ds \\
& + \int_{\gamma_3} (-\varphi_{,22}^{(3)} + w_{,2}^{(3)} + \varphi^{(3)}) (\bar{\varphi}^{(3)} - \varphi^{(3)}) ds \\
& = \sum_{I=1}^2 \left(\int_{\gamma_I} [\sigma_\tau(u)] (\bar{w}^{(I)} - w^{(I)}) ds + \int_{\gamma_I} [\sigma_\nu(u)] (\bar{v}^{(I)} - v^{(I)}) ds \right) + \\
& + \int_{\gamma_3} (-[\sigma_\tau(u)]) (\bar{v}^{(3)} - v^{(3)}) ds + \int_{\gamma_3} [\sigma_\nu(u)] (\bar{w}^{(3)} - w^{(3)}) ds.
\end{aligned}$$

Применяя интегрирование по частям и учитывая условия (2), (5), (6), (8)–(10), можем записать

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) ds - \int_{\Gamma_N} f(\bar{u} - u) ds \\
& + \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} \Phi(\psi^{(I)}, \bar{\psi}^{(I)} - \psi^{(I)}) ds + \int_{\gamma_3} \Psi(\psi^{(3)}, \bar{\psi}^{(3)} - \psi^{(3)}) ds = L,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
L = & \sum_{I=1}^2 \left(\int_{\gamma_I} [\sigma_\tau(u)] (\bar{w}^{(I)} - w^{(I)}) ds + \int_{\gamma_I} [\sigma_\nu(u)] (\bar{v}^{(I)} - v^{(I)}) ds \right. \\
& \left. - \int_{\gamma_I} [\sigma_\nu(u)(\bar{u} - u)] ds \right) + \int_{\gamma_3} (-[\sigma_\tau(u)]) (\bar{v}^{(3)} - v^{(3)}) ds \\
& + \int_{\gamma_3} [\sigma_\nu(u)] (\bar{w}^{(3)} - w^{(3)}) ds - \int_{\gamma_3} [\sigma_\nu(u)] (\bar{u} - u) ds.
\end{aligned}$$

Для доказательства справедливости вариационного неравенства (13) достаточно показать, что $L \geq 0$. Действительно, используя в выражении для L условия (11), а также свойства элементов $\bar{\chi} \in K$ можно переписать L в виде

$$L = - \int_{\gamma} \sigma_\tau^+(u) [\bar{u}_1 - u_1] ds - \int_{\gamma} \sigma_\nu^+(u) [\bar{u}_2] ds + \int_{\gamma} \sigma_\nu^+(u) [u_2] dx \geq 0.$$

Таким образом, доказано, что имеет место вариационное неравенство (13).

Обратно, пусть имеет место вариационное неравенство (13). Выбирая произвольную функцию $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in C_0^\infty(\Omega_c)^2$ и подставляя в (13) пробную функцию вида $\bar{\chi} = (u \pm \theta, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \psi^{(3)})$, можно получить, что в Ω_c выполнено уравнение (1). Подставим теперь в (13) пробную функцию вида $\bar{\chi} = \chi \pm \tilde{\chi}$, где $\tilde{\chi} = (\tilde{u}, \tilde{\psi}^{(1)}, \tilde{\psi}^{(2)}, \tilde{\psi}^{(3)}) \in K$ такой, что $[\tilde{u}_2] = 0$ на γ . Будем иметь

$$\int_{\Omega_c} \sigma(u) \varepsilon(\tilde{u}) dx + \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} \Phi(\psi^{(I)}, \tilde{\psi}^{(I)}) ds + \int_{\gamma_3} \Psi(\psi^{(3)}, \tilde{\psi}^{(3)}) ds = \int_{\Gamma_N} f \tilde{u} ds.$$

Интегрируя по частям с учетом (1) и (2), запишем

$$\begin{aligned}
& - \sum_{I=1}^2 \left(\int_{\gamma_I} [\sigma_\tau(u)] \tilde{u}_1 ds + \int_{\gamma_I} [\sigma_\nu(u)] \tilde{u}_2 ds + \int_{\gamma_3} [\sigma_\tau(u)] \tilde{u}_2 ds - \int_{\gamma_3} [\sigma_\nu(u)] \tilde{u}_1 ds \right) \\
& - \sum_{I=1}^2 \left(\int_{\gamma_I} w_{,11}^{(I)} \tilde{w}^{(I)} ds + \int_{\gamma_I} (v_{,11}^{(I)} + \varphi_{,1}^{(I)}) \tilde{v}^{(I)} ds + \int_{\gamma_I} (\varphi_{,11}^{(I)} - v_{,1}^{(I)} - \varphi^{(I)}) \tilde{\varphi}^{(I)} ds \right) \\
& - \left(\int_{\gamma_3} v_{,22}^{(3)} \tilde{v}^{(3)} ds + \int_{\gamma_3} (w_{,22}^{(3)} + \varphi_{,2}^{(3)}) \tilde{w}^{(3)} ds + \int_{\gamma_3} (\varphi_{,22}^{(3)} - w_{,2}^{(3)} - \varphi^{(3)}) \tilde{\varphi}^{(3)} ds \right) \\
& + (w_{,1}^{(1)} \tilde{w}^{(1)} + \varphi_{,1}^{(1)} \tilde{\varphi}^{(1)} + (v_{,1}^{(1)} + \varphi^{(1)}) \tilde{v}^{(1)}) \Big|_{-1}^0 \\
& + (w_{,1}^{(2)} \tilde{w}^{(2)} + \varphi_{,1}^{(2)} \tilde{\varphi}^{(2)} + (v_{,1}^{(2)} + \varphi^{(2)}) \tilde{v}^{(2)}) \Big|_0^1 \\
& + (v_{,2}^{(3)} \tilde{v}^{(3)} + \varphi_{,2}^{(3)} \tilde{\varphi}^{(3)} + (w_{,2}^{(3)} + \varphi^{(3)}) \tilde{w}^{(3)}) \Big|_{-1}^0 = 0. \quad (14)
\end{aligned}$$

Пусть $\tilde{u} = 0$ на $\gamma_2^\pm \cup \gamma_3$, а также $\tilde{\varphi}^{(I)} = 0$ на γ_I , $I = 1, 2$. Тогда

$$\begin{aligned}
& - \int_{\gamma_1} [\sigma_\tau(u)] \tilde{u}_1 ds - \int_{\gamma_1} [\sigma_\nu(u)] \tilde{u}_2 ds - \int_{\gamma_1} w_{,11}^{(1)} \tilde{w}^{(1)} ds \\
& - \int_{\gamma_1} (v_{,11}^{(1)} + \varphi_{,1}^{(1)}) \tilde{v}^{(1)} ds - \int_{\gamma_1} (\varphi_{,11}^{(1)} - v_{,1}^{(1)} - \varphi^{(1)}) \tilde{\varphi}^{(1)} ds \\
& - (w_{,1}^{(1)} \tilde{w}^{(1)})(-1) - (\varphi_{,1}^{(1)} \tilde{\varphi}^{(1)})(-1) - ((v_{,1}^{(1)} + \varphi^{(1)}) \tilde{v}^{(1)})(-1) = 0. \quad (15)
\end{aligned}$$

Отсюда, предполагая $\tilde{u}_2 = \tilde{v}^{(1)} = 0$ на γ_1^\pm , $\tilde{\varphi}^{(1)} = 0$ на γ_1 , получим первое уравнение из (3) и первое граничное условие из (5) при $x_1 = -1$. Вернемся к (16). Выберем $\tilde{\varphi}^{(1)} = 0$ на γ_1 . С учетом уже полученных уравнения и граничного условия можно сделать вывод, что на γ_1 выполнены второе уравнение из (3) и второе граничное условие из (5) при $x_1 = -1$. Тогда из (16) можно получить также третье уравнение из (3) и третье условие из (5) при $x_1 = -1$.

Рассмотрим снова (15). Возьмем пробные функции такого вида, что $\tilde{u} = 0$ и $\tilde{\varphi}^{(3)} = 0$ на γ_3 . Рассуждая аналогично тому, как и при получении уравнений на γ_1 , можно показать, что на γ_2 выполнены уравнения (3) и граничные условия (5) в точке $x_1 = 1$.

С учетом полученных уравнений и граничных условий уравнение (15) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
& \int_{\gamma_3} [\sigma_\tau(u)] \tilde{u}_2 ds - \int_{\gamma_3} [\sigma_\nu(u)] \tilde{u}_1 ds \\
& - \left(\int_{\gamma_3} v_{,22}^{(3)} \tilde{v}^{(3)} ds + \int_{\gamma_3} (w_{,22}^{(3)} + \varphi_{,2}^{(3)}) \tilde{w}^{(3)} ds + \int_{\gamma_3} (\varphi_{,22}^{(3)} - w_{,2}^{(3)} - \varphi^{(3)}) \tilde{\varphi}^{(3)} ds \right) \\
& + (v_{,2}^{(3)} \tilde{v}^{(3)} + \varphi_{,2}^{(3)} \tilde{\varphi}^{(3)} + (w_{,2}^{(3)} + \varphi^{(3)}) \tilde{w}^{(3)}) \Big|_{-1}^0 \\
& + (w_{,1}^{(1)} \tilde{w}^{(1)})(0) + (\varphi_{,1}^{(1)} \tilde{\varphi}^{(1)})(0) + ((v_{,1}^{(1)} + \varphi^{(1)}) \tilde{v}^{(1)})(0)
\end{aligned}$$

$$- (w_{,1}^{(2)} \tilde{w}^{(2)})(0) - (\varphi_{,1}^{(2)} \tilde{\varphi}^{(2)})(0) - ((v_{,1}^{(2)} + \varphi^{(2)}) \tilde{v}^{(2)})(0) = 0. \quad (16)$$

Взяв $\tilde{u}_1 = \tilde{\varphi}^{(3)} = 0$ на γ_3 и $\tilde{\varphi}^{(1)}(0) = \tilde{\varphi}^{(2)}(0) = 0$, можем получить отсюда

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3} [\sigma_\tau(u)] \tilde{u}_2 ds - \int_{\gamma_3} v_{,22}^{(3)} \tilde{v}^{(3)} ds + (v_{,2}^{(3)} \tilde{v}^{(3)})|_{-1}^0 \\ + ((v_{,1}^{(1)} + \varphi^{(1)}) \tilde{v}^{(1)})(0) - ((v_{,1}^{(2)} + \varphi^{(2)}) \tilde{v}^{(2)})(0) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

При $\tilde{v}^{(3)}(0) = \tilde{v}^{(2)}(0) = \tilde{v}^{(1)}(0) = 0$ получим первое уравнение из (4) и первое из условий (6). С учетом этих соотношений при $\tilde{v}^{(1)}(0) = \tilde{v}^{(2)}(0) = \tilde{v}^{(3)}(0) = 0$ и $\tilde{\varphi}^{(1)}(0) = \tilde{\varphi}^{(2)}(0) = 0$ из (18) получаем второе из условий сопряжения (9). Возвращаясь к (17), будем иметь

$$\begin{aligned} - \int_{\gamma_3} [\sigma_\nu(u)] \tilde{u}_1 ds - \int_{\gamma_3} (w_{,22}^{(3)} + \varphi_{,2}^{(3)}) \tilde{w}^{(3)} ds - \int_{\gamma_3} (\varphi_{,22}^{(3)} - w_{,2}^{(3)} - \varphi^{(3)}) \tilde{\varphi}^{(3)} ds \\ + (\varphi_{,2}^{(3)} \tilde{\varphi}^{(3)} + (w_{,2}^{(3)} + \varphi^{(3)}) \tilde{w}^{(3)})|_{-1}^0 + (w_{,1}^{(1)} \tilde{w}^{(1)})(0) + (\varphi_{,1}^{(1)} \tilde{\varphi}^{(1)})(0) \\ - (w_{,1}^{(2)} \tilde{w}^{(2)})(0) - (\varphi_{,1}^{(2)} \tilde{\varphi}^{(2)})(0) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Выбирая здесь пробные функции такими, чтобы $\tilde{\varphi}^{(3)} = 0$ на γ_3 , $\tilde{w}^{(1)}(0) = \tilde{w}^{(2)}(0) = \tilde{w}^{(3)}(0) = 0$, а также $\tilde{\varphi}^{(1)}(0) = \tilde{\varphi}^{(2)}(0) = 0$, получим второе уравнение из (4) и второе граничное условие из (6). С учетом полученных соотношений из (16) будем иметь

$$\begin{aligned} - \int_{\gamma_3} (\varphi_{,22}^{(3)} - w_{,2}^{(3)} - \varphi^{(3)}) \tilde{\varphi}^{(3)} ds + (\varphi_{,2}^{(3)} \tilde{\varphi}^{(3)})|_{-1}^0 + ((w_{,2}^{(3)} + \varphi^{(3)}) \tilde{w}^{(3)})(0) \\ + (w_{,1}^{(1)} \tilde{w}^{(1)})(0) + (\varphi_{,1}^{(1)} \tilde{\varphi}^{(1)})(0) - (w_{,1}^{(2)} \tilde{w}^{(2)})(0) - (\varphi_{,1}^{(2)} \tilde{\varphi}^{(2)})(0) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Выбирая пробные функции такими, что $\tilde{\varphi}^{(3)}(0) = 0$, а также $\tilde{w}^{(1)}(0) = \tilde{w}^{(2)}(0) = \tilde{w}^{(3)}(0) = 0$, $\tilde{\varphi}^{(1)}(0) = \tilde{\varphi}^{(2)}(0) = 0$, и подставляя их в (19), получим третье уравнение из (4) и третье условие из (6) при $x_2 = -1$. С учетом этого равенство (19) перепишется в виде

$$\begin{aligned} (\varphi_{,2}^{(3)} \tilde{\varphi}^{(3)})(0) + ((w_{,2}^{(3)} + \varphi^{(3)}) \tilde{w}^{(3)})(0) \\ + (w_{,1}^{(1)} \tilde{w}^{(1)})(0) + (\varphi_{,1}^{(1)} \tilde{\varphi}^{(1)})(0) - (w_{,1}^{(2)} \tilde{w}^{(2)})(0) - (\varphi_{,1}^{(2)} \tilde{\varphi}^{(2)})(0) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следуют условия сопряжения (10) и первое из соотношений (9). Условия (11) могут быть получены стандартным путем, изложенным при доказательстве аналогичных теорем для задач об отслоившемся включении Тимошенко (3). Таким образом, получены все уравнения и соотношения (1)–(11). Теорема доказана.

4. Предельный переход по параметру жесткости

Введем в рассмотрение параметр $\rho > 0$, характеризующий жесткость вертикального включения γ_3 , и будем рассматривать семейство задач о сопряжении упругих включений при различных значениях данного параметра. Нашей

целью является обоснование предельного перехода при $\rho \rightarrow \infty$ и получение формулировки соответствующей задачи. Рассмотрим функционал энергии вида

$$\begin{aligned} \Pi_\rho(\chi) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_c} \sigma(u) \varepsilon(u) dx - \int_{\Gamma_N} f u ds \\ & + \frac{1}{2} \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} \Phi(\psi^{(I)}, \psi^{(I)}) ds + \frac{\rho}{2} \int_{\gamma_3} \Psi(\psi^{(3)}, \psi^{(3)}) ds \end{aligned}$$

и сформулируем следующую задачу минимизации: найти элемент

$$\chi_\rho = (u_\rho, \psi_\rho^{(1)}, \psi_\rho^{(2)}, \psi_\rho^{(3)}) \in K,$$

доставляющий минимум функционалу Π_ρ :

$$\Pi_\rho(\chi_\rho) = \inf_{\bar{\chi} \in K} \Pi_\rho(\bar{\chi}). \quad (20)$$

При каждом фиксированном $\rho > 0$ задача (20) имеет единственное решение, удовлетворяющее вариационному неравенству

$$\begin{aligned} \chi_\rho \in K : \quad & \int_{\Omega_c} \sigma(u_\rho) \varepsilon(\bar{u} - u_\rho) dx \\ & + \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} \Phi(\psi_\rho^{(I)}, \bar{\psi}^{(I)} - \psi_\rho^{(I)}) ds + \rho \int_{\gamma_3} \Psi(\psi_\rho^{(3)}, \bar{\psi}^{(3)} - \psi_\rho^{(3)}) ds \\ & \geq \int_{\Gamma_N} f(\bar{u} - u_\rho) ds \quad \forall \bar{\chi} \in K. \quad (21) \end{aligned}$$

Подставим в (21) пробные элементы вида $\bar{\chi} = 0$ и $\bar{\chi} = 2\chi_\rho$. Тогда будем иметь

$$\int_{\Omega_c} \sigma(u_\rho) \varepsilon(u_\rho) dx + \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} \Phi(\psi_\rho^{(I)}, \psi_\rho^{(I)}) ds + \rho \int_{\gamma_3} \Psi(\psi_\rho^{(3)}, \psi_\rho^{(3)}) ds = \int_{\Gamma_N} f u_\rho ds.$$

Отсюда

$$\|u_\rho\|_{H_{\Gamma_D}^1(\Omega_c)^2} \leq C_1, \quad \|\psi_\rho^{(I)}\|_{H^1(\gamma_I)^3} \leq C_2^{(I)}, \quad I = 1, 2, \quad (22)$$

$$\rho \int_{\gamma_3} \Psi(\psi_\rho^{(3)}, \psi_\rho^{(3)}) ds \leq C_3, \quad \|\psi_\rho^{(3)}\|_{H^1(\gamma_3)^3} \leq C_4 \quad (23)$$

при $\rho \geq \rho_0 > 0$. Из (22), (23) следует, что при $\rho \rightarrow \infty$

$$u_\rho \rightarrow \tilde{u} \text{ слабо в } H_{\Gamma_D}^1(\Omega_c)^2, \quad (24)$$

$$\psi_\rho^{(I)} \rightarrow \tilde{\psi}^{(I)} \text{ слабо в } H^1(\gamma_I)^3, \quad I = 1, 2, 3, \quad (25)$$

$$\tilde{v}_2^{(3)} = 0, \quad \tilde{\varphi}_2^{(3)} = 0, \quad \tilde{w}_2^{(3)} + \tilde{\varphi}^{(3)} = 0 \text{ на } \gamma_3. \quad (26)$$

Значит,

$$\tilde{v}^{(3)} = a_1, \quad \tilde{\varphi}^{(3)} = -a_2, \quad \tilde{w}^{(3)}(x_2) = a_2 x_2 + a_3 \text{ на } \gamma_3, \quad (27)$$

где a_1, a_2, a_3 — постоянные. Определим пространство жестких инфинитезимальных перемещений

$$R(\gamma_3) = \{(\tilde{w}, \tilde{v}) \mid \tilde{w} = \tilde{a}_2 x_2 + \tilde{a}_3, \tilde{v} = \tilde{a}_1 \text{ на } \gamma_3, \tilde{a}_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3\}$$

и множество

$$\begin{aligned} K_R = \{ \xi = (u, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}) \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega_c)^2 \times H^1(\gamma_1)^3 \times H^1(\gamma_2)^3 \mid \\ u_1^- = w^{(I)}, u_2^- = v^{(I)} \text{ на } \gamma_I, I = 1, 2; u|_{\gamma_3} \in R(\gamma_3); \\ [u]\nu \geq 0 \text{ на } \gamma; \varphi^{(1)}(0) = \varphi^{(2)}(0) \}. \end{aligned}$$

Из (24), (25), (27) следует, что $\tilde{\xi} = (\tilde{u}, \tilde{\psi}^{(1)}, \tilde{\psi}^{(2)}) \in K_R$. Возьмем далее $\bar{\xi} = (\bar{u}, \bar{\psi}^{(1)}, \bar{\psi}^{(2)}) \in K_R$ и обозначим $\bar{u}_1 = \bar{w}^{(3)}, \bar{u}_2 = \bar{v}^{(3)}$ на γ_3 . Поскольку $\bar{w}^{(3)} = \bar{a}_2 x_2 + \bar{a}_3, \bar{v}^{(3)} = \bar{a}_1$ на γ_3 , элемент $\bar{\chi} = (\bar{u}, \bar{\psi}^{(1)}, \bar{\psi}^{(2)}, \bar{\psi}^{(3)})$, где $\bar{\psi}^{(3)} = (\bar{w}^{(3)}, \bar{v}^{(3)}, \bar{\varphi}^{(3)})$ и $\bar{\varphi}^{(3)} = -\bar{a}_2$, принадлежит K и его можно подставлять в качестве тестового в (21). Получим

$$\begin{aligned} \chi_\rho \in K : \int_{\Omega_c} \sigma(u_\rho) \varepsilon(\bar{u} - u_\rho) dx \\ + \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} \Phi(\psi_\rho^{(I)}, \bar{\psi}^{(I)} - \psi_\rho^{(I)}) ds + \rho \int_{\gamma_3} \Psi(\psi_\rho^{(3)}, \bar{\psi}^{(3)}) ds \\ \geq \rho \int_{\gamma_3} \Psi(\psi_\rho^{(3)}, \psi_\rho^{(3)}) ds + \int_{\Gamma_N} f(\bar{u} - u_\rho) ds \quad \forall \bar{\chi} \in K. \end{aligned}$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\rho \rightarrow \infty$, будем иметь

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} \in K_R : \int_{\Omega_c} \sigma(\tilde{u}) \varepsilon(\bar{u} - \tilde{u}) dx + \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} \Phi(\tilde{\psi}^{(I)}, \bar{\psi}^{(I)} - \tilde{\psi}^{(I)}) ds \\ \geq \int_{\Gamma_N} f(\bar{u} - \tilde{u}) ds \quad \forall \bar{\xi} \in K_R. \quad (28) \end{aligned}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. При $\rho \rightarrow \infty$ решения χ_ρ задачи (21) сходятся в смысле (24), (25) к решению задачи (28).

Задача (18) описывает Т-образное сопряжение двух тонких включений в упругом теле Ω_c , при этом включение γ — включение Тимошенко, а γ_3 — тонкое жесткое включение.

5. Включение без отслоения

Если оба включения γ и γ_3 не имеют отслоений, дифференциальная постановка задачи имеет следующую форму. Для заданной на Γ_N функции $f = (f_1, f_2)$ внешних нагрузок найти в Ω_c поле перемещений $u = (u_1, u_2)$ точек тела

и тензор напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}(u)\}$, $i, j = 1, 2$, кроме того, на γ_I найти функции $\psi^{(I)} = (w^{(I)}, v^{(I)}, \varphi^{(I)})$, $I = 1, 2, 3$, такие, что выполнены уравнения и соотношения (1)–(6), (8)–(10), а также условия вида

$$u_1 = w^{(I)}, \quad u_2 = v^{(I)} \quad \text{на } \gamma_I, \quad I = 1, 2, 3.$$

Соответствующая вариационная формулировка задачи о Т-образном сопряжении упругих включений без отслоения состоит в следующем. Найти элемент χ , доставляющий минимум функционалу Π в пространстве V , имеющем вид

$$V = \{\chi \in H \mid u_1 = w^{(I)}, \quad u_2 = v^{(I)} \quad \text{на } \gamma_I, \quad I = 1, 2, 3; \quad \varphi^{(1)}(0) = \varphi^{(2)}(0)\}.$$

Таким образом, вариационная формулировка имеет вид

$$\Pi(\chi) = \inf_{\bar{\chi} \in V} \Pi(\bar{\chi}). \quad (29)$$

Задача (29) имеет единственное решение, удовлетворяющее уравнению

$$\begin{aligned} \chi \in V : \quad \int_{\Omega_c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u}) \, dx + \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} \Phi(\psi^{(I)}, \bar{\psi}^{(I)}) \, ds + \int_{\gamma_3} \Psi(\psi^{(3)}, \bar{\psi}^{(3)}) \, ds \\ = \int_{\Gamma_N} f \bar{u} \, ds \quad \forall \bar{\chi} \in V. \end{aligned}$$

Приведенные дифференциальная и вариационная формулировки эквивалентны при условии достаточной гладкости решений. Доказательство можно произвести аналогично доказательству теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
2. Itou H., Khludnev A. M. On delaminated thin Timoshenko inclusions inside elastic bodies // Math. Methods Appl. Sci. 2016. V. 39. P. 4980–4993.
3. Khludnev A. M., Leugering G. R. On Timoshenko thin elastic inclusions inside elastic bodies // Math. Mech. Solids. 2015. V. 20, N 5. P. 495–511.
4. Shcherbakov V. V. The Griffith formula and J -integral for elastic bodies with Timoshenko inclusions // Z. Angew. Math. Mech. 2016. V. 96, N 11. P. 1306–1317.
5. Николаева Н. А. О равновесии упругих тел с трещинами, пересекающими тонкие включения // Сиб. журн. индустр. математики. 2019. Т. 22, № 4. С. 68–80.
6. Khludnev A. M., Popova T. S. Timoshenko inclusions in elastic bodies crossing an external boundary at zero angle // Acta Mech. Solida Sin. 2017. V. 30, N 3. P. 327–333.
7. Khludnev A. M., Faella L., Popova T. S. Junction problem for rigid and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies // Math. Mech. Solids. 2017. V. 22, N 4. P. 737–750.
8. Хлуднев А. М., Попова Т. С. Задача сопряжения упругого включения Тимошенко и полужесткого включения // Мат. заметки СВФУ. 2018. Т. 25, № 1. С. 73–86.
9. Khludnev A. M., Popova T. S. Equilibrium problem for elastic body with delaminated T-shape inclusion // J. Comput. Appl. Math. 2020. V. 376. A. 112870.
10. Khludnev A. M. T-shape inclusion in elastic body with a damage parameter // J. Comput. Appl. Math. 2021. V. 393. A. 113540.
11. Неустроева Н. В., Лазарев Н. П. Задача сопряжения для упругих балок Бернулли — Эйлера и Тимошенко // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 26–37.
12. Боган Ю. А. Осреднение неоднородной упругой балки при сопряжении элементов шарниром конечной жесткости // Сиб. журн. индустр. математики. 1998. Т. 1, № 2. С. 67–72.

13. Leugering G., Nazarov S. A., Slutskiy A. S. The asymptotic analysis of a junction of two elastic beams // *Z. Angew. Math. Mech.* 2019. V. 99. Paper No. e201700192.
14. Leugering G., Nazarov S. A., Slutskiy A. S., Taskinen J. Asymptotic analysis of a bit brace shaped junction of thin rods // *Z. Angew. Math. Mech.* 2020. V. 100. Paper No. e201900227.
15. Caddemi S., Calio I., Cannizzaro F. The influence of multiple cracks on tensile and compressive buckling of shear deformable beams // *Int. J. Solids Structures*. 2013. V. 50, N 20–21. P. 3166–3183.
16. Palmeri A., Cicirello A. Physically-based Dirac's delta functions in the static analysis of multi-cracked Euler–Bernoulli and Timoshenko beams // *Int. J. Solids Structures*. 2011. V. 48, Issues 14–15. P. 2184–2195.
17. Хлуднев А. М. Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
18. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
19. Khludnev A. M., Kovtunen V. A. Analysis of cracks in solids. Southampton; Boston: WIT Press, 2000.
20. Itou H., Kovtunen V. A., Rajagopal K. R. Crack problem within the context of implicitly constituted quasi-linear viscoelasticity // *Math. Models Methods Appl. Sci.* 2019. V. 29, N 2. P. 355–372.
21. Itou H., Kovtunen V. A., Rajagopal K. R. On the states of stress and strain adjacent to a crack in a strain-limiting viscoelastic body // *Math. Mech. Solids*. 2018. V. 23. P. 433–444.
22. Попова Т. С. Задача о равновесии вязкоупругого тела с тонким жестким включением // *Мат. заметки СВФУ*. 2014. Т. 21, № 1. С. 47–55.
23. Popova T. S. Problems of thin inclusions in a two-dimensional viscoelastic body // *J. Appl. Ind. Math.* 2018. V. 12. P. 313–324.
24. Rudoy E. M., Lazarev N. P. Domain decomposition technique for a model of an elastic body reinforced by a Timoshenko's beam // *J. Comput. Appl. Math.* 2018. V. 334. P. 18–26.
25. Khludnev A. M., Leugering G. On elastic bodies with thin rigid inclusions and cracks // *Math. Methods Appl. Sci.* 2010. V. 33, N 16. P. 1955–1967.
26. Lazarev N. P., Popova T. S., Rogerson G. A. Optimal control of the radius of a rigid circular inclusion in inhomogeneous two-dimensional bodies with cracks // *Z. Angew. Math. Phys.* 2018. V. 69. Paper No. 53.
27. Рудой Е. М. Численное решение задачи о равновесии упругого тела с отслоившимся тонким жестким включением // *Сиб. журн. индустр. математики*. 2016. Т. 19, № 2. С. 74–87.
28. Александров В. М., Сметанин Б. И., Соболев Б. В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Физматлит, 1993.
29. Goudarzi M., Dal Corso F., Bigoni D., Simone A. Dispersion of rigid line inclusions as stiffeners and shear band instability triggers // *Int. J. Solids Structures*. 2021. V. 210–211. P. 255–272.
30. Ciarlet P. Mathematical elasticity: Theory of plates. Amsterdam: Elsevier, 1997.
31. Gaudiello A., Monneau R., Mossino J., Murat F., Sili A. On the junction of elastic plates and beams // *C. R. Math.* 2002. V. 335. P. 717–722.
32. Titeux I., Sanchez-Palencia E. Junction of thin plates // *Eur. J. Mech., A, Solids*. 2000. V. 19, N 3. P. 377–400.
33. Gruais I. Modeling of the junction between a plate and a rod in nonlinear elasticity // *Asymptotic Anal.* 1993. V. 7. P. 179–194.

Поступила в редакцию 9 марта 2023 г.

После доработки 20 марта 2023 г.

Принята к публикации 29 мая 2023 г.

Попова Татьяна Семеновна

Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова,

ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000

ptsokt@mail.ru

THE PROBLEM OF T-SHAPED JUNCTION
OF TWO THIN TIMOSHENKO INCLUSIONS
IN A TWO-DIMENSIONAL ELASTIC BODY

T. S. Popova

Abstract: We consider the equilibrium problem for a two-dimensional elastic body containing two contacting thin inclusions of a rectilinear shape. The inclusions are elastic and are modeled within the framework of the theory of Timoshenko beams. The inclusions intersect at a right angle, and one of the inclusions delaminates from the elastic matrix, forming a crack. The problem is posed as a variational one and a complete differential formulation is obtained in the form of a boundary value problem, including junction conditions at a common point of inclusions. On the edges of the cut, boundary conditions of the form of inequalities are specified. The equivalence of the variational and differential formulations of the problem is proved under the condition of sufficient smoothness of the solutions. The passage to the limit with respect to the stiffness parameter of one of the inclusions is substantiated.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.88.57.004

Keywords: variational inequality, Timoshenko inclusion, thin elastic inclusion, crack, non-penetration conditions, nonlinear boundary conditions, junction problem.

REFERENCES

1. Sanchez-Palencia E., Nonhomogeneous Media and Vibration Theory, Springer, New York (1980).
2. Itou H. and Khludnev A. M., “On delaminated thin Timoshenko inclusions inside elastic bodies,” *Math. Meth. Appl. Sci.*, **39**, 4980–4993 (2016).
3. Khludnev A. M. and Leugering G. R., “On Timoshenko thin elastic inclusions inside elastic bodies,” *Math. Mech. Solids*, **20**, No. 5, 495–511 (2015).
4. Shcherbakov V. V., “The Griffith formula and J -integral for elastic bodies with Timoshenko inclusions,” *Z. Angew. Math. Mech.*, **96**, No. 11, 1306–1317 (2016).
5. Nikolaeva N. A., “On equilibrium of the elastic bodies with cracks crossing thin inclusions,” *J. Appl. Ind. Math.*, **13**, 685–697 (2019).
6. Khludnev A. M. and Popova T. S., “Timoshenko inclusions in elastic bodies crossing an external boundary at zero angle,” *Acta Mech. Solida Sin.*, **30**, No. 3, 327–333 (2017).
7. Khludnev A. M., Faella L., and Popova T. S., “Junction problem for rigid and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies,” *Math. Mech. Solids*, **22**, No. 4, 737–750 (2017).
8. Khludnev A. M. and Popova T. S., “On junction problem for elastic Timoshenko inclusion and semi-rigid inclusion [in Russian],” *Mat. Zametki SVFU*, **25**, No. 1, 73–89 (2018).
9. Khludnev A. M. and Popova T. S., “Equilibrium problem for elastic body with delaminated T-shape inclusion,” *J. Comput. Appl. Math.*, **376**, article 112870 (2020).
10. Khludnev A. M., “T-shape inclusion in elastic body with a damage parameter,” *J. Comput. Appl. Math.*, **393**, article 113540 (2021).
11. Neustroeva N. V. and Lazarev N. P., “Junction problem for Euler–Bernoulli and Timoshenko elastic beams [in Russian],” *Sib. Electron. Math. Rep.*, **13**, 26–37 (2016).

12. Bogan Yu. A., "Homogenization of a nonhomogeneous elastic beam with elements joined by a hinge of finite stiffness [in Russian]," *Sib. Zh. Ind. Mat.*, **1**, No. 2, 67–72 (1998).
13. Leugering G., Nazarov S. A., and Slutskiy A. S., "The asymptotic analysis of a junction of two elastic beams," *Z. Angew. Math. Mech.*, **99**, paper No. e201700192 (2019).
14. Leugering G., Nazarov S. A., Slutskiy A. S., and Taskinen J., "Asymptotic analysis of a bit brace shaped junction of thin rods," *Z. Angew. Math. Mech.*, **100**, paper No. 201900227 (2020).
15. Caddemi S., Calio I., and Cannizzaro F., "The influence of multiple cracks on tensile and compressive buckling of shear deformable beams," *Int. J. Solids Structures*, **50**, No. 20–21, 3166–3183 (2013).
16. Palmeri A. and Cicirello A., "Physically-based Dirac's delta-functions in the static analysis of multi-cracked Euler–Bernoulli and Timoshenko beams," *Int. J. Solids Structures*, **48**, No. 14–15, 2184–2195 (2011).
17. Khludnev A. M., *Problems of Elasticity Theory in Nonsmooth Domains* [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2010).
18. Lions J. L., *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires*, Dunod, Paris (1969).
19. Khludnev A. M. and Kovtunen V. A., *Analysis of Cracks in Solids*, Southampton; Boston, WIT Press (2000).
20. Itou H., Kovtunen V. A., and Rajagopal K. R., "Crack problem within the context of implicitly constituted quasi-linear viscoelasticity," *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **29**, No. 2, 355–372 (2019).
21. Itou H., Kovtunen V. A., and Rajagopal K. R., "On the states of stress and strain adjacent to a crack in a strain-limiting viscoelastic body," *Math. Mech. Solids*, **23**, 433–444 (2018).
22. Popova T. S., "The problem of equilibrium of a viscoelastic body with a thin rigid inclusion [in Russian]," *Mat. Zametki SVFU*, **21**, No. 1, 47–55 (2014).
23. Popova T. S., "Problems of thin inclusions in a two-dimensional viscoelastic body," *J. Appl. Ind. Math.*, **12**, 313–324 (2018).
24. Rudoy E. M. and Lazarev N. P., "Domain decomposition technique for a model of an elastic body reinforced by a Timoshenko's beam," *J. Comput. Appl. Math.*, **334**, 18–26 (2018).
25. Khludnev A. M. and Leugering G., "On elastic bodies with thin rigid inclusions and cracks," *Math. Methods Appl. Sci.*, **33**, No. 16, 1955–1967 (2010).
26. Lazarev N. P., Popova T. S., and Rogerson G. A., "Optimal control of the radius of a rigid circular inclusion in inhomogeneous two-dimensional bodies with cracks," *Z. Angew. Math. Phys.*, **69**, paper No. 53 (2018).
27. Rudoy E. M., "Numerical solution of an equilibrium problem for an elastic body with a delaminated thin rigid inclusion [in Russian]," *Sib. Zh. Ind. Mat.*, **19**, No. 2, 74–87 (2016).
28. Alexandrov V. M., Smetanin B. I., and Sobol B. V., *Thin Stress Concentrators in Elastic Bodies* [in Russian], Fizmatlit, Moscow (1993).
29. Goudarzi M., Dal Corso F., Bigoni D., and Simone A., "Dispersion of rigid line inclusions as stiffeners and shear band instability triggers," *Int. J. Solids Structures*, **210–211**, 255–272 (2021).
30. Ciarlet P., *Mathematical Elasticity: Theory of Plates*, Amsterdam, Elsevier (1997).
31. Gaudiello A., Monneau R., Mossino J., Murat F., and Sili A., "On the junction of elastic plates and beams," *C. R., Math.*, **335**, 717–722 (2002).
32. Titeux I. and Sanchez-Palencia E., "Junction of thin plates," *Eur. J. Mech., A, Solids*, **19**, No. 3, 377–400 (2000).
33. Gruais I., "Modeling of the junction between a plate and a rod in nonlinear elasticity," *Asymp-*

totic Anal., **7**, 179–194 (1993).

Submitted March 9, 2023

Revised March 20, 2023

Accepted May 29, 2023

Tatiana S. Popova
Ammosov North-Eastern Federal University,
Institute of Mathematics and Informatics,
48 Kulakovsky Street, Yakutsk, 677000 Russia
`ptsokt@mail.ru`

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ
КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ
ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ
ПАРАМЕТРОВ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

С. Г. Пятков, О. И. Соколов

Аннотация. Рассматривается вопрос о регулярной разрешимости в пространствах Соболева параболических обратных коэффициентных задач в слоистых средах с условиями сопряжения типа дифракции. Решение имеет все обобщенные производные, входящие в уравнение, суммируемые с некоторой степенью. В качестве условий переопределения рассматриваются значения решения в отдельных точках, лежащих внутри области определения. Доказательство основано на получаемых априорных оценках и теореме о неподвижной точке.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.94.19.005

Ключевые слова: параболическое уравнение, обратная задача, начально-краевая задача, существование, единственность.

Введение

Рассматривается вопрос об определении вместе с решением краевой задачи правой части специального вида и коэффициентов в параболическом уравнении. Пусть G — область в \mathbb{R}^n с границей Γ и $Q = (0, T) \times G$. Считаем, что область G разделена на два открытых множества G^+ и G^- , $\overline{G^-} \subset G$, $\overline{G^+} \cup \overline{G^-} = \overline{G}$, $G^+ \cap G^- = \emptyset$, положим $\Gamma_0 = \partial G^+ \cap \partial G^-$, $S_0 = (0, T) \times \Gamma_0$, $S = (0, T) \times \Gamma$. Параболическое уравнение имеет вид

$$u_t + A(t, x, D)u = f(t, x), \quad (t, x) \in Q, \quad (1)$$

где функция f и эллиптический оператор второго порядка A в G^\pm представимы в виде

$$-A(t, x, D) = A_0(t, x, D_x) + \sum_{i=1}^r q_i(t) A_i(t, x, D_x), \quad f = f_0(t, x) + \sum_{i=r+1}^s f_i(t, x) q_i(t),$$
$$A_i = \sum_{k,l=1}^n \partial_{x_l} a_{kl}^i(t, x) \partial_{x_k} + \sum_{k=1}^n a_k^i(t, x) \partial_{x_k} + a_0^i.$$

Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (тема «Аналитическое и численное исследование обратных задач об определении параметров источников атмосферного или водного загрязнения и (или) параметров среды», код темы: FENG-2023-0004).

Уравнение (1) дополняется начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0} = u_0, \quad Bu|_S = g(t, x), \quad (2)$$

где $Bu = u$ или

$$Bu = \frac{\partial u}{\partial N} + \sigma u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} n_j + \sigma u$$

и $n = (n_1, n_2, \dots, n_n)$ — внешняя единичная нормаль к Γ , и условиями сопряжения

$$\frac{\partial u^+}{\partial N}(t, x) = \frac{\partial u^-}{\partial N}(t, x), \quad u^+(t, x) = u^-(t, x), \quad (t, x) \in S_0, \quad (3)$$

где

$$\frac{\partial u^\pm}{\partial N}(t, x_0) = \lim_{\substack{x \in G^\pm \\ x \rightarrow x_0 \in \Gamma_0}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} \nu_j, \quad u^\pm(t, x_0) = \lim_{\substack{x \in G^\pm \\ x \rightarrow x_0 \in \Gamma_0}} u(t, x),$$

$\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ — внешняя единичная нормаль к G^- . Условия переопределения имеют вид

$$u(t, b_j) = \psi_j(t), \quad b_j \in G^+ \cup G^-, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (4)$$

Неизвестными в задаче (1)–(4) являются решение u и функции $q_i(t)$ ($i = 1, \dots, s$). Мы не считаем, что Γ или Γ_0 состоят из одной компоненты связности. Вообще говоря, их может быть много и на каждой из них есть свои граничные условия или соответственно свои условия сопряжения. В процессе доказательств мы не оговариваем это дополнительно, чтобы не усложнять изложение.

Проблемы вида (1)–(4) возникают при описании процессов теплопереноса, диффузионных процессов, процессов фильтрации, в экологии и во многих других областях. В частности, при описании температурных режимов почв северных территорий возникают задачи об определении теплофизических и массообменных характеристик, которые находятся с помощью решения обратной задачи (см. [1]). Теоретических результатов, посвященных задачам (1)–(4), довольно мало или нет совсем, в отличие от случая одной среды. Опишем полученные результаты в последнем случае. Отметим монографию [2], посвященную обратным параболическим задачам, и монографии [3–6], где описаны основные постановки, в том числе и в параболическом случае. Стоит отметить работы [7–10], где в случае $n = 1$ определяется теплопроводность как функция времени и получены теоремы существования и единственности, а в качестве данных берутся значения решения в отдельных точках, возможно, являющихся граничными. Теплопроводность, не зависящая от одной из пространственных переменных, и часть коэффициентов по данным Коши на боковой поверхности цилиндра и интегральным данным определяется в [11, 12]. Получены теоремы существования и единственности решений и оценки устойчивости. В монографии [3] (см. также, например, результаты работы [13] и др.) получены теоремы существования и единственности решений, в том числе и старших коэффициентов, не зависящих от некоторых пространственных переменных с данными

переопределения на сечениях пространственной области плоскостями. В силу специфики метода все коэффициенты также не зависят от части пространственных переменных. Более полные результаты получены в цикле работ [14–17], где показана корректность обратных задач об определении коэффициентов в случае задания решения на пространственных многообразиях или в отдельных точках, как и в нашем случае. Обратные задачи с точечными данными исследовались в работах А. И. Прилепко и его учеников, и ряд интересных задач описан в [2]. Аналогичные результаты, но при несколько других условиях на данные и в других пространствах получены в [18, 19]. Определение коэффициента теплопроводности $\lambda(T)$ по значениям решения на некоторой кривой, лежащей на границе, исследуется в [20], и получены теорема единственности и оценки устойчивости. Наша работа близка к работе [21], где рассматривалась обратная задача об определении старших коэффициентов в уравнении в случае обычной начально-краевой задачи (не задачи сопряжения). Был исследован вопрос о корректности задачи.

Численному решению задач (1)–(4) посвящено огромное количество работ. Подавляющее большинство численных методов основаны на сведении задачи к задаче оптимального управления и минимизации соответствующего целевого функционала (см. [22–25]). С различными постановками и результатами можно ознакомиться также в работах [26–30].

Опишем содержание работы. В разд. 1 описаны условия на данные задачи и приведены вспомогательные результаты. Разд. 2 посвящен основным результатам.

1. Определения и вспомогательные результаты

Пусть E — банахово пространство. Через $L_p(G; E)$ (G — область в \mathbb{R}^n) обозначается пространство измеримых функций, определенных на G , со значениями в E и с конечной нормой $\|u(x)\|_E \|_{L_p(G)}$ [31]. Обозначения для пространств Соболева $W_p^s(G; E)$, $W_p^s(Q; E)$ и т. д. стандартные (см. [32, 33]). Если $E = \mathbb{R}$ или $E = \mathbb{R}^n$, то последнее пространство обозначаем просто через $W_p^s(Q)$. Определения пространств Гёльдера $C^{\alpha, \beta}(\overline{Q})$, $C^{\alpha, \beta}(\overline{S})$ могут быть найдены, например, в [34]. Под нормой вектора понимаем сумму норм координат. Для данного интервала $J = (0, T)$ положим $W_p^{s, r}(Q) = W_p^s(J; L_p(G)) \cap L_p(J; W_p^r(G))$. Соответственно $W_p^{s, r}(S) = W_p^s(J; L_p(\Gamma)) \cap L_p(J; W_p^r(\Gamma))$. Пусть $(u, v) = \int_G u(x)v(x) dx$. Все рассматриваемые пространства и коэффициенты уравнения (1) считаем вещественными. Далее считаем, что параметр $p > n + 2$ зафиксирован и

$$\Gamma, \Gamma_0 \in C^2. \quad (5)$$

Определение границы класса C^s , $s \geq 1$, можно найти в [34, гл. 1]. Пусть $B_\delta(b)$ — шар радиуса δ с центром в точке b . Зафиксируем параметр $\delta > 0$ такой, что $\overline{B_\delta(b_i)} \cap (\Gamma_0 \cup \Gamma) = \emptyset$ для всех i , $\overline{B_\delta(b_i)} \cap \overline{B_\delta(b_j)} = \emptyset$ для $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, s$. Если необходимо, его всегда можно уменьшить. Введем обозначения: $Q^\tau =$

$(0, \tau) \times G$, $G_\delta = \cup_i B_\delta(b_i)$, $S_0^\tau = (0, \tau) \times \Gamma_0$, $Q^\pm = (0, T) \times G^\pm$, $Q_\tau^\pm = (0, \tau) \times G^\pm$, $S^\tau = (0, \tau) \times \Gamma$.

Условия согласования и гладкости данных могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} u_0(x) \in W_p^{2-2/p}(G^\pm), \quad B(0, x, D)u_0|_\Gamma = g(0, x), \quad g \in W_p^{k_0, 2k_0}(S), \quad p > n + 2, \\ \frac{\partial u_0^+}{\partial N}(x) = \frac{\partial u_0^-}{\partial N}(x), \quad u_0^+(x) = u_0^-(x), \quad x \in \Gamma_0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $k_0 = s_1 = 1 - 1/2p$ в случае $Bu = u$ и $k_0 = s_0 = 1/2 - 1/2p$ в противном случае;

$$u_0(x) \in W_p^{4-2/p}(G_\delta), \quad f_j \in L_p(0, T; W_p^2(G_\delta)) \cap L_p(Q), \quad j = 0, r+1, \dots, s, \quad (7)$$

$$\psi_j \in W_p^{3/2-1/2p}(0, T), \quad \psi_j(0) = u_0(b_j), \quad j \leq s. \quad (8)$$

Ниже будут встречаться включения вида $f \in L_p(0, T; W_p^1(G_\delta))$ или аналогичные, где соответствующее множество G_δ состоит из нескольких компонент связности (в данном случае $B_\delta(b_j)$). По определению это означает, что $f|_{B_\delta(b_j)} \in L_p(0, T; W_p^1(B_\delta(b_j)))$ для всех j . В качестве нормы в этом пространстве рассматриваем сумму норм по соответствующим компонентам связности. Аналогично для других множеств. Мы считаем, что

$$a_{ij}^k \in C([0, T]; C^1(\overline{G})), \quad a_l^k \in L_p(Q), \quad \sigma, a_{ij}^k|_S \in W_p^{s_0, 2s_0}(S), \quad a_{ij}^k|_{S_0} \in W_p^{s_0, 2s_0}(S_0); \quad (9)$$

$$\begin{aligned} a_{ij}^k \in L_\infty(0, T; W_p^2(G_\delta)), \quad a_l^k \in L_p(0, T; W_p^2(G_\delta)), \\ a_{ij}^k(t, b_a), a_l^k(t, b_a), f_m(t, b_a) \in W_p^{s_0}(0, T), \end{aligned} \quad (10)$$

для $i, j = 1, 2, \dots, n$, $l = 0, 1, \dots, n$, $k = 0, 1, \dots, r$, $a = 1, \dots, s$, $m = 0, r+1, \dots, s$. Ввиду условий (10), (7) следы $f_m(t, b_p)$, $a_l^k(t, b_j)$ определены и $f_m(t, b_p)$, $a_l^k(t, b_j) \in L_p(0, T)$; более того $f_m(t, x)$, $a_l^k(t, x) \in C(\overline{G}_\delta; L_p(0, T))$ (после, может быть, изменения на множестве меры 0) (см. [35, § 2–4, соотношения (3.1)–(3.9), следствие 4.3]).

Пусть E — банахово пространство. Введем пространство

$$\widetilde{W}_p^s(0, T; E) = \left\{ v \in W_p^s(0, T; E) : \int_0^T \frac{\|v(t)\|_E^p}{t^{sp}} dt < \infty \right\}, \quad s \in (0, 1].$$

Оно состоит из $v \in W_p^s(0, T; E)$ таких, что $v(0) = 0$ при $s > 1/p$, и совпадает с $W_p^s(0, T; E)$ при $s < 1/p$. Положим

$$\|v(t)\|_{\widetilde{W}_p^s(0, T; E)}^p = \left\| \frac{\|v\|_E}{t^s} \right\|_{L_p(0, T)}^p + \int_0^T \int_0^T \frac{\|v(t) - v(\tau)\|_E^p}{|t - \tau|^{1+sp}} dt d\tau.$$

Если $E = \mathbb{R}$ или $E = \mathbb{C}$, пишем $\widetilde{W}_p^s(0, T)$.

Лемма 1. Пусть $s \in (1/p, 1]$ и $q(t) \in \widetilde{W}_p^s(0, \tau)$, $v(t) \in W_p^s(0, T)$ (или $v(t) \in \widetilde{W}_p^s(0, T)$). Тогда $q(t)v(t) \in \widetilde{W}_p^s(0, \tau)$ и справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|qv\|_{\widetilde{W}_p^s(0, \tau)} &\leq c\|q\|_{\widetilde{W}_p^s(0, \tau)}\|v\|_{W_p^s(0, T)}, \text{ или} \\ \|qv\|_{\widetilde{W}_p^s(0, \tau)} &\leq c\|q\|_{\widetilde{W}_p^s(0, \tau)}\|v\|_{\widetilde{W}_p^s(0, \tau)}, \quad \|q\|_{C([0, \tau])} \leq c\|q\|_{\widetilde{W}_p^s(0, \tau)}, \end{aligned} \quad (11)$$

где постоянная c не зависит от $\tau \in (0, T]$. Если $q(t) \in W_p^s(0, T)$, $v(t) \in W_p^s(0, T)$, то $q(t)v(t) \in W_p^s(0, T)$.

Утверждение вытекает непосредственно из определений норм (см. также лемму 2 в [21]).

Рассмотрим матрицу B_0 размера $s \times s$ со строками

$$A_1(0, b_j, D)u_0(b_j), \dots, A_r(0, b_j, D)u_0(b_j), f_{r+1}(0, b_j), \dots, f_s(0, b_j), \quad j \leq s.$$

Потребуем, чтобы

$$\det B_0 \neq 0. \quad (12)$$

Рассмотрим системы уравнений

$$B_0 \vec{q}_0 = \vec{g}_0, \quad (13)$$

$$\vec{g}_0 = (\psi_{1t}(0) - A_0(0, b_1, D)u_0 - f_0(0, b_1), \dots, \psi_{st}(0) - A_0(0, b_s, D)u_0 - f_0(0, b_s))^T.$$

В силу (12) система (13) имеет единственное решение $q_0 = (q_{01}, \dots, q_{0s})$. Положим $a_{pl} = \sum_{i=0}^r a_{pl}^i q_{0i}$ и далее будем считать, что

$$\sum_{p,l=1}^n a_{pl}(t, x) \xi_p \xi_l \geq \delta_0 |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall (t, x) \in Q.$$

где δ_0 — положительная постоянная. Тогда оператор

$$-A^0 = A_0(t, x, D_x) + \sum_{i=1}^r q_{0i} A_i(t, x, D_x)$$

эллиптичен в $G^+ \cup G^-$ и можно рассмотреть задачу

$$\begin{aligned} u_t + A^0(t, x, D_x)u &= f \quad ((t, x) \in Q), \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad Bu|_S = g, \\ \frac{\partial u^+}{\partial N}(x, t) &= \frac{\partial u^-}{\partial N}(x, t), \quad u^+(t, x) = u^-(t, x), \quad (t, x) \in S_0. \end{aligned} \quad (14)$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия (5), (6), (9) и $f \in L_p(Q)$. Тогда существует единственное решение $u \in W_p^{1,2}(Q^\pm)$ задачи (14). Справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_p^{1,2}(Q^+)} + \|u\|_{W_p^{1,2}(Q^-)} \\ \leq c[\|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(Q^+)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(Q^-)} + \|f\|_{L_p(Q)} + \|g\|_{W_p^{k_0, 2k_0}(S)}]. \end{aligned} \quad (15)$$

Если $g = 0$, то справедлива оценка

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|u\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} \leq c[\|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(Q_\tau^+)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(Q_\tau^-)} + \|f\|_{L_p(Q_\tau)}], \quad (16)$$

где постоянная c не зависит от $u_0, f, \tau \in (0, T]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение теоремы доказано в случае не зависящих от t коэффициентов в [36, гл. 6]. В принципе, утверждение теоремы в случае произвольных коэффициентов вытекает из результатов этой работы и стандартных рассуждений, например, тех, что использованы в [37]. Случай зависящих от t коэффициентов был рассмотрен в [38, теорема 7.1]. К сожалению, эти результаты посвящены в основном случаю, когда $\Gamma \cap \Gamma_0 \neq \emptyset$, и поэтому изложение и формулировки достаточно громоздки. Второе утверждение и оценка (16) вытекают из стандартных рассуждений, совпадающих, например, с теми, которые использованы в [19, теорема 2; 18, теорема 1].

Теорема 2. Пусть выполнены условия (5)–(7), (9), (10), а также пусть $f \in L_p(0, T; W_p^2(G_\delta))$, $f \in L_p(Q)$. Тогда существует единственное решение $u \in W_p^{1,2}(Q^\pm)$ задачи (14) такое, что $u \in L_p(0, T; W_p^4(G_{\delta_1}))$, $u_t \in L_p(0, T; W_p^2(G_{\delta_1}))$ для всех $\delta_1 \in (0, \delta)$. Если $g = 0$ и $\delta_1 < \delta$, то справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \|u\|_{W_p^{1,2m}(Q_\tau^+)} + \|u\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|u\|_{L_p(0,T;W_p^4(G_{\delta_1}))} + \|u_t\|_{L_p(0,T;W_p^2(G_{\delta_1}))} \\ & \leq c[\|u_0\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(G^-)} + \|u_0\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(G^+)} + \|u_0\|_{W_p^{4-\frac{2}{p}}(G_\delta)} \\ & \quad + \|f\|_{L_p(Q^\tau)} + \|f\|_{L_p(0,\tau;W_p^2(G_\delta))}], \end{aligned} \quad (17)$$

где постоянная c не зависит от $u_0, f, \tau \in (0, T]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение о дополнительной гладкости решений и оценке получается с использованием теоремы 1 и повторяет доказательство теоремы 1 в [18] (см. также доказательство теоремы 4, п. 3, § 2, гл. 4 в [39]). Утверждение также содержится в [21, теорема 1], которая здесь применима.

Обозначим левую часть неравенства в (17) через $\|u\|_{H_{\delta_1}^\tau}$, а величину $\|f\|_{L_p(Q^\tau)} + \|f\|_{L_p(0,\tau;W_p^2(G_\delta))}$ — через $\|f\|_{W_\delta^\tau}$. Соответствующие банаховы пространства обозначаются через $H_{\delta_1}^\tau$ и W_δ^τ соответственно. Пространство $H_{\delta_1}^\tau$ состоит из функций $u \in L_p(Q^\tau)$ таких, что $u|_{G^\pm} \in W_p^{1,2}(Q_\tau^\pm)$, $u \in L_p(0, T; W_p^4(G_{\delta_1}))$, $u_t \in L_p(0, T; W_p^2(G_{\delta_1}))$, u удовлетворяет однородным начальным и граничным условиям и условиям сопряжения в (14). Параметр $\delta_1 \in (0, \delta)$ зафиксируем.

2. Основные результаты

Теорема 3. Пусть выполнены условия (5)–(10), (12). Тогда найдется число $\tau_0 \in (0, T]$ такое, что на $(0, \tau_0)$ существует единственное решение $(u, q_1, q_2, \dots, q_s)$ задачи (1)–(4) такое, что

$$u \in W_p^{1,2}(Q_{\tau_0}^\pm), \quad u \in L_p(0, \tau_0; W_p^4(G_{\delta_1})), \quad u_t \in L_p(0, \tau_0; W_p^2(G_{\delta_1}))$$

для всех $\delta_1 \in (0, \delta)$, $q_j \in W_p^{s_0}(0, \tau_0)$, $j = 1, 2, \dots, s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\vec{q} = (q_1, \dots, q_s)^T$. Найдем решение Φ задачи (14), где вместо функции f возьмем функцию

$$f = f_0 + \sum_{i=r+1}^s f_i(t, x) q_{0i}$$

а в качестве функций g, u_0 — данные из (1)–(3). В силу теорем 1, 2 существует решение задачи (14) такое, что $\Phi \in W_p^{1,2}(Q^\pm)$, $\Phi \in L_p(0, T; W_p^4(G_{\delta_2}))$, $\Phi_t \in L_p(0, T; W_p^2(G_{\delta_2}))$ для всех $\delta_2 \in (0, \delta)$. Сделав замену переменных $u = v + \Phi$, придем к задаче

$$Lv = v_t + S(\vec{\mu})v = (A^0 - A)\Phi + \sum_{i=r+1}^s f_i(t, x)\mu_i(t), \quad (t, x) \in Q, \quad S(\vec{\mu}) = A^0 + A(\vec{\mu}), \quad (18)$$

где

$$-A(\vec{\mu}) = \sum_{i=1}^r \mu_i(t)A_i(t, x, D_x), \quad \mu_i(t) = q_i(t) - q_{0i};$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad Bv|_S = 0, \quad \frac{\partial v^+}{\partial N}(x, t) = \frac{\partial v^-}{\partial N}(t, x), \quad v^+(t, x) = v^-(t, x) \quad (t, x) \in S_0; \quad (19)$$

$$v(t, b_j) = \psi_j(t) - \Phi(t, b_j) = \tilde{\psi}_j, \quad i = r+1, \dots, s. \quad (20)$$

Имеем $D^\alpha \Phi \in W_p^{1,2}((0, T) \times B_{\delta_1}(b_j))$ для всех j и $|\alpha| \leq 2$. В силу теорем вложения $D_x^\alpha \Phi_i(t, x) \in C^{1-(n+2)/2p, 2-(n+2)/p}(\overline{(0, T) \times B_{\delta_1}(b_j)})$ (см. § 6.3 и теорему 1 (разд. «замечания», с. 424) в [40]). Тогда $D_x^\alpha \Phi(t, b_j) \in W_p^{1/2-1/2p}(0, T)$, поскольку $1-(n+2)/2p > 1/2-1/2p$, и произведения $a_{ij}^k(t, b_j)D_x^\alpha \Phi(t, b_j)$, $a_i^k(t, b_j)D_x^\alpha \Phi(t, b_j)$ принадлежат $W_p^{1/2-1/2p}(0, T)$ (по лемме 1). Значит, $A^0 \Phi(t, b_j) \in W_p^{1/2-1/2p}(0, T)$ (после, может быть, изменения на множестве меры нуль). Рассмотрим правую часть в уравнении. Имеем $f_k(t, b_j) \in W_p^{1/2-1/2p}(0, T)$ (в силу (10)). Из уравнения для Φ вытекает, что $\Phi_t(t, b_j) \in W_p^{1/2-1/2p}(0, T)$, т. е. $\Phi(t, b_j) \in W_p^{3/2-1/2p}(0, T)$ для всех j . Таким образом, задача (1)–(4) сведена к эквивалентной и более простой задаче (18)–(20), которую и будем исследовать. Рассмотрим выражение

$$L(\vec{\xi}) = \sum_{ij=1}^n \tilde{a}_{ij} \xi_i \xi_j, \quad \tilde{a}_{ij} = \sum_{k=1}^r a_{ij}^k \mu_k,$$

и найдем величину R_0 такую, что

$$|L(\vec{\xi})| \leq \delta_0 |\xi|^2 / 2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall (t, x) \in Q, \quad \forall \vec{\mu} : \|\vec{\mu}\|_{C([0, \tau])} \leq R_0.$$

Тогда оператор $S(\vec{\mu})$ эллиптический и будут справедливы теоремы 1, 2 с оператором $S(\vec{\mu})$ вместо оператора A^0 . Фиксируя $\delta_3 \in (\delta_1, \delta)$, для каждой функции $\mu_j \in \widetilde{W}_p^{1/2-1/2p}(0, \tau)$ найдем, используя теоремы 1, 2 с δ_3 вместо δ , решение v задачи (18), (19) на интервале $(0, \tau)$ такое, что $v \in L_p(0, \tau; W_p^4(G_{\delta_2}))$, $v_t \in L_p(0, \tau; W_p^2(G_{\delta_2}))$ для всех $\delta_2 \in (0, \delta_3)$. Имеем отображение $\vec{\mu} \rightarrow v = v(\vec{\mu})$ ($\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_s)$). Изучим его свойства. Пусть

$$\vec{\mu} \in B_{R_0} = \{\vec{\mu} \in \widetilde{W}_p^{1/2-1/2p}(0, \tau) : \|\vec{\mu}\|_{\widetilde{W}_p^{1/2-1/2p}(0, \tau)} \leq R_0\}.$$

Отметим, что $W_p^{1/2-1/2p}(0, \tau) \subset C([0, \tau])$, поэтому без ограничения общности можем считать, что $\|\vec{\mu}\|_{C([0, \tau])} \leq \|\vec{\mu}\|_{\widetilde{W}_p^{1/2-1/2p}(0, \tau)} \leq R_0$ для всех $\vec{\mu} \in B_{R_0}$ (см.

лемму 1). Используя теорему 2, получим уравнение

$$v = L^{-1}f, \quad f = (A^0 - A)\Phi + \sum_{i=r+1}^s f_i(t, x)\mu_i(t) \quad (x \in G^\pm). \quad (21)$$

Фиксируем $\delta_2 \in (\delta_1, \delta_3)$. Имеем оценку

$$\|v\|_{H_{\delta_2}^\tau} = \|L^{-1}f\|_{H_{\delta_2}^\tau} \leq c\|f\|_{W_{\delta_3}^\tau}, \quad (22)$$

где

$$f = \sum_{i=1}^r \mu_i A_i \Phi(t, x) + \sum_{i=r+1}^s \mu_i f_i(t, x), \quad (t, x) \in Q^\pm. \quad (23)$$

Из этого представления и условий на коэффициенты имеем

$$\|f\|_{W_{\delta_3}^\tau} \leq c_2 \|\vec{\mu}\|_{C([0, \tau])}, \quad (24)$$

где постоянная c_2 не зависит от τ и зависит от норм коэффициентов в Q и величин $\|f_i\|_{W_{\delta_3}^\tau}$, $\|\Phi\|_{H_{\delta_3}^\tau}$ (их можно заменить на $\|f_i\|_{W_{\delta_3}^\tau}$, $\|\Phi\|_{H_{\delta_3}^\tau}$). Считая, что $\vec{\mu}_i \in B_{R_0}$ ($i = 1, 2$), рассмотрим два решения v_1, v_2 задачи (18), (19) (или уравнения (21)), отвечающие двум различным наборам $\vec{\mu}_i$ ($\vec{\mu}_i = (\mu_{1i}, \mu_{2i}, \dots, \mu_{si})$, $i = 1, 2$). Вычитая второе уравнение (18) из первого, получим, что разность $\omega = v_2 - v_1$, $v_i = v(\vec{\mu}^i)$, удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \omega_t + S\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{2}\right)\omega &= \sum_{j=1}^r (\mu_{j2}(t) - \mu_{j1}(t))A_j(t, x, D)(v_1 + v_2)/2 \\ &+ \sum_{j=1}^r (\mu_{j2}(t) - \mu_{j1}(t))A_j(t, x, D)\Phi + \sum_{j=r+1}^s f_j(t, x)(\mu_{j2}(t) - \mu_{j1}(t)). \end{aligned} \quad (25)$$

Имеем $(\mu_1 + \mu_2)/2 \in B_{R_0}$, и тем самым справедлива оценка (см. (22))

$$\|\omega\|_{H_{\delta_1}^\tau} \leq c\|\tilde{f}\|_{W_{\delta_2}^\tau}, \quad (26)$$

$$\tilde{f} = \sum_{j=1}^r (\mu_{j2}(t) - \mu_{j1}(t))A_j(t, x, D)(v_1 + v_2)/2 + \sum_{j=r+1}^s f_j(t, x)(\mu_{j2}(t) - \mu_{j1}(t)).$$

Из оценок (26), (24) вытекает неравенство

$$\|\omega\|_{H_{\delta_1}^\tau} \leq c\|\tilde{f}\|_{W_{\delta_2}^\tau} \leq c_2 c \|\vec{\mu}_2 - \vec{\mu}_1\|_{C([0, \tau])}, \quad (27)$$

где, как и ранее, c_2 зависит от норм (как линейная функция) $\|(v_1 + v_2)/2\|_{H_{\delta_2}^\tau}$, $\|f_i\|_{W_{\delta_3}^\tau}$. Пусть $v, \vec{\mu}$ — решение задачи (18), (19) и, таким образом, $v = v(\vec{\mu})$. Полагая $x = b_j$ в уравнении (18), с учетом того, что $v_t(t, b_j) = \tilde{\psi}'_j$, получим систему

$$\tilde{\psi}'_j + S(\vec{\mu})v(t, b_j) = \sum_{j=1}^r \mu_j A_j(t, b_j, D)\Phi + \sum_{j=r+1}^s f_j(t, b_j)\mu_j(t). \quad (28)$$

Правую часть этого равенства можно записать в виде $B(t)\vec{\mu}$, где строки матрицы $B(t)$ записываются в виде

$$A_1(t, b_j, D)\Phi(t, b_j), \dots, A_r(t, b_j, D)\Phi(t, b_j), f_{r+1}(t, b_j), \dots, f_s(t, b_j).$$

Матрица $B(0)$ совпадают с матрицей B_0 из (12) и, значит, $\det B(0) \neq 0$. Функции $f_{r+1}(t, b_j)$ непрерывны по t в силу наших условий. Все функции $a_{kl}^i(t, b_j)$, $a_k^i(t, b_j) \in W_p^{s_0}(0, T)$, непрерывны по t в силу условий (9), (10). Как отмечали выше, $D_x^\alpha \Phi(t, x) \in C^{1-1/2p, 2-1/p}(\overline{[0, T] \times G_\delta})$ при $|\alpha| \leq 2$. Таким образом, все элементы матрицы B непрерывны по t и тем самым существуют $\tau_0 \leq T$ и постоянная $\delta_3 > 0$ такие, что

$$|\det B(t)| \geq \delta_3 > 0 \quad \forall t \in [0, \tau_0]. \quad (29)$$

Тогда систему (28) можно записать в виде

$$\vec{\mu}(t) = B^{-1}H(\vec{\mu})(t) = R(\vec{\mu}), \quad (30)$$

$$H(\vec{\mu}) = (\tilde{\psi}'_1 + S(\vec{\mu})v(t, b_1), \tilde{\psi}'_2 + S(\vec{\mu})v(t, b_2), \dots, \tilde{\psi}'_s + S(\vec{\mu})v(t, b_s))^T.$$

В правую часть входит некоторый оператор, сопоставляющий вектор-функции $\vec{\mu}$ величины $S(\vec{\mu})v(t, b_j)$ ($j = 1, 2, \dots, s$), где v — решение задачи (18), (19). По доказанному этот оператор определен для всех векторов $\vec{\mu}$, удовлетворяющих условию $\vec{\mu} \in B_{R_0}$. Свойства отображения $\vec{\mu} \rightarrow v(\vec{\mu})$ мы уже исследовали. Покажем, что можно найти такое $\tau_1 \leq \tau_0$, что оператор $R(\vec{\mu}) = B^{-1}H(\vec{\mu})(t)$, $R: \widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau_1) \rightarrow \widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau_1)$, определен, переводит шар B_{R_0} в себя и является в нем сжимающим. Рассмотрим величину $\tilde{\psi}'_j(0)$. По построению

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}'_j(0) &= \psi'_j(0) - \Phi'(t, b_j) \\ &= \psi'_j(0) - A(0, b_j, D)u_0(b_j) - \sum_{i=r+1}^s f_i(0, b_j)q_{0i} = 0, \quad j = 1, \dots, s, \end{aligned}$$

в силу того, что числа q_{0i} у нас находились из системы (13). Пусть $\vec{\psi} = (\tilde{\psi}'_1, \tilde{\psi}'_2, \dots, \tilde{\psi}'_s)^T$. Тогда $\vec{\psi} \in \widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)$ ($\tau \leq \tau_0$) и в силу леммы 1 $B^{-1}(t)\vec{\psi} \in \widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau_1)$. Найдется число $\tau_1 \leq \tau_0$ (в силу абсолютной непрерывности интеграла) такое, что $\|B^{-1}(t)\vec{\psi}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau_1)} \leq R_0/2$. Отметим, что $R(0) = B^{-1}(t)\vec{\psi}(t)$. Получим оценки, считая, что $\vec{\mu}_i \in B_{R_0}$ и $\tau \leq \tau_1$. Оценим $\|R(\vec{\mu}_1) - R(\vec{\mu}_2)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)}$ с $\tau \leq \tau_1$. Имеем

$$\begin{aligned} \|R(\vec{\mu}_1) - R(\vec{\mu}_2)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} &\leq c_0 \left(\sum_{i=1}^s \|A_0 v_1(t, b_i) - A_0 v_2(t, b_i)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^r \|\mu_{1k} A_k v_1(t, b_i) - \mu_{2k} A_k v_2(t, b_i)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} \right). \quad (31) \end{aligned}$$

Далее используем условия на коэффициенты и вложение $W_p^\theta(G) \subset C(\overline{G})$ при $\theta > n/p$ [31, теоремы 4.6.1, 4.6.2.]. Возьмем $\theta \in (n/p, 1)$. Рассмотрим одно из последних слагаемых. Используя лемму 1, имеем

$$\|\mu_{1k} A_k v_1(t, b_i) - \mu_{2k} A_k v_2(t, b_i)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)}$$

$$\begin{aligned}
& \leq \|(\mu_{1k} - \mu_{2k})(A_k v_1(t, b_i) + A_k v_2(t, b_i))\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} / 2 \\
& \quad + \left\| \frac{(\mu_{1k} + \mu_{2k})}{2} (A_k(v_1(t, b_i) - A_k v_2(t, b_i))) \right\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} \\
& \leq \|\mu_{1k} - \mu_{2k}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} c_4 \sum_{|\alpha| \leq 2} \|D^\alpha(v_1(t, b_j) + v_2(t, b_j))\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} \\
& \quad + \|\mu_{1k} + \mu_{2k}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} c_5 \sum_{|\alpha| \leq 2} \|D^\alpha v_1(t, b_j) - D^\alpha v_2(t, b_j)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} \\
& \leq \|\mu_{1k} - \mu_{2k}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} c_6 \|v_1(t, x) + v_2(t, x)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau; W_p^{2+\theta}(G_{\delta_1}))} \\
& \quad + \|\mu_{1k} + \mu_{2k}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau; W_p^{2+\theta}(G_{\delta_1}))} c_7 \|v_1(t, x) - v_2(t, x)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau; W_p^{2+\theta}(G_{\delta_1}))}, \quad (32)
\end{aligned}$$

где постоянные c_i не зависят от τ . Отметим, что пространство Бесова $B_{p,p}^s$ совпадает с пространством Соболева W_p^s при дробных s . Далее воспользуемся равенством

$$(B_{p,p}^\beta(0, \tau; B_{p,p}^{2-\varepsilon_0}(G)), L_p(0, \tau; B_{p,p}^{4-\varepsilon_0}(G)))_{1-\theta_1, p} = B_{p,p}^{s_0}(0, \tau; B_{p,p}^{2+\theta}(G)) \quad (33)$$

с $\theta_1 \beta = s_0$, $(2 - \varepsilon_0)\theta_1 + (1 - \theta_1)(4 - \varepsilon_0) = 2 + \theta$, где $\theta_1 \in (0, 1)$. Утверждение вытекает из [35, теорема 3.1] и известных результатов об интерполяции пространств Соболева [31]. В [35, теорема 3.1] взято \mathbb{R}^n вместо $(0, T)$, однако далее в работе имеется замечание о справедливости результата и в случае, если все \mathbb{R}^n заменить ограниченной областью, для которой имеется оператор продолжения функций на все \mathbb{R}^n с сохранением соответствующих классов Бесова. У нас область совпадает с интервалом $(0, \tau)$ и утверждение, конечно, справедливо. Возьмем $0 < \varepsilon_0 < 2(1 - s_0) - \theta$, $\theta_1 = 1 - (\theta + \varepsilon_0)/2$, $\beta = s_0/\theta_1$. Поскольку все показатели дробные, можем переписать (33) в виде

$$(W_p^\beta(0, \tau; W_p^{2-\varepsilon_0}(G)), L_p(0, \tau; W_p^{4-\varepsilon_0}(G)))_{1-\theta_1, p} = W_p^{s_0}(0, \tau; W_p^{2+\theta}(G)). \quad (34)$$

Здесь область G можно заменить любой другой областью. Отметим, что $\beta \in (0, 1)$. В частности, поскольку для функций из пространств $\widetilde{W}_p^s(0, \tau; E)$ нормы в пространствах $\widetilde{W}_p^s(0, \tau; E)$ (E — банахово пространство) и $W_p^s(0, \tau; E)$ эквивалентны, если $s \neq 1/p$, справедливо неравенство

$$\|v\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau; W_p^{2+\theta}(G_{\delta_1}))} \leq c_8 \|v\|_{\widetilde{W}_p^\beta(0, \tau; W_p^{2-\varepsilon_0}(G_{\delta_1}))}^{\theta_1} \|v\|_{L_p(0, \tau; W_p^{4-\varepsilon_0}(G_{\delta_1}))}^{1-\theta_1}, \quad (35)$$

где постоянная c_8 не зависит от $\tau \in (0, T]$. Доказательство этого факта реализуется довольно просто: рассматриваем функцию $w(\xi, x) = v(\tau\xi, x)$, записываем неравенство (35), где $\tau = 1$, для этой функции, а затем делаем обратную замену переменных $\tau\xi = t$ в интегралах, определяющих нормы. Используя (35), можем переписать неравенство (32) в виде

$$\begin{aligned}
& \|\mu_{1k} A_k v_1(t, b_i) - \mu_{2k} A_k v_2(t, b_i)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} \\
& \leq \|\mu_{1k} - \mu_{2k}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} c_8 \|v_1 + v_2\|_{\widetilde{W}_p^\beta(0, \tau; W_p^{2-\varepsilon_0}(G_{\delta_1}))}^{\theta_1} \|v_1 + v_2\|_{L_p(0, \tau; W_p^{4-\varepsilon_0}(G_{\delta_1}))}^{1-\theta_1} \\
& \quad + \|\mu_{1k} + \mu_{2k}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} c_9 \|v_1 - v_2\|_{\widetilde{W}_p^\beta(0, \tau; W_p^{2-\varepsilon_0}(G_{\delta_1}))}^{\theta_1} \|v_1 - v_2\|_{L_p(0, \tau; W_p^{4-\varepsilon_0}(G_{\delta_1}))}^{1-\theta_1}. \quad (36)
\end{aligned}$$

Воспользуемся очевидными неравенствами

$$\begin{aligned} \|v\|_{\widetilde{W}_p^\beta(0,\tau;W_p^{2-\varepsilon_0}(G_{\delta_1}))} &\leq c_{10}\|v_t\|_{L_p(0,\tau;W_p^2(G_{\delta_1}))}, \\ \|v\|_{L_p(0,\tau;W_p^{4-\varepsilon_0}(G_{\delta_1}))} &\leq c_{11}\|v\|_{L_p(0,\tau;W_p^4(G_{\delta_1}))}^{\theta_2}\|v\|_{L_p(0,\tau;L_p(G_{\delta_1}))}^{1-\theta_2}, \\ \|v\|_{L_p(0,\tau;L_p(G_{\delta_1}))} &\leq \tau\|v_t\|_{L_p(0,\tau;L_p(G_{\delta_1}))}, \\ 4\theta_2 &= 4 - \varepsilon_0, \quad v \in W_p^1(0,\tau;W_p^2(G_{\delta_1})) \cap L_p(0,\tau;W_p^4(G_{\delta_1})), \quad v(0) = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Последнее неравенство легко получается из формулы Ньютона — Лейбница, второе — обычное интерполяционное неравенство [31], а первое вытекает из определения нормы и соответствующего вложения. Все постоянные в них не зависят от τ . Воспользовавшись (36), (37), придем к неравенству

$$\begin{aligned} &\|\mu_{1k}A_kv_1(t, b_i) - \mu_{2k}A_kv_2(t, b_i)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \\ &\leq c_{12}\tau^{\gamma_0}(\|\mu_{1k} - \mu_{2k}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}(\|v_1\|_{H_{\delta_1}^\tau} + \|v_2\|_{H_{\delta_1}^\tau}) \\ &+ \|\mu_{1k} + \mu_{2k}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}\|v_1 - v_2\|_{H_{\delta_1}^\tau}), \quad \gamma_0 = (1 - \theta_2)(1 - \theta_1). \end{aligned} \quad (38)$$

Далее, воспользовавшись неравенствами (22), (24), (26), (27), получим

$$\|\mu_{1k}A_kv_1(t, b_i) - \mu_{2k}A_kv_2(t, b_i)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \leq c_{13}\tau^{\gamma_0}\|\vec{\mu}_1 - \vec{\mu}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}, \quad (39)$$

где постоянная c_{12} не зависит от $\tau \leq \tau_1$. Аналогичная оценка получается и при оценке выражения

$$\|A_0v_1(t, b_i) - A_0v_2(t, b_i)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \leq c_{14}\tau^{\gamma_0}\|\vec{\mu}_1 - \vec{\mu}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}. \quad (40)$$

Окончательно получим оценку (см. (31))

$$\|R(\vec{\mu}_1) - R(\vec{\mu}_2)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \leq c_{15}\tau_0^\gamma\|\vec{\mu}_1 - \vec{\mu}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}. \quad (41)$$

Выбрав $\tau_2 \leq \tau_1$ такое, что $c_{14}\tau_2^{\gamma_0} \leq 1/2$, придем к тому, что оператор R сжимающий и переводит шар B_{R_0} в себя для всех $\tau \leq \tau_2$. Применяя теорему о неподвижной точке, покажем существование решения системы (30). Положим $v = v(\vec{\mu})$. Покажем, что построенная функция удовлетворяет условиям переопределения (20). Возьмем в (18) $x = b_j$. Получим систему равенств

$$v_t(t, b_j) + Av(t, b_j) = \sum_{j=1}^r \mu_j A_j(t, b_j, D)\Phi + \sum_{j=r+1}^s f_j(t, b_j)\mu_j(t). \quad (42)$$

Вычитая эти равенства из (27), получим $v_t(t, b_j) - \tilde{\psi}_j' = 0$ для всех j , значит, выполнены условия (20). Единственность решений вытекает из оценок, приведенных при доказательстве существования решений. \square

3. Алгоритм численного решения и результаты численных экспериментов

Схема алгоритма. Рассмотрим довольно простой одномерный случай. Данная модель использовалась при определении термофизических и термокинетических параметров в [1]. В области $Q = (0, T) \times G$, $G = (0, R)$, рассматривается задача

$$Mu = c(t, r)u_t - Lu = f, \quad L = \frac{1}{r^\nu} \partial_r(r^\nu g(t, r)u_r), \quad \nu = 0, 1, \quad (43)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_r|_{r=0} = 0, \quad r^\nu g u_r|_{r=0} = q(t), \quad \nu = 0, 1, \quad (44)$$

$$u_{0r}|_{r=0} = 0, \quad R^\nu g(0, R) u_{0r}(R) = q(0), \quad (45)$$

$$u(y_i, t) = \psi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad y_i \in (0, R). \quad (46)$$

Для простоты рассмотрим случай, когда среда не является слоистой, хотя алгоритм может быть использован и в многослойном случае. Он основан на рассуждениях из доказательства теоремы 3. Используем метод конечных элементов. Задана сетка на $(0, R)$, например, равномерная, $r_i = hi$, $h = R/N$, $i = 0, 1, \dots, N$, и базисные кусочно-линейные функции метода конечных элементов, $\varphi_0(r) = 1 - r/h$ при $r \in (0, h)$, $\varphi_0(r) = 0$ при $r > h$, $\varphi_i = (r - r_{i-1})/h$ при $r \in (r_{i-1}, r_i)$, $\varphi_i = (r_{i+1} - r)/h$ при $r \in (r_i, r_{i+1})$, $\varphi_i = 0$ при $r \notin (r_{i-1}, r_{i+1})$, $\varphi_N(r) = (r - r_{N-1})/h$ при $r \in (r_{N-1}, R)$, $\varphi_N(r) = 0$ при $r < r_{N-1}$. Ищем приближенное решение в виде

$$v = \sum_{i=1}^N C_i(t) \varphi_i.$$

Для удобства далее считаем, что точки y_i совпадают с узлами сетки r_{i_1}, \dots, r_{i_s} . Функции C_i определяем из системы

$$R_0 \vec{C}_t + R_1(t) \vec{C} = \vec{F}, \quad \vec{C} = (C_0, C_1, \dots, C_N)^T, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (47)$$

$$\vec{F} = \left(\int_0^R r^\nu f(t, r) \varphi_0(r) dr, \dots, \int_0^R r^\nu f(t, r) \varphi_{N-1}(r) dr, \int_0^R r^\nu f(t, r) \varphi_N(r) dr + q(t) \right)^T,$$

R_0 — матрица с элементами

$$r_{ij} = (c(t, r) r^\nu \varphi_i, \varphi_j) = \int_0^R c(t, r) r^\nu \varphi_i(r) \varphi_j(r) dr,$$

R_1 — матрица с элементами $R_{jk} = (r^\nu g(t, r) \varphi_{kr}, \varphi_{jr})$. Имеем $\vec{C}(0) = \vec{C}_0 = (u_0(r_0), \dots, u_0(r_N))$. Решение системы (47) ищем методом конечных разностей. Пусть $\tau = T/M$ — шаг по времени. Заменим уравнение (47) системой

$$R_{i+1} \frac{\vec{C}_{i+1} - \vec{C}_i}{\tau} + A_{i+1} \vec{C}_{i+1} = \vec{F}_{i+1}, \quad \vec{C}_i = (C_i^0, \dots, C_i^N)^T, \quad i = 0, 1, 2, \dots, M-1, \quad (48)$$

где $C_i^k \approx C_k(\tau i)$, $\vec{F}_i = \vec{F}(\tau i)$, $A_i = R_1(\tau i)$. Пусть $\vec{\alpha}_i = (\alpha_i^1, \dots, \alpha_i^s)^T$, $\vec{\alpha}_i \approx \vec{\alpha}(\tau i)$, $\alpha_i^k \approx \alpha_k(i\tau)$. Элементы матрицы A_{i+1} записываются в виде

$$R_{lk}^{i+1} = (g_{i+1}(r) \varphi_{kr}, \varphi_{jr}), \quad g_{i+1} = \sum_{k=1}^s \alpha_{i+1}^k \Phi_k(r).$$

Элементы матрицы R_{i+1} записываются в виде

$$r_{kl}^{i+1} = (c(\tau(i+1), r) r^\nu \varphi_l, \varphi_k) = \int_0^R c(\tau(i+1), r) r^\nu \varphi_l(r) \varphi_k(r) dr.$$

Имеем $C_0^k = u_0(r_k)$ при $k = 0, \dots, N$. Для чисел α_0^k получим систему уравнений

$$2h(i_j h)^\nu c(0, r_{i_j}) \psi_j'(0)/3 + \sum_{k=1}^s \alpha_0^k \beta_{jk} = (r^\nu f(0, r_{i_j}), \varphi_{i_j}), \quad j = 1, 2, \dots, s,$$

где

$$\beta_{jk} = \sum_{l=0}^N C_0^l (r^\nu \Phi_k \varphi_{lr}, \varphi_{i_j r}).$$

Предполагается, что определитель этой системы отличен от нуля. Приближенно он равен определителю матрицы с элементами $\tilde{\beta}_{jk} = (r^\nu \Phi_k u_{0r}, \varphi_{i_j r})$.

Последовательность вычислений. При $i = 0$ знаем векторы $\vec{C}_0, \vec{\alpha}_0$. При переходе на следующий временной слой используем идеи метода предиктор-корректор. Предположим, что построено решение $\vec{C}_i, \vec{\alpha}_i$. Далее решаем систему (48), где в качестве функции g_{i+1} берем функцию

$$g_{i+1} = \sum_{k=1}^s \alpha_i^k \Phi_k.$$

Находим вектор \vec{C}_{i+1} . Определим векторы $\vec{\Psi}_i = (\psi_i^0, \psi_i^1, \dots, \psi_i^N)^T$ такие, что $\psi_i^k = C_i^k$ при $k \neq i_j, j = 1, 2, \dots, s$, и $\psi_i^{i_j} = \psi_j(\tau i)$ для всех j . Составим систему

$$\sum_{l=0}^N \left(\frac{\psi_{i+1}^l - \psi_i^l}{\tau} \right) (r^\nu c((i+1)\tau, r) \varphi_l, \varphi_{i_j}) + \sum_{k=1}^s \alpha_{i+1}^k \beta_{jk} = (r^\nu f((i+1)\tau, r), \varphi_{i_j}), \quad (49)$$

$j = 1, 2, \dots, s$, где

$$\beta_{jk} = \sum_{l=0}^N C_{i+1}^l (r^\nu \Phi_k \varphi_{lr}, \varphi_{i_j r}).$$

Из этой системы находим вектор $\vec{\alpha}_{i+1}$. Присваиваем $\vec{\alpha}_{i+1}^1 := \vec{\alpha}_{i+1}$. Далее из системы (48), где в качестве функции g_{i+1} берем функцию

$$g_{i+1} = \sum_{k=1}^s \alpha_{i+1}^1 \Phi_k,$$

находим вектор \vec{C}_{i+1} . Присваиваем $\vec{C}_{i+1}^1 := \vec{C}_{i+1}$. Подставляя его в систему (49), найдем вектор $\vec{\alpha}_{i+1}$. Присваиваем $\vec{\alpha}_{i+1}^2 := \vec{\alpha}_{i+1}$. Далее опять решаем систему (48), где в качестве функции g_{i+1} берем функцию

$$g_{i+1} = \sum_{k=1}^s \alpha_{i+1}^2 \Phi_k.$$

Таким образом найдем \vec{C}_{i+1} и присваиваем $\vec{C}_{i+1}^2 := \vec{C}_{i+1}$. Повторяя рассуждения, построим последовательности векторов $\vec{\alpha}_{i+1}^k, \vec{C}_{i+1}^k$. Повторяем рассуждения до тех пор, пока $|\vec{\alpha}_{i+1}^k - \vec{\alpha}_{i+1}^{k-1}| < \varepsilon$, где ε — заданное малое число. Если при

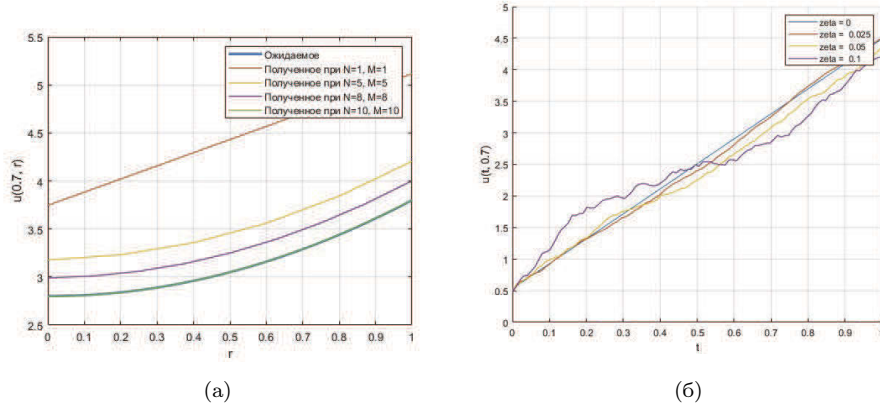


Рис. 1. (а) Решение прямой задачи $u(0.7, r)$; (б) решение прямой задачи $u(t, 0.7)$ при различных интенсивностях возмущений ζ .

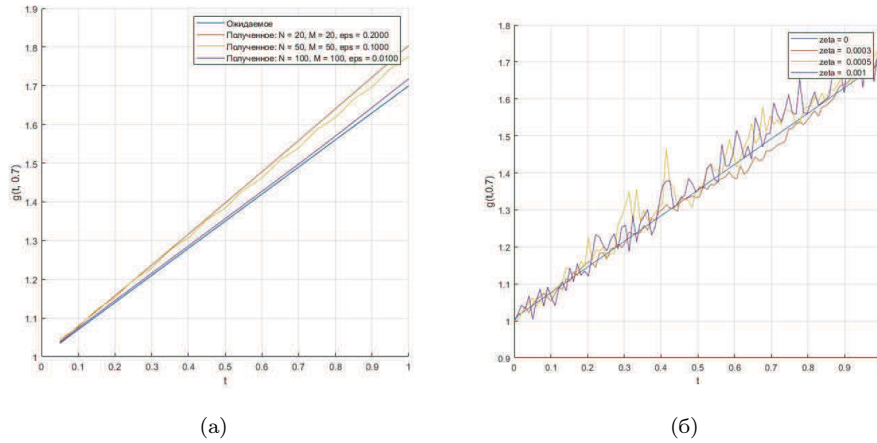


Рис. 2. (а) Решение $g(t, 0.7)$ для различных M, N, ϵ , (б) Решение $g(t, 0.7)$ при различных интенсивностях возмущений ζ .

данном k это условие выполнено, то положим $\vec{C}_{i+1} = \vec{C}_{i+1}^k$, $\vec{\alpha}_{i+1} = \vec{\alpha}_{i+1}^k$. Таким образом, будет выполнено равенство (48), где в качестве g_{i+1} берется функция

$$g_{i+1} = \sum_{k=1}^s \alpha_{i+1}^k \Phi_k.$$

Результаты численных экспериментов. Реализация алгоритма осуществлялась в программной среде Matlab R2019b. Характеристики ЭВМ следующие: процессор Intel(R) Core(TM) i5-10400F CPU @ 2.90GHz 16,00 Гб, 64-разрядная операционная система Windows 10 Home. Входные и ожидаемые выходные данные: $R = 1$, $T = 1$, $\nu = 1$, $c(t, r) = t + r + 1$, $f(t, r) = 4r + 4t - 6rt$, $q(t) = 2t + 2$, $u_0(r) = r^2$, $s = 5$, $y_1, \dots, y_5 = 0.1, 0.2, 0.5, 0.8, 0.9$, $\Phi_1, \dots, \Phi_5 = 1, r, r^2, r^3, r^4$, $u(t, r) = 4t + r^2$, $g(t, r) = 1 + rt$.

Приведем результаты вычислений при нахождении решения прямой задачи. График полученного решения уже при $N = 10$, $M = 10$ практически полностью накладывается на график ожидаемого (рис. 1(а)). Далее в процессе вычисления \vec{C}_i к каждому из векторов \vec{F}_i добавим случайное возмущение вида $\xi\zeta$, где ξ — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[-1, 1]$ и ζ — интенсивность возмущения. Результаты представлены на рис. 1(б). На рис. 2(а) представлены результаты вычислений решений обратной задачи для нашего примера, а на рис. 2(б) представлены результаты в случае, когда к правой части, как и ранее, добавлено случайное возмущение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пермяков П. П. Идентификация параметров математической модели тепловлагопереноса в мерзлых грунтах. Новосибирск: Наука, 1989.
2. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker, 1999.
3. Belov Ya. Ya. Inverse problems for parabolic equations. Utrecht: VSP, 2002.
4. Isakov V. Inverse problems for partial differential equations. Berlin: Springer-Verl., 2006. (Appl. Math. Sci.; V. 127).
5. Kabanikhin S. I. Inverse and ill-posed problems. Theory and applications. Boston; Berlin: Walter de Gruyter, 2012.
6. Klivanov M. V., Li J. Inverse problems and Carleman estimates. Berlin; Boston: Walter de Gruyter, 2021. (Inverse Ill-Posed Probl. Ser.; V. 63).
7. Hussein M. S., Huntul M. J. Simultaneous identification of thermal conductivity and heat source in the heat equation // Iraqi J. Sci. 2021. V. 62, N 6. P. 1968–1978.
8. Hussein M. S., Lesnic D., Ivanchov M. I. Simultaneous determination of time-dependent coefficients in the heat equation // Comput. Math. Appl. 2014. V. 67. P. 1065–1091.
9. Ivanchov M. Inverse problems for equations of parabolic type. Lviv: WNTL Publ., 2003. (Math. Stud. Monogr. Ser.; V. 10).
10. Иванчов Н. И., Пабыривска Н. В. Об определении двух зависящих от времени коэффициентов в параболическом уравнении // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 2. С. 406–413.
11. Искендеров А. Д. Многомерные обратные задачи для линейных и квазилинейных параболических уравнений // Докл. АН СССР. 1975. Т. 225, № 5. С. 1005–1008.
12. Iskenderov A. D., Akhundov A. Ya. Inverse problem for a linear system of parabolic equations // Dokl. Math. 2009. V. 79, N 1. P. 73–75.
13. Фроленков И. В., Романенко Г. В. О решении одной обратной задачи для многомерного параболического уравнения // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 2. С. 139–146.
14. Pyatkov S. G., Samkov M. L. On some classes of coefficient inverse problems for parabolic systems of equations // Sib. Adv. Math. 2012. V. 22, N 4. P. 287–302.
15. Pyatkov S. G., Tsybikov B. N. On some classes of inverse problems for parabolic and elliptic equations // J. Evol. Equ. 2011. V. 11, N 1. P. 155–186.
16. Pyatkov S. G. On some classes of inverse problems for parabolic equations. // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2011. V. 18, N 8. P. 917–934.
17. Pyatkov S. G. On some classes of inverse problems with overdetermination data on spatial manifolds // Sib. Math. J. 2016. V. 57, N 5. P. 870–880.
18. Pyatkov S. G., Rotko V. V. Inverse problems with pointwise overdetermination for some quasilinear parabolic systems // Sib. Adv. Math. 2020. V. 30, N 2. P. 124–142.
19. Pyatkov S. G., Rotko V. V. On some parabolic inverse problems with the pointwise overdetermination // AIP Conf. Proc. 2017. V. 1907. 020008.
20. Egger H., Pietschmann J.-F., Schlottbom M. Identification of nonlinear heat conduction laws // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2015. V. 23, N 5. P. 429–437.
21. Pyatkov S. G. Identification of thermophysical parameters in mathematical models of heat and mass transfer // J. Comput. Eng. Math. 2022. V. 9, N 2. P. 52–66.

22. Samarskii A. A., Vabishchevich P. N. Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics. Berlin; Boston: Walter de Gruyter, 2007.
23. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Ненарокомов А. В. Обратные задачи в исследовании сложного теплообмена. М.: Янус-К, 2009.
24. Ozisik M. N., Orlande H. R. B. Inverse heat transfer. New York: Taylor & Francis, 2000.
25. Ткаченко В. Н. Математическое моделирование, идентификация и управление технологическими процессами тепловой обработки материалов. Киев: Наук. думка, 2008.
26. Huntul M. J., Lesnic D. An inverse problem of finding the time-dependent thermal conductivity from boundary data // Int. Commun. Heat Mass Transfer. 2017. V. 85. P. 147–154.
27. Кабанихин С. И., Хасанов А. Х., Пененко А. В. Метод градиентного спуска для решения обратной коэффициентной задачи теплопроводности // Сиб. журн. вычисл. математики. 2008. Т. 11, № 1. С. 41–51.
28. Mustonen L. Numerical study of a parametric parabolic equation and a related inverse boundary value problem // Inverse Probl. 2016. V. 32. 105008.
29. Бушуев А. Ю., Тимофеев В. Н. Двухкритериальный подход к решению задачи идентификации теплофизических характеристик многослойной пластины // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 9. <http://engjournal.ru/articles/963/963.pdf>.
30. Быков Н. Ю., Хватов А. А., Каложная А. В., Бухановский А. В. Метод восстановления моделей тепломассопереноса по пространственно-временным распределениям параметров // Письма в ЖТФ. 2021. Т. 47, вып. 24. С. 9–12.
31. Triebel H. Interpolation theory. Function spaces. Differential operators. Berlin: VEB Deutscher Verl. Wiss., 1978.
32. Denk R., Hieber M., Prüss J. Optimal L_p - L_q -estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data // Math. Z. 2007. V. 257, N 1. P. 93–224.
33. Denk R., Hieber M., Prüss J. R-boundedness, Fourier multipliers, and problems of elliptic and parabolic type // Mem. Amer. Math. Soc. 2003. V. 166. N 788.
34. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
35. Amann H. Compact embeddings of vector-valued Sobolev and Besov spaces // Glasnik Mat. 2000. V. 35. P. 161–177.
36. Prüss J., Simonett G. Moving interfaces and quasilinear parabolic evolution equations. Basel: Birkhäuser, 2016.
37. Agranovich M. S., Vishik M. I. Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general type // Russ. Math. Surv. 1964. V. 19. P. 53–157.
38. Amann H. Maximal regularity of parabolic transmission problems // J. Evol. Equ. 2021. V. 21. P. 3375–3420.
39. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
40. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию 10 апреля 2023 г.

После доработки 25 апреля 2023 г.

Принята к публикации 29 мая 2023 г.

Пятков Сергей Григорьевич
Югорский гос. университет,
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012;
Академия наук Республики Саха (Якутия),
пр. Ленина, 33, Якутск 677007
s_pyatkov@ugrasu.ru

Соколов Олег Игоревич
Югорский гос. университет,
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012
sokol.oleg2012@yandex.ru

ON SOME CLASSES OF COEFFICIENT INVERSE
PROBLEMS OF RECOVERING THERMOPHYSICAL
PARAMETERS IN STRATIFIED MEDIA
S. G. Pyatkov and O. I. Sokolkov

Abstract: We examine the question of regular solvability in Sobolev spaces of parabolic inverse coefficient problems in stratified media with conjugation conditions of the diffraction type. A solution has all generalized the derivatives occurring in the equation summable with some power. The overdetermination conditions are the values of the solution at some collection of points lying inside the domain. The proof is based on a priori estimates and the fixed point theorem.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.94.19.005

Keywords: parabolic equation, inverse problem, initial-boundary value problem, existence, uniqueness.

REFERENCES

1. Permyakov P. P., Identification of Parameters of the Mathematical Model of Heat and Moisture Transfer in Frozen Soils [in Russian], Nauka, Novosibirsk (1989).
2. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., and Vasin I. A., Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics, Marcel Dekker, New York (1999).
3. Belov Ya. Ya., Inverse problems for Parabolic Equations, VSP, Utrecht (2002).
4. Isakov V., Inverse Problems for Partial Differential Equations, Springer, Berlin (2006) (Appl. Math. Sci.; vol. 127).
5. Kabanikhin S. I., Inverse and Ill-Posed Problems, Theory and Applications, Walter de Gruyter, Boston; Berlin (2012).
6. Klivanov M. V. and Li J., Inverse Problems and Carleman Estimates, Walter de Gruyter, Berlin; Boston (2021) (Inverse Ill-Posed Probl. Ser., vol. 63).
7. Hussein M. S. and Huntul M. J., “Simultaneous identification of thermal conductivity and heat source in the heat equation,” Iraqi J. Sci., **62**, No. 6, 1968–1978 (2021).
8. Hussein M. S., Lesnic D., and Ivanchov M. I., “Simultaneous determination of time-dependent coefficients in the heat equation,” Comput. Math. Appl., **67**, 1065–1091 (2014).
9. Ivanchov M., Inverse Problems for Equations of Parabolic Type, WNTL Publ., Lviv (2003) (Math. Stud. Monogr. Ser.; vol. 10).
10. Ivanchov N. I. and Pabyrivska N. V., “On determination of two time-dependent coefficients in a parabolic equation,” Sib. Math. J., **43**, No. 2, 323–329 (2002).
11. Iskenderov A. L., “Multi-dimensional inverse problems for linear and quasilinear parabolic equations [in Russian],” Dokl. AN SSSR, **225**, No. 5, 1005–1008 (1975).
12. Iskenderov A. D. and Akhundov A. Ya., “Inverse problem for a linear system of parabolic equations,” Dokl. Math., **79**, No. 1, 73–75 (2009).
13. Frolenkov I. V. and Romanenko G. V., “On a solution of an inverse problem for multidimensional parabolic equation [in Russian],” Sib. J. Ind. Math., **15**, No. 2, 139–146 (2012).
14. Pyatkov S. G. and Samkov M. L., “On some classes of coefficient inverse problems for parabolic systems of equations,” Sib. Adv. Math., **22**, No. 4, 287–302 (2012).

15. Pyatkov S. G. and Tsybikov B. N., "On some classes of inverse problems for parabolic and elliptic equations," *J. Evol. Equ.*, **11**, No. 1, 155–186 (2011).
16. Pyatkov S. G., "On some classes of inverse problems for parabolic equations," *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **18**, No. 8, 917–934 (2011).
17. Pyatkov S. G., "On some classes of inverse problems with overdetermination data on spatial manifolds," *Sib. Math. J.*, **57**, No. 5, 870–880 (2016).
18. Pyatkov S. G. and Rotko V. V., "Inverse problems with pointwise overdetermination for some quasilinear parabolic systems," *Sib. Adv. Math.*, **30**, No. 2, 124–142 (2020).
19. Pyatkov S. G. and Rotko V. V., "On some parabolic inverse problems with the pointwise overdetermination," *AIP Conf. Proc.*, **1907**, 020008 (2017).
20. Egger H., Pietschmann J.-F., and Schlottbom M., "Identification of nonlinear heat conduction laws," *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **23**, No. 5, 429–437 (2015).
21. Pyatkov S. G., "Identification of thermophysical parameters in mathematical models of heat and mass transfer," *J. Comput. Eng. Math.*, **9**, No. 2, 52–66 (2022).
22. Samarskii A. A. and Vabishchevich P. N., *Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics*, Walter de Gruyter, Berlin; Boston (2007).
23. Alifanov O. M., Artyukhov E. A., and Nenarokom A. V., *Inverse problems of Complex Heat Transfer* [in Russian], Yanus-K, Moscow (2009).
24. Ozisik M. N. and Orlande H. R. B., *Inverse Heat Transfer*, Taylor & Francis, New York (2000).
25. Tkachenko V. N., *Mathematical Modeling, Identification and Control of Technological Processes of Heat Treatment of Materials* [in Russian], Naukova Dumka, Kiev (2008).
26. Huntul M. J. and Lesnic D., "An inverse problem of finding the time-dependent thermal conductivity from boundary data," *Int. Commun. Heat Mass Transfer*, **85**, 147–154 (2017).
27. Kabanikhin S. I., Hasanov A., and Penenko A. V., "A gradient descent method for solving an inverse coefficient heat conduction problem," *Numer. Anal. Appl.*, **1**, No. 1, 34–45 (2008).
28. Mustonen L., "Numerical study of a parametric parabolic equation and a related inverse boundary value problem," *Inverse Probl.*, **32**, 105008 (2016).
29. Bushuev A. Yu. and Timofeev V. N., "Two parameters approach to solving the problem of identification of thermophysical characteristics of multilayer plate," *Eng. J. Sci. Innov.*, **9** (2013). <http://engjournal.ru/articles/963/963.pdf>
30. Bykov N. Yu., Khvatov A. A., Kalyuzhnaya A. V., and Bukhanovskii A. V., "The method of recovering mathematical models of heat and mass transfer with space and temporal distributions of parameters [in Russian]," *Lett. JTP*, **47**, No. 24, 9–12 (2021).
31. Triebel H., *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, VEB Deutscher Verl. Wiss., Berlin (1978).
32. Denk R., Hieber M., and Prüss J., "Optimal L_p - L_q -estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data," *Math. Z.*, **257**, No. 1, 193–224 (2007).
33. Denk R., Hieber M., and Prüss J., "R-boundedness, Fourier multipliers and problems of elliptic and parabolic type," *Mem. Amer. Math. Soc.*, **166**, No. 788 (2003).
34. Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., and Ural'tseva N. N., *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, Amer. Math. Soc., Providence (1968).
35. Amann H., "Compact embeddings of vector-valued Sobolev and Besov spaces," *Glasnik Mat.*, **35**, 161–177 (2000).
36. Prüss J. and Simonett G., *Moving Interfaces and Quasilinear Parabolic Evolution Equations*, Birkhäuser, Basel (2016).
37. Agranovich M. S. and Vishik M. I., "Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general type," *Russ. Math. Surv.*, **19**, 53–157 (1964).
38. Amann H., "Maximal regularity of parabolic transmission problems," *J. Evol. Equ.*, **21**, 3375–3420 (2021).
39. Mikhailov V. P., *Partial Differential Equations* [in Russian], Nauka, Moscow (1976).
40. Nikolskii S. M., *Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems*,

Springer, Berlin (1975).

Submitted April 10, 2023

Revised April 25, 2023

Accepted May 29, 2023

Sergey G. Pyatkov

Yugra State University,

16 Chekhov Street, Khanty-Mansiisk 628011, Russia;

Academy of Sciences of the Republic of Sakha (Yakutia),

33 Lenin Avenue, Yakutsk 677007, Russia

`s_pyatkov@ugrasu.ru`

Oleg I. Sokolkov

Yugra State University,

16 Chekhov Street, Khanty-Mansiisk 628011, Russia

`sokol.oleg2012@yandex.ru`

ИНТЕГРИРОВАНИЕ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ МКДФ С ИСТОЧНИКОМ В КЛАССЕ БЫСТРОУБЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

У. А. Хоитметов, Ш. К. Собиров

Аннотация. Рассматривается задача Коши для нагруженного модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза с самосогласованным источником. Получена эволюция данных рассеяния оператора Дирака, потенциал которого является решением нагруженного модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза с самосогласованным источником в классе быстроубывающих функций. Приведен конкретный пример, иллюстрирующий применение полученных результатов.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.75.56.006

Ключевые слова: нагруженное модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза, самосогласованный источник, решения Йоста, данные рассеяния.

1. Введение

Одним из основных методов, показывающих интегрируемость нелинейных эволюционных уравнений, является метод обратной задачи рассеяния. Впервые метод обратной задачи рассеяния был применен для нахождения глобального решения задачи Коши для уравнения Кортевега — де Фриза [1]. В работе [2] Лакс показал универсальность метода обратной задачи рассеяния. Вскоре Вадати [3] предложил метод решения задачи Коши для модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза (МКДФ)

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0,$$

где нижние индексы обозначают соответствующие частные производные, u — вещественная скалярная функция.

Уравнение МКДФ может применяться во многих областях, включая альфвеновские волны в бесстолкновительной плазме [4], гиперболические поверхности [5], тонкие упругие стержни [6] и т. д. В работе [7] изучено уравнение МКДФ с переменными коэффициентами

$$u_t + u^2u_x + a(t)u + b(t)u_{xx} = 0.$$

Это уравнение используется в качестве математической модели для изучения физических явлений, возникающих в нескольких областях, представляющих интерес. Например, при изучении прибрежных волн в океане, жидких каплях

и пузырьках, в вопросах явления атмосферной блокировки и дипольной блокировки [8–10].

В артериальной механике широко используется модель, в которой артерия рассматривается как тонкостенная предварительно напряженная эластичная трубка переменного радиуса, а кровь рассматривается как идеальная жидкость [11]. Определяющим уравнением, моделирующим слабонелинейные волны в таких заполненных жидкостью эластичных трубках, является модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза с переменным коэффициентом

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} + h(t)u_x = 0,$$

где t — масштабированная координата вдоль оси сосуда после статической деформации, характеризующая осесимметричный стеноз на поверхности артериальной стенки, x — переменная, которая зависит от времени и координат вдоль оси сосуда, $h(t)$ — форма стеноза, а $u(x, t)$ характеризует среднюю осевую скорость жидкости.

Благодаря простоте выражения и богатому физическому применению интегрированию уравнения мКдФ посвящено много работ [12–22].

В работах А. М. Нахушева (см. [23]) дано наиболее общее определение нагруженного уравнения и подробно классифицированы различные нагруженные уравнения, например, нагруженные дифференциальные, нагруженные интегральные, нагруженные интегродифференциальные, нагруженные функциональные уравнения и т. д. Среди работ, посвященных нагруженным уравнениям, следует особо отметить работы [24–31] и др.

2. Постановка задачи

В данной работе исследуется нагруженное модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза с источником, а именно рассматривается следующая система уравнений:

$$u_t + \beta(t)u(x_0, t)(6u^2u_x + u_{xxx}) + \gamma(t)u(x_1, t)u_x(x, t) = \sum_{k=1}^{2N}(\Phi_{k_1}^2 - \Phi_{k_2}^2) \quad (1)$$

$$L(t)\Phi_k = \xi_k\Phi_k, \quad k = 1, 2, \dots, 2N, \quad x \in \mathbb{R},$$

где $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ — заданные непрерывно дифференцируемые функции и $\Phi_k = (\Phi_{k_1}(x, t), \Phi_{k_2}(x, t))^T$ — собственная вектор-функция оператора

$$L(t) = i \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -u(x, t) \\ -u(x, t) & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix},$$

соответствующая собственному значению ξ_k .

Для определенности будем считать, что в сумму, участвующую в правой части (1), входят сначала члены с $\text{Im } \xi_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, N$. Также предполагается, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{k_1} \Phi_{k_2} dx = A_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, 2N, \quad (2)$$

с заданными ненулевыми функциями $A_k(t)$, которые удовлетворяют условиям

$$\bar{A}_k(t) = A_k(t), \quad \bar{\xi}_k = -\xi_k, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Уравнение (1) рассматривается при начальном условии

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (3)$$

При этом начальная функция $u_0(x)$ ($-\infty < x < \infty$) обладает следующими свойствами:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |x|) |u_0(x)| dx < \infty; \quad (4)$$

оператор

$$L(0) = i \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -u_0(x) \\ -u_0(x) & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix}$$

имеет ровно $2N$ простых собственных значений $\xi_1(0), \xi_2(0), \dots, \xi_{2N}(0)$.

Предположим, что функция $u(x, t)$ обладает требуемой гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x \rightarrow \pm\infty$, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left((1 + |x|) |u(x, t)| + \sum_{k=1}^3 \left| \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial x^k} \right| \right) dx < \infty, \quad k = 1, 2, 3. \quad (5)$$

Основной целью работы является получение представлений для решения $u(x, t)$, $\Phi_k(x, t)$, $k = 1, 2, \dots, 2N$, задачи (1)–(5) в рамках метода обратной задачи рассеяния для оператора $L(t)$.

3. Необходимые сведения

Рассмотрим систему уравнений Дирака

$$\begin{cases} v_{1x} + i\xi v_1 = u(x)v_2, \\ v_{2x} - i\xi v_2 = -u(x)v_1 \end{cases} \quad (6)$$

на всей оси ($-\infty < x < \infty$) с потенциалом $u(x)$, удовлетворяющим условию (4). Видно, что с помощью оператора

$$L = i \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -u(x) \\ -u(x) & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix}$$

и вектор-функции $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ систему (6) можно переписать в виде

$$L\nu = \xi\nu.$$

Система уравнений (6) имеет решения Йоста со следующей асимптотикой:

$$\begin{aligned} \varphi(x, \xi) &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x}, & \bar{\varphi}(x, \xi) &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} \text{ при } x \rightarrow -\infty; \\ \psi(x, \xi) &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi x}, & \bar{\psi}(x, \xi) &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} \text{ при } x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (7)$$

Отметим, что $\overline{\varphi}$ ($\overline{\psi}$) не является комплексным сопряжением к φ (ψ). При действительных ξ пары вектор-функций $\{\varphi, \overline{\varphi}\}$ и $\{\psi, \overline{\psi}\}$ являются парами линейно независимых решений для системы уравнений (6). Поэтому имеют место следующие соотношения (см. [32, с. 27]):

$$\begin{aligned}\varphi &= a(\xi)\overline{\psi} + b(\xi)\psi, & \overline{\varphi} &= -\overline{a}(\xi)\psi + \overline{b}(\xi)\overline{\psi}, \\ \psi &= -a(\xi)\overline{\varphi} + \overline{b}(\xi)\varphi, & \overline{\psi} &= \overline{a}(\xi)\varphi + b(\xi)\overline{\varphi},\end{aligned}\quad (8)$$

где $a(\xi) = W\{\varphi, \psi\}$, $b(\xi) = W\{\overline{\psi}, \varphi\}$. Верны следующие равенства:

$$|a(\xi)|^2 + |b(\xi)|^2 = 1, \quad \overline{a}(\xi) = a(-\xi), \quad \overline{b}(\xi) = b(-\xi). \quad (9)$$

Коэффициенты $a(\xi)$ и $b(\xi)$ непрерывны для $\text{Im } \xi = 0$ и удовлетворяют асимптотическим равенствам

$$a(\xi) = 1 + O(|\xi|^{-1}), \quad b(\xi) = O(|\xi|^{-1}), \quad |\xi| \rightarrow \infty.$$

Функцию $\psi(x, \xi)$ можно представить следующим образом (см. [32, с. 33]):

$$\psi(x, \xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} + \int_x^\infty K(x, s) e^{i\xi s} ds, \quad (10)$$

где $K(x, s) = \begin{pmatrix} K_1(x, s) \\ K_2(x, s) \end{pmatrix}$. В представлении (10) ядро $K(x, s)$ не зависит от ξ и выполняется равенство

$$u(x) = -2K_1(x, x). \quad (11)$$

Функция $a(\xi)$ ($\overline{a}(\xi)$) аналитически продолжается в верхнюю (нижнюю) полуплоскость и имеет там конечное число нулей ξ_k ($\overline{\xi}_k$), причем ξ_k ($\overline{\xi}_k$) является собственным значением оператора $L(0)$, так что

$$\varphi(x, \xi_k) = C_k \psi(x, \xi_k), \quad \overline{\varphi}(x, \xi_k) = \overline{C}_k \overline{\psi}(x, \overline{\xi}_k), \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Справедливы следующие равенства:

$$\overline{\psi}(x, \xi) = \begin{pmatrix} \psi_2(x, -\xi) \\ -\psi_1(x, -\xi) \end{pmatrix}, \quad \overline{\varphi}(x, \xi) = \begin{pmatrix} \varphi_2(x, -\xi) \\ -\varphi_1(x, -\xi) \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$\overline{\xi}_k = -\xi_k, \quad \overline{C}_k = C_k. \quad (13)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Набор величин $\{r^+(\xi) \equiv \frac{b(\xi)}{a(\xi)}, \xi_k, C_k, k = 1, 2, \dots, N\}$ называется *данными рассеяния для оператора $L(0)$* .

Компоненты ядра $K(x, y)$ в представлении (11) для $y > x$ являются решениями системы интегральных уравнений Гельфанда — Левитана — Марченко (см. [32, с. 35])

$$\begin{aligned}K_2(x, y) + \int_x^\infty K_1(x, s) F(s + y) ds &= 0, \\ -K_1(x, y) + F(x + y) + \int_x^\infty K_2(x, s) F(s + y) ds &= 0,\end{aligned}$$

где

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r^+(\xi) e^{i\xi x} d\xi - i \sum_{j=1}^N C_j e^{i\xi_j x}.$$

Заметим, что вектор-функции

$$h_n(x) = \frac{\frac{d}{d\xi}(\varphi - C_n \psi)|_{\xi=\xi_n}}{\dot{\alpha}(\xi_n)}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (14)$$

являются решениями уравнений $Lh_n = \xi_n h_n$. Кроме того, функции $h_n(x)$ имеют следующую асимптотику:

$$h_n \sim -C_n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi_n x}, \quad x \rightarrow -\infty; \quad h_n \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi_n x}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Согласно (15) получаем равенство

$$W\{\varphi_n, h_n\} \equiv \varphi_{n1} h_{n2} - \varphi_{n2} h_{n1} = -C_n, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (16)$$

Лемма 1. Если вектор-функции

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1(x, \xi) \\ Y_2(x, \xi) \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} Z_1(x, \eta) \\ Z_2(x, \eta) \end{pmatrix}$$

являются решениями уравнений $LY = \xi Y$ и $LZ = \eta Z$, то для их компонент выполняются равенства

$$\frac{d}{dx}(y_1 z_1 + y_2 z_2) = -i(\xi + \eta)(y_1 z_1 - y_2 z_2), \quad \frac{d}{dx}(y_1 z_2 - y_2 z_1) = -i(\xi - \eta)(y_1 z_2 + y_2 z_1).$$

Справедливость этой леммы доказывается непосредственной проверкой.

Теорема 1 (см. [33, § 6.2, с. 353]). Данные рассеяния оператора L однозначно определяют L .

4. Эволюция данных рассеяния

Пусть потенциал $u(x, t)$ в системе уравнений

$$\begin{cases} y_{1x} + i\xi y_1 = u(x, t)y_2, \\ y_{2x} - i\xi y_2 = -u(x, t)y_1 \end{cases} \quad (17)$$

является решением уравнения

$$u_t + \beta(t)u(x_0, t)(u_{xx} + 6u^2 u_x) = G(x, t), \quad (18)$$

где

$$G(x, t) = -\gamma(t)u(x_1, t)u_x(x, t) + \sum_{k=1}^{2N} (\Phi_{k_1}^2 - \Phi_{k_2}^2).$$

Оператор

$$A = \beta(t)u(x_0, t) \begin{pmatrix} -4i\xi^3 + 2iu^2\xi & 4u\xi^2 + 2iu_x\xi - 2u^3 - u_{xx} \\ -4u\xi^2 + 2iu_x\xi + 2u^3 + u_{xx} & 4i\xi^3 - 2iu^2\xi \end{pmatrix} \quad (19)$$

удовлетворяет соотношению Лакса

$$[L, A] \equiv LA - AL = i\beta(t)u(x_0, t) \begin{pmatrix} 0 & -6u^2u_x - u_{xxx} \\ -6u^2u_x - u_{xxx} & 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Поэтому уравнение (18) можно переписать в виде

$$L_t + [L, A] = iR, \quad (21)$$

где $R = \begin{pmatrix} 0 & -G \\ -G & 0 \end{pmatrix}$. Дифференцируя равенство

$$L\varphi = \xi\varphi$$

относительно t , получаем равенство

$$L_t\varphi + L\varphi_t = \xi\varphi_t,$$

которое согласно (21) можно переписать в виде

$$(L - \xi)(\varphi_t - A\varphi) = -iR\varphi. \quad (22)$$

Используя метод вариации постоянных, можно записать

$$\varphi_t - A\varphi = B(x)\psi + D(x)\varphi. \quad (23)$$

Тогда для определения $B(x)$ и $D(x)$ получаем

$$MB_x\psi + MD_x\varphi = -R\varphi, \quad (24)$$

где $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Для решения уравнения (24) удобно ввести следующие обозначения:

$$\widehat{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_1 \end{pmatrix}.$$

Согласно (20) и определению вронскиана справедливы равенства

$$\widehat{\psi}^T M \varphi = -\widehat{\varphi}^T M \psi = a, \quad \widehat{\psi}^T M \psi = \widehat{\varphi}^T M \varphi = 0.$$

Умножая (24) на $\widehat{\varphi}^T$ и $\widehat{\psi}^T$, получаем

$$B_x = \frac{\widehat{\varphi}^T R \varphi}{a}, \quad D_x = -\frac{\widehat{\psi}^T R \varphi}{a}. \quad (25)$$

Согласно (19) при $x \rightarrow -\infty$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi_t - A\varphi &\rightarrow \begin{pmatrix} 4i\xi^3\beta(t)u(x_0, t) & 0 \\ 0 & -4i\xi^3\beta(t)u(x_0, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} \\ &= \begin{pmatrix} 4i\xi^3\beta(t)u(x_0, t) \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x}, \end{aligned}$$

поэтому, исходя из (23), при $x \rightarrow -\infty$ получаем следующее равенство:

$$D(x) \rightarrow 4i\xi^3\beta(t)u(x_0, t), \quad B(x) \rightarrow 0.$$

Следовательно, из (25) можно определить

$$D(x) = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^x \widehat{\psi}^T R \varphi dx + 4i\xi^3 \beta(t) u(x_0, t), \quad B(x) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^x \widehat{\varphi}^T R \varphi dx.$$

Таким образом, равенство (23) имеет следующий вид:

$$\varphi_t - A\varphi = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^x \widehat{\varphi}^T R \varphi dx \psi + \left(-\frac{1}{a} \int_{-\infty}^x \widehat{\psi}^T R \varphi dx + 4i\xi^3 \beta(t) u(x_0, t) \right) \varphi. \quad (26)$$

Согласно (8) равенство (26) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} & a_t \overline{\psi} + b_t \psi - A(a\overline{\psi} + b\psi) \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^x \widehat{\varphi}^T R \varphi dx \cdot \psi + \left(-\frac{1}{a} \int_{-\infty}^x \widehat{\psi}^T R \varphi dx + 4i\xi^3 \beta(t) u(x_0, t) \right) (a\overline{\psi} + b\psi). \end{aligned}$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $x \rightarrow +\infty$ и учитывая (19), получаем

$$a_t = - \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}^T R \varphi dx, \quad b_t = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}^T R \varphi dx - \frac{b}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}^T R \varphi dx + 8i\xi^3 \beta(t) u(x_0, t) b.$$

Следовательно, при $\text{Im } \xi = 0$ имеем

$$\frac{dr^+}{dt} = 8i\xi^3 \beta(t) u(x_0, t) r^+ - \frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} G(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) dx. \quad (27)$$

Лемма 2. Если вектор-функция $\varphi(x, \xi) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x, \xi) \\ \varphi_2(x, \xi) \end{pmatrix}$ является решением уравнения (17), то ее компоненты удовлетворяют равенству

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) dx = 2i\xi \gamma(t) u(x_1, t) a(\xi) b(\xi). \quad (28)$$

Доказательство. Для доказательства леммы нам потребуется вычислить следующий интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(t) u(x_1, t) u_x(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{2N} (\Phi_{k_1}^2 - \Phi_{k_2}^2) (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) dx.$$

Сначала вычислим первый интеграл в правой части последнего равенства. Используя соотношения (7), (8), (17), имеем

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(t) u(x_1, t) u_x(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) dx = -\gamma(t) u(x_1, t) \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) du$$

$$\begin{aligned}
&= -\gamma(t)u(x_1, t)u(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)|_{-\infty}^{\infty} + \gamma(t)u(x_1, t) \int_{-\infty}^{\infty} u(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)' dx \\
&= 2\gamma(t)u(x_1, t) \int_{-\infty}^{\infty} (u\varphi_1\varphi_1' + u\varphi_2\varphi_2') dx \\
&= 2\gamma(t)u(x_1, t) \int_{-\infty}^{\infty} [(-\varphi_2' + i\xi\varphi_2)\varphi_1' + (\varphi_1' + i\xi\varphi_1)\varphi_2'] dx \\
&= 2\gamma(t)u(x_1, t) \int_{-\infty}^{\infty} [-\varphi_1'\varphi_2' + i\xi\varphi_1'\varphi_2 + \varphi_1'\varphi_2' + i\xi\varphi_1\varphi_2'] dx \\
&= 2i\xi\gamma(t)u(x_1, t) \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi_1\varphi_2)' dx = 2i\xi\gamma(t)u(x_1, t) \lim_{R \rightarrow \infty} (\varphi_1\varphi_2)|_{-R}^R \\
&= 2i\xi\gamma(t)u(x_1, t)a(\xi)b(\xi).
\end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma(t)u(x_1, t)u_x(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) dx = -2i\xi\gamma(t)u(x_1, t)a(\xi)b(\xi). \quad (29)$$

Согласно условию $\bar{A}_k(t) = A_k(t)$ при $\bar{\xi}_k = -\xi_k$ и (12), (13) сумма в правой части уравнения (1) может быть переписана следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{2N} (\Phi_{k_1}^2 - \Phi_{k_2}^2) = 2 \sum_{\substack{k=1, \\ \text{Im } \xi_k > 0}}^N (\Phi_{k_1}^2 - \Phi_{k_2}^2).$$

Используя это равенство и лемму 1, проведем следующие вычисления:

$$\begin{aligned}
&2 \sum_{\substack{k=1, \\ \text{Im } \xi_k > 0}}^N \int_{-\infty}^{+\infty} (\Phi_{k_1}^2 \varphi_1^2 + \Phi_{k_1}^2 \varphi_2^2 - \Phi_{k_2}^2 \varphi_1^2 - \Phi_{k_2}^2 \varphi_2^2) dx \\
&= 2 \sum_{\substack{k=1, \\ \text{Im } \xi_k > 0}}^N \int_{-\infty}^{+\infty} (\Phi_{k_1} \varphi_1 - \Phi_{k_2} \varphi_2)(\Phi_{k_1} \varphi_1 + \Phi_{k_2} \varphi_2) dx \\
&\quad + 2 \sum_{\substack{k=1, \\ \text{Im } \xi_k > 0}}^N \int_{-\infty}^{+\infty} (\Phi_{k_1} \varphi_2 - \Phi_{k_2} \varphi_1)(\Phi_{k_1} \varphi_2 + \Phi_{k_2} \varphi_1) dx \\
&\times \sum_{\substack{k=1, \\ \text{Im } \xi_k > 0}}^N \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{-i(\xi + \xi_k)} (\Phi_{k_1} \varphi_1 + \Phi_{k_2} \varphi_2)' (\Phi_{k_1} \varphi_1 + \Phi_{k_2} \varphi_2) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{k=1, \\ \operatorname{Im} \xi_k > 0}}^N \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{-i(\xi - \xi_k)} (\Phi_{k_1} \varphi_2 - \Phi_{k_2} \varphi_1)' (\Phi_{k_1} \varphi_2 - \Phi_{k_2} \varphi_1) dx \\
& = \sum_{\substack{k=1, \\ \operatorname{Im} \xi_k > 0}}^N \frac{i(\Phi_{k_1} \varphi_1 + \Phi_{k_2} \varphi_2)^2|_{-\infty}^{+\infty}}{(\xi + \xi_k)} + \sum_{\substack{k=1, \\ \operatorname{Im} \xi_k > 0}}^N \frac{(\Phi_{k_1} \varphi_2 - \Phi_{k_2} \varphi_1)^2|_{-\infty}^{+\infty}}{(\xi - \xi_k)} = 0.
\end{aligned}$$

Согласно последним тождествам и (29) можно получить равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) dx = 2i\xi\gamma(t)u(x_1, t)a(\xi)b(\xi).$$

Лемма доказана.

В силу (27) и (28) имеем

$$\frac{dr^+}{dt} = (8i\xi^3\beta(t)u(x_0, t) - 2i\xi\gamma(t)u(x_1, t))r^+.$$

Продифференцировав равенство $\varphi_n = C_n\psi_n$ по t , получим равенство

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{\xi=\xi_n} + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_n} \cdot \frac{d\xi_n}{dt} = \frac{dC_n}{dt}\psi_n + C_n \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{\xi=\xi_n} + C_n \left. \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_n} \cdot \frac{d\xi_n}{dt},$$

которое согласно (14) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial t} = \frac{dC_n}{dt}\psi_n + C_n \frac{\partial \psi_n}{\partial t} - \dot{a}(\xi_n)h_n \frac{d\xi_n}{dt}, \quad (30)$$

где

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial t} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{\xi=\xi_n}.$$

Аналогично случаю непрерывного спектра с учетом (25) в случае дискретного спектра получаем равенство

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_n}{\partial t} - A\varphi_n &= \left(-\frac{1}{C_n} \int_{-\infty}^x \widehat{\varphi}_n^T R \varphi_n dx \right) h_n \\
&+ \left(\frac{1}{C_n} \int_{-\infty}^x \widehat{h}_n^T R \varphi_n dx + 4i\xi_n^3 \beta(t)u(x_0, t) \right) \varphi_n,
\end{aligned}$$

которое является аналогом равенства (26). Согласно (30) последнее равенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial C_n}{\partial t}\psi_n + C_n \frac{\partial \psi_n}{\partial t} - \dot{a}(\xi_n) \frac{d\xi_n}{dt} h_n - C_n A\psi_n \\
&= \left(-\frac{1}{C_n} \int_{-\infty}^x \widehat{\varphi}_n^T R \varphi_n dx \right) h_n + \left(\frac{1}{C_n} \int_{-\infty}^x \widehat{h}_n^T R \varphi_n dx + 4i\xi_n^3 \beta(t)u(x_0, t) \right) C_n \psi_n.
\end{aligned}$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $x \rightarrow +\infty$, с учетом (15) и (19) получаем следующие равенства:

$$\frac{dC_n}{dt} = \left(8i\xi_n^3 \beta(t) u(x_0, t) + \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}_n^T R \psi_n dx \right) C_n, \quad \frac{d\xi_n}{dt} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_n^T R \varphi_n dx}{C_n \dot{a}(\xi_n)}.$$

Таким образом, имеем тождества

$$\begin{aligned} \frac{dC_n}{dt} &= \left(8i\xi_n^3 \beta(t) u(x_0, t) - \int_{-\infty}^{\infty} G(h_{n_1} \psi_{n_1} + h_{n_2} \psi_{n_2}) dx \right) C_n, \\ \frac{d\xi_n}{dt} &= \frac{- \int_{-\infty}^{\infty} G(\varphi_{n_1}^2 + \varphi_{n_2}^2) dx}{C_n \dot{a}(\xi_n)}. \end{aligned} \quad (31)$$

Остается заметить, что согласно тождеству (см. [32])

$$\dot{a}(\xi_n) = -\frac{2i}{C_n} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{n_1} \varphi_{n_2} dx$$

последнее равенство можно переписать в виде

$$\frac{d\xi_n}{dt} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} G(\varphi_{n_1}^2 + \varphi_{n_2}^2) dx}{2i \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{n_1} \varphi_{n_2} dx}. \quad (32)$$

Лемма 3. Если вектор-функции

$$\psi_n(x, \xi) = \begin{pmatrix} \psi_{n_1}(x, \xi_n) \\ \psi_{n_2}(x, \xi_n) \end{pmatrix}, \quad h_n(x, \xi) = \begin{pmatrix} h_{n_1}(x, \xi_n) \\ h_{n_2}(x, \xi_n) \end{pmatrix}$$

являются решениями уравнения (17), то их компоненты удовлетворяют равенствам

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(h_{n_1} \psi_{n_1} + h_{n_2} \psi_{n_2}) dx = 2i\xi_n u(x_1, t) \gamma(t) - 2A_n(t). \quad (33)$$

Доказательство. Согласно определению $G(x, t)$ справедливо следующее тождество:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} G(h_{n_1} \psi_{n_1} + h_{n_2} \psi_{n_2}) dx &= -\gamma(t) u(x_1, t) \int_{-\infty}^{\infty} u_x (h_{n_1} \psi_{n_1} + h_{n_2} \psi_{n_2}) dx \\ &\quad + \sum_{k=1}^{2N} \int_{-\infty}^{+\infty} (\Phi_{k_1}^2 - \Phi_{k_2}^2) (h_{n_1} \psi_{n_1} + h_{n_2} \psi_{n_2}) dx. \end{aligned}$$

Сначала, используя лемму 1 и равенства (7), (15) и (17), вычислим следующий интеграл:

$$\begin{aligned}
& -\gamma(t)u(x_1, t) \int_{-\infty}^{\infty} u_x(h_{n_1}\psi_{n_1} + h_{n_2}\psi_{n_2}) dx \\
& = -\gamma(t)u(x_1, t) \int_{-\infty}^{\infty} (h_{n_1}\psi_{n_1} + h_{n_2}\psi_{n_2}) du = -\gamma(t)u(x_1, t)u(h_{n_1}\psi_{n_1} + h_{n_2}\psi_{n_2}) \Big|_{-\infty}^{\infty} \\
& \quad + \gamma(t)u(x_1, t) \int_{-\infty}^{\infty} (uh'_{n_1}\psi_{n_1} + uh_{n_1}\psi'_{n_1} + uh'_{n_2}\psi_{n_2} + uh_{n_2}\psi'_{n_2}) dx \\
& = -\gamma(t)u(x_1, t) \int_{-\infty}^{\infty} ((-\psi'_{n_2} + i\xi_n\psi_{n_2})h'_{n_1} + (-h'_{n_2} + i\xi_n h_{n_2})\psi'_{n_1}) dx \\
& \quad - \gamma(t)u(x_1, t) \int_{-\infty}^{+\infty} (h'_{n_2}(\psi'_{n_1} + i\xi_n\psi_{n_1}) + \psi'_{n_2}(h'_{n_1} + i\xi_n h_{n_1})) dx \\
& = i\xi_n\gamma(t)u(x_1, t) \int_{-\infty}^{\infty} ((h_{n_1}\psi_{n_2})' + (h_{n_2}\psi_{n_1})') dx \\
& = i\xi_n\gamma(t)u(x_1, t)(h_{n_1}\psi_{n_2} + h_{n_2}\psi_{n_1}) \Big|_{-\infty}^{\infty} \\
& = i\xi_n\gamma(t)u(x_1, t) \left(e^{-i\xi_n x} \cdot e^{i\xi_n x} - \left(-C_n e^{i\xi_n x} \cdot \frac{1}{C_n} e^{-i\xi_n x} \right) \right) = 2i\xi_n\gamma(t)u(x_1, t).
\end{aligned}$$

Теперь вычислим интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\Phi_{k_1}^2 - \Phi_{k_2}^2)(h_{n_1}\psi_{n_1} + h_{n_2}\psi_{n_2}) dx.$$

Для вычисления этого интеграла рассмотрим следующие два случая.

1. Пусть ξ_k отличается от ξ_n , в этом случае согласно лемме 1 имеем

$$\begin{aligned}
& (\Phi_{k_1}^2 - \Phi_{k_2}^2)(h_{n_1}\psi_{n_1} + h_{n_2}\psi_{n_2}) \\
& = -\frac{1}{2i(\xi_k + \xi_n)} \frac{d}{dx} ((\Phi_{k_1}h_{n_1} + \Phi_{k_2}h_{n_2})(\Phi_{k_1}\psi_{n_1} + \Phi_{k_2}\psi_{n_2})) \\
& \quad - \frac{1}{2i(\xi_k - \xi_n)} \frac{d}{dx} ((\Phi_{k_1}h_{n_2} - \Phi_{k_2}h_{n_1})(\Phi_{k_1}\psi_{n_2} - \Phi_{k_2}\psi_{n_1})).
\end{aligned}$$

Следовательно, в этом случае

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\Phi_{k_1}^2 - \Phi_{k_2}^2)(h_{n_1}\psi_{n_1} + h_{n_2}\psi_{n_2}) dx = 0.$$

2. Если $\xi_k = \xi_n$, то

$$(\Phi_{n_1}^2 - \Phi_{n_2}^2)(h_{n_1}\psi_{n_1} + h_{n_2}\psi_{n_2})$$

$$= -\frac{1}{4i\xi_n} \frac{d}{dx} ((\Phi_{n_1}\psi_{n_1} + \Phi_{n_2}\psi_{n_2})(\Phi_{n_1}h_{n_1} + \Phi_{n_2}h_{n_2})) + \Phi_{n_1}\Phi_{n_2}(\psi_{n_1}h_{n_2} - \psi_{n_2}h_{n_1}),$$

поэтому с учетом (2) и (16) получаем равенство

$$\begin{aligned} 2 \int_{-\infty}^{+\infty} (\Phi_{n_1}^2 - \Phi_{n_2}^2)(h_{n_1}\psi_{n_1} + h_{n_2}\psi_{n_2}) dx &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{n_1}\Phi_{n_2}W\{\psi_n, h_n\} dx \\ &= \frac{2}{C_n} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{n_1}\Phi_{n_2}W\{\varphi_n, h_n\} dx = -2A_n(t). \end{aligned}$$

Окончательно на основании вышеизложенного получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(h_{n_1}\psi_{n_1} + h_{n_2}\psi_{n_2}) dx = 2i\xi_n u(x_1, t)\gamma(t) - 2A_n(t).$$

Лемма доказана.

Согласно (31) и (33) имеем

$$\frac{dC_n}{dt} = (8i\xi_n^3\beta(t)u(x_0, t) - 2i\xi_n\gamma(t)u(x_1, t) + 2A_n(t))C_n(t).$$

Подобным образом можно показать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(\varphi_{n_1}^2 + \varphi_{n_2}^2) dx = 0,$$

поэтому

$$\frac{d\xi_n}{dt} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. Если функции $u(x, t)$, $\Phi_k(x, t)$, $k = 1, 2, \dots, N$, являются решением задачи (1)–(5), то данные рассеяния оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x, t)$ меняются по t следующим образом:

$$\frac{d\xi_n}{dt} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

$$\frac{dr^+}{dt} = (8i\xi^3\beta(t)u(x_0, t) - 2i\xi\gamma(t)u(x_1, t))r^+, \quad \text{Im } \xi = 0,$$

$$\frac{dC_n}{dt} = (8i\xi_n^3\beta(t)u(x_0, t) - 2i\xi_n\gamma(t)u(x_1, t) + 2A_n(t))C_n(t).$$

Полученные равенства полностью определяют эволюцию данных рассеяния, что позволяет применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи Коши (1)–(5).

ПРИМЕР. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} u_t + \beta(t)u(1, t)(6u^2u_x + u_{xxx}) + \gamma(t)u(0, t)u_x &= 2(\Phi_{11}^2 - \Phi_{12}^2), \\ L\Phi_1 &= \xi_1\Phi_1, \end{aligned} \quad (34)$$

$$u(x, 0) = -\frac{2}{\operatorname{ch} 2x}, \quad (35)$$

где

$$\beta(t) = \frac{e^2}{-32(t+1)^3} - \frac{t+1}{32e^2}, \quad \gamma(t) = \frac{-2t-1}{16} - \frac{1}{8(t+1)^3} + \frac{1}{16(t+1)^4},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{11}\Phi_{12} dx = A_1(t) = \frac{1}{4(t+1)^2}.$$

Нетрудно найти данные рассеяния оператора $L(0)$:

$$N = 1, \quad r^+(0) = 0, \quad \xi_1(0) = i, \quad C_1(0) = 2i.$$

Согласно теореме 2 имеем

$$\xi_1(t) = \xi_1(0) = i, \quad r^+(t) = 0, \quad C_1(t) = 2ie^{\mu(t)},$$

где

$$\mu(t) = 8 \int_0^t \beta(\tau)u(1, \tau) d\tau + 2 \int_0^t \gamma(\tau)u(0, \tau) d\tau + 2 \int_0^t A_1(\tau) d\tau.$$

Следовательно,

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r^+(\xi)e^{i\xi x} d\xi - i \sum_{j=1}^N C_j e^{i\xi_j x} = 2e^{-x+\mu(t)}.$$

Решая интегральное уравнение

$$K_1(x, y) - 2e^{-x-y+\mu(t)} + 4e^{-y+2\mu(t)} \int_x^{\infty} \int_x^{\infty} K_1(x, z)e^{-z-2s} ds dz = 0,$$

можно получить

$$K_1(x, y) = \frac{2e^{-x-y+\mu(t)}}{1 + e^{-4x+2\mu(t)}}.$$

Откуда находим решение задачи Коши (32), (33):

$$u(x, t) = -\frac{2}{\operatorname{ch} 2(x - \ln(t+1))},$$

$$\Phi_{11}(x, t) = \frac{e^{-3x+2\ln(t+1)}}{1 + e^{-4x+4\ln(t+1)}}, \quad \Phi_{12}(x, t) = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-4x+4\ln(t+1)}}.$$

5. Заключение

В работе показано, что метод обратной задачи рассеяния может быть применен для интегрирования нагруженного модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза с источником. Приведены факты из теории обратных задач для оператора Дирака.

Благодарность. Авторы выражают глубокую признательность профессору А. Б. Хасанову за полезные обсуждения и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gardner C. S., Greene I. M., Kruskal M. D., Miura R. M. Method for solving the Korteweg–de Vries equation // *Phys. Rev. Lett.* 1967. V. 19, N 19. P. 1095–1097.
2. Lax P. D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // *Commun. Pure Appl. Math.* 1968. V. 21, N 5. P. 467–490.
3. Wadati M. The exact solution of the modified Korteweg–de Vries equation // *J. Phys. Soc. Japan.* 1972. V. 32. P. 1681.
4. Khater A. H., El-Kalaawy O. H., Callebaut D. K. Backlund transformations and exact solutions for Alfvén solitons in a relativistic electron-positron plasma // *Phys. Scr.* 1998. V. 58, N 6. P. 545–548.
5. Schief W. An infinite hierarchy of symmetries associated with hyperbolic surfaces // *Nonlinearity*. 1995. V. 8, N 1. P. 1–9.
6. Matsutani S., Tsuru H. Reflectionless quantum wire // *J. Phys. Soc. Japan.* 1991. V. 60, N 11. P. 3640–3644.
7. Johnpillai A. G., Khalique C. M., Biswas A. Exact solutions of the mKdV equation with time-dependent coefficients // *Math. Commun.* 2011. V. 16. P. 509–518.
8. Biswas A. Solitary wave solution for the generalized KdV equation with time-dependent damping and dispersion // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2009. V. 14. P. 3503–3506.
9. Vaganan B. M., Kumaran M. S. Exact linearization and invariant solutions of the generalized Burger’s equation with linear damping and variable viscosity // *Stud. Appl. Math.* 2006. V. 117. P. 95–108.
10. Xiao-Yan T., Fei H., Sen-Yue L. Variable coefficient KdV equation and the analytical diagnosis of a dipole blocking life cycle // *Chin. Phys. Lett.* 2006. V. 23. P. 887–890.
11. Demiray H. Variable coefficient modified KdV equation in fluid-filled elastic tubes with stenosis: Solitary waves // *Chaos, Solitons, Fractals*. 2009. V. 42. P. 358–364.
12. Хасанов А. Б., Уразбоев Г. У. Метод решения уравнения мКдФ с самосогласованным источником // *Узб. мат. журн.* 2003. № 1. С. 69–75.
13. Мамедов К. А. Integration of mKdV equation with a self-consistent source in the class of finite density functions in the case of moving eigenvalues // *Russ. Math.* 2020. V. 64, N 10. P. 66–78.
14. Wu J., Geng X. Inverse scattering transform and soliton classification of the coupled modified Korteweg–de Vries equation // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2017. V. 53. P. 83–93.
15. Vaneeva O. Lie symmetries and exact solutions of variable coefficient mKdV equations: an equivalence based approach // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2012. V. 17, N 2. P. 611–618.
16. Salas A. H. Exact solutions to mKdV equation with variable coefficients // *Appl. Math. Comput.* 2010. V. 216, N 10. P. 2792–2798.
17. Dai C., Zhu J., Zhang J. New exact solutions to the mKdV equation with variable coefficients // *Chaos, Solitons, Fractals*. 2006. V. 27, N 4. P. 881–886.
18. Das S., Ghosh D. AKNS formalism and exact solutions of KdV and modified KdV equations with variable-coefficients // *Int. J. Adv. Res. Math.* 2016. V. 6. P. 32–41.
19. Zheng X., Shang Y., Huang Y. Abundant explicit and exact solutions for the variable coefficient mKdV equations // *Hindawi Publ. Corp. Abstr. Appl. Anal.* 2013. V. 2013. Article ID 109690.

20. Фролов И. С. Обратная задача рассеяния для системы Дирака на всей оси // Докл. АН СССР. 1972. Т. 207, № 1. С. 44–47.
21. Демонтис Ф. Точные решения модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза // Теор. мат. физика. 2011. Т. 168, № 1. С. 35–48.
22. Хасанов А. Б. Об обратной задаче теории рассеяния для системы двух несамосопряженных дифференциальных уравнений первого порядка // Докл. АН. СССР. 1984. Т. 277, № 3. С. 559–562.
23. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995.
24. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С. 86–94.
25. Кожанов А. И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 4. С. 694–716.
26. Khasanov A. B., Hoitmetov U. A. On integration of the loaded mKdV equation in the class of rapidly decreasing functions // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2021. № 38. С. 19–35.
27. Hoitmetov U. A. Integration of the sine-Gordon equation with a source and an additional term // Rep. Math. Phys. 2022. V. 90, N 2. P. 221–240.
28. Хоитметов У. А. Интегрирование уравнения Хироты с коэффициентами, зависящими от времени // Теор. мат. физика. 2023. Т. 214, № 1. С. 30–42.
29. Khasanov A. B., Hoitmetov U. A. Integration of the loaded Korteweg–de Vries equation with a self-consistent source in the class of rapidly decreasing complex-valued functions // Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb., Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. 2022. V. 42, N 4. P. 1–15.
30. Хасанов А. Б., Хоитметов У. А. Интегрирование общего нагруженного уравнения Кортевега — де Фриза с интегральным источником в классе быстроубывающих комплекснозначных функций // Изв. вузов. Математика. 2021. № 7. С. 52–66.
31. Захаров В. Е., Шабат А. Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейной среде // Журн. exper. теор. физики. 1971. Т. 61, № 1. С. 118–134.
32. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
33. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988.

Поступила в редакцию 8 июля 2022 г.

После доработки 2 мая 2023 г.

Принята к публикации 29 мая 2023 г.

Хоитметов Умид Азадович, Собиров Шехзод Кучкарбой угли
Ургенчский государственный университет
кафедра прикладной математики и математической физики,
ул. Х. Алимджана, 14, Ургенч 220100, Узбекистан
x_umid@mail.ru, shehzod6285@mail.ru

INTEGRATION OF THE LOADED MKDV
EQUATION WITH A SOURCE IN THE CLASS
OF RAPIDLY DECREASING FUNCTIONS
U. A. Hoitmetov and Sh. Q. Sobirov

Abstract: We consider the Cauchy problem for a loaded modified Korteweg–de Vries equation with a self-consistent source. The evolution of the scattering data of the Dirac operator, whose potential is a solution of the loaded modified Korteweg–de Vries equation with a self-consistent source in the class of rapidly decreasing functions, is derived. A specific example is given to illustrate the application of the obtained results.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.75.56.006

Keywords: loaded modified Korteweg–de Vries equation, self-consistent source, Jost solutions, scattering data.

REFERENCES

1. Gardner C. S., Greene I. M., Kruskal M. D., and Miura R. M., “Method for solving the Korteweg–de Vries equation,” *Phys. Rev. Lett.*, **19**, 1095–1097 (1967).
2. Lax P. D., “Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves,” *Commun. Pure Appl. Math.*, **21**, 467–490 (1968).
3. Wadati M., “The exact solution of the modified Korteweg–de Vries equation,” *J. Phys. Soc. Japan.*, **32**, 1681 (1972).
4. Khater A. H., El-Kalaawy O. H., and Callebaut D. K., “Backlund transformations and exact solutions for Alfvén solitons in a relativistic electron–positron plasma,” *Phys. Scr.*, **58**, No. 6, 545–548 (1998).
5. Schief W., “An infinite hierarchy of symmetries associated with hyperbolic surfaces,” *Nonlinearity*, **8**, No. 1, 1–9 (1995).
6. Matsutani S. and Tsuru H., “Reflectionless quantum wire,” *J. Phys. Soc. Japan*, **60**, No. 11, 3640–3644 (1991).
7. Johnpillai A. G., Khaliq C. M., and Biswas A., “Exact solutions of the mKdV equation with time-dependent coefficients,” *Math. Commun.*, **16**, 509–518 (2011).
8. Biswas A., “Solitary wave solution for the generalized KdV equation with time-dependent damping and dispersion,” *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **14**, 3503–3506 (2009).
9. Vaganan B. M. and Kumaran M. S., “Exact linearization and invariant solutions of the generalized Burger’s equation with linear damping and variable viscosity,” *Stud. Appl. Math.*, **117**, 95–108 (2006).
10. Xiao-Yan T., Fei H., and Sen-Yue L., “Variable coefficient KdV equation and the analytical diagnosis of a dipole blocking life cycle,” *Chin. Phys. Lett.*, **23**, 887–890 (2006).
11. Demiray H., “Variable coefficient modified KdV equation in fluid-filled elastic tubes with stenosis: Solitary waves,” *Chaos, Solitons, Fractals*, **42**, 358–364 (2009).
12. Khasanov A. B. and Urazboev G. U., “Method for solving the mKdV equation with a self-consistent source [in Russian],” *Uzbek. Mat. Zh.*, No. 1, 69–75 (2003).
13. Mamedov K. A., “Integration of mKdV equation with a self-consistent source in the class of finite density functions in the case of moving eigenvalues,” *Russ. Math.*, **64**, No. 10, 66–78 (2020).

14. Wu J. and Geng X., "Inverse scattering transform and soliton classification of the coupled modified Korteweg–de Vries equation," *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **53**, 83–93 (2017).
15. Vaneeva O., "Lie symmetries and exact solutions of variable coefficient mKdV equations: an equivalence based approach," *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **17**, No. 2, 611–618 (2012).
16. Salas A. H., "Exact solutions to mKdV equation with variable coefficients," *Appl. Math. Comput.*, **216**, No. 10, 2792–2798 (2010).
17. Dai C., Zhu J., and Zhang J., "New exact solutions to the mKdV equation with variable coefficients," *Chaos, Solitons, Fractals*, **27**, No. 4, 881–886 (2006).
18. Das S. and Ghosh D., "AKNS formalism and exact solutions of KdV and modified KdV equations with variable coefficients," *Int. J. Adv. Res. Math.*, **6**, 32–41 (2016).
19. Zheng X., Shang Y., and Huang Y., "Abundant explicit and exact solutions for the variable coefficient mKdV equations," *Hindawi Publ. Corp. Abstr. Appl. Anal.*, **2013**, article No. 109690 (2013).
20. Frolov I. S., "Inverse scattering problem for a Dirac system on the whole axis [in Russian]," *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **207**, No. 1, 44–47 (1972).
21. Demontis F., "Exact solutions of the modified Korteweg–de Vries equation [in Russian]," *Teor. Mat. Fiz.*, **168**, No. 1, 35–48 (2011).
22. Khasanov A. B., "An inverse problem in scattering theory for a system of two first-order nonselfadjoint differential equations [in Russian]," *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **277**, No. 3, 559–562 (1984).
23. Nakhushev A. M., *Equations of Mathematical Biology* [in Russian], Vysshaya Shkola, Moscow (1995).
24. Nakhushev A. M., "Loaded equations and their applications [in Russian]," *Differ. Equ.*, **19**, No. 1, 86–94 (1983).
25. Kozhanov A. I., "Nonlinear loaded equations and inverse problems [in Russian]," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, **44**, No. 2, 694–716 (2004).
26. Khasanov A. B. and Hoitmetov U. A., "On integration of the loaded mKdV equation in the class of rapidly decreasing functions," *Bull. Irkut. State Univ., Ser. Math.*, **38**, 19–35 (2021).
27. Hoitmetov U. A., "Integration of the sine-Gordon equation with a source and an additional term," *Rep. Math. Phys.*, **90**, No. 2, 221–240 (2022).
28. Hoitmetov U. A., "Integration of the Hirota equation with time-dependent coefficients," *Theor. Math. Phys.*, **214**, No. 1, 30–42 (2023).
29. Khasanov A. B. and Hoitmetov U. A., "Integration of the loaded Korteweg–de Vries equation with a self-consistent source in the class of rapidly decreasing complex-valued functions," *Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb., Ser. Phys.-Tech. Math. Sci.*, **42**, No. 4, 1–15 (2022).
30. Khasanov A. B. and Hoitmetov U. A., "Integration of the general loaded Korteweg–de Vries equation with an integral type source in the class of rapidly decreasing complex-valued functions," *Russ. Math.*, **65**, No. 7, 43–57 (2021).
31. Zakharov V. E. and Shabat A. B., "Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media," *Sov. Phys.*, **34**, No. 1, 62–69 (1972).
32. Ablowitz M. and Sigur H., *Solitons and the Inverse Problem Method*, SIAM, Philadelphia (1981).
33. Dodd R., Eilbeck J., Gibbon J., and Morris H., *Solitons and Nonlinear Wave Equations*, Acad. Press, London (1982).

Submitted July 8, 2022

Revised May 2, 2023

Accepted May 29, 2023

Umid A. Hoitmetov, Shekhzod Q. Sobirov
 Urgench State University,
 Department of Applied Mathematics and Mathematical Physics,
 14 Kh. Alimdjani Street, Urgench, 220100, Uzbekistan
 x_umid@mail.ru, shehzod6285@mail.ru

SHARP BOUNDS ASSOCIATED WITH THE ZALCMAN CONJECTURE FOR THE INITIAL COEFFICIENTS AND SECOND HANKEL DETERMINANTS FOR CERTAIN SUBCLASS OF ANALYTIC FUNCTIONS

N. Vani, D. Vamshee Krishna, and B. Rath

Abstract: In this paper, we obtain sharp bounds in the Zalcman conjecture for the initial coefficients, the second Hankel determinant $H_{2,2}(f) = a_2a_4 - a_3^2$ and an upper bound for the second Hankel determinant $H_{2,3}(f) = a_3a_5 - a_4^2$ for the functions belonging to a certain subclass of analytic functions. The practical tools applied in the derivation of our main results are the coefficient inequalities of the Carathéodory class \mathcal{P} .

DOI: 10.25587/SVFU.2023.24.67.007

Keywords: analytic function, upper bound, the Zalcman conjecture, univalent function, Carathéodory function.

1. Introduction

Let \mathcal{H} denote the class of all analytic functions defined in the open unit disc $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Let \mathcal{A} represent the class of functions $f \in \mathcal{H}$ satisfying the normalized conditions namely $f(0) = f'(0) - 1 = 0$, i.e., of the form

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad a_1 := 1, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (1.1)$$

By S , we denote the subfamily of \mathcal{A} , consisting of all univalent functions (i.e., one-to-one) in \mathbb{D} . Pommerenke [1] characterized the n^{th} Hankel determinant of order r , for f given in (1.1) with $r, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ as

$$H_{r,n}(f) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+r-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+r-1} & a_{n+r} & \cdots & a_{n+2r-2} \end{vmatrix}. \quad (1.2)$$

The Fekete–Szegő functional is obtained for $r = 2$ and $n = 1$ in (1.2) and denoted by $H_{2,1}(f)$, where

$$H_{2,1}(f) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 - a_2^2.$$

Further, sharp bounds for the functional $|a_2a_4 - a_3^2|$ are obtained in (1.2) for $r = 2$ and $n = 2$, the Hankel determinant of order two

$$H_{2,2}(f) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = a_2a_4 - a_3^2.$$

In recent years, many authors have focussed research on the estimation of an upper bound for $|H_{2,2}(f)|$. The exact estimates of $|H_{2,2}(f)|$ for the family of univalent functions, namely bounded turning, starlike and convex, denoted by \mathfrak{R} , S^* and \mathcal{K} , respectively, fulfilling the analytic conditions $\operatorname{Re}\{f'(z)\} > 0$, $\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0$ and $\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > 0$ in the unit disc \mathbb{D} , were proved by Janteng et al. (see [2, 3]), the bounds as $4/9$, 1 , and $1/8$ were derived. For recent results on the second Hankel determinants (see [4–8]). Similarly, by taking $r = 2$ and $n = 3$ in (1.2), we have $H_{2,3}(f) = a_3a_5 - a_4^2$, the second Hankel determinant, for which Zaprawa [9] derived sharp bounds $|H_{2,3}(f)| \leq 1$ for the class S^* and $|H_{2,3}(f)| \leq \frac{1}{15}$ for the class \mathcal{K} with the assumption that $a_2 = 0$ in f given in (1.1). By the results derived by Zaprawa [9], recently, Andy Liew Pik Hern et al. [10] have shown that $|H_{2,3}(f)| \leq \frac{13}{16}$ for $f \in S_s^*$ and $|H_{2,3}(f)| \leq \frac{13}{240}$ for $f \in \mathcal{K}_s$, where S_s^* and \mathcal{K}_s denote the families of starlike and convex functions with respect to symmetric points, analytically defined as

$$f \in S_s^* \Leftrightarrow \operatorname{Re} \left\{ \frac{2zf'(z)}{f(z) - f(-z)} \right\} > 0, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (1.3)$$

$$f \in \mathcal{K}_s \Leftrightarrow \operatorname{Re} \left\{ \frac{2\{zf'(z)\}'}{zf'(z) + zf'(-z)} \right\} > 0, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (1.4)$$

Choosing $r = 2$ and $n = p + 1$ in (1.2), we obtain the Hankel determinant of second order for the p -valent function (see [11])

$$H_{2,p+1}(f) = \begin{vmatrix} a_{p+1} & a_{p+2} \\ a_{p+2} & a_{p+3} \end{vmatrix} = a_{p+1}a_{p+3} - a_{p+2}^2,$$

In the 1960s Zalcman posed a conjecture that if $f \in S$ then

$$|a_n^2 - a_{2n-1}| \leq (n-1)^2 \quad \text{for } n = 2, 3, \dots; \quad (1.5)$$

the equality holds only for the Koebe function $k(z) = z/(1-z)^2$ or its rotations. For functions in S , Krushkal proved the Zalcman conjecture for $n = 3$ (see [12]) and recently for $n = 4, 5, 6, \dots$ [13]. This remarkable conjecture was investigated by many researchers and is still an open problem for functions belonging to class S when $n > 6$. The Zalcman conjecture was proved for certain special subclasses of S , such as starlike, typically real, and close-to-convex functions (see [12, 14]). Recently, Abu Muhanna et al. [15] solved the Zalcman conjecture for the class \mathcal{F} consisting of the functions $f \in \mathcal{A}$ satisfying the analytic condition

$$\operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > -1/2, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Functions in the class \mathcal{F} are known to be convex in some direction (and hence close-to-convex and univalent) in \mathbb{D} . In 1988, Ma [16] proved the Zalcman conjecture

for close-to-convex functions. For $f \in S$, Ma [17] proposed a generalized Zalcman conjecture:

$$|a_n a_m - a_{n+m-1}| \leq (n-1)(m-1) \quad \text{for } m, n = 2, 3, \dots, \quad (1.6)$$

which is still an open problem, and proved it for classes S^* and $S_{\mathbb{R}}$, where $S_{\mathbb{R}}$ denotes the type of all functions in \mathcal{A} which are typically real. Bansal and Sokol [18] studied the Zalcman conjecture for some subclasses of analytic functions. Ravichandran and Verma [19] proved this conjecture for the classes of starlike and convex functions of a certain order and the class of functions with bounded turning. Motivated by the results mentioned above, which are associated with the Zalcman conjecture and the Hankel determinants, in the present paper, we are attempting to find sharp upper bounds for the coefficient inequalities specified in the abstract for the functions belonging to a certain subclass of analytic functions defined as follows.

DEFINITION [20]. A mapping $f \in \mathcal{A}$ is said to be in the class $S^* \mathcal{K}_s(\beta)$ ($0 \leq \beta \leq 1$) if

$$\operatorname{Re} \left[\frac{2 \{z f'(z) + \beta z^2 f''(z)\}}{(1-\beta) \{f(z) - f(-z)\} + \beta \{z f'(z) + z f'(-z)\}} \right] > 0, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (1.7)$$

For $\beta = 0$ and $\beta = 1$ in (1.7), we get $S^* \mathcal{K}_s(0) = S_s^*$, consisting of starlike functions with respect to symmetric points, interpreted and studied by Sakaguchi [21], and $S^* \mathcal{K}_s(1) = \mathcal{K}_s$, consisting of convex functions with respect to symmetric points, analyzed by Das and Singh [22], for which analytic conditions are given in (1.3) and (1.4).

In proving our results, the required sharp estimates specified below are given as lemmas suitable for functions possessing positive real part.

Let \mathcal{P} be a class of all functions g having a positive real part in \mathbb{D} :

$$g(z) = 1 + \sum_{t=1}^{\infty} c_t z^t, \quad (1.8)$$

Every such a function is called Carathéodory function [23].

Lemma 1.1 [24]. If $g \in \mathcal{P}$, then $|c_t| \leq 2$ for $t \in \mathbb{N}$; the equality is attained for the function $h(z) = \frac{1+z}{1-z}$, $z \in \mathbb{D}$.

Lemma 1.2 [25]. If $g \in \mathcal{P}$, then the estimate $|c_i - \mu c_j c_{i-j}| \leq 2$ holds for $i, j \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ with $i > j$ and $\mu \in [0, 1]$.

From Lemma 1.2, Livingston [26] proved that $|c_i - c_j c_{i-j}| \leq 2$.

Lemma 1.3 [9]. If $g \in \mathcal{P}$, then $|c_2 c_4 - c_3^2| \leq 4$. The inequality holds only for the functions

$$h_1(z) = \frac{1+z^2}{1-z^2}, \quad h_2(z) = \frac{1+z^3}{1-z^3}$$

and their rotations.

Lemma 1.4 [27]. Let $g \in \mathcal{P}$ be of the form (1.8) with $c_1 \geq 0$. Then

$$2c_2 = c_1^2 + y(4 - c_1^2)$$

and

$$4c_3 = [c_1^3 + \{2c_1y - c_1y^2 + 2(1 - |x|^2)y\}(4 - c_1^2)],$$

for some complex valued x and y such that $|x| \leq 1$ and $|y| \leq 1$.

To obtain our results, we adopt some ideas from Libera and Zlotkiewicz [27].

2. Important Results

Theorem 2.1. If $f \in S^* \mathcal{K}_s(\beta)$ ($0 \leq \beta \leq 1$), then

$$|a_2a_3 - a_4| \leq \frac{1}{2(1+3\beta)} < (2-1)(3-1) = 2;$$

this inequality is sharp for $g_1(z) = \frac{1+z^3}{1-z^3}$.

PROOF. For $f \in S^* \mathcal{K}_s(\beta)$, there exists $g \in \mathcal{P}$ such that

$$\frac{2\{zf'(z) + \beta z^2 f''(z)\}}{(1-\beta)\{f(z) - f(-z)\} + \beta\{zf'(z) + zf'(-z)\}} = g(z). \quad (2.1)$$

Putting the values for f , f' , f'' and g in (2.1), we get

$$\begin{aligned} & [2(1+\beta)a_2 + 3(1+2\beta)a_3z + 4(1+3\beta)a_4z^2 + 5(1+4\beta)a_5z^3 + \dots] \\ &= [c_1 + \{c_2 + (1+2\beta)a_3\}z + \{c_3 + (1+2\beta)c_1a_3\}z^2 \\ & \quad + \{c_4 + (1+2\beta)c_2a_3 + (1+4\beta)a_5\}z^3 + \dots]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Equating the coefficients for powers of z in (2.2), we obtain

$$a_2 = \frac{c_1}{2(1+\beta)}, \quad a_3 = \frac{c_2}{2(1+2\beta)}, \quad a_4 = \frac{(2c_3 + c_1c_2)}{8(1+3\beta)}, \quad a_5 = \frac{(2c_4 + c_2^2)}{8(1+4\beta)}. \quad (2.3)$$

Using the values of a_2 , a_3 and a_4 from (2.3), we have

$$\begin{aligned} a_2a_3 - a_4 &= \frac{c_1c_2}{4(1+\beta)(1+2\beta)} - \frac{(2c_3 + c_1c_2)}{8(1+3\beta)} \\ &= -\frac{1}{4(1+3\beta)} \left(c_3 - \frac{(-2\beta^2 + 3\beta + 1)}{2(1+\beta)(1+2\beta)} c_1c_2 \right). \end{aligned}$$

Taking modulus on both sides and then applying Lemma 1.2 to the expression above, upon simplification, we obtain

$$|a_2a_3 - a_4| \leq \frac{1}{2(1+3\beta)} < (2-1)(3-1) = 2. \quad \square$$

REMARK 2.2. For the extremal function $g_1(z) = \frac{1+z^3}{1-z^3} = 1 + 2z^3 + 2z^6 + \dots$, we have $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, and $c_3 = 2$. Hence, from (2.3) we obtain $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, and $a_4 = \frac{c_3}{4(1+3\beta)}$.

Theorem 2.3. *If $f \in S^* \mathcal{K}_s(\beta)$ ($0 \leq \beta \leq 1$), then*

$$|a_2^2 - a_3| \leq \frac{1}{(1+2\beta)} < (2-1)^2 = 1;$$

this inequality is sharp for $g_2(z) = \frac{1+z^2}{1-z^2}$.

PROOF. Using the values of a_2 and a_3 from (2.3), we have

$$a_2^2 - a_3 = \frac{c_1^2}{4(1+\beta)^2} - \frac{c_2}{2(1+2\beta)} = -\frac{1}{2(1+2\beta)} \left(c_2 - \frac{(1+2\beta)}{2(1+\beta)^2} c_1^2 \right).$$

Putting modulus on both sides in the expression above and applying Lemma 1.2, after simplifying, we get

$$|a_2^2 - a_3| \leq \frac{1}{(1+2\beta)}. \quad \square$$

REMARK 2.4. For the extremal function $g_2(z) = \frac{1+z^2}{1-z^2} = 1 + 2z^2 + 2z^4 + \dots$, we have $c_1 = 0$ and $c_2 = 2$; Hence, from (2.3), we obtain $a_2 = 0$ and $a_3 = \frac{c_2}{2(1+2\beta)}$.

Theorem 2.5. *If $f \in S^* \mathcal{K}_s(\beta)$ ($0 \leq \beta \leq 1$), then*

$$|a_3^2 - a_5| \leq \frac{1}{2(1+4\beta)} < (3-1)^2 = 4;$$

this inequality is sharp for $g_3(z) = \frac{1+z^4}{1-z^4}$.

PROOF. Using the values of a_3 and a_5 from (2.3), we have

$$a_3^2 - a_5 = \frac{c_2^2}{4(1+2\beta)^2} - \frac{(2c_4 + c_2^2)}{8(1+4\beta)} = -\frac{1}{4(1+4\beta)} \left(c_4 - \frac{(-4\beta^2 + 4\beta + 1)}{2(1+2\beta)^2} c_2^2 \right). \quad (2.4)$$

Taking modulus on both sides and applying Lemma 1.2, after simplifying, we get

$$|a_3^2 - a_5| \leq \frac{1}{2(1+4\beta)}. \quad \square$$

REMARK 2.6. For the extremal function

$$g_3(z) = \frac{1+z^4}{1-z^4} = 1 + 2z^4 + 2z^8 + \dots,$$

we have $c_2 = 0$ and $c_4 = 2$, therefore, from (2.3), we obtain $a_3 = 0$ and $a_5 = \frac{c_4}{4(1+4\beta)}$.

Theorem 2.7. *If $f \in S^* \mathcal{K}_s(\beta)$ ($0 \leq \beta \leq 1$), then*

$$|H_{2,2}(f)| = |a_2 a_4 - a_3^2| \leq \frac{1}{(1+2\beta)^2};$$

the inequality is sharp for the same function $g_2(z)$ as in Theorem 2.3.

PROOF. Using the values of a_2 , a_3 , and a_4 from (2.3), for the expression $a_2 a_4 - a_3^2$, we get

$$\begin{aligned} a_2 a_4 - a_3^2 &= \frac{1}{16(1+\beta)(1+2\beta)^2(1+3\beta)} \\ &\quad \times (2(1+2\beta)^2 c_1 c_3 + (1+2\beta)^2 c_1^2 c_2 - 4(1+\beta)(1+3\beta) c_2^2), \end{aligned} \quad (2.5)$$

which is equivalent to

$$a_2 a_4 - a_3^2 = \frac{1}{16(1+\beta)(1+2\beta)^2(1+3\beta)} [d_1 c_1 c_3 + d_2 c_1^2 c_2 + d_3 c_2^2], \quad (2.6)$$

where

$$d_1 = 2(1+2\beta)^2, \quad d_2 = (1+2\beta)^2, \quad d_3 = -4(1+\beta)(1+3\beta). \quad (2.7)$$

Putting the values of c_2 and c_3 from Lemma 1.4 into the right-hand side of (2.6), we simplify it into

$$\begin{aligned} 4[d_1 c_1 c_3 + d_2 c_1^2 c_2 + d_3 c_2^2] &= [(d_1 + 2d_2 + d_3)c_1^4 \\ &\quad + 2(d_1 + d_2 + d_3)c_1^2(4 - c_1^2)x - d_1 c_1^2(4 - c_1^2)x^2 + d_3(4 - c_1^2)^2 x^2 + \\ &\quad 2d_1 c_1(4 - c_1^2)(1 - |x|^2)y]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Taking modulus on both sides and applying the triangle inequality in the expression above, we get

$$\begin{aligned} 4|d_1 c_1 c_3 + d_2 c_1^2 c_2 + d_3 c_2^2| &\leq [|d_1 + 2d_2 + d_3||c_1|^4 + 2|d_1||c_1||4 - c_1^2||y| \\ &\quad + 2|d_1 + d_2 + d_3||c_1|^2|4 - c_1^2||x| + \{(|d_1| - |d_3|)c_1^2 - 2|d_1||c_1||y| + 4|d_3|\} |4 - c_1^2||x|^2]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

By (2.7), we can now write

$$|d_1 + 2d_2 + d_3| = 4\beta^2, \quad |d_1 + d_2 + d_3| = 1 + 4\beta, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} &\{(|d_1| - |d_3|)c_1^2 - 2|d_1||c_1||y| + 4|d_3|\} \\ &= -(4\beta^2 + 8\beta + 2)c_1^2 - 4(1+2\beta)^2 c_1 |y| + 16(1+\beta)(1+3\beta) \\ &= 2(c_1 - 2)\{-(2\beta^2 + 4\beta + 1)c_1 - 4(1+\beta)(1+3\beta)\}, \\ &= 2(2 - c_1)\{(2\beta^2 + 4\beta + 1)c_1 + 4(1+\beta)(1+3\beta)\}, \quad |y| = 1. \end{aligned}$$

Putting the calculated values from (2.10) and the value of d_1 from (2.7) into (2.9), after simplifying, we get

$$\begin{aligned} 2|d_1 c_1 c_3 + d_2 c_1^2 c_2 + d_3 c_2^2| &\leq [2\beta^2 c_1^4 + 2(1+2\beta)^2 c_1(4 - c_1^2)|y| + (1+4\beta)c_1^2(4 - c_1^2)|x| \\ &\quad + (2 - c_1)\{(2\beta^2 + 4\beta + 1)c_1 + 4(1+\beta)(1+3\beta)\}(4 - c_1^2)|x|^2]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Applying the triangle inequality, restoring $|x|$ by ρ , with $|y| \leq 1$, choosing $c_1 = c \in [0, 2]$, on the right-hand side of (2.11) we obtain

$$\begin{aligned} 2|d_1 c_1 c_3 + d_2 c_1^2 c_2 + d_3 c_2^2| &\leq [2\beta^2 c^4 + 2(1+2\beta)^2 c(4 - c^2) + (1+4\beta)c^2(4 - c^2)\rho \\ &\quad + (2 - c)\{(2\beta^2 + 4\beta + 1)c + 4(1+\beta)(1+3\beta)\}(4 - c^2)\rho^2] = H(c, \rho) \quad \text{for } |x| = \rho \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Here

$$\begin{aligned} H(c, \rho) &= [2\beta^2 c^4 + 2(1+2\beta)^2 c(4 - c^2) + (1+4\beta)c^2(4 - c^2)\rho \\ &\quad + (2 - c)\{(2\beta^2 + 4\beta + 1)c + 4(1+\beta)(1+3\beta)\}(4 - c^2)\rho^2]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

To determine the maximum value of $H(c, \rho)$ over the rectangle $[0, 1] \times [0, 2]$, we consider the partial differential coefficient of $H(c, \rho)$ from (2.13) with regard to ρ given by

$$\frac{\partial H}{\partial \rho} = [(1 + 4\beta)c^2 + 2(2 - c)\{(2\beta^2 + 4\beta + 1)c + 4(1 + \beta)(1 + 3\beta)\}\rho](4 - c^2). \quad (2.14)$$

For $\rho \in (0, 1)$, $c \in (0, 2)$, and $(0 \leq \beta \leq 1)$, by (2.14), we notice that $\frac{\partial H}{\partial \rho} > 0$, which indicates that $H(c, \rho)$ turns out to be an increasing mapping of ρ , hence, its maximum value is attained on the boundary of the rectangle only, i.e., when $\rho = 1$. Therefore, for $\rho = 1$ in (2.13), after simplifying, we get

$$F(c) = H(c, 1) = 4\beta^2 c^4 - 8(1 + 2\beta)^2 c^2 + 32(1 + \beta)(1 + 3\beta), \quad (2.15)$$

$$F'(c) = 16\beta^2 c^3 - 16(1 + 2\beta)^2 c, \quad (2.16)$$

$$F''(c) = 48\beta^2 c^2 - 16(1 + 2\beta)^2. \quad (2.17)$$

For the extreme values of $F(c)$, let $F'(c) = 0$. From (2.16), we have

$$16c\{\beta^2 c^2 - (1 + 2\beta)^2\} = 0. \quad (2.18)$$

Now, let us discuss the following two instances.

CASE 1. When $c = 0$, from (2.17), we note that

$$F''(0) = -16(1 + 2\beta)^2 < 0 \quad \text{for } 0 \leq \beta \leq 1.$$

Therefore, by the 2nd differentiation test at $c = 0$, $F(c)$ possesses the maximum value, which we can obtain from (2.15) as

$$\max_{0 \leq c \leq 2} F(0) = 32(1 + \beta)(1 + 3\beta). \quad (2.19)$$

CASE 2. When $c \neq 0$, from (2.18), we get

$$c^2 = \frac{(1 + 2\beta)^2}{\beta^2}. \quad (2.20)$$

For $0 < \beta \leq 1$, from (2.20) we note that c^2 does not belong to $[0, 2]$.

Now, simplifying the expressions (2.12) and (2.19), we obtain

$$|d_1 c_1 c_3 + d_2 c_1^2 c_2 + d_3 c_2^2| \leq 16(1 + \beta)(1 + 3\beta). \quad (2.21)$$

From (2.5) and (2.21), after simplifying, we get

$$|a_2 a_4 - a_3^2| \leq \frac{1}{(1 + 2\beta)^2}. \quad \square \quad (2.22)$$

REMARK 2.8. For the extremal function $g_2(z) = \frac{1+z^2}{1-z^2} = 1 + 2z^2 + 2z^4 + \dots$, we have $c_1 = 0$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$, and $c_4 = 2$, for which from (2.3) we obtain $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{c_2}{2(1+2\beta)}$, and $a_4 = 0$.

REMARK 2.9. For $\beta = 0$ and $\beta = 1$ in (2.22), the particular results coincide with that of Rami Reddy and Vamshee Krishna [28].

Theorem 2.10. *If $f \in S^* \mathcal{K}_s(\beta)$ ($0 \leq \beta \leq 1$), then*

$$|H_{2,3}(f)| = |a_3a_5 - a_4^2| \leq \frac{13}{16(1+2\beta)(1+4\beta)}.$$

PROOF. Using the values of a_3 , a_4 , and a_5 from (2.3) in $a_3a_5 - a_4^2$, we simplify it into

$$a_3a_5 - a_4^2 = \frac{1}{64} \left[\frac{(4c_2^3 + 8c_2c_4)}{(1+2\beta)(1+4\beta)} - \frac{(4c_1c_2c_3 + 4c_3^2 + c_1^2c_2^2)}{(1+3\beta)^2} \right]. \quad (2.23)$$

Rearranging the terms in (2.23), we have

$$\begin{aligned} a_3a_5 - a_4^2 = & \frac{1}{64(1+2\beta)(1+4\beta)} \left[4 \left\{ c_2c_4 - \frac{(1+2\beta)(1+4\beta)}{4(1+3\beta)^2} c_3^2 \right\} \right. \\ & \left. + 4c_2 \left\{ c_4 - \frac{(1+2\beta)(1+4\beta)}{4(1+3\beta)^2} c_1c_3 \right\} \right. \\ & \left. + \frac{c_2^2}{(1+2\beta)(1+4\beta)} \left\{ c_2 - \frac{(1+2\beta)(1+4\beta)}{(1+3\beta)^2} c_1^2 \right\} + \frac{3c_2^3}{(1+2\beta)(1+4\beta)} \right]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Taking modulus on both sides and applying Lemmas 1.1, 1.2, and 1.3, upon simplification, we obtain

$$|H_{2,3}(f)| = |a_3a_5 - a_4^2| \leq \frac{13}{16(1+2\beta)(1+4\beta)}. \quad \square \quad (2.25)$$

REMARK 2.11. For $\beta = 0$ and $\beta = 1$ in (2.25), the results coincide with that of Andy Liew Pik Hern et al. [10].

Acknowledgement: The authors would like to thank the esteemed referee(s) for their careful readings, valuable suggestions, and comments which helped improve the presentation of the paper.

REFERENCES

1. Pommerenke Ch., "On the coefficients and Hankel determinants of univalent functions," J. Lond. Math. Soc., **41**, 111–122 (1966).
2. Janteng A., Halim S. A. and Darus M., "Hankel determinant for starlike and convex functions," Int. J. Math. Anal., **1**, No. 13, 619–625 (2007).
3. Janteng A., Halim S. A. and Darus M., "Coefficient inequality for a function whose derivative has a positive real part," J. Inequal. Pure Appl. Math., **7**, No. 2, 1–5 (2006).
4. Gurusamy P. and Jayasankar R., "The estimates for second Hankel determinant of Ma–Minda starlike and convex functions," AIP Conf. Proc., **2282**, 020039 (2020).
5. Orhan H., Magesh N., and Balaji V. K., "Second Hankel determinant for certain class of bi-univalent functions defined by Chebyshev polynomials," Asian-Eur. J. Math., **12**, No. 2, Article ID 1950017 (2019).
6. Sim Y. J., Thomas D. K., and Zaprawa P., "The second Hankel determinant for starlike and convex functions of order alpha," Complex Variables, Elliptic Equ., **67**, No. 10, 2423–2443 (2021).
7. Sokol J. and Thomas D. K., "The second Hankel determinant for alpha-convex functions," Lith. Math. J., **58**, No. 2, 212–218 (2018).
8. Zaprawa P., "Second Hankel determinants for the class of typically real functions," Abstr. Appl. Anal., **2016**, Article ID 3792367 (2016).

9. Zaprawa P., "On Hankel determinant $H_2(3)$ for univalent functions," *Result. Math.*, **73**, No. 3 (2018).
10. Hern A. L. P., Janteng A., Omar R., "Hankel determinant $H_2(3)$ for certain subclasses of univalent functions," *Math. Stat.*, **8**, No. 5, 566–569 (2020).
11. Vamshee Krishna D. and RamReddy T., "Coefficient inequality for certain p -valent analytic functions," *Rocky Mt. J. Math.*, **44**, No. 6, 1941–1959 (2014).
12. Krushkal S. L., "Univalent functions and holomorphic motions," *J. Anal. Math.*, **66**, 253–275 (1995).
13. Krushkal S. L., "Proof of the Zalcman conjecture for initial coefficients," *Georgian Math. J.*, **17**, 663–681 (2010).
14. Brown J. E. and Tsao A., "Proof of the Zalcman conjecture for starlike and typically real functions," *Math. Z.*, **191**, 467–474 (1986).
15. Abu Muhanna Y., Li L., and Ponnusamy S., "Extremal problems on the class of convex functions of order $-1/2$," *Arch. Math. (Basel)*, **103**, No. 6, 461–471 (2014).
16. Ma W., "The Zalcman conjecture for close-to-convex functions," *Proc. Amer. Math. Soc.*, **104**, 741–744 (1988).
17. Ma W., "Generalized Zalcman conjecture for starlike and typically real functions," *J. Math. Anal. Appl.*, **234**, 328–339 (1999).
18. Bansal D. and Sokol J., "Zalcman conjecture for some subclass of analytic functions," *J. Fractional Calc.*, **8**, No. 1, 1–5 (2017).
19. Ravichandran V. and Verma S., "Generalized Zalcman conjecture for some classes of analytic functions," *J. Math. Anal. Appl.*, **450**, No. 1, 592–605 (2017).
20. Vamshee Krishna D. and Shalini D., "Certain coefficient inequalities associated with Hankel determinant for a specific subfamily of holomorphic mappings," *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.)*, **111**, No. 125, 127–132 (2022).
21. Sakaguchi K., "On a certain univalent mapping," *J. Math. Soc. Japan*, **11**, 72–75 (1959).
22. Das R. N. and Singh P., "On subclass of schlicht mappings," *Ind. J. Pure Appl. Math.*, **8**, 864–872 (1977).
23. Duren P. L., *Univalent Functions*, Springer, New York (1983) (Grundlehren Math. Wiss.; vol. 259).
24. Pommerenke Ch., *Univalent Functions*, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen (1975).
25. Hayami T. and Owa S., "Generalized Hankel determinant for certain classes," *Int. J. Math. Anal.*, **4**, 2573–2585 (2010).
26. Livingston A. E., "The coefficients of multivalent close-to-convex functions," *Proc. Amer. Math. Soc.*, **21**, No. 3, 545–552 (1969).
27. Libera R. J. and Zlotkiewicz E. J., "Coefficient bounds for the inverse of a function with derivative in \mathcal{P} ," *Proc. Amer. Math. Soc.*, **87**, 251–257 (1983).
28. RamReddy T. and Vamshee Krishna D., "Hankel determinant for starlike and convex functions with respect to symmetric points," *J. Ind. Math. Soc. (N. S.)*, **79**, No. 1–4, 161–171 (2012).

Submitted February 22, 2023

Revised May 11, 2023

Accepted May 29, 2023

N. Vani, D. Vamshee Krishna, and B. Rath

Department of Mathematics

GITAM School of Science,

GITAM University,

Visakhapatnam-530 045, A. P., India

`vnullmot@gitam.in`, `vamsheekrishna1972@gmail.com` (corresponding author),

`brath@gitam.edu`

ИДЕНТИФИКАЦИЯ СКОРОСТЕЙ ГОМОГЕННО–ГЕТЕРОГЕННОЙ РЕАКЦИИ В МАСШТАБЕ ПОР В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

В. В. Григорьев

Аннотация. Представлена модель гомогенно-гетерогенной реакции в масштабе пор, основанная на уравнениях Стокса и уравнениях конвекции-диффузии-реакции с граничными условиями третьего рода на границах включений. Гомогенная реакция описывается как кубический автокатализ на всем поровом пространстве, а кинетика гетерогенной реакции описывается изотермой Ленгмюра. Численное решение задачи производится методом конечных элементов на кусочно-линейных элементах. Для дискретизации по времени используется схема Кранка — Николсон. Нелинейная задача решается итерационным методом Ньютона. Массоперенос смоделирован с рассчитанным полем скорости. Дополнительно проведен анализ чувствительности модели к параметрам для изучения их влияния на реагирующий перенос через пористую среду. Представлено численное решение обратной задачи, а именно, идентификация ключевых параметров, характеризующих реагирующий перенос на основе двух кривых проскока двух разных растворов. Рассмотрены зашумленные данные с разными амплитудами шума, включая смешанные амплитуды. Для приближенного решения многомерной обратной задачи применен метаэвристический Алгоритм Искусственной Пчелиной Колонии, который показал хорошую эффективность при достаточно малых вычислительных затратах.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.74.45.008

Ключевые слова: гомогенно-гетерогенная реакция, пористые среды, масштаб пор, идентификация параметров, метод конечных элементов.

1. Введение

Реагирующий перенос в пористых средах встречается во многих промышленных задачах, например: сбор и захоронение CO_2 , перенос загрязняющих веществ, каталитические фильтры, кислотное воздействие на нефтяные пласты, очистка сточных вод и т. д. Во всех этих перечисленных задачах присутствуют сложные химические процессы, такие как перенос реагентов и продуктов реакции, взаимодействие между разными жидкостями и химические реакции на границах раздела фаз [1, 2]. Различают два вида реакций в реагирующих потоках: гетерогенный и гомогенный. Гомогенная реакция – реагирующие компоненты находятся в одной фазе, реакция происходит по всему объему. Гетерогенная реакция – реагирующие компоненты находятся в разных фазах, реакция

Работа выполнена при поддержке гранта Главы Республики Саха (Якутия) (Соглашение № 10 от 17 мая 2022 года) молодым ученым и гранта Российского Правительства, нацеленного на поддержку молодежных лабораторий (FSRG-2021-0015).

происходит на границе раздела фаз [3]. Реагирующие процессы, как правило, происходят в масштабе пор, поэтому необходимо проводить исследования в этом масштабе для качественного и количественного понимания сложных процессов реакции.

Существует несколько способов провести экспериментальные исследования кинетики реакций в объекте исследования, некоторые из них описаны в [4, 5]. В общей схеме через объект исследования пропускают раствор или газ с известной концентрацией, попутно фиксируя концентрацию на выходе. Эта динамика в последующем может сыграть роль дополнительной информации для решения задачи идентификации ключевых параметров кинетики реакции. Для получения надежных кинетических данных реакций необходимо очень точно контролировать условия реакции в экспериментальных установках. Это сложно по трем основным причинам: во-первых, одновременно с рассматриваемой химической реакцией происходят различные другие процессы, которые мешают контролю условий реакции; во-вторых, концентрация и давление не могут быть измерены непосредственно в образце; в-третьих, условия реакции могут происходить неравномерно внутри образца из-за морфологических неоднородностей [5]. Разработка эффективных вычислительных алгоритмов идентификации ключевых параметров, определяющих кинетику реакций, которые учитывали бы вышеизложенные нюансы экспериментальных исследований, имеет несомненную актуальность.

Численное моделирование как метод описания и изучения реагирующего переноса в пористых средах широко применяется в последние два десятилетия [6]. В целом численное моделирование процессов переноса в пористых средах можно классифицировать двумя классами: масштаб континуума и масштаб пор. В моделях масштаба континуума пористая среда обычно рассматривается как однородная и изотропная область, при этом неоднородностью на уровне пор пренебрегают. Решаются макроскопические уравнения сохранения, которые получаются на основе теорий объемного усреднения при задании феноменологических параметров для неявного учета микроструктуры пористой среды. Для однофазного потока жидкости были приняты уравнение Дарси, Бринкмана с расширением Дарси, Форхгеймера с расширением Дарси. Хотя эффективные транспортные свойства и их крупномасштабная пространственная неоднородность часто фигурируют в качестве важных факторов, определяющих транспортные процессы, признано, что микромасштабная неоднородность также играет важную роль, а процессы на уровне пор сильно влияют на производительность системы, долговечность и стоимость [7, 8].

При моделировании в масштабе пор микроскопические пористые структуры пористой среды определяются в явном виде, что обеспечивает детализацию распределения важных переменных на уровне пор, позволяет напрямую связать сложные процессы переноса с реалистичными пористыми структурами и, таким образом, могут обеспечить глубокое понимание взаимосвязей между структурами, процессами и характеристиками. Детальное моделирование в масштабе пор

требует эффективного метода трехмерной реконструкции. Для реконструкции одним из основных препятствий является низкое разрешение трехмерной микроструктуры. Несмотря на все большую доступность устройств для компьютерной томографии, их разрешения все еще недостаточно [9]. Прямую визуализацию трехмерной микроструктуры пористой среды получают с помощью экспериментальных методов визуализации, таких как электронная томография, ХСТ и FIB-SEM. Пористая среда визуализируется с разных направлений для создания последовательных двухмерных поперечных сечений, которые впоследствии объединяются вместе для формирования трехмерной структуры. Описанные методы помогают хорошо понять морфологию пористых структур, однако для оценки изменчивости, связанной с геометрией и составляющими пористых сред, требуются многочисленные эксперименты для анализа статистических характеристик, которые все еще остаются весьма дорогим и времязатратным процессом [10].

Данная работа связана с решением прямой задачи и решением обратной коэффициентной задачи. Преследуются две цели: реализация математической модели, описывающей процесс гомогенно-гетерогенной реакции, и вычислительная идентификация скоростей гомогенно-гетерогенной реакции в масштабе пор. Процесс рассмотрен как изотермический, гетерогенная реакция описывается изотермой Ленгмюра [11], гомогенная реакция представляется как кубический автокатализ [12]. Ранее другие авторы уже решали гомогенно-гетерогенную реакцию в пористых средах: в работе [13] авторы исследовали течение наножидкости в пористой среде; в [14] авторы рассмотрели магнитогидродинамический поток жидкости Кассона; в [15] исследован теплообмен в ферромагнитном потоке с химическими реакциями. Во всех перечисленных работах присутствует кубический автокатализ и реакция первого порядка, описывающая гетерогенную реакцию, которая состоит только из одного управляющего параметра. В нашей работе гетерогенная реакция описывается изотермой Ленгмюра, которая является более сложной трехпараметрической моделью и применима для описания широкого спектра адсорбентов [16]. Ранее нами были выполнены несколько работ по идентификации параметров скоростей реакций [17, 18], также есть работы и по изучению отдельных факторов, влияющих на гетерогенную реакцию [19]. Во всех этих работах идентификация проводилась только для гетерогенных реакций. В этой работе идентификация будет проводиться сразу для двух типов реакций, происходящих одновременно.

Численное решение проводится при конечно-элементной аппроксимации по пространству. Поток жидкости описывается стационарными уравнениями Стокса, а реагирующий перенос описывается уравнением конвекции-диффузии-реакции. Для гидродинамических процессов используются элементы Тейлора — Худа ($P_2 - P_1$), а для переноса реагирующих веществ — полиномы Лагранжа первой степени (P_1). Дискретизация по времени проводится симметричной схемой Кранка — Николсон, которая абсолютно устойчива для линейных задач и имеет второй порядок точности. Нелинейная задача решается итерационным

методом Ньютона. Программный комплекс написан с использованием вычислительной платформы FEniCS [20]. Визуализация полученных результатов проводится с помощью программы Paraview и библиотеки matplotlib. Вычисления представлены для двумерной задачи (сечение), саму математическую модель и вычислительный алгоритм практически без изменений можно применить и для полноценного трехмерного случая.

Решение обратной коэффициентной задачи предложено искать с помощью метаэвристического метода. Метаэвристика — это не зависящая от задачи алгоритмическая структура высокого уровня, предназначенная для поиска решения оптимизационной задачи при ограниченных вычислительных мощностях с неполной или несовершенной начальной информацией. Существуют довольно много метаэвристических алгоритмов и всевозможные их модификации. Дополнительно с этим классом алгоритмов можно ознакомиться в [21, 22]. Будет использоваться Алгоритм Искусственной Пчелиной Колонии (АИПК, англ. Artificial Bee Colony Algorithm) [23], который хорошо себя показал в промышленных и инженерных задачах. Ранее в работе по применению метаэвристических алгоритмов была предложена модификация Пчелиного Алгоритма [24], который оказался эффективен, когда необходимо идентифицировать только два или три параметра. Для четырех и более параметров он неэффективен, поскольку делает много вызовов минимизируемой функции из-за отсутствия глобального поиска. АИПК имеет функцию глобального поиска, тем самым он является более предпочтительным для идентификации большого числа параметров.

2. Постановка задачи

Будем рассматривать задачу в двумерной постановке. Схему расчетной области можно посмотреть на рис. 1, а именно прямоугольную область, отмеченную на схеме красным цветом. Включения будут играть роль адсорбентов, на поверхности которых (Γ_s), будут происходить гетерогенные реакции, а именно: адсорбция и десорбция. Гомогенные реакции будут происходить в порах (Ω). Будем считать, что растворы входят на левой границе (Γ_{in}) и выходят на правой границе (Γ_{out}). На боковых границах будут стоять условия симметрии (Γ_{sim}).

2.1. Гидродинамика. Гидродинамика рассматривается в предположении, что поток влияет на перенос примеси, а примесь на поток не влияет. Вследствие этого скорость просчитывается только один раз и полученный вектор скорости используется для решения нелинейной задачи реагирующего переноса. Поток в пористой среде в масштабе пор считается достаточно медленным и описывается уравнениями Стокса

$$\nabla p - \mu \nabla^2 \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2)$$

где \mathbf{u} и p — скорость и давление жидкости соответственно, $\mu > 0$ — вязкость жидкости, которая предполагается постоянной.

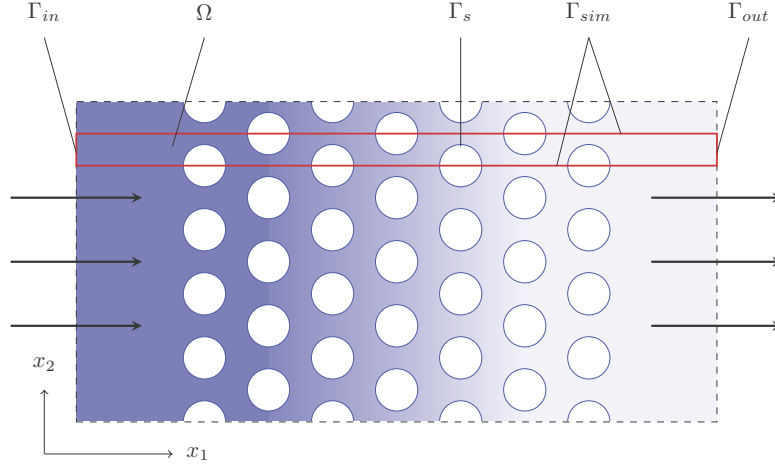


Рис. 1. Эскиз вычислительной области.

На входной границе задается равномерный поток жидкости:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \bar{u}, \quad \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{in}. \quad (3)$$

На выходе задано давление \bar{p} и условие отсутствия тангенциальных сил:

$$p - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \bar{p}, \quad \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \times \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{out}, \quad (4)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор вязких напряжений, который выглядит следующим образом:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T).$$

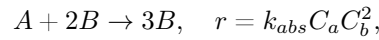
На границе включений ставятся условия твердых стенок:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_s. \quad (5)$$

На границах симметрии используются условия идеального скольжения:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \times \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{sim}. \quad (6)$$

2.2. Перенос примесей. Буквы A и B будем использовать для обозначения двух растворов. Схемой гомогенной реакции был выбран кубический автокатализ [12], когда



где r — скорость реакции. На поверхности адсорбентов (Γ_s) происходит изотермическая гетерогенная реакция, которая описывается изотермой Ленгмюра [25]:

$$A \rightarrow B, \quad r = k_{ads} C_a \left(1 - \frac{m}{m_\infty}\right) - k_{des} m.$$

Управляющие параметры: k_{abs} — коэффициент абсорбции на единицу объема, $m_\infty > 0$ является максимально возможной адсорбированной поверхностью

концентрацией, k_{ads} — коэффициент адсорбции на единицу измерения, k_{des} — коэффициент десорбции на единицу времени.

Перенос примеси определяется уравнениями конвекции-диффузии

$$\frac{\partial C_a}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}C_a) = D_a \nabla^2 C_a - k_{abs} C_a C_b^2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial C_b}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}C_b) = D_b \nabla^2 C_b + k_{abs} C_a C_b^2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (8)$$

со следующими граничными условиями:

$$C_i = \overline{C}_i, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{in}, \quad (9)$$

$$D_i \nabla C_i \cdot \mathbf{n} = 0, \quad i = [a, b], \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{sim} \cup \Gamma_{out}. \quad (10)$$

Сам конвективный поток через границу выхода разрешен неявно приведенными выше уравнениями. Гетерогенные реакции, которые возникают на поверхности включений Γ_s , удовлетворяют закону сохранения массы. В данном конкретном случае это означает, что изменение адсорбированной поверхностной концентрации равно потоку от жидкости к поверхности. Массовый баланс на поверхности включений для обоих растворов описывается так:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = D_a \nabla C_a \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_s, \quad (11)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -D_b \nabla C_b \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_s, \quad (12)$$

где m — концентрация адсорбированного вещества на поверхности, $D_i > 0$ — коэффициент диффузии, C_i — концентрация веществ A и B соответственно ($i = [a, b]$).

Концентрация адсорбированного вещества на поверхности описывается изотермой Ленгмюра:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = k_{ads} C_a \left(1 - \frac{m}{m_\infty} \right) - k_{des} m, \quad (13)$$

где m_∞ является максимально возможной концентрацией на поверхности включений, а k_{ads} и k_{des} являются параметрами скорости адсорбции и десорбции соответственно.

Начальные условия выглядят следующим образом и считаются известными:

$$C_i(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad i = [a, b], \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (14)$$

$$m(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_s. \quad (15)$$

2.3. Безразмерная форма уравнений. В задачах идентификации параметров является стандартным подход, когда управляющие уравнения рассматриваются в безразмерной форме. Обезразмеривание будет происходить по высоте вычислительной области l для масштабирования пространственных масштабов, скорость будет масштабироваться через входную скорость \overline{u} , а концентрация будет масштабироваться по входным концентрациям \overline{C}_a и \overline{C}_b .

Уравнения Стокса (1), (2) и граничные условия (3), (4) принимают следующий вид:

$$\nabla p - \nabla^2 \mathbf{u} = 0, \quad (16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (17)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 1, \quad \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{in}, \quad (18)$$

$$p - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \times \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{out}, \quad (19)$$

граничные условия (5) и (6) остаются неизменными.

Уравнения (7), (8) и граничные условия (9)–(12) с гетерогенной реакцией (13) принимают следующий вид:

$$\frac{\partial C_a}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} C_a) = \frac{1}{\text{Pe}_a} \nabla^2 C_a - \text{Da}_{abs} C_a C_b^2, \quad (20)$$

$$\frac{\partial C_b}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} C_b) = \frac{1}{\text{Pe}_b} \nabla^2 C_b + \text{Da}_{abs} C_a C_b^2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (21)$$

$$C_a = 1, \quad C_b = 1, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{in}, \quad (22)$$

$$\nabla C_a \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \nabla C_b \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{sim} \cup \Gamma_{out}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \nabla C_a \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_s, \quad (24)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -\nabla C_b \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_s, \quad (25)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \text{Da}_{ads} C_a \left(1 - \frac{m}{M}\right) - \text{Da}_{des} m, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_s. \quad (26)$$

Здесь числа Пекле для концентраций обоих растворов:

$$\text{Pe}_i = \frac{\bar{u} l}{D_i}, \quad i = [a, b],$$

числа Дамколера, которые контролируют кинетику реакции:

$$\text{Da}_{abs} = \frac{k_{abs}}{\bar{u}}, \quad \text{Da}_{ads} = \frac{k_{ads}}{\bar{u}}, \quad \text{Da}_{des} = \frac{k_{des} l}{\bar{u}},$$

и безразмерный параметр, отвечающий за максимально возможную концентрацию раствора на поверхности адсорбентов:

$$M = \frac{m_\infty}{l \bar{c}}.$$

3. Численное исследование

Для моделирования процессов, проходящих в пористых средах, можно применять различные методы дискретизации по пространству. Метод конечных элементов на текущий момент является эталоном численных методов, объединяя в себе научный и инженерные подходы [26], поскольку хорошо подходит для решения задач на неструктурированной сетке с возможностью измельчения

локального размера ячеек в отдельно взятых подобластях. Единственным недостатком метода конечных элементов можно назвать сложность программной реализации в отличие от других численных методов. На сегодняшний день этим недостатком можно пренебречь, поскольку появились вычислительные библиотеки, которые берут на себя рутинные моменты метода, давая исследователю возможность больше концентрироваться на решаемой задаче [20].

3.1. Вариационная формулировка. Для решения задачи методом конечных элементов нужно переписать уравнения в вариационной формулировке, используя стандартный метод Галёркина. Для скорости определяем пространства пробных и тестовых векторных функций:

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 1, \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0 \text{ на } \Gamma_{in}, \mathbf{u} = 0 \text{ на } \Gamma_s, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ на } \Gamma_{sim}\},$$

$$\widehat{\mathbf{V}} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \mathbf{v} = 0 \text{ на } \Gamma_{in} \cup \Gamma_s, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ на } \Gamma_{sim}\}.$$

Для давления определяем следующее пространство:

$$Q = \{p \in L_2(\Omega)\}, \quad \widehat{Q} = \{q \in L_2(\Omega) : q = 0 \text{ на } \Gamma_{out}\}.$$

Умножив уравнения на соответствующие тестовые функции и интегрируя по частям, получаем вариационную задачу: найти $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q$, удовлетворяющие граничным условиям (18) и (19), такие, что

$$\int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{v} p + \nabla \cdot \mathbf{u} q) dx = 0 \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in \widehat{\mathbf{V}} \times \widehat{Q}. \quad (27)$$

Для нестационарной задачи переноса раствора при гомогенно-гетерогенной реакции определяем следующие пространства:

$$S_a = \{C_a \in H^1(\Omega) : C_a = 1 \text{ на } \Gamma_{in}\}, \quad \widehat{S}_a = \{s_a \in H^1(\Omega) : s_a = 0 \text{ на } \Gamma_{in}\}, \quad (28)$$

$$S_b = \{C_b \in H^1(\Omega) : C_b = 1 \text{ на } \Gamma_{in}\}, \quad \widehat{S}_b = \{s_b \in H^1(\Omega) : s_b = 0 \text{ на } \Gamma_{in}\}, \quad (29)$$

$$Z = \{m \in L_2(\Omega)\}, \quad \widehat{Z} = \{j \in L_2(\Omega) : j = 0 \text{ на } \Gamma_{in}\}. \quad (30)$$

Необходимо ввести дискретизацию по времени. Будем использовать симметричную схему Кранка — Николсон [27]. Для удобства введем следующее обозначение:

$$\varphi_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\varphi^{n+1} + \varphi^n}{2}, \quad \varphi^n = \varphi(t^n), \quad t^n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots,$$

где τ — шаг по времени. Найти $(C_a, C_b, m) \in S_a \times S_b \times Z$, удовлетворяющие граничным условиям (22)–(26):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{C_a^{n+1} - C_a^n}{\tau} s_a d\mathbf{x} + \int_{\Omega} C_a^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{u} \cdot \nabla s_a d\mathbf{x} + \frac{1}{\text{Pe}_a} \int_{\Omega} \nabla C_a^{n+\frac{1}{2}} \cdot \nabla s_a d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega} \text{Da}_{abs} C_a^{n+\frac{1}{2}} \left(C_b^{n+\frac{1}{2}}\right)^2 s_a d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{out}} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) C_a^{n+\frac{1}{2}} s_a ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega} \frac{C_b^{n+1} - C_b^n}{\tau} s_b d\mathbf{x} + \int_{\Omega} C_b^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{u} \cdot \nabla s_b d\mathbf{x} + \frac{1}{\text{Pe}_b} \int_{\Omega} \nabla C_b^{n+\frac{1}{2}} \cdot \nabla s_b d\mathbf{x} \\
& - \int_{\Omega} \text{Da}_{abs} C_a^{n+\frac{1}{2}} \left(C_b^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 s_b d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{out}} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) C_b^{n+\frac{1}{2}} s_b d\mathbf{s} \\
& + \int_{\Gamma_s} \frac{m^{n+1} - m^n}{\tau} j d\mathbf{s} - \int_{\Gamma_s} \text{Da}_{ads} C_a^{n+\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{m^{n+\frac{1}{2}}}{M} \right) j d\mathbf{s} \\
& + \int_{\Gamma_s} \text{Da}_{des} m^{n+\frac{1}{2}} j d\mathbf{s} = 0. \quad (31)
\end{aligned}$$

Для решения вышеописанной задачи будем использовать вычислительную библиотеку FEniCS [20]. Пусть $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$, $Q_h \subset Q$ — конечно-элементные пространства на смешанных элементах Тейлора — Худа $(P_2 - P_1)$, а $S_{ah} \subset S_a$, $S_{bh} \subset S_b$ и $Z_h \subset Z$ — конечно-элементные пространства на непрерывных элементах Лагранжа первой степени. Нелинейная задача решается итерационным методом Ньютона.

3.2. Численное решение прямой задачи. Для прямой визуализации микроструктуры пористой среды используют экспериментальный метод компьютерной рентгено-томографии. Такие изображения можно использовать как вычислительную сетку, особенно хорошо в связке с методом конечных объемов (воксель — пиксель). Они помогают хорошо понять морфологию пористых структур, однако для оценки изменчивости, связанной с геометрией и составляющими пористых сред, требуются многочисленные эксперименты для анализа статистических характеристик [10]. Синтетические пористые среды воспроизводят основные усредненные характеристики пористых сред, таких как пористость, поверхность включений и т. д. Они позволяют выполнять многократное моделирование в различных условиях и с множественной параметризацией. Также синтетические пористые среды могут быть легко приведены к любым пространственным масштабам. В данной работе была выбрана идеализированная геометрия с периодическими включениями, чтобы свести к нулю эффекты, возникающие из-за геометрии пор [28], например канальное течение, тупиковые поры и т. д. Исследование влияния таких эффектов при идентификации ключевых параметров реагирующего переноса достойно отдельного систематического исследования и в рамках этой работы проводиться не будет. Создание геометрии исследуемой области и генерация вычислительной сетки было произведено с помощью программы Gmsh.

Поскольку рассматриваемый нами процесс происходит в микромасштабе, экспериментально понять скорости реакции в данный момент является сложной и дорогостоящей задачей. Поэтому часто измеряют данные концентрации растворов на выходе из зерна. Эти кривые называются кривыми проскока и они могут быть использованы как вспомогательная информация для определения кинетики реакции. Кривая проскока для математической модели вычисляется

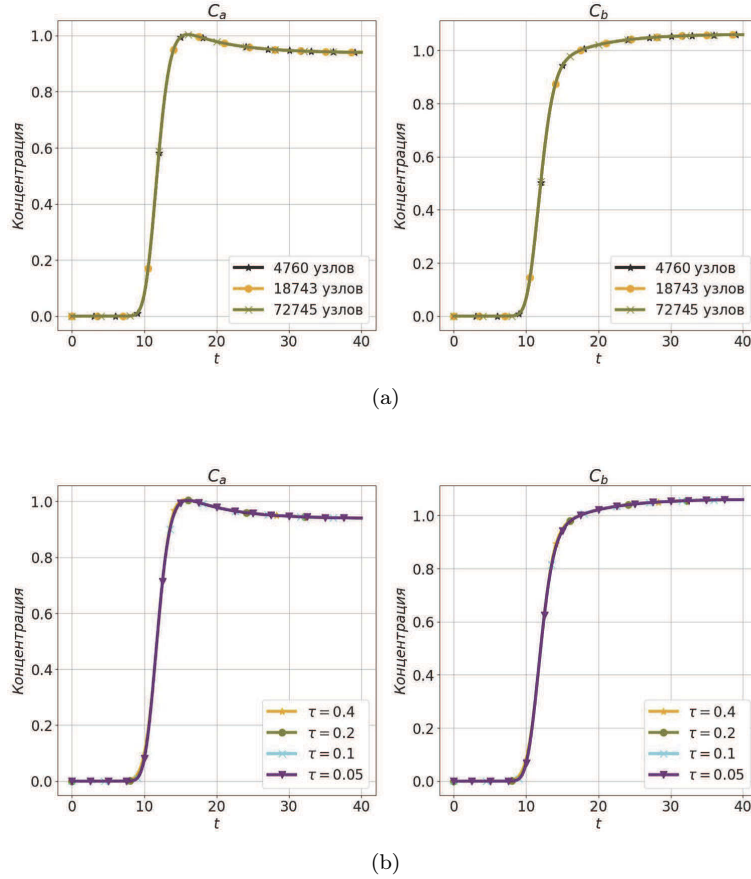


Рис. 2. Исследования влияния на кривые проскока: (а) шага по сетке, (б) шага по времени.

следующим образом:

$$C_i^{out} = \frac{\int_{\Gamma_{out}} C_i(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\theta}) d\mathbf{s}}{\int_{\Gamma_{out}} d\mathbf{s}}, \quad i = [a, b], \quad (32)$$

где $\boldsymbol{\theta} = \{\text{Pe}, \text{Da}_{ads}, \text{Da}_{des}, M, \text{Da}_{abs}\}$ — вектор параметров. В итоге получаем средние значения концентраций на границе выхода в каждый момент времени.

На рис. 2(а) и 2(б) представлены кривые проскока, которые получены на серии сгущающихся сеток по пространству и по времени соответственно. Видно, что на кривую не сильно влияет количество элементов, поэтому выберем сетку с 4760 узлами. В случае с шагом по времени заметно небольшое отличие, поэтому τ был выбран равным 0.2.

Расчетное поле концентраций для обоих веществ в разные временные интервалы можно увидеть на рис. 3. Можно заметить, что с момента времени $t = 8$ гомогенная реакция происходит заметнее: концентрация вещества C_b увеличи-

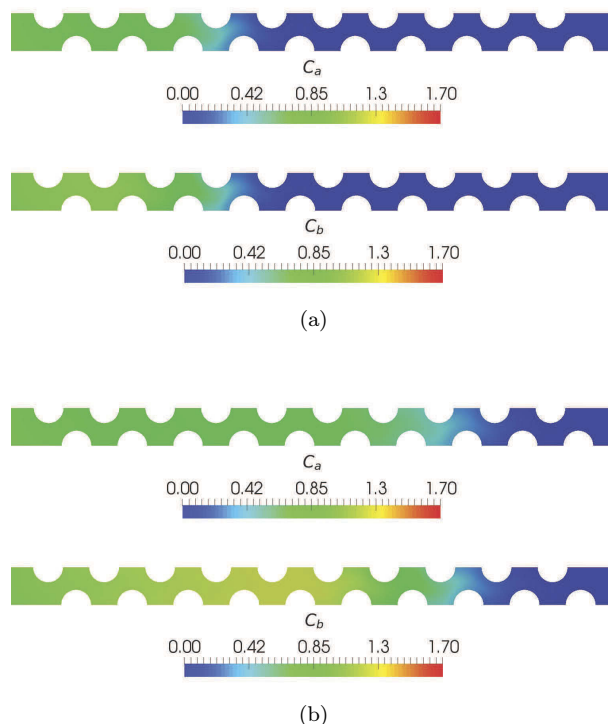


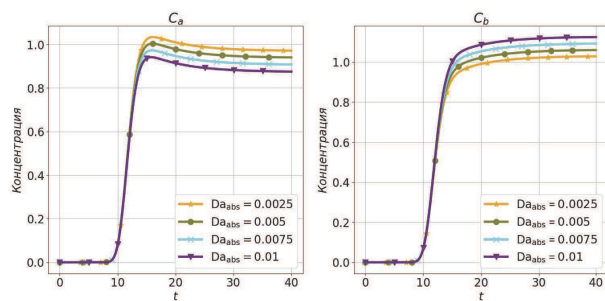
Рис. 3. Расчетное поле концентрации при: (a) $t = 4$, (b) $t = 8$.

вается, поскольку молекулы вещества A превращаются в молекулу вещества B . Результаты скорости и давления идентичны, в силу неучета, предыдущей работе [17].

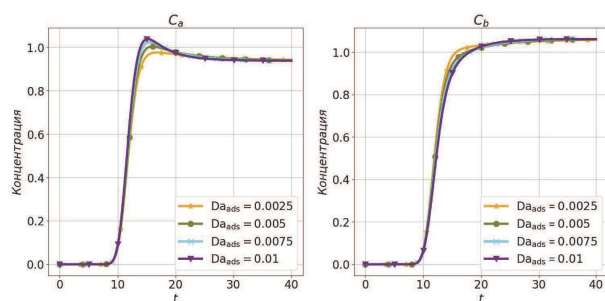
4. Обратная задача химической кинетики

Представляет интерес решение обратной задачи химической кинетики, которая нацелена на идентификацию определяющих параметров кинетики реакции. В общем, необходимо идентифицировать пять параметров по экспериментальным данным кривых проскока обоих веществ. Существует много подходов решения обратных коэффициентных задач. Выделим основные классы методов, вокруг которых больше всего исследований: градиентные, стохастические, статистические и детерминированные [17]. В этой работе будет рассмотрен относительно молодой по сравнению с остальными методами, но набирающий популярность подход под названием метаэвристика.

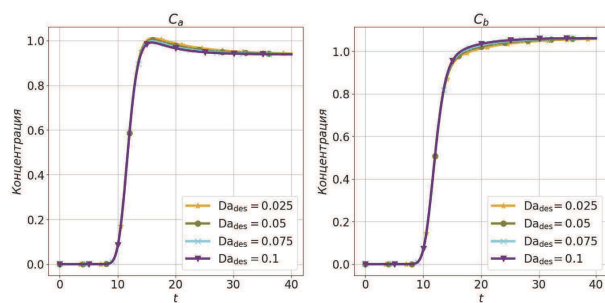
4.1. Чувствительность модели к параметрам. Процедура анализа чувствительности модели к параметрам является типичной при решении обратной задачи, поскольку необходимо понять, какие параметры сильнее влияют на кинетику реакции. Из рис. 4(а) видно, что параметр скорости гомогенной реакции существенно влияет на кинетику реакции: чем больше значение, тем быст-



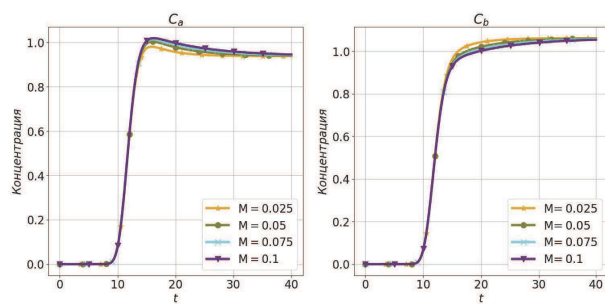
(a)



(b)



(c)



(d)

Рис. 4. Чувствительность модели к параметрам: (a) Da_{abs} , (b) Da_{ads} (c) Da_{des} (d) M .

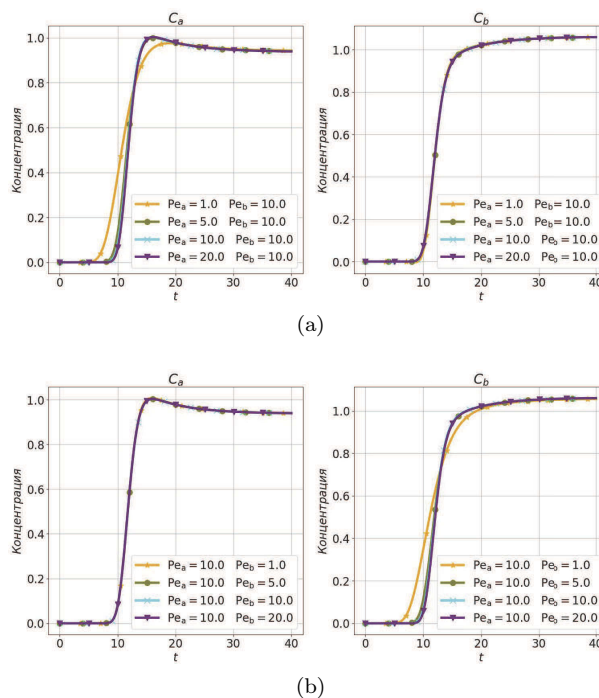


Рис. 5. Кривые проскока при изменении числа Пекле: (а) фиксировано для концентрации C_B , (б) фиксировано для концентрации C_A .

рее происходит переход вещества A в B . На рис. 4(b)–4(d) показаны ключевые параметры гетерогенной реакции. Параметр Da_{ads} отвечает за адсорбцию, чем больше значение, тем активнее вещество прилипает к поверхности адсорбента, Da_{des} отвечает за десорбцию — процесс, обратный адсорбции, а M отвечает за максимально возможную концентрацию на поверхности адсорбента: чем выше значение, тем дольше адсорбент будет копить депонированную массу перед тем, как начнется процесс десорбции. По рис. 4(c) видно, что параметр, отвечающий за десорбцию, мало влияет на кинетику реакции в выбранном диапазоне параметров. На рис. 5(a),(b) показано влияние числа Пекле на кинетику реакции: чем меньше значение, тем больше диффузия реагирующего переноса. Видно, что разные числа Пекле для обоих растворов не оказывают влияния друг на друга.

4.2. Задача идентификации параметров. Будем считать, что имеются экспериментальные данные в виде кривых проскока для каждого вещества, по которым необходимо идентифицировать скорости реакций. Подобные обратные задачи часто рассматривают в виде задачи оптимизации, где необходимо минимизировать некоторый функционал. Будем минимизировать следующий

функционал невязки:

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \int_0^T ((C_a^{out} - \widetilde{C}_a)^2 + (C_b^{out} - \widetilde{C}_b)^2) dt, \quad (33)$$

где \widetilde{C}_a и \widetilde{C}_b — экспериментальные измерения для веществ A и B соответственно, C_a^{out} и C_b^{out} — кривые проскока для заданных $\boldsymbol{\theta}$, которые являются средним значением концентрации веществ A и B на границе выхода и вычисляются по формуле (32). Следует отметить, что данный функционал невязки можно использовать при условии, что значения кривых проскока для обоих веществ одного порядка. В противном случае необходимо использование весов либо предварительно их отмасштабировать на один порядок.

Предположим, что концентрацию каждого вещества будут измерять разные датчики, тем самым они становятся независимыми. Датчики всегда имеют свои погрешности в каких-то заданных диапазонах и они обычно известны. Поскольку есть подходы и методы, которые позволяют убрать шумы в данных, обязательно нужно попробовать идентифицировать параметры на данных без шума. Представляет интерес, когда для экспериментальных данных каждого вещества все-таки присутствует шум, и притом может присутствовать с разной амплитудой для каждого из веществ. Для исследования таких ситуаций будем использовать так называемый синтетический подход генерации экспериментальных данных. Синтетический подход означает, что нужно выбрать из пространства параметров один вектор параметров $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, который будет считаться точным решением. Принято, что точное значение для каждого параметра равняется:

$$\text{Pe} = 10.0, \quad \text{Da}_{ads} = 0.005, \quad \text{Da}_{des} = 0.05, \quad \text{M} = 0.05, \quad \text{Da}_{abs} = 0.005.$$

Для простоты исследования и поскольку разные числа Пекле в обоих веществах не оказывают влияния на кинетику друг друга (см. рис. 5(b),(c)), берем в расчет частный случай, когда число Пекле взято одинаковым для обоих веществ. Экспериментальные данные генерируются по следующей формуле:

$$\widetilde{C}_i = C(\mathbf{x}, t, \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \delta\phi, \quad i = [a, b], \quad (34)$$

где δ — амплитуда шума (представлены данные для 0.01 и 0.05), а ϕ — случайное число с равномерным распределением в диапазоне $[-1, 1]$. На рис. 6 представлены описанные синтетические экспериментальные данные с разными амплитудами шума. Далее будем их комбинировать.

4.3. Метаэвристический подход. Метаэвристические методы — относительно новый и быстро развивающийся класс методов оптимизации. Существуют различные метаэвристические алгоритмы, вот несколько наиболее известных: Genetic Algorithms, Particle Swarm Optimization, Differential Evolution и Greedy Randomized Adaptive Search Procedure, подробнее можно ознакомиться

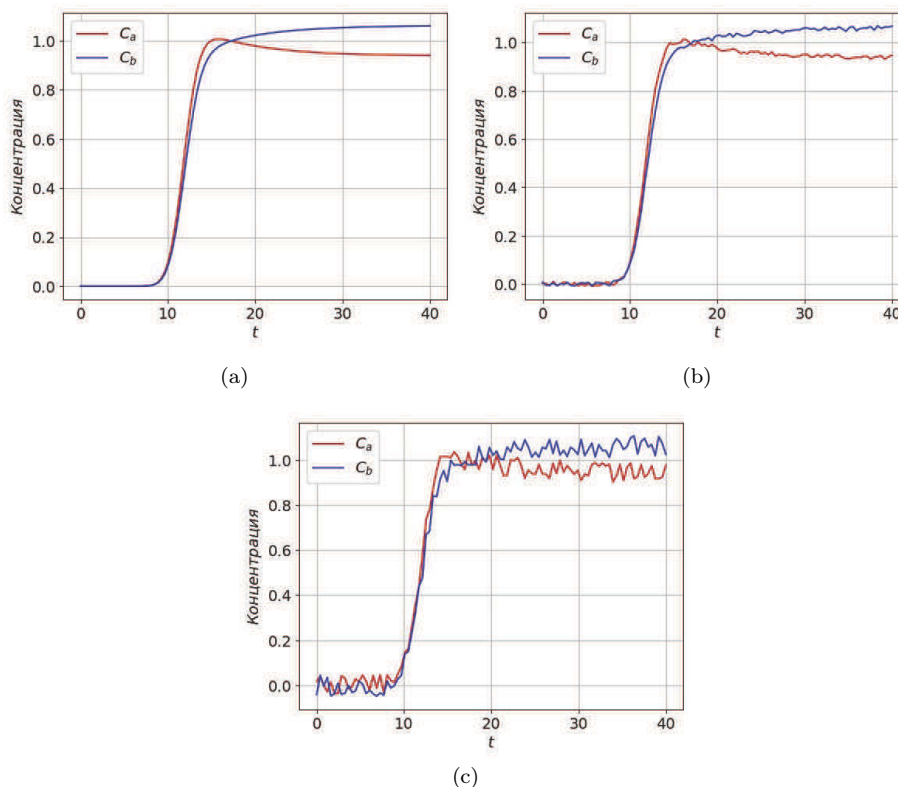


Рис. 6. Кривые проскока двух концентраций: (a) без шума, (b) с шумом $\delta = 0.01$, (c) с шумом $\delta = 0.05$.

в [29] и по указанным в ней ссылкам. Нами используется Алгоритм Искусственной Пчелиной Колонии (АИПК) [23], который хорошо себя показал в промышленных и инженерных задачах. АИПК имеет функцию глобального поиска, тем самым для идентификации большого числа параметров он является весьма эффективным.

Для идентификации рассмотрим несколько случаев: экспериментальные данные не имеют шума, когда шум в экспериментальных данных одинаков для обоих веществ ($\delta = 0.01$ и $\delta = 0.05$); когда шум в экспериментальных данных различается в обоих веществах ($\delta_a = 0.01$ и $\delta_b = 0.05$ и наоборот). АИПК для всех случаев запускали с одинаковыми управляющими параметрами: число пчел 5, количество итераций 300. Для ознакомления с управляющими параметрами алгоритма можно обратиться к [30]. Критерий останова можно задать в алгоритме, но обычной является практика запуска алгоритма на заранее определенном количестве итераций. Выбор таких параметров для АИПК аргументируется тем, что решаемая система уравнений сама по себе является сложной задачей и если запускать метаэвристический алгоритм (любой метаэвристический алгоритм, не только АИПК) на слишком большое количество

итераций или с большим количеством пчел, смысл решения задачи может исчезнуть из-за высоких вычислительных затрат. То же самое касается критерия останова. Если задать точность по априорной оценке минимума функционала, алгоритм может произвести слишком большое количество вызовов минимизируемой функции в попытке достичь наилучшего результата, что может повлечь собой большие вычислительные затраты. Следовательно, требуется адекватная оценка имеющихся вычислительных ресурсов.

Для каждого параметра были заданы диапазоны, внутри которых должно быть искомое значение:

$$Pe = [0, 20], \quad Da_{ads} = [0.0, 0.01], \quad Da_{des} = [0.0, 0.1],$$

$$M = [0.0, 0.1], \quad Da_{abs} = [0.0, 0.01].$$

При работе с реальными данными такие диапазоны должны быть определены через обоснованное предположение, например, по физическому смыслу. В табл. 1 можно увидеть результаты работы алгоритма: в первом столбце стоят параметры с точными значениями, в остальных указаны идентифицированные параметры для каждого случая, в последней строке показано значение целевого функционала в идентифицированных точках. Видно, что с увеличением шума в экспериментальных данных значение функционала увеличивается, что говорит о том, что он сглаживается. Параметр Da_{des} идентифицировался плохо из-за того, что он не сильно влиял на кинетику реакции (см. рис. 4(с)). Слабое влияние этого параметра на характер реагирующего переноса отчасти случилось по причине большого значения параметра M , который ввиду названной причины тоже идентифицировался не очень хорошо. Параметры Da_{ads} и Da_{abs} идентифицировались хорошо на всех случаях. Число Пекле в целом идентифицировалось весьма точно, за исключением случая смешанной амплитуды шума ($\delta_a = 0.01$ и $\delta_b = 0.05$). Это можно объяснить тем, что 5 пчел, скорее всего, недостаточно для такого случая. В табл. 2 показаны относительные погрешности для каждого рассмотренного случая в процентах. Сравнительные графики можно увидеть на рис. 7(а), где показаны кривые проскока по идентифицированным параметрам. Графики наложились друг на друга, поэтому нужно обратить внимание на рис. 7(б), где показана относительная погрешность в L_2 -норме в каждый момент времени в логарифмической шкале. Погрешность падает до 10^{-5} , особенно в интервалах времени от 10 до 25, когда кривая проскока быстро меняется. Как можно видеть из табл. 2, погрешность для всех случаев получилась меньше 1%, что является вполне приемлемым результатом. Естественно, можно увеличить количество пчел и число итераций для получения параметров с большей точностью.

5. Заключение

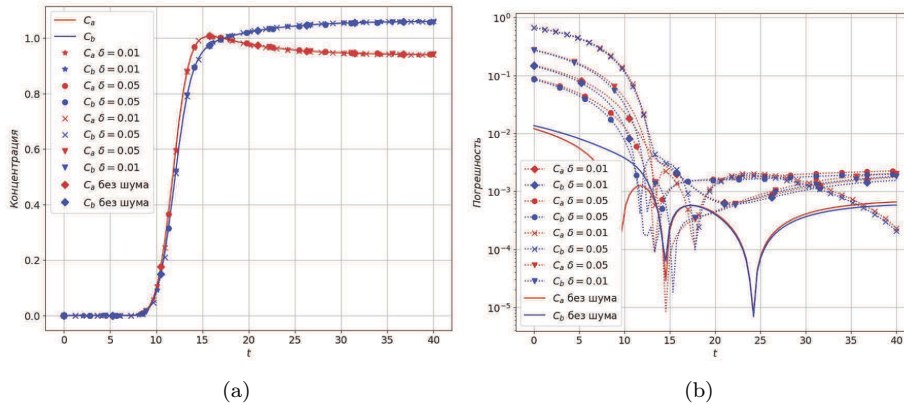
В работе реализована модель для описания кинетики гомогенно-гетерогенной реакции и выполнена идентификация параметров скоростей реакции. Вы-

Таблица 1. Идентифицированные параметры для различного уровня шума

	Без шума	$\delta = 0.01$	$\delta = 0.05$	$\delta_a = 0.01$ и $\delta_b = 0.05$	$\delta_a = 0.05$ и $\delta_b = 0.01$
$Pe = 10.0$	0.996e+01	1.045e+01	1.025e+01	1.447e+01	1.095e+01
$Da_{ads} = 0.005$	4.974e-03	4.829e-03	4.927e-03	5.211e-03	4.892e-03
$Da_{des} = 0.05$	9.462e-02	7.722e-02	8.351e-02	8.478e-02	7.429e-02
$M = 0.05$	9.75e-02	7.490e-02	7.389e-02	7.036e-02	7.751e-02
$Da_{abs} = 0.005$	5.053e-03	5.150e-03	4.819e-03	4.942e-03	4.817e-03
$J(\theta)$	3.56e-03	5.053e-02	2.532e-01	1.817e-01	1.817e-01

Таблица 2. Относительная погрешность кривых проскока по найденным параметрам для каждого вещества

	Без шума	$\delta = 0.01$	$\delta = 0.05$	$\delta_a = 0.01$ и $\delta_b = 0.05$	$\delta_a = 0.05$ и $\delta_b = 0.01$
$\varepsilon_a^{rel} (\%)$	0.047	0.18	0.19	0.53	0.47
$\varepsilon_b^{rel} (\%)$	0.049	0.12	0.17	0.43	0.42

**Рис. 7.** Результаты идентификации: (а) кривые прорыва двух концентраций, (б) относительная погрешность в L_2 норме в отдельные моменты времени.

числения представлены в двумерном случае на идеализированной геометрии. Полученные результаты формулируются следующим образом.

1. Реализована модель гомогенно-гетерогенной реакции в масштабе пор, основанная на уравнениях Стокса и уравнениях конвекции-диффузии-реакции с граничным условием третьего рода на границах включений. Гомогенная реакция описывается как кубический автокатализ на всем поровом пространстве, а гетерогенная реакция описывается изотермой Ленгмюра.

2. Численное решение задачи производится методом конечных элементов на кусочно-линейных элементах. Дискретизация по времени проводится симметричной схемой Кранка — Николсон. Нелинейная задача решается итерационным методом Ньютона. Массоперенос смоделирован с рассчитанным полем скорости (массоперенос не влияет на скорость). Проведены исследования на

серии сеток для подтверждения сходимости, аналогичные исследования проведены для разных шагов по времени. Дополнительно проведен анализ чувствительности модели к управляющим параметрам реагирующего переноса через пористую среду.

3. Проведена идентификация ключевых параметров, характеризующих реагирующий перенос на основе двух кривых проскока двух разных веществ. Были рассмотрены данные без шума и зашумленные данные с разными амплитудами шума, включая смешанные амплитуды. Для многомерной обратной задачи был применен метаэвристический Алгоритм Искусственной Пчелиной Колонии, который показал хорошую эффективность при достаточно малой вычислительной цене. Параметры были идентифицированы с погрешностью менее 1% для кривых проскока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Liu P., Yao J., Couples G. D., Ma J., Iliev O. 3-D modelling and experimental comparison of reactive flow in carbonates under radial flow conditions // *Sci. Rep.* 2017. V. 7, N 1. P. 1–10.
2. Greiner R., Prill T., Iliev O., van Setten B. A. A. L., Votsmeier M. Tomography based simulation of reactive flow at the micro-scale: Particulate filters with wall integrated catalyst // *Chem. Eng. J.* 2019. V. 378. Article ID 121919.
3. Myers R. The basics of chemistry. Greenwood Publ. Group, 2003.
4. Yang Q., Zhong Y., Li X.-M., et al. Adsorption-coupled reduction of bromate by Fe(II)–Al(III) layered double hydroxide in fixed-bed column: Experimental and breakthrough curves analysis // *J. Ind. Eng. Chem.* 2015. V. 28. P. 54–59.
5. Wartha E., Birkelbach F., Bösenhofer M., et al. Enhanced kinetic model identification for gas/solid reactions through computational fluid dynamics // *Chem. Eng. J.* 2022. V. 430. 132850.
6. Chen L., He A., Zhao J., et al. Pore-scale modeling of complex transport phenomena in porous media // *Progr. Energy Combustion Sci.* 2022. V. 88. 100968.
7. Sadhukhan S., Gouze P., Dutta T. Porosity and permeability changes in sedimentary rocks induced by injection of reactive fluid: A simulation model // *J. Hydrology.* 2012. V. 450. P. 134–139.
8. Miller K., Vanorio T., Keehm Y. Evolution of permeability and microstructure of tight carbonates due to numerical simulation of calcite dissolution // *J. Geophys. Res., Solid Earth.* 2017. V. 122, N 6. P. 4460–4474.
9. Shimura T., Jiao Z., Shikazono N. Evaluation of nickel-yttria stabilized zirconia anode degradation during discharge operation and redox cycles operation by electrochemical calculation // *J. Power Sources.* 2016. V. 330. P. 149–155.
10. Mosser L., Dubrule O., Blunt M. J. Reconstruction of three-dimensional porous media using generative adversarial neural networks // *Phys. Rev. E.* 2017. V. 96, N 4. Article ID 043309.
11. Liu Y. Some consideration on the Langmuir isotherm equation // *Colloids Surfaces, A, Physicochem. Eng. Aspects.* 2006. V. 274, N 1-3. P. 34–36.
12. Merkin J. H. A model for isothermal homogeneous-heterogeneous reactions in boundary-layer flow // *Math. Comput. Model.* 1996. V. 24, N 8. P. 125–136.
13. Kameswaran K., Shaw S., Sibanda P., Murthy P. V. S. N. Homogeneous–heterogeneous reactions in a nanofluid flow due to a porous stretching sheet // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 2013. V. 57, N 2. P. 465–472.
14. Khan M. I., Waqas M., Hayat T., Alsaedi A. A comparative study of casson fluid with homogeneous-heterogeneous reactions // *J. Colloid Interface Sci.* 2017. V. 498. P. 85–90.
15. Waqas M. A mathematical and computational framework for heat transfer analysis of ferro-magnetic non-newtonian liquid subjected to heterogeneous and homogeneous reactions // *J. Magnet. Magn. Mater.* 2020. V. 493. Article ID 165646.

16. Mozaffari M., Kordzadeh-Kermani V., Ghalandari V., et al. Adsorption isotherm models: A comprehensive and systematic review (2010–2020) // *Sci. Total Environ.* 2022. V. 812. Article ID 151334.
17. Grigoriev V. V., Iliev O., Vabishchevich P. N. Computational identification of adsorption and desorption parameters for pore scale transport in periodic porous media // *J. Comput. Appl. Math.* 2020. V. 370. Article ID 112661.
18. Grigoriev V. V., Vabishchevich P. N. Bayesian estimation of adsorption and desorption parameters for pore scale transport // *Math.*, MDPI. 2021. V. 9, N 16. P. 1–16.
19. Grigoriev V. V., Savvin A. V. Numerical study of the influence of the electrokinetic effect on the growth of an oxide film at the pore scale // *AIP Conf. Proc.* 2022. V. 2528, N 1. Article ID 020047.
20. Alnces M. S., Blechta J., Hake J., et al. The FEniCS project version 1.5 // *Arch. Numer. Software.* 2015. V. 3, N 100.
21. Liu Q., Li X., Liu H., et al. Multi-objective metaheuristics for discrete optimization problems: A review of the state-of-the-art // *Appl. Soft Comput.* 2020. V. 93. 106382.
22. Karimi-Mamaghan M., Mohammadi M., Meyer P., et al. Machine learning at the service of meta-heuristics for solving combinatorial optimization problems: A state-of-the-art // *Eur. J. Oper. Res.* 2022. V. 296, N 2. P. 393–422.
23. Karaboga D., Akay B. A comparative study of artificial bee colony algorithm // *Appl. Math. Comput.* 2009. V. 214, N 1. P. 108–132.
24. Grigoriev V. V., Iliev O., Vabishchevich P. N. On parameter identification for reaction-dominated pore-scale reactive transport using modified bee colony algorithm // *Algorithms.* 2022. V. 15, N 1.
25. Kralchevsky P. A., Danov K. D., Denkov N. D. Chemical physics of colloid systems and interfaces. Handbook of surface and colloid chemistry. CRC Press, 1997.
26. Reddy J. N. Introduction to the finite element method. McGraw-Hill Education, 2019.
27. Samarskii A. A. The theory of difference schemes CRC Press, 2001.
28. Mohring J., Milk R., Ngo A., et al. Uncertainty quantification for porous media flow using multilevel Monte Carlo // *Int. Conf. Large-Scale Sci. Comput.* Springer, 2015. P. 145–152.
29. Dokeroglu T., Sevinc E., Kucukyilmaz T., Cosar A. A survey on new generation metaheuristic algorithms // *Comput. Ind. Eng.* 2019. V. 137. Article ID 106040.
30. Song X., Zhao M., Yan Q., Xing S. A high-efficiency adaptive artificial bee colony algorithm using two strategies for continuous optimization // *Swarm Evolut. Comput.* 2019. V. 50. Article ID 100549.

Поступила в редакцию 3 марта 2023 г.

После доработки 29 апреля 2023 г.

Принята к публикации 29 мая 2023 г.

Григорьев Василий Васильевич

Лаборатория «Вычислительные технологии моделирования
многофизичных и многомасштабных процессов криолитозоны».

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,

ул. Кулаковского 42, Якутск 677000;

Северо-Кавказский центр математических исследований,

ул. Пушкина, 1, Ставрополь 355000

`v.v.grigorev@ss-vfu.ru`

IDENTIFICATION OF HOMOGENEOUS–HETEROGENEOUS PORE–SCALE REACTION RATES IN POROUS MEDIA

V. V. Grigoriev

Abstract: This paper presents a model of homogeneous-heterogeneous reaction in the pore scale based on Stokes equations, convection-diffusion-reaction equations with the Robin boundary condition at the inclusion boundaries. The homogeneous reaction is described as cubic autocatalysis on the whole pore space, and the kinetics of the heterogeneous reaction is described by the Langmuir isotherm. Numerical solution of the problem is carried out by the finite element method on piecewise linear elements. The Crank–Nicholson scheme is used for discretization in time. The nonlinear problem is solved using Newton’s iteration method. The mass transfer is simulated with a calculated velocity field. In addition, a sensitivity analysis of the model to the parameters has been carried out to study their influence on the reactive transport through the porous medium. A numerical solution for the inverse problem, namely, identification of key parameters characterizing the reactive transport based on two breakthrough curves of two different solutions is presented. Noisy measurements with different noise amplitudes including mixed amplitudes were considered. For approximate solution of the multidimensional inverse problem the metaheuristic Artificial Bee Colony Algorithm was applied and showed good efficiency at rather low computational cost.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.74.45.008

Keywords: homogeneous-heterogeneous reaction, porous media, pore scale, parameter identification, finite element method.

REFERENCES

1. Liu P., Yao J., Couples G. D., Ma J., and Iliev O., “3-D modelling and experimental comparison of reactive flow in carbonates under radial flow conditions,” *Sci. Rep.*, **7**, 1–10 (2017).
2. Greiner R., Prill T., Iliev O., van Setten B. A. A. L., and Votsmeier M., “Tomography based simulation of reactive flow at the micro-scale: Particulate filters with wall integrated catalyst,” *Chem. Eng. J.*, **378**, article No. 121919 (2019).
3. Myers R., *The Basics of Chemistry*, Greenwood Publ. Group (2003).
4. Yang Q., Zhong Y., Li X.-M., et al., “Adsorption-coupled reduction of bromate by Fe(II)–Al(III) layered double hydroxide in fixed-bed column: Experimental and breakthrough curves analysis,” *J. Ind. Eng. Chem.*, **28**, 54–59 (2015).
5. Wartha E., Birkelbach F., Bösenhofer M., et al., “Enhanced kinetic model identification for gas-solid reactions through computational fluid dynamics,” *Chem. Eng. J.*, **430**, article No. 132850 (2022).
6. Chen L., He A., Zhao J., et al., “Pore-scale modeling of complex transport phenomena in porous media,” *Progress Energy Combust. Sci.*, **88**, article No. 100968 (2022).
7. Sadhukhan S., Gouze P., and Dutta T., “Porosity and permeability changes in sedimentary rocks induced by injection of reactive fluid: A simulation model,” *J. Hydrol.*, **450**, 134–139 (2012).

8. Miller K., Vanorio T., and Keehm Y., "Evolution of permeability and microstructure of tight carbonates due to numerical simulation of calcite dissolution," *J. Geophys. Res., Solid Earth*, **122**, No. 6, 4460–4474 (2017).
9. Shimura T., Jiao Z., and Shikazono N., "Evaluation of nickel-yttria stabilized zirconia anode degradation during discharge operation and redox cycles operation by electrochemical calculation," *J. Power Sources*, **330**, 149–155 (2016).
10. Mosser L., Dubrule O., and Blunt M. J., "Reconstruction of three-dimensional porous media using generative adversarial neural networks," *Phys. Rev. E*, **96**, No. 4, article No. 043309 (2017).
11. Liu Y., "Some consideration on the Langmuir isotherm equation," *Colloids Surfaces, A, Physicochem. Eng. Aspects*, **274**, No. 1-3, 34–36 (2006).
12. Merkin J. H., "A model for isothermal homogeneous-heterogeneous reactions in boundary-layer flow," *Math. Comput. Model.*, **24**, No. 8, 125–136 (1996).
13. Kameswaran K., Shaw S., Sibanda P., and Murthy P. V. S. N., "Homogeneous-heterogeneous reactions in a nanofluid flow due to a porous stretching sheet," *Int. J. Heat Mass Transfer*, **57**, No. 2, 465–472 (2013).
14. Khan M. I., Waqas M., Hayat T., and Alsaedi A., "A comparative study of casson fluid with homogeneous-heterogeneous reactions," *J. Colloid Interface Sci.*, **498**, 85–90 (2017).
15. Waqas M., "A mathematical and computational framework for heat transfer analysis of ferromagnetic non-newtonian liquid subjected to heterogeneous and homogeneous reactions," *J. Magnet. Magn. Mater.*, **493**, article No. 165646 (2020).
16. Mozaffari M., Kordzadeh-Kermani V., Ghalandari V., et al., "Adsorption isotherm models: A comprehensive and systematic review (2010–2020)," *Sci. Total Environment*, **812**, article No. 151334 (2022).
17. Grigoriev V. V., Iliev O., and Vabishchevich P. N., "Computational identification of adsorption and desorption parameters for pore scale transport in periodic porous media," *J. Comput. Appl. Math.*, **370**, article No. 112661 (2020).
18. Grigoriev V. V. and Vabishchevich P. N., "Bayesian estimation of adsorption and desorption parameters for pore scale transport," *Math.*, MDPI, **9**, No. 16, 1–16 (2021).
19. Grigoriev V. V. and Savvin A. V., "Numerical study of the influence of the electrokinetic effect on the growth of an oxide film at the pore scale," *AIP Conf. Proc.*, **2528**, No 1, article No. 020047 (2022).
20. Alnces M. S., Blechta J., Hake J., et al., The FEniCS Project Version 1.5, *Arch. Numer. Software*, **3**, No. 100 (2015).
21. Liu Q., Li X., Liu H., et al., "Multi-objective metaheuristics for discrete optimization problems: A review of the state-of-the-art," *Appl. Soft Comput.*, **93**, article No. 106382 (2020).
22. Karimi-Mamaghan M., Mohammadi M., Meyer P., et al., "Machine learning at the service of meta-heuristics for solving combinatorial optimization problems: A state-of-the-art," *Eur. J. Oper. Res.*, **296**, No. 2, 393–422, (2022).
23. Karaboga D. and Akay B., "A comparative study of artificial bee colony algorithm," *Appl. Math. Comput.*, **214**, No. 1, 108–132 (2009).
24. Grigoriev V. V., Iliev O., and Vabishchevich P. N., "On parameter identification for reaction-dominated pore-scale reactive transport using modified bee colony algorithm," *Algorithms*, **15**, No. 1 (2022).
25. Kralchevsky P. A., Danov K. D., and Denkov N. D., "Chemical Physics of Colloid Systems and Interfaces," in: *Handbook of Surface and Colloid Chemistry*, CRC Press (1997).
26. Reddy J. N., *Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-Hill Education (2019).
27. Samarskii A. A., *The Theory of Difference Schemes*, vol. 240, CRC Press (2001).
28. Mohring J., Milk R., Ngo A., et al., "Uncertainty quantification for porous media flow using multilevel Monte Carlo," in: *Int. Conf. Large-Scale Scientific Computing*, pp. 145–152, Springer (2015).
29. Dokeroglu T., Sevinc E., Kucukyilmaz T., and Cosar A., "A survey on new generation meta-heuristic algorithms," *Comput. Ind. Eng.*, **137**, article No. 106040 (2019).
30. Song X., Zhao M., Yan Q., and Xing S., "A high-efficiency adaptive artificial bee colony algorithm using two strategies for continuous optimization," *Swarm Evolut. Comput.*, **50**,

article No. 100549 (2019).

Submitted March 3, 2023

Revised April 29, 2023

Accepted May 29, 2023

Vasiliy V. Grigoriev

Laboratory of Computational Technologies
for Modeling Multiphysical and Multiscale Permafrost Processes,
Ammosov North-Eastern Federal University,
42 Kulakovskii Street, Yakutsk, 677000 Russia;
North Caucasus Centre for Mathematical Research,
1 Pushkin Street, Stavropol, 355000 Russia
`v.v.grigorev@s-vfu.ru`

Математическая жизнь
Межгородской научно-исследовательский семинар
«Неклассические задачи математической физики»

1 апреля 2023 г.

Семинар был посвящен Дню математика.

29 апреля 2023 г.

«Краевые задачи для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка с запаздывающим аргументом».

Докладчик: М. Г. Мажгихова (Институт прикладной математики автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия).

В докладе изложены результаты, связанные с исследованием начальных, локальных и нелокальных краевых задач для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка с запаздывающим аргументом. Для уравнения с дробной производной произвольного порядка получено общее представление решения, найдено фундаментальное решение. Доказана теорема существования и единственности решения задачи Коши. Реализован метод шагов для решения задачи Коши в случае переменного запаздывания. Исследована обобщенная краевая задача с условиями типа Штурма, а также обобщенные задачи Дирихле и Неймана. Развита метод функции Грина, исследованы спектральные свойства.

Методом функции Грина получены решения нелокальных задач Стеклова первого и второго классов и внутренней краевой задачи с условиями, связывающими значение искомой функции на граничной точке со значениями во внутренних точках. Доказаны теоремы существования и единственности.

13 мая 2023 г.

"Convexification Numerical Method for a Coefficient Inverse Problem for the Riemannian Radiative Transfer Equation".

Докладчик: М. V. Klibanov (Department of Mathematics and Statistics University of North Carolina at Charlotte).

В 1981 г. была напечатана статья А. Л. Бухгейма и М. В. Клибанова «Единственность в целом одного класса многомерных обратных задач» в Докладах Академии Наук СССР, 1981, Т. 260, № 2. С. 269–272. В этой работе был разрублен гордиев узел всей теории коэффициентных обратных задач. А именно: впервые удалось разработать методику, позволяющую доказывать глобальные теоремы единственности коэффициентных обратных задач в неперопределенной постановке. Только локальные теоремы единственности удавалось доказать до этой работы. Ключом к разрешению проблемы оказалось впервые введение метода оценок Карлемана в теорию обратных задач. До сегодняшнего дня все глобальные теоремы единственности и устойчивости для таких задач доказаны только этим методом. Большое количество работ большого числа авторов опубликовано про различные приложения этой техники, которая сейчас называется «метод Бухгейма — Клибанова». Однако все те работы обсуждают

только теоремы единственности и устойчивости. Начиная с 1995 г. докладчик разработал серьезное обобщение этого метода на численные методы как для коэффициентных обратных задач, так и для некорректно поставленных задач Коши для уравнений с частными производными. Это так называемый *convexification method*. В итоге удалось избавиться от «проклятия» практически всех численных методов для нелинейных обратных задач: проблемы локальных минимумов, т. е. вместо стандартных локально сходящихся численных методов удалось построить глобально сходящиеся численные методы. Кроме собственно теории и численных методов теории обратных задач в докладе представлены некоторые результаты теории игр среднего поля (*mean field games*).

27 мая 2023 г.

«Интегродифференциальные уравнения в банаховых пространствах и аналитические разрешающие семейства операторов».

Докладчики: В. Е. Федоров, А. Д. Годова (Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия).

Исследуется класс уравнений в банаховых пространствах с интегродифференциальным оператором типа Римана — Лиувилля с операторнозначным ядром свертки. Исследованы свойства разрешающих операторов таких уравнений, рассмотрен случай ограниченного оператора в указанном уравнении и определен класс линейных замкнутых операторов, принадлежности которому необходима и при коммутировании оператора с ядром свертки достаточна для существования аналитических в секторе k -разрешающих семейств операторов исследуемого уравнения. При некоторых дополнительных условиях на ядро свертки доказаны теоремы об однозначной разрешимости неоднородного линейного уравнения рассматриваемого класса в случае непрерывной в норме графика оператора из уравнения или гильбертовой неоднородности. Доказана теорема о достаточных условиях на аддитивное возмущение оператора указанного класса для того, чтобы возмущенный оператор также принадлежал такому классу. Абстрактные результаты использованы при исследовании начально-краевых задач для системы уравнений в частных производных с несколькими дробными производными Римана — Лиувилля по времени разных порядков и для уравнения с дробной производной Прабхакара по времени.

10 июня 2023 г.

«Сингулярные интегральные уравнения неклассического типа на кусочно-ляпуновских кривых».

Докладчик: А. П. Солдатов (Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия).

Рассматривается алгебра сингулярных интегральных операторов на кусочно-ляпуновской кривой, расположенной на сфере Римана. Другими словами, эти кривые сохраняют свой тип при дробно линейных преобразованиях плоскости. Указанная алгебра включает в себя помимо сингулярного оператора с ядром Коши некомпактные интегральные операторы с ядрами, которые в окрестности узлов кривой приближенно однородны степени -1 относительно расстояний до этих узлов. В докладе обсуждается критерий фредгольмовости операторов этой алгебры и приводится формула их индекса.

24 июня 2023 г.

«О философии математики — от Пифагора до Перельмана (от геометрии Евклида до теории струн)».

Докладчик: В. В. Лепов (Институт физико-технических проблем Севера им. В. П. Ларионова СО РАН, обособленного подразделения Федерального исследовательского центра «Якутский научный центр» СО РАН, Якутск, Россия).

Представлены значимость (фундаментальная и практическая) и основные проблемы философии математики. Дана краткая история развития математики, включая Милетскую школу, Пифагореизм, Элейскую школу и учение Платона, Аристотеля, и первый кризис математики (несоизмеримость отрезков), эпоху Возрождения и второй кризис (Лейбниц), Геттингенскую школу математики, теорему Эмми Нетер. Обсуждается программа Гильберта по обоснованию математики и 23 проблемы Гильберта, гипотеза Пуанкаре и теорема Пуанкаре — Перельмана. Дана формулировка теоремы Гёделя о неполноте (третий кризис). Обосновывается связь математики с современной физической картиной мира и переход от Стандартной теории к теории струн и голографическому принципу AdS/CFT соответствия.

Автор не претендует на какую-либо полноту теорий и их философскую интерпретацию. Материал предлагается для обсуждения и дальнейшего сотрудничества.

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. К публикации в журнале «Математические заметки СВФУ» принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики, механики и информатики. Статьи, опубликованные ранее, а также направленные в другие издания, редакцией не рассматриваются. Редакционный совет вправе воздержаться от принятия статьи к рассмотрению, если она не соответствует профилю журнала.

2. Направляя статью в редакцию журнала, автор (соавторы) на безвозмездной основе передает(ют) издателю на срок действия авторского права по действующему законодательству РФ исключительное право на использование статьи или отдельной ее части (в случае принятия статьи к опубликованию) на территории всех государств, где авторские права в силу международных договоров Российской Федерации являются охраняемыми, в том числе следующие права: на воспроизведение, на распространение, на публичный показ, на доведение до всеобщего сведения, на перевод на иностранные языки (и исключительное право на использование переведенного произведения вышеуказанными способами), на предоставление всех вышеперечисленных прав другим лицам. Одновременно со статьей автор (соавторы) направляет в редакцию подписанный лицензионный договор на право использования научного произведения в журнале. Образец договора высылается авторам по электронной почте вместе с сообщением о принятии статьи к печати.

3. Для рассмотрения статьи на предмет ее публикации в журнале в редакцию представляются текст статьи объемом не более 1,5 авторских листов (18 страниц журнального текста), написанной на русском или, по согласованию с редакцией, на английском языке, а также сопроводительное письмо, в котором сообщается, что статья направляется именно в журнал «Математические заметки СВФУ», и информация об авторе (коллективе авторов) с указанием фамилии, имени и отчества, полного почтового адреса для переписки, места работы, подробного служебного адреса, адреса электронной почты и номера телефона. Статьи объемом более 1,5 авторских листов, как правило, не рассматриваются и могут быть приняты к рассмотрению и опубликованы лишь по специальному решению редакционного совета.

4. Статья должна быть подготовлена с использованием текстового редактора LaTeX и представлена в виде файлов форматов pdf и tex.

5. В начале статьи указывается индекс УДК и/или MSC. Статья сопровождается аннотацией объемом не менее 100 слов, желательно без формул, и списком ключевых слов. Аннотация и список должны быть представлены на русском и английском языках.

6. Список литературы печатается в конце текста. Ссылки на литературу в тексте нумеруются в порядке их появления и даются в квадратных скобках. Ссылки на неопубликованные работы нежелательны. Оформление литературы должно соответствовать требованиям стандартов (примеры библиографических описаний см. в последних номерах журнала).

7. Издание осуществляет рецензирование всех поступающих в редакцию материалов, соответствующих ее тематике, с целью их экспертной оценки. Все рецензенты являются признанными специалистами по тематике рецензируемых материалов и имеют в течение последних 3 лет публикации по тематике рецензируемой статьи. Рецензии хранятся в редакции издания в течение 5 лет.

8. Принятая к рассмотрению статья направляется на анонимное рецензирование. На основании рецензии редсовет принимает решение о возможности публикации статьи, которое сообщается автору. Автор вправе сообщить свои замечания и возражения к рецензии. Повторное решение редсовета по статье является окончательным.

9. Редакция издания направляет авторам представленных материалов копии рецензий или мотивированный отказ, а также обязуется направлять копии рецензий в Министерство науки и высшего образования Российской Федерации при поступлении в редакцию издания соответствующего запроса.

10. После редакционной подготовки непосредственно перед публикацией автору высылается корректура. По возможности в наиболее короткие сроки необходимо ее прочесть, внести исправления (правка против авторского оригинала нежелательна) и направить в редакцию. Статья выходит в свет только после получения от автора (коллектива авторов) авторской корректуры, подписанной автором (всеми соавторами) в печать.

11. В соответствии с международными законами об авторском праве Редакция уведомляет авторов журнала об их ответственности за получение ими в случае необходимости письменного разрешения на использование охраняемых авторским правом материалов, таких, как цитаты, воспроизведение данных, иллюстраций и любых иных материалов, которые могут быть использованы в их публикациях, а также о том, что вытекающая отсюда ответственность за нарушение таких авторских прав лежит на авторах. Плата за опубликование с авторов или учреждений, где работают авторы, не взимается, и опубликованные статьи не оплачиваются.

12. Права авторов на использование материалов статей и переводов статей из журнала «Математические заметки СВФУ» в иных публикациях определяются общими международными и российскими законами об авторских правах.



Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций
Свидетельство о регистрации № ПИ № ФС 77–59001 от 11.08.2014 г.

Учредитель: ФГАОУ ВО «Северо-Восточный
федеральный университет имени М. К. Аммосова»
ул. Белинского, 58, Якутск 677000

Подписано в печать 12.07.2023. Формат 70 × 108/16. Печать офсетная.
Печ. л. 8. Уч.-изд. л. 8,25. Тираж 50 экз. Заказ № 234.

Издательский дом Северо-Восточного федерального университета,
677891, г. Якутск, ул. Петровского, 5.

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии ИД СВФУ