



СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. К. АММОСОВА

ISSN 2411-9326

Математические заметки СВФУ

Том 28
№ 4. 2021

Редакционный совет

Главный редактор: Егоров И. Е., д.ф.-м.н., профессор, СВФУ

Зам. главного редактора: Кожанов А. И., д.ф.-м.н., профессор, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Зам. главного редактора: Попов С. В., д.ф.-м.н., профессор, СВФУ

Ответственный секретарь: Прокопьев А. В., СВФУ

Члены редакционного совета:

Бородин О. В., д.ф.-м.н., профессор, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Вабищев П. Н., д.ф.-м.н., профессор, Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН

Васильев В. И., д.ф.-м.н., профессор, СВФУ

Григорьев Ю. М., д.ф.-м.н., СВФУ

Зикиров О. С., д.ф.-м.н., профессор, Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Узбекистан

Морозов А. С., д.ф.-м.н., профессор, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Пятков С. Г., д.ф.-м.н., профессор, Югорский государственный университет

Хлуднев А. М., д.ф.-м.н., профессор, Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

Itou H., Ph.D., Tokyo University of Science, Japan

Ruzhansky M., Professor, Imperial College London, UK

Tani A., Professor, Keio University, Japan

Xin-Lin Gao, Professor, Southern Methodist University, USA

СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М. К. АММОСОВА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ СВФУ

ОСНОВАН В 1994 ГОДУ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ВЫХОДИТ 4 РАЗА В ГОД

Том 28, № 4 (112)

Октябрь—декабрь, 2021

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Бубякин И. В., Гоголева И. В. К дифференциальной геометрии ρ -мерных комплексов $C^{\rho}(1, 1)$ m -мерных плоскостей проективного пространства P^n	3
I. V. Bubyakin and I. V. Gogoleva On differential geometry of ρ -dimensional complexes $C^{\rho}(1, 1)$ of m -dimensional planes of the projective space P^n	15
Григорьева А. И. Задача Дирихле для уравнений составного типа высокого порядка с разрывными коэффициентами	17
A. I. Grigorieva The Dirichlet problem for the higher order composite type equations with discontinuous coefficients	27
Клепиков П. Н., Родионов Е. Д., Хромова О. П. Уравнение Эйнштейна на трехмерных локально однородных (псевдо)римановых пространствах с векторным кручением	30
P. N. Klepikov, E. D. Rodionov, and O. P. Khromova Einstein equation on three-dimensional locally homogeneous (pseudo)Riemannian manifolds with vectorial torsion	46
Кожанов А. И., Варламова Г. А. Квазиэллиптические уравнения со слабым вырождением	48
A. I. Kozhanov and G. A. Varlamova Quasi-elliptic equations with degeneration	56
Неустроева Н. В., Лазарев Н. П. Оптимальное управление углом наклона трещины в задаче о равновесии пластины Тимошенко с упругим включением	58

N. V. Neustroeva and N. P. Lazarev <i>Optimal control of the crack angle in the equilibrium problem for a Timoshenko plate with elastic inclusion</i>	68
Подгаев А. Г. <i>О теоремах компактности, связанных с задачами с неизвестной границей</i>	71
A. G. Podgaev <i>Compactness theorems connected with problems with unknown boundary</i>	88
Тарасова Г. И. <i>Нелокальные краевые задачи для некоторых классов дифференциальных уравнений составного типа</i>	90
G. I. Tarasova <i>On solvability of nonlocal boundary value problem for a differential equation of composite type</i>	99
Математическое моделирование	
М. Dyshaev, D. Izergin, and V. Fedorov <i>Approximation and comparison of the empirical liquidity cost function for various futures contracts</i>	101
Математическая жизнь	114
Указатель	117

АДРЕС ИЗДАТЕЛЯ:

СВФУ, ул. Белинского, 58, Якутск, 677000

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

СВФУ, ул. Кулаковского, 48, каб. 543, Якутск, 677000

Телефон: 8(4112)32-14-99, Факс: 8(4112)36-43-47;

<http://mzsvfu.ru>

e-mail: prokopevav85@gmail.com; yktmatzam@gmail.com;

ivanegorov51@mail.ru

К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ
 ρ -МЕРНЫХ КОМПЛЕКСОВ $C^{\rho}(1, 1)$
 m -МЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ
ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА P^n
И. В. Бубякин, И. В. Гоголева

Аннотация. Предметом исследования настоящей статьи является дифференциальная геометрия ρ -мерных комплексов C^{ρ} m -мерных плоскостей в проективном пространстве P^n , содержащих конечное число торсов, для которых $n - m$ различных торсов имеют одну общую $(m + 1)$ -мерную касательную плоскость к торсу, при этом те же $n - m$ различных торсов имеют одну общую характеристическую $(m - 1)$ -мерную характеристическую плоскость, общую для двух бесконечно близких образующих торса. Настоящая работа относится к исследованиям в области проективной дифференциальной геометрии на основе метода подвижного репера Э. Картана и метода внешних дифференциальных форм. Эти методы позволяют с единой точки зрения изучать дифференциальную геометрию подмногообразий различных размерностей грассманова многообразия, а также обобщить полученные результаты на более широкие классы многообразий многомерных плоскостей. Для изучения таких подмногообразий применяется грассманово отображение многообразия $G(m, n)$ на $(m + 1)(n - m)$ -мерное алгебраическое многообразие $\Omega(m, n)$ пространства P^N , где $N = \binom{n+1}{m+1} - 1$.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.25.88.001

Ключевые слова: грассманово многообразие, комплексы многомерных плоскостей, многообразие Сегре.

1. Введение

В монографии [1] М. А. Акивисом и В. В. Гольдбергом исследуется теория подмногообразий в многомерном проективном пространстве. В частности, рассматриваются подмногообразия грассмановых многообразий. В работе [2] М. А. Акивисом и В. В. Гольдбергом изучаются многообразия с вырожденным гауссовым отображением, эти многообразия являются аналогами торсов или развертывающихся поверхностей трехмерного евклидова пространства. В последнее время многообразия с вырожденным гауссовым отображением изучаются как с проективной точки зрения, так и с евклидовой. М. А. Акивис и В. В. Гольдберг написали монографию [3] по проективной дифференциальной геометрии, в которой излагаются фундаментальные результаты. Например, что многообразия с вырожденным гауссовым отображением включают в себя не

только конусы и торсы, но и достаточно широкий класс гиперповерхностей, которые не являются конусами или торсами. В своих рассуждениях М. А. Акивис и В. В. Гольдберг систематически используют фокальные образы: фокальные гиперповерхности и фокальные конусы, ассоциированные с многообразием с вырожденным гауссовым отображением. Это позволяет авторам более глубоко изложить дифференциальную геометрию исследуемых многообразий и провести полную их классификацию.

М. А. Акивисом и В. В. Гольдбергом написана фундаментальная монография [4], в которой наряду с глубоким изучением дифференциальной геометрии конформного и псевдоконформного пространств произвольной размерности и подмногообразий в этих пространствах основательно исследуется дифференциальная геометрия грассмановых многообразий, многообразий с грассмановой структурой и многообразий с почти грассмановой структурой. Почти грассманову структуру М. А. Акивис рассматривает как расслоение конусов Сегре на многообразии. Результаты, полученные в этой монографии, имеют фундаментальный характер по проективной и конформной дифференциальной геометрии. Эти результаты являются классическими — настолько они глубоки как по содержанию, так и по форме и полноте изложения.

Указанное определение почти грассмановой структуры использовали в дальнейшем в интегральной геометрии Радона — Хелгасона И. М. Гельфанд и С. П. Гиндикин в монографии [5], а также в других своих работах, решая основную задачу интегральной геометрии для n -мерных допустимых комплексов прямых и n -мерных допустимых комплексов m -плоскостей в проективном пространстве P^n . Полученные И. М. Гельфандом и С. П. Гиндикиным формулы обращения лежат в основе компьютерной томографии. Такие задачи были положены в основу начала послойного изображения внутренней структуры исследуемого объекта. В том числе в этих исследованиях были получены новейшие научные достижения: в 2003 г. за изображения метода магнито-резонансной томографии — способа получения томографических послойных изображений для исследования внутренних органов и тканей человека — Нобелевскую премию по физиологии и медицине получили Мэнсфилд и Лотербур. Всего десять лет назад в 2010 г. была создана четырехмерная электронная томография — техника визуализирования динамики трехмерных объектов во времени. Эта техника позволяет наблюдать за пространственно-временными характеристиками микрообъектов.

Таким образом, М. А. Акивис и В. В. Гольдберг открывают новое поле исследований в проективной дифференциальной геометрии, в частности, дифференциальной геометрии подмногообразий грассманова многообразия, которая успешно развивается и применяется в настоящее время. Актуальность таких исследований заключается в том, что дифференциальная геометрия подмногообразий грассманова многообразия расширяет теорию грассмановых многообразий [6–9], связана с исследованиями лагранжевых и квантовых многообразий [10, 11], а также применяется в теоретической физике [12, 13].

Предметом исследования настоящей статьи является дифференциальная геометрия ρ -мерных комплексов C^{ρ} m -мерных плоскостей в проективном пространстве P^n , содержащих конечное число торсов, для которых $n - m$ различных торсов имеют одну общую $(m + 1)$ -мерную касательную плоскость к торсу и при этом $m + 1$ различных торсов имеют одну общую $(m - 1)$ -мерную характеристическую плоскость, общую для двух бесконечно близких образующих тора. Заметим, что некоторые классы допустимых комплексов [5] из изучаемых комплексов m -мерных плоскостей исследовались в работе [14]. Настоящая работа относится к исследованиям в области проективной дифференциальной геометрии на основе метода подвижного репера Э. Картана и метода внешних дифференциальных форм [1]. Эти методы позволяют с единой точки зрения изучать дифференциальную геометрию подмногообразий различных размерностей грассманова многообразия, а также обобщить полученные результаты на более широкие классы многообразий многомерных плоскостей. Основная задача дифференциальной геометрии подмногообразий грассмановых многообразий заключается в проведении единой классификации различных классов таких многообразий, выяснения их строения, и связанная с этим задача определения произвола их существования, а также изучение свойств подмногообразий различных классов. Данные исследования являются продолжением работ [15–19]. Для изучения таких подмногообразий применяется грассманово отображение многообразия $G(m, n)$ на $(m + 1)(n - m)$ -мерное алгебраическое многообразие $\Omega(m, n)$ пространства P^N , где $N = \binom{n+1}{m+1} - 1$. Заметим, что в дифференциальной геометрии подмногообразий грассманова многообразия операцию суммирования будем производить по правилу Эйнштейна, как это принято в тензорном анализе, в частности, в его приложениях к общей теории относительности.

М. А. Акивис отмечает, что пересечение алгебраического многообразия $\Omega(m, n)$ с его касательным пространством $T_l\Omega(m, n)$ представляет собой конус Сегре $C(m + 1, n - m)$. Этот конус имеет размерность n и несет плоские образующие размерностей $n - m$ и $m + 1$, пересекающиеся по прямым. Проективизация $PB_l(2)$ этого конуса есть многообразие Сегре $S(m, n - m - 1) = P^m \times P^{n-m-1}$. Многообразие Сегре $S(m, n - m - 1)$ инвариантно при проективных преобразованиях пространства $P^{(n-m)(m+1)-1} = PT_l\Omega(m, n)$, являющегося проективизацией с центром в точке l касательного пространства $T_l\Omega(m, n)$ к алгебраическому многообразию $\Omega(m, n)$, и его будем использовать для классификации рассматриваемых подмногообразий грассманова многообразия $G(m, n)$, а также для интерпретации их свойств в терминах проективных алгебраических многообразий. Классификация подмногообразий грассманова многообразия $G(m, n)$ основывается на различных конфигурациях плоскости $P^{(n-m)(m+1)-1} = PT_l\Omega(m, n)$ и многообразия Сегре $S(m, n - m - 1)$.

Так как дифференциальная геометрия грассмановых многообразий далеко еще не изучена, такой методологический подход к их исследованию представляется актуальным. Следует заметить, что дифференциальная геометрия грассмановых многообразий представляет самостоятельный интерес для диф-

ференциальной геометрии, а также одновременно является одним из важных средств построения и изучения других многообразий в проективных пространствах. Одной из наиболее красивых областей дифференциальной геометрии, где во всей полноте проявляются преимущества инвариантных бескоординатных методов исследования, является теория комплексов многомерных плоскостей проективного пространства [14].

2. Характеристические $(m - 1)$ - и $(m + 1)$ -мерные плоскости торсов, принадлежащих ρ -мерному комплексу C^ρ m -мерных плоскостей проективного пространства P^n

Рассмотрим в проективном пространстве P^n ρ -мерные комплексы C^ρ m -мерных плоскостей, содержащих конечное число торсов — развертывающихся поверхностей. Условие, при котором комплексы C^ρ содержат конечное число торсов, определяется из следующих рассуждений. Рассмотрим проективизацию касательной плоскости $T_l\Omega(m, n)$ с центром в точке l . Эта проективизация представляет собой проективное пространство $P^{(n-m)(m+1)-1} = PT_l\Omega(m, n)$. В этом проективном пространстве должно выполняться следующее равенство:

$$\begin{aligned} \dim PT_lV^\rho + \dim S_l(m, n - m - 1) \\ = \dim P^{(m+1)(n-m)-1} + \dim(PT_lV^\rho \cap S_l(m, n - m - 1)). \end{aligned}$$

Если размерность пересечения плоскости PT_lV^ρ и многообразия Сегре $S_l(m, n - m - 1)$ равна r , то

$$(\rho - 1) + (m + (n - m - 1)) = (m + 1)(n - m) - 1 + r.$$

Отсюда следует, что

$$\rho - 1 = m(n - m - 1) + r.$$

Утверждение, что комплекс C^ρ m -мерных плоскостей в проективном пространстве P^n содержит конечное число торсов, означает равенство нулю размерности пересечения плоскости PT_lV^ρ и многообразия Сегре $S_l(m, n - m - 1)$, т. е. $r = 0$. Если $r = 0$, то искомую зависимость размерности комплекса C^ρ , его m -мерной образующей и проективного пространства P^n получаем в виде

$$\rho - 1 = m(n - m - 1).$$

Таким образом, комплекс C^ρ m -мерных плоскостей в проективном пространстве P^n содержит конечное число торсов тогда и только тогда, когда размерность комплекса C^ρ , его m -мерной образующей и проективного пространства P^n связаны этим соотношением.

Комплексу C^ρ при грасмановом отображении [20, 21] соответствует ρ -мерное многообразие V^ρ , лежащее на алгебраическом многообразии $\Omega(m, n)$, являющемся образом многообразия $G(m, n)$ m -мерных плоскостей проективного пространства P^n . В каждой своей точке l , соответствующей m -мерной плоскости L

проективного пространства P^n , многообразие V^ρ имеет ρ -мерную касательную плоскость $T_l V^\rho$. Проективизация касательной плоскости $T_l V^\rho$ с центром в точке l представляет собой $(\rho - 1)$ -мерную проективную плоскость $PT_l V^\rho$. Различным видам взаимного расположения плоскости $PT_l V^\rho$ и инвариантного многообразия Сегре $S_l(m, n - m - 1) = P^m \times P^{n-m-1}$, являющимся проективизацией асимптотического конуса $B_l(2)$ асимптотических направлений второго порядка, соответствуют различные классы комплексов $C^\rho \subset G(m, n)$. При этом конус $B_l(2)$ есть конус Сегре $C(m + 1, n - m)$ и представляет собой пересечение алгебраического многообразия $\Omega(m, n)$ и его касательного пространства $T_l \Omega(m, n)$, т. е.

$$B_l(2) = \Omega(m, n) \cap T_l \Omega(m, n).$$

В проективном пространстве P^n рассмотрим семейство точечных реперов A_I ($I, J, K = 0, 1, \dots, n$) и семейство реперов, образованных гиперплоскостями $\alpha^I = (-1)^I (A_0, \dots, A_{I-1}, A_{I+1}, \dots, A_n)$. Уравнения перемещения этих реперов имеют вид

$$dA_I = \omega_I^J A_J, \quad d\alpha^I = -\omega_J^I \alpha^J,$$

где ω_I^J — линейные дифференциальные формы, удовлетворяющие структурным уравнениям проективного пространства P^n :

$$d\omega_I^J = \omega_I^K \wedge \omega_K^J.$$

Пусть L — m -мерная плоскость пространства P^n . Свяжем с этой плоскостью семейство точечных реперов так, чтобы точки A_i , $i = (0, 1, \dots, m)$, принадлежали плоскости L . Тогда

$$dA_i = \omega_i^j A_j + \omega_i^p A_p, \quad dA_p = \omega_p^i A_i + \omega_p^q A_q,$$

где $i, j = 0, 1, \dots, m$ и $p, q = m + 1, m + 2, \dots, n$. Отсюда видно, что m -мерная плоскость L в пространстве P^n зависит от $(m + 1)(n - m)$ параметров, линейными комбинациями дифференциалов которых являются формы ω_i^p . На многообразии $\Omega(m, n)$ асимптотические направления второго порядка, выходящие из точки l , определяются условием

$$d^2 l = 0 \pmod{T_l \Omega(m, n)}.$$

Отсюда следует, что уравнения конуса $B_l(2)$ асимптотических направлений второго порядка имеют вид

$$\omega_i^p \omega_j^q - \omega_i^q \omega_j^p = 0. \quad (1)$$

Из этих уравнений видно, что координаты ω_i^p точки конуса $B_l(2)$ допускают параметрическое представление

$$\omega_i^p = a_i x^p. \quad (2)$$

Поэтому конус $B_l(2)$ асимптотических направлений второго порядка совпадает с конусом Сегре $C_l(m + 1, n - m)$.

Рассмотрим теперь проективизацию касательной плоскости $T_l\Omega(m, n)$ с центром в точке l . Эта проективизация представляет собой проективное пространство $P^{(n-m)(m+1)-1} = PT_l\Omega(m, n)$, в котором формы ω_i^p являются однородными координатами произвольной точки. При проективизации асимптотическому конусу $B_l(2)$ соответствует многообразие Сегре $S_l(m, n - m - 1)$ проективного пространства $P^{(n-m)(m+1)-1}$, определяемого теми же уравнениями (1), что и конус $B_l(2)$ в касательном пространстве $T_l\Omega(m, n)$. Многообразие Сегре $S_l(m, n - m - 1)$ представляет собой $((m+1)(n-m)-1) - m(n-m-1) = (n-1)$ -мерную алгебраическую поверхность порядка $\binom{n-1}{m} = \binom{n-1}{n-m-1}$ [22, 23], несущую два семейства плоских образующих размерностей m и $n-m-1$, зависящих соответственно от $n-m-1$ и m параметров. При этом две образующие, принадлежащие различным семействам, имеют общую точку, а две образующие, принадлежащие одному семейству, не пересекаются. Через каждую его точку проходит по одной образующей из каждого семейства.

Многообразие Сегре $S_l(m, n - m - 1)$ остается инвариантным при проективных преобразованиях пространства $P^{(n-m)(m+1)-1}$. Плоскость PT_lV^ρ в пространстве $P^{(n-m)(m+1)-1} = PT_l\Omega(m, n)$ определяется теми же уравнениями, что и касательная плоскость T_lV^ρ в касательном пространстве $T_l\Omega(m, n)$. Поскольку на комплексе C^ρ m -мерная плоскость L зависит от ρ параметров, то среди форм ω_i^p лишь ρ линейно независимых. Следовательно, комплекс C^ρ задается $n-1$ ($\alpha = 1, 2, \dots, n-1$) дифференциальными уравнениями

$$\Lambda_p^{\alpha i} \omega_i^p = 0, \quad (3)$$

где ω_i^p — линейные дифференциальные формы, обращение в нуль которых фиксирует m -мерную плоскость L на комплексе C^ρ .

Рассмотрим однопараметрическое семейство m -мерных плоскостей L в пространстве P^n . Такое семейство представляет собой $(m+1)$ -мерную поверхность с m -мерными плоскими образующими. Эта поверхность называется *торсом* [3, 4], если она является тангенциально вырожденной поверхностью ранга один. Торсу на алгебраическом многообразии $\Omega(m, n)$ соответствует кривая, касательные к которой служат прямолинейными образующими этого многообразия. Данная кривая является асимптотической линией многообразия $\Omega(m, n)$, поэтому в произвольной точке этой линии выполняются уравнения (1). Следовательно, дифференциальные уравнения торсов в пространстве P^n можно записать в виде

$$\omega_i^p = a_i x^p dt. \quad (4)$$

Каждый торс, проходящий через m -мерную плоскость L , определяет на ней характеристическую $(m-1)$ -мерную плоскость, которая является пересечением двух бесконечно близких образующих, и характеристическую $(m+1)$ -мерную плоскость, касательную плоскость к торсу. Найдем уравнения характеристических образов торсов. Пусть $M = x^i A_i$ ($i = 0, 1, \dots, m$) — произвольная точка m -мерной плоскости L . Дифференциал этой точки в силу (4) вычисляется так:

$$dM = (dx^i + x^j \omega_j^i) A_i + (a_i x^i)(x^p A_p) dt,$$

где $p = m+1, m+2, \dots, n$. Отсюда видно, что характеристическая $(m-1)$ -мерная плоскость в m -мерной плоской образующей L комплекса C^ρ , определяется уравнением

$$a_i x^i = 0,$$

а характеристическая $(m+1)$ -мерная плоскость, содержащая m -мерную плоскую образующую L комплекса C^ρ , определяется m -мерной плоскостью L и точкой:

$$S = x^p A_p.$$

Из уравнений (3) ввиду (4) получим систему следующих уравнений:

$$\Lambda_p^{\alpha i} a_i x^p = 0, \quad (5)$$

где $\alpha = 1, 2, \dots, n-1$. Эта система уравнений определяет характеристическую $(m-1)$ -мерную плоскость торса, принадлежащего комплексу C^ρ , если выполняется условие

$$\text{rang}(\Lambda_p^{\alpha i} a_i) = n - m - 1. \quad (6)$$

Из этого соотношения определяются характеристические $(m-1)$ -мерные плоскости в m -мерной образующей L комплекса C^ρ . Условие

$$\text{rang}(\Lambda_p^{\alpha i} x^p) = m + 1 \quad (7)$$

определяет точки S пересечения характеристических $(m+1)$ -мерных плоскостей с аффинно двойственной к m -мерной плоскости L в пространстве P^n $(n-m)$ -мерной плоскостью. Эти точки вместе с m -мерной плоскостью L определяют $(m+1)$ -мерные характеристические плоскости торса.

3. К дифференциальной геометрии ρ -мерных комплексов $C^\rho(1, 1)$ m -мерных плоскостей проективного пространства P^n

В проективном пространстве P^n рассмотрим ρ -мерный комплекс C^ρ ($\rho = m(n-m-1)+1$) m -мерных плоскостей L , для которого $n-m$ различных торсов, принадлежащих этому комплексу C^ρ , имеют общую характеристическую $(m+1)$ -мерную плоскость, касательную к торсу, и те же $n-m$ различных торсов, принадлежащих этому комплексу C^ρ , имеют общую характеристическую $(m-1)$ -мерную плоскость, по которой пересекаются две их соседние образующие. Обозначим рассматриваемые комплексы через $C^\rho(1, 1)$. Свяжем с комплексами $C^\rho(1, 1)$ репер так, чтобы плоскости $A_1 \wedge \dots \wedge A_m$, $A_0 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_m, \dots$, $A_0 \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_{m-1}$ совместились с $(m-1)$ -мерными характеристическими плоскостями, по которым пересекаются две бесконечно близкие образующие торса $n-m$ различных торсов. Общую $(m+1)$ -мерную характеристическую плоскость этих торсов совместим с плоскостью $A_0 \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_m \wedge A_n$. Ввиду этого из (5) получим, что

$$\Lambda_n^{\alpha i} = 0, \quad (8)$$

где $\alpha = 1, 2, \dots, n-1$, $i = 0, 1, \dots, m$ и n фиксировано.

Выберем репер также так, чтобы плоскости $A_0 \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_m \wedge A_{m+1}$, $A_0 \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_m \wedge A_{m+2}$, $\dots$, $A_0 \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_m \wedge A_n$ совместились с $(m+1)$ -мерными характеристическими плоскостями, совпадающими с касательными плоскостями $n-m$ различных торсов. Общую $(m-1)$ -мерную характеристическую плоскость этих торсов совместим с плоскостью $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_m$. Ввиду этого из (5) получим, что

$$\Lambda_p^{\alpha 0} = 0, \quad (9)$$

где $\alpha = 1, 2, \dots, n-1$ и $p = m+1, m+2, \dots, n$.

Специализация репера позволяет выбрать линейные дифференциальные формы ω_0^p и формы ω_i^n в качестве базисных на комплексе $C^\rho(1, 1)$. Дополним данные линейные формы до базиса комплекса $C^\rho(1, 1)$ линейными формами Θ^τ , где $\tau = 1, 2, \dots, \rho - n = m(n-m-1) + 1 - n$.

Рассмотрим комплексы $C^\rho(1, 1)$, которые ввиду специализации репера определяются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\Lambda_r^{\alpha k} \omega_k^r = 0, \quad (10)$$

где $\alpha = 1, 2, \dots, n-1$, $k = 1, 2, \dots, m$, $r = m+1, m+2, \dots, n-1$. Уравнения (10) можно записать в параметрическом виде:

$$\omega_k^r = \lambda_{k\tau}^r \Theta^\tau. \quad (11)$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (10), получим независимые квадратичные уравнения:

$$d\Lambda_r^{\alpha k} \wedge \omega_k^r + \Lambda_r^{\alpha k} (\omega_k^0 \wedge \omega_0^r + \omega_k^l \wedge \omega_l^r + \omega_k^s \wedge \omega_s^r + \omega_k^n \wedge \omega_n^r) = 0, \quad (12)$$

где $k, l = 1, 2, \dots, m$; $r, s = m+1, m+2, \dots, n-1$. Ввиду (11) будем иметь

$$(\lambda_{k\tau}^r d\Lambda_r^{\alpha k} + \lambda_{l\tau}^r \Lambda_r^{\alpha k} \omega_k^l - \lambda_{k\tau}^s \Lambda_r^{\alpha k} \omega_s^r) \wedge \Theta^\tau + \Lambda_r^{\alpha k} \omega_k^0 \wedge \omega_0^r - \Lambda_r^{\alpha k} \omega_n^r \wedge \omega_k^n = 0. \quad (13)$$

Отсюда находим

$$\omega_k^0 = 0 \pmod{\Theta^\tau}, \quad \omega_n^k = 0 \pmod{\Theta^\tau}. \quad (14)$$

Дифференцируя внешним образом эти уравнения, получаем

$$\omega_k^n \wedge \omega_n^0 = 0 \pmod{\Theta^\tau}, \quad (15)$$

$$\omega_n^0 \wedge \omega_0^k = 0 \pmod{\Theta^\tau}. \quad (16)$$

Следовательно,

$$\omega_n^0 = 0. \quad (17)$$

Итак, имеем

$$\omega_k^0 = \lambda_{k\tau}^0 \Theta^\tau, \quad \omega_n^r = \lambda_{n\tau}^r \Theta^\tau, \quad \omega_n^0 = \lambda_{n\tau}^0 \Theta^\tau. \quad (18)$$

Таким образом, m -мерная плоскость $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_m \wedge A_n$ описывает некоторое τ -мерное многообразие, где $\tau = \rho - n = m(n - m - 1) + 1 - n = (m - 1)(n - 1) - m^2$.

Докажем обратное утверждение. Рассмотрим произвольное τ -мерное многообразие m -мерных плоскостей. Точки $A_1, A_2, \dots, A_m, A_n$ поместим в текущую m -мерную плоскость рассматриваемого многообразия. Перемещение m -мерной образующей τ -мерного многообразия определяется формами $\omega_k^0, \omega_k^r, \omega_n^r$, где $k = 1, 2, \dots, m$; $r = m + 1, m + 2, \dots, n - 1$. Поскольку рассматриваемое многообразие представляет собой τ -параметрическое семейство m -мерных плоскостей, формы ω_k^r должны выражаться через τ линейно независимых форм Θ^τ :

$$\omega_k^r = \lambda_{k\tau}^r \Theta^\tau, \quad (19)$$

где $\tau = 1, 2, \dots, (m - 1)(n - 1) - m^2$. Совокупность m -мерных плоскостей, пересекающих m -мерную плоскость $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_m \wedge A_n$ некоторого τ -мерного многообразия, образует $\rho = (\tau + n)$ -параметрическое семейство. Следовательно, m -мерные плоскости, проходящие через все $(m - 1)$ -мерные плоскости τ -мерного многообразия, образуют ρ -мерный комплекс C^ρ .

Покажем, что построенный комплекс является комплексом $C^\rho(1, 1)$. Поместим вершины $A_0, A_1, \dots, A_m$ в текущую m -мерную плоскость комплекса C^ρ . Тогда, исключая из дифференциальных уравнений (19) формы Θ^τ , получим $m(n - m - 1) - \tau = n - 1$ линейных однородных уравнений, связывающих формы ω_k^r , которые можно записать в виде

$$\Lambda_r^{\alpha k} \omega_k^r = 0. \quad (20)$$

где $\alpha = 1, 2, \dots, n - 1$, $k = 1, 2, \dots, m$, $r = m + 1, m + 2, \dots, n - 1$. Отсюда следует, что выполняются соотношения (8) и (9). Значит, построенный комплекс является комплексом $C^\rho(1, 1)$.

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. Комплекс C^ρ m -мерных плоскостей проективного пространства P^n , содержащий конечное число торсов, является комплексом $C^\rho(1, 1)$ тогда и только тогда, когда его m -мерные образующие пересекают m -мерные плоскости некоторого $((m - 1)(n - 1) - m^2)$ -мерного многообразия по $(m - 1)$ -мерным плоскостям.

Изображение комплексов $C^\rho(1, 1)$ на алгебраическом многообразии $\Omega(m, n)$ выясняет следующая теорема.

Теорема 2. Комплекс C^ρ m -мерных плоскостей проективного пространства P^n , содержащий конечное число торсов, является комплексом $C^\rho(1, 1)$ тогда и только тогда, когда для каждой его m -мерной образующей пересечение плоскости $PT_l V^\rho$ с многообразием Сегре $S_l(m, n - m - 1)$ содержит α -образующую и β -образующую многообразия $S_l(m, n - m - 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть комплекс C^ρ является комплексом $C^\rho(1, 1)$. Выбирая специальным образом репер, уравнения комплекса, а следовательно, и соответствующей плоскости $PT_l V^\rho$ пространства $P^{(n-m)(m+1)-1}$

$= PT_l\Omega(m, n)$ можно привести к виду (10) или к параметрическим уравнениям вида (11). Пересечение плоскости PT_lV^ρ и многообразия Сегре $S_l(m, n - m - 1)$ определяется условием

$$\omega_i^p \omega_j^q - \omega_i^q \omega_j^p = 0. \quad (21)$$

где формы ω_0^p ($p = m, m + 1, \dots, n - 1$) и ω_i^n ($i = 0, \dots, m$) являются базисными на комплексе $C^\rho(1, 1)$ и при этом формы ω_k^r ($k = 1, \dots, m, r = m + 1, \dots, n - 1$) удовлетворяют уравнениям (20) и выражаются через τ базисных форм Θ^τ ($\tau = 1, 2, \dots, m(n - m - 1) + 1$). Поскольку формы ω_0^p , ω_i^n и Θ^τ являются однородными координатами произвольной точки плоскости PT_lV^ρ , получим, что m -мерная плоскость, лежащая в плоскости PT_lV^ρ и определяемая уравнениями

$$\omega_0^p = 0, \quad \Theta^\tau = 0, \quad (22)$$

принадлежит многообразию Сегре $S_l(m, n - m - 1)$. Такая m -мерная плоскость совпадает с α -образующей многообразия $S_l(m, n - m - 1)$, заданной уравнениями

$$\omega_k^p = 0. \quad (23)$$

Поскольку формы ω_0^p , ω_i^n и Θ^τ являются однородными координатами произвольной точки плоскости PT_lV^ρ , получим, что $(n - m - 1)$ -мерная плоскость, лежащая в плоскости PT_lV^ρ и определяемая уравнениями

$$\omega_i^n = 0, \quad \Theta^\tau = 0, \quad (24)$$

принадлежит многообразию Сегре $S_l(m, n - m - 1)$. Такая $(n - m - 1)$ -мерная плоскость совпадает с β -образующей многообразия $S_l(m, n - m - 1)$, заданной уравнениями

$$\omega_i^r = 0. \quad (25)$$

Докажем обратное утверждение. Пусть пересечение плоскости PT_lV^ρ и многообразия $S_l(m, n - m - 1)$ содержит α -образующую многообразия $S_l(m, n - m - 1)$, определяемую уравнениями (23). Предположим, что точка A_0 является неособой, т. е. формы ω_0^p линейно независимы и их можно принять за $m + 1$ из $\rho = m(n - m - 1) + 1$ однородных координат произвольной точки плоскости PT_lV^ρ . Плоскость PT_lV^ρ в пространстве $P^{(n-m)(m+1)-1} = PT_l\Omega(m, n)$ определяется уравнениями

$$\Lambda_p^{\alpha i} \omega_i^p = 0, \quad (26)$$

где $\alpha = 1, 2, \dots, n - 1$, $i = 0, 1, \dots, m$, $p = m + 1, m + 2, \dots, n$. Поскольку рассматриваемая α -образующая многообразия $S_l(m, n - m - 1)$ лежит в данной плоскости, уравнения (26) должны выполняться тождественно в силу (23). Подставляя (23) в (26), получим

$$\Lambda_p^{\alpha 0} \omega_0^p = 0. \quad (27)$$

Так как формы ω_0^p линейно независимы, из уравнений (27) следует:

$$\Lambda_p^{\alpha 0} = 0. \quad (28)$$

Пусть пересечение плоскости $PT_l V^\rho$ и многообразия $S_l(m, n - m - 1)$ содержит β -образующую многообразия $S_l(m, n - m - 1)$, определяемую уравнениями (25). Предположим, что гиперплоскость $A_0 \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_{n-1}$ неособая, т. е. формы ω_i^n линейно независимы и их можно принять за $n - m$ из $\rho = m(n - m - 1) + 1$ однородных координат произвольной точки плоскости $PT_l V^\rho$. Плоскость $PT_l V^\rho$ в пространстве $P^{(n-m)(m+1)-1} = PT_l \Omega(m, n)$ определяется уравнениями

$$\Lambda_p^{\alpha i} \omega_i^p = 0, \quad (29)$$

где $\alpha = 1, 2, \dots, n - 1$, $i = 0, 1, \dots, m$, $p = m + 1, m + 2, \dots, n$. Поскольку рассматриваемая β -образующая многообразия $S_l(m, n - m - 1)$ лежит в данной плоскости, уравнения (29) должны выполняться тождественно в силу (25). Подставляя (25) в (29), получим

$$\Lambda_n^{\alpha i} \omega_i^n = 0. \quad (30)$$

Так как формы ω_0^p линейно независимы, из уравнений (30) следует, что

$$\Lambda_n^{\alpha i} = 0. \quad (31)$$

Очевидно, что соотношения (28) и (31) совпадают с соотношениями (8) и (9). Следовательно, комплекс C^ρ является комплексом $C^\rho(1, 1)$. Теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Akivis M. A., Goldberg V. V. Projective differential deometry of submanifolds. Amsterdam: North-Holland, 1993.
2. Акивис М. А., Гольдберг В. В. Многообразия с вырожденным гауссовым отображением с кратными фокусами и скрученные конусы // Изв. вузов. Математика. 2003. № 11. С. 3–14.
3. Akivis M. A., Goldberg V. V. Differential geometry of varieties with degenerate Gauss map. New York: Springer-Verl., 2004.
4. Akivis M. A., Goldberg V. V. Conformal differential geometry and its generalizations. New York: John Wiley & Sons, 2011.
5. Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г., Граев М. И. Избранные задачи интегральной геометрии. М.: Добросвет. 2007.
6. Нерсисян В. А. Допустимые комплексы трехмерных плоскостей проективного пространства P^6 . I // Уч. зап. ЕГУ. Сер. Физика и Математика. 2002. Вып. 1. С. 34–38.
7. Нерсисян В. А. Допустимые комплексы трехмерных плоскостей проективного пространства P^6 . II // Уч. зап. ЕГУ. Сер. Физика и Математика. 2001. Вып. 3. С. 35–39.
8. Макоха А. Н. Геометрическая конструкция линейного комплекса плоскостей B_3 // Изв. вузов. Математика. 2018. № 11. С. 15–26.
9. Стеганцева П. Г., Гречнева М. А. Грассманов образ неизотропной поверхности псевдоевклидова пространства // Изв. вузов. Математика. 2017. № 2. С. 65–75.
10. Арнольд В. И. Комплексный лагранжев грассманиан // Функцион. анализ и его прил. 2000. Т. 34, вып. 3. С. 63–65.
11. Арнольд В. И. Лагранжев грассманиан кватернионного гиперсимплектического пространства // Функцион. анализ и его прил. 2001. Т. 35, вып. 1. С. 74–77.
12. Arkani-Hamed N., Bourjaily J. L., Cachazo F., Goncharov A. B., Postnikov A., Trnka J. Scattering amplitudes and the positive Grassmannian. arXiv:1212.5605v2. 2012.
13. Arkani-Hamed N., Trnka J. The amplituhedron // J. High Energy Phys. 2014. V. 2014, N 10.

14. Бубякин И. В. Геометрия пятимерных комплексов двумерных плоскостей. Новосибирск: Наука, 2001.
15. Бубякин И. В. О строении пятимерных комплексов двумерных плоскостей проективного пространства P^5 с единственным торсом // Мат. заметки СВФУ. 2017. Т. 24, № 2. С. 3–12.
16. Бубякин И. В. О строении комплексов m -мерных плоскостей проективного пространства, содержащих конечное число торсов // Мат. заметки СВФУ. 2017. Т. 24, № 4. С. 3–16.
17. Бубякин И. В. О строении некоторых комплексов m -мерных плоскостей проективного пространства, содержащих конечное число торсов. I // Мат. заметки СВФУ. 2019. Т. 26, № 2. С. 1–14.
18. Bubyakin I. V. To geometry of complexes of m -dimensional planes in projective space P^n , containing a finite number of developable surfaces // Классическая и современная геометрия: мат. Междунар. конф., посв. 100-летию В. Т. Базылева (Москва, 22–25 апреля 2019 г.) (под ред. А. В. Царева). М.: МГПУ, 2019. С. 17–18.
19. Бубякин И. В. О строении некоторых комплексов m -мерных плоскостей проективного пространства, содержащих конечное число торсов. II // Мат. заметки СВФУ. 2019. Т. 26, № 4. С. 14–24.
20. Akivis M. A. On the differential geometry of a Grassmann manifold // Tensor. 1982. V. 38. P. 273–282.
21. Акивис М. А. Ткани и почти грассмановы структуры // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23, № 6. С. 6–15.
22. Room T. G. The geometry of determinantal loci. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1938.
23. Landsberg J. M. Algebraic geometry and projective differential geometry. Seoul: Seoul Nat. Univ., 1997 (Lect. Notes Ser., Seoul; V. 45).

Поступила в редакцию 23 июня 2021 г.

После доработки 2 сентября 2021 г.

Принята к публикации 26 ноября 2021 г.

Бубякин Игорь Витальевич
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891
bubyakiniv@mail.ru

Гоголева Ирина Васильевна
Арктический государственный агротехнологический университет,
инженерный факультет,
Сергеляхское шоссе 3 км, 3, Якутск 677007
ivgogoleva61@yandex.ru

ON DIFFERENTIAL GEOMETRY
OF ρ -DIMENSIONAL COMPLEXES
 $C^\rho(1, 1)$ OF m -DIMENSIONAL PLANES
OF THE PROJECTIVE SPACE P^n

I. V. Bubyakin and I. V. Gogoleva

Abstract: The article focuses on differential geometry of ρ -dimensional complexes C^ρ of m -dimensional planes in the projective space P^n that contain a finite number of developable surfaces for which $n - m$ different developable surfaces have one common $(m+1)$ -dimensional tangent plane to the developable surface. At the same time, the same $n - m$ different developable surfaces have one common characteristic $(m-1)$ -dimensional plane common for two infinitely close generatrices of the developable surface. This article relates to researches on projective differential geometry based on the Cartan moving frame method and the method of exterior differential forms. These methods make it possible to study the differential geometry of submanifolds of different dimensions of a Grassmann manifold from a single viewpoint, as well as to extend the results to wider classes of manifolds of multidimensional planes. To study such submanifolds, we apply the Grassmann map of the manifold $G(m, n)$ onto the $(m+1)(n-m)$ -dimensional algebraic manifold $\Omega(m, n)$ of the space P^N , where $N = \binom{n+1}{m+1} - 1$.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.25.88.001

Keywords: Grassmann manifold, complexes of multidimensional planes, Segre manifold.

REFERENCES

1. Akivis M. A. and Goldberg V. V., Projective Differential Geometry of Submanifolds, North-Holland, Amsterdam (1993).
2. Akivis M. A. and Goldberg V. V., "Varieties with a degenerate Gauss map with multiple foci, and twisted cones," Russ. Math., **47**, No. 11, 1–11 (2003).
3. Akivis M. A. and Goldberg V. V., Differential Geometry of Manifolds with Degenerate Gauss Map, Springer-Verl., New York (2004).
4. Akivis M. A. and Goldberg V. V., Conformal Differential Geometry and Its Generalizations, John Wiley & Sons, New York (2011).
5. Gelfand I. M., Gindikin S. G., and Graev M. I., Selected Problems of Integral Geometry [in Russian], Dobrosvet, Moscow (2007).
6. Nersesyan V. A., "Permissible complexes of three-dimensional planes of projective space P^6 , I [in Russian]," Uch. Zap. Erevan. Gos. Univ., Fiz. Mat., **1**, 34–38 (2002).
7. Nersesyan V. A., "Permissible complexes of three-dimensional planes of projective space P^6 , II [in Russian]," Uch. Zap. Erevan. Gos. Univ., Fiz. Mat., **3**, 35–39 (2002).
8. Makokha A. N., "The geometric construction of linear complex of the planes B_3 ," Russ. Math., No. 11, 15–26 (2018).
9. Stegantseva P. G. and Grechneva M. A., "Grassmann image of non-isotropic surface of pseudo-Euclidean space," Russ. Math., No. 2, 65–75 (2017).

10. Arnold V. I., "The complex Lagrangian Grassmannian," *Funct. Anal. Appl.*, **34**, No. 3, 63–65 (2000).
11. Arnold V. I., "Lagrangian Grassmannian of quaternion hypersymplectic space," *Funct. Anal. Appl.*, **35**, No. 1, 74–77 (2001).
12. Arkani-Hamed N., Bourjaily J. L., Cachazo F., Goncharov A. B., Postnikov A., and Trnka J., "Scattering amplitudes and the positive Grassmannian," arXiv:1212.5605v2 (2012).
13. Arkani-Hamed N. and Trnka J., "The amplituhedron," *J. High Energy Phys.*, No. 10 (2014).
14. Bubyakin I. V., *Geometry of Five-Dimensional Complexes of Two-Dimensional Planes* [in Russian], Nauka, Novosibirsk (2001).
15. Bubyakin I. V., "About the structure of five-dimensional complexes of two-dimensional planes of the projective space P^5 with a single developable surface [in Russian]," *Mat. Zamet. SVFU*, **24**, No. 2, 3–12 (2017).
16. Bubyakin I. V., "About the structure of complexes of m -dimensional planes in projective space P^n containing a finite number of developable surfaces [in Russian]," *Mat. Zamet. SVFU*, **24**, No. 4, 3–16 (2017).
17. Bubyakin I. V., "On the structure of some complexes of m -dimensional planes of in the projective space P^n containing a finite number of developable surfaces, I [in Russian]," *Mat. Zamet. SVFU*, **26**, No. 2, 3–16 (2019).
18. Bubyakin I. V., "To geometry of complexes of m -dimensional planes in the projective space P^n containing a finite number of developable surfaces [in Russian]," in: *Int. Conf. Mat. "Classical and modern geometry" in honor of V. T. Bazylev's 100th anniv. (Moscow, Apr. 22–25, 2019)* (A. V. Tsarev, ed.), pp. 17–18, Mosk. Gos. Pedagog. Univ., Moscow (2019).
19. Bubyakin I. V., "On the structure of some complexes of m -dimensional planes of in the projective space P^n containing a finite number of developable surfaces, II [in Russian]," *Mat. Zamet. SVFU*, **26**, No. 4, 14–24 (2019).
20. Akivis M. A., "On the differential geometry of a Grassmann manifold," *Tensor*, **38**, 273–282 (1982).
21. Akivis M. A., "Tissues and almost Grassmann structures," *Sib. Math. J.*, **23**, No. 6, 6–15 (1982).
22. Room T. G., *The Geometry of Determinantal Loci*, Camb. Univ. Press, Cambridge (1938).
23. Landsberg J. M., *Algebraic Geometry and Projective Differential Geometry*, Lect. Notes Ser., Seoul, **45**, Seoul Nat. Univ., Seoul (1999).

Submitted June 23, 2021

Revised September 2, 2021

Accepted November 26, 2021

Igor V. Bubyakin

Amnosov North-Eastern Federal University,

Institute of Mathematics and Informatics,

48 Kulakovskiy Street, Yakutsk 677891, Russia

bubyakiniv@mail.ru

Irina V. Gogoleva

Arctic State Agrotechnological University, Faculty of Engineering,

3, Sergelyakhskoye Shosse 3 km, Yakutsk 677007, Russia

ivgogoleva61@yandex.ru

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. И. Григорьева

Аннотация. Изучается разрешимость задачи Дирихле для дифференциальных уравнений составного (соболевского) типа вида

$$D_t [(-1)^p D_t^{2p+1} u - h(x)u_{xx}] + a(x)u_{xx} + c(x, t)u = f(x, t)$$

в области $Q = \{(x, t) : x \in (-1, 0) \cup (0, 1), t \in (0, T), 0 < T < +\infty\}$ ($p \geq 1$ целое, $D_t^k = \frac{\partial^k}{\partial t^k}$, $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$). Особенностью рассматриваемых уравнений является то, что коэффициенты $h(x)$ и $a(x)$ в нем могут иметь разрыв первого рода при переходе через точку $x = 0$. Помимо обычных граничных условий Дирихле в изучаемой задаче задаются также условия сопряжения на линии $x = 0$. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных (имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение) решений.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.56.53.002

Ключевые слова: дифференциальные уравнения составного типа, задача Дирихле, разрывные коэффициенты, регулярные решения, существование, единственность.

1. Введение

Работа посвящена исследованию разрешимости краевой задачи с данными Дирихле и дополнительными условиями сопряжения для дифференциальных уравнений составного (соболевского) типа вида

$$D_t [(-1)^p D_t^{2p+1} u - h(x)u_{xx}] + a(x)u_{xx} + c(x, t)u = f(x, t) \quad (1)$$

($D_t^k = \frac{\partial^k}{\partial t^k}$, $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $p \geq 0$ целое) с коэффициентами $h(x)$ и $a(x)$, имеющими, быть может, разрыв первого рода в некоторой внутренней точке своей области определения.

Краевые задачи для дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами достаточно хорошо изучены для классических уравнений эллиптического, параболического и гиперболического типов [1–5], для уравнений смешанного типа [6–12]; из работ последнего времени по близкой к настоящей работе

Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (НИР No. FSRG–2020–0006).

тематике отметим работы [13–16]. Краевые задачи для неклассических дифференциальных уравнений (уравнений составного типа, уравнений с кратными характеристиками, уравнений с меняющимся направлением эволюции и т.п.) с разрывными коэффициентами исследованы в значительно меньшей степени; из работ, схожих с данной статьей по постановке задач и технике их исследования и посвященных теории краевых задач для неклассических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами, выделим работы [17–32].

Дифференциальные уравнения (1) в случае $p = 0$ и с непрерывными коэффициентами в некоторых источниках [33–35] называют псевдогиперболическими уравнениями. Для таких уравнений (т. е. уравнений (1) при $p = 0$) будет корректна классическая начально-краевая задача, но вместе с тем может быть корректна и классическая задача Дирихле.

Именно задача Дирихле, но для более общих уравнений — при $p \geq 0$ и в случае разрывных коэффициентов — и будет предметом исследования в настоящей работе.

Уточним, что целью работы будет доказательство существования и единственности регулярных решений — решений, имеющих в областях непрерывности коэффициентов все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение.

2. Постановка задачи

Пусть x — точка отрезка $[-1, 1]$ оси Ox , t — точка отрезка $[0, T]$, $0 < T < \infty$, Q_1 , Q_2 и Q — цилиндры $(-1, 0) \times (0, T)$, $(0, 1) \times (0, T)$ и $(-1, 1) \times (0, T)$ соответственно, $c(x, t)$ и $f(x, t)$ — функции, определенные при $(x, t) \in \overline{Q}$, $h(x)$, $a(x)$ — заданные функции, определенные при $x \in [-1, 1]$ и, быть может, имеющие разрыв 1-го рода при $x = 0$, α , β — заданные действительные числа.

Краевая задача. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндрах Q_1 и Q_2 решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия

$$u(-1, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (2)$$

$$D_t^k u(x, t)|_{t=0} = 0, \quad k = 0, \dots, p, \quad x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \quad (3)$$

$$D_t^k u(x, t)|_{t=T} = 0, \quad k = 0, \dots, p, \quad x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \quad (4)$$

а также условия сопряжения

$$u(-0, t) = \alpha u(+0, t), \quad u_x(+0, t) = \beta u_x(-0, t), \quad t \in (0, T). \quad (5)$$

Определим необходимые функциональные пространства V_1 , V_2 и V :

$$V_i = \left\{ v(x, t) : \int_{Q_i} (v^2 + v_{xxt}^2 + (D_t^{2p+2} v)^2) dx dt < +\infty \right\}, \quad i = 1, 2,$$

$$V = \{ v(x, t) : v(x, t) \in V_1, \quad v(x, t) \in V_2 \}$$

(все производные понимаются как обобщенные производные по С. Л. Соболеву). Норму в этих пространствах зададим равенствами

$$\|v\|_{V_i} = \left\{ \int_{Q_i} (v^2 + v_{xxt}^2 + (D_t^{2p+2}v)^2) dxdt \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \|v\|_V = \|v\|_{V_1} + \|v\|_{V_2}.$$

Очевидно, что пространства V_1 , V_2 и V с этими нормами будут банаховыми пространствами.

3. Разрешимость краевой задачи

Пусть

$$h_1(x) = \begin{cases} h(x) & \text{при } x \in [-1, 0), \\ \lim_{x \rightarrow -0} h(x) & \text{при } x = 0, \end{cases} \quad h_2(x) = \begin{cases} h(x) & \text{при } x \in (0, 1], \\ \lim_{x \rightarrow +0} h(x) & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

$$a_1(x) = \begin{cases} a(x) & \text{при } x \in [-1, 0), \\ \lim_{x \rightarrow -0} a(x) & \text{при } x = 0, \end{cases} \quad a_2(x) = \begin{cases} a(x) & \text{при } x \in (0, 1], \\ \lim_{x \rightarrow +0} a(x) & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

и

$$h_{01} = \max_{x \in [-1, 0]} |h'_1(x)|, \quad h_{02} = \max_{x \in [0, 1]} |h'_2(x)|.$$

Заметим, что для функций $u(x, t) \in V_1$ и $u(x, t) \in V_2$ справедливы неравенства

$$\int_{Q_i} u_t^2 dxdt \leq \left(\frac{T}{\pi} \right)^{2p} \int_{Q_i} (D_t^{p+1}u)^2 dxdt, \quad i = 1, 2, \quad (6)$$

при условии, что $D_t^k u(x, t)|_{t=0} = 0$, $k = 0, \dots, p$.

Исследуем вопрос о единственности решений краевой задачи (2)–(5).

Теорема 1. Пусть

$$\alpha\beta h(-0)h(+0) > 0, \quad (7)$$

$$h_1(x) \in C^1([-1, 0]), \quad h_2(x) \in C^1([0, 1]), \quad (8)$$

$$a_1(x) \in C^2([-1, 0]), \quad a_2(x) \in C^2([0, 1]), \quad c(x, t) \in C^1(\overline{Q}), \quad t \in (0, T),$$

$$a''(x) + 2c(x, t) \leq 0, \quad x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \quad t \in (0, T), \quad (9)$$

$$a'(-0) \geq 0, \quad a'(+0) \leq 0, \quad (10)$$

$$h(+0)a(-0) = h(-0)a(+0). \quad (11)$$

Пусть также существует число $\delta_0 > 0$ такое, что

$$2\delta_0^2 a(x) - h_{01}^2 \geq 0, \quad x \in [-1, 0], \quad 2\delta_0^2 a(x) - h_{02}^2 \geq 0, \quad x \in (0, 1], \quad (12)$$

$$\delta_0^2 T^{2p} \leq 2\pi^{2p}. \quad (13)$$

Тогда краевая задача (2)–(5) может иметь не более одного решения в пространстве V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma = \frac{\alpha h(-0)}{\beta h(+0)}$, и пусть в уравнении (1) выполняется $f(x, t) \equiv 0$. Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} & \int_{Q_1} \left(\frac{\partial}{\partial t} [(-1)^p D_t^{2p+1} u - h(x) u_{xx}] + a(x) u_{xx} + c(x, t) u \right) (-u) dx dt + \\ & + \int_{Q_2} \left(\frac{\partial}{\partial t} [(-1)^p D_t^{2p+1} u - h(x) u_{xx}] + a(x) u_{xx} + c(x, t) u \right) (-\gamma u) dx dt = 0, \end{aligned}$$

которое посредством интегрирования по частям, а также в силу условий (2)–(5) приводится к виду

$$\begin{aligned} & \int_{Q_1} (D_t^{p+1} u)^2 dx dt + \gamma \int_{Q_2} (D_t^{p+1} u)^2 dx dt + \int_{Q_1} a(x) u_x^2 dx dt + \gamma \int_{Q_2} a(x) u_x^2 dx dt \\ & - \int_{Q_1} \left[\frac{a''(x)}{2} + c(x, t) \right] u^2 dx dt - \gamma \int_{Q_2} \left[\frac{a''(x)}{2} + c(x, t) \right] u^2 dx dt \\ & + \frac{1}{2} \int_0^T a'(-0) u^2(-0, t) dt - \frac{\gamma}{2} \int_0^T a'(+0) u^2(+0, t) dt \\ & + \int_{Q_1} h'(x) u_x u_t dx dt + \gamma \int_{Q_2} h'(x) u_x u_t dx dt = 0. \quad (14) \end{aligned}$$

Применим неравенства Гёльдера и Юнга к последним двум слагаемым левой части (14):

$$\begin{aligned} & \left| \int_{Q_1} h'(x) u_x u_t dx dt \right| \leq \frac{\delta_0^2}{2} \int_{Q_1} u_t^2 dx dt + \frac{h_{01}^2}{2\delta_0^2} \int_{Q_1} u_x^2 dx dt, \\ & \left| \int_{Q_2} h'(x) u_x u_t dx dt \right| \leq \frac{\delta_0^2}{2} \int_{Q_2} u_t^2 dx dt + \frac{h_{02}^2}{2\delta_0^2} \int_{Q_2} u_x^2 dx dt. \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда из равенства (14) в силу (15), а также неравенства (6) и условий (7)–(13) функция $u(x, t)$ будет тождественно равна нулю. Это означает, что краевая задача (2)–(5) будет иметь не более одного решения в пространстве V .

Теорема доказана.

Перейдем к доказательству существования решения рассматриваемой краевой задачи. Пусть

$$\alpha_1 = \frac{\alpha a(+0)}{a(-0)}, \quad \beta_1 = \frac{\beta a(-0)}{a(+0)}.$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия (7)–(13) и условия

$$\begin{aligned} c(x, t) \in C^1([-1, 0)) \cup C^1((0, 1]), \quad c(-0, t) = c(+0, t), \quad 0 \leq c_x(x, t) \leq c_0, \\ c_x(+0, t) \geq 0, \quad c_x(-0, t) \leq 0, \quad x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \quad t \in (0, T). \end{aligned} \quad (16)$$

Пусть также существует число $\delta_1 > 0$ такое, что

$$2\delta_1^2 a(x) \geq h_{01}^2 + c_0^2, \quad 2\delta_1^2 a(x) \geq h_{02}^2 + c_0^2, \quad x \in (-1, 1), \quad t \in (0, T), \quad (17)$$

$$f(-1, t) = f(1, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (18)$$

$$\alpha_1 \beta_1 f_x(-0, t) f(+0, t) = f(-0, t) f_x(+0, t) = 0, \quad t \in (0, T).$$

Тогда краевая задача (2)–(5) имеет решение, принадлежащее пространству V , для любой функции $f(x, t)$, $f_{xx}(x, t)$ из пространства $L_2(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале воспользуемся методом регуляризации. Рассмотрим следующую краевую задачу: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в Q решением уравнения

$$L_\varepsilon u = D_t [(-1)^p D_t^{2p+1} u - h(x) u_{xx}] + a(x) u_{xx} + c(x, t) u - \varepsilon u_{xxxx} = f(x, t), \quad (19)$$

где ε — положительное число, и для которой выполняются условия (2)–(5) и условия

$$u_{xx}(-1, t) = u_{xx}(1, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (20)$$

$$u_{xx}(-0, t) = \alpha_1 u_{xx}(+0, t), \quad u_{xxx}(+0, t) = \beta_1 u_{xxx}(-0, t), \quad t \in (0, T). \quad (21)$$

Пусть V_0 — линейное пространство,

$$V_0 = \{v(x, t) : v(x, t) \in V, \quad v_{xxxx}(x, t) \in L_2(Q_1), \quad v_{xxxx}(x, t) \in L_2(Q_2)\}$$

с нормой

$$\|v\|_{V_0} = \left(\|v\|_V^2 + \int_{Q_1} v_{xxxx}^2 dx dt + \int_{Q_2} v_{xxxx}^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Нужно показать, что регуляризованная краевая задача при фиксированном ε разрешима в пространстве V_0 для любой функции $f(x, t)$ из пространства $L_2(Q)$.

Воспользуемся методом продолжения по параметру [36, гл. III, § 14]. Возьмем число λ из отрезка $[0, 1]$ и рассмотрим семейство краевых задач: найти решение уравнения (19) такое, что для него выполняются условия (2)–(4), (20), (21), а также условия

$$u(-0, t) = \lambda \alpha u(+0, t), \quad u_x(+0, t) = \lambda \beta u_x(-0, t), \quad t \in (0, T), \quad (22)$$

$$u_{xx}(-0, t) = \lambda \alpha_1 u_{xx}(+0, t), \quad u_{xxx}(+0, t) = \lambda \beta_1 u_{xxx}(-0, t), \quad t \in (0, T). \quad (23)$$

Воспользуемся далее техникой работы [21]. Заменой

$$w(x, t) = u(x, t) - \lambda \alpha (x+1) u(+0, t) - \lambda \alpha_1 \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} \right) u_{xx}(+0, t), \quad (x, t) \in Q_1,$$

$$z(x, t) = u(x, t) - \lambda \beta (x-1) u_x(-0, t) - \lambda \beta_1 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \right) u_{xxx}(-0, t), \quad (x, t) \in Q_2,$$

уравнение (19) нетрудно преобразовать в систему двух дифференциальных уравнений с «нагруженными» слагаемыми, но при этом для самих функций $w(x, t)$ и $z(x, t)$ будут выполняться однородные граничные условия, естественные для эллиптических краевых задач. Разрешимость при $\lambda = 0$ в пространстве V_0 соответствующих краевых задач имеет место, и для разрешимости этих же задач в пространстве V_0 при $\lambda \in [0, 1]$ достаточно будет установить равномерную по λ оценку в $L_2(Q)$ всех слагаемых, входящих в уравнение для функций $w(x, t)$ и $z(x, t)$ (см. [36]). Искомая оценка будет иметь место, если для любых решений задачи (19), (2)–(4), (20)–(23) из пространства V_0 будет справедлива оценка

$$\|u\|_{V_0} \leq N \|f\|_{L_2(Q)} \quad (24)$$

с постоянной N , определяющейся функциями $h(x)$, $a(x)$, $c(x, t)$, а также числами α и β .

Покажем, что требуемая оценка (24) действительно имеет место.

Рассмотрим равенство

$$\int_{Q_1} Lu_\varepsilon \cdot (-u) dxdt + \gamma \int_{Q_2} Lu_\varepsilon \cdot (-u) dxdt = \int_{Q_1} f \cdot (-u) dxdt + \gamma \int_{Q_2} f \cdot (-u) dxdt.$$

Повторяя выкладки, выполненные при анализе равенства (14), и применяя неравенства Гёльдера и Юнга, а также используя неравенства (16) и условия (7)–(12) и (18), получим оценку

$$\begin{aligned} \int_{Q_1} (D_t^{p+1}u)^2 dxdt + \int_{Q_2} (D_t^{p+1}u)^2 dxdt + \int_{Q_1} u^2 dxdt + \int_{Q_2} u^2 dxdt \\ + \varepsilon \int_{Q_1} u_{xx}^2 dxdt + \varepsilon \int_{Q_2} u_{xx}^2 dxdt \leq M_1 \|f\|_{L_2(Q)}^2, \end{aligned} \quad (25)$$

где M_1 определяется функциями $h(x)$, $a(x)$, $c(x, t)$ и числами α и β .

Теперь рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} \int_{Q_1} Lu_\varepsilon \cdot (-u_{xxx}) dxdt + \gamma \int_{Q_2} Lu_\varepsilon \cdot (-u_{xxx}) dxdt \\ = \int_{Q_1} f \cdot (-u_{xxx}) dxdt + \gamma \int_{Q_2} f \cdot (-u_{xxx}) dxdt. \end{aligned}$$

Применяя интегрирование по частям и используя условия (2)–(5), получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} \int_{Q_1} (D_t^{p+1}u_{xx})^2 dxdt + \gamma \int_{Q_2} (D_t^{p+1}u_{xx})^2 dxdt + \int_{Q_1} a(x)u_{xxx}^2 dxdt + \gamma \int_{Q_2} a(x)u_{xxx}^2 dxdt \\ - \frac{1}{2} \int_{Q_1} a''(x)u_{xx}^2 dxdt - \frac{\gamma}{2} \int_{Q_2} a''(x)u_{xx}^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_0^T a'(-0)u_{xx}^2(-0, t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\gamma}{2} \int_0^T a'(+0) u_{xx}^2(+0, t) dt + \int_{Q_1} \varepsilon u_{xxxx}^2 dx dt + \gamma \int_{Q_2} \varepsilon u_{xxxx}^2 dx dt \\
& + \int_{Q_1} c_x(x, t) u u_{xxx} dx dt + \gamma \int_{Q_2} c_x(x, t) u u_{xxx} dx dt + \int_{Q_1} c(x, t) u_x u_{xxx} dx dt \\
& + \gamma \int_{Q_2} c(x, t) u_x u_{xxx} dx dt + \int_{Q_1} h'(x) u_{xxt} u_{xxx} dx dt + \gamma \int_{Q_2} h'(x) u_{xxt} u_{xxx} dx dt \\
& + \int_{Q_1} f(x, t) u_{xxxx} dx dt + \gamma \int_{Q_2} f(x, t) u_{xxxx} dx dt = 0.
\end{aligned}$$

Применяя неравенства Гёльдера и Юнга, а также условия (7)–(13), (16)–(18), получим оценку

$$\begin{aligned}
& \int_{Q_1} (D_t^{p+1} u_{xx})^2 dx dt + \int_{Q_2} (D_t^{p+1} u_{xx})^2 dx dt + \int_{Q_1} u_x^2 dx dt + \int_{Q_2} u_x^2 dx dt \\
& \int_{Q_1} u_{xxx}^2 dx dt + \int_{Q_2} u_{xxx}^2 dx dt + \varepsilon \int_{Q_1} u_{xxxx}^2 dx dt \\
& + \varepsilon \int_{Q_2} u_{xxxx}^2 dx dt \leq M_2 \|f\|_{L_2(Q)}^2, \quad (26)
\end{aligned}$$

где M_2 определяется функциями $h(x)$, $a(x)$, $c(x, t)$ и числами ε , α и β .

Следующим рассмотрим равенство

$$\begin{aligned}
& \int_{Q_1} Lu_\varepsilon \cdot (A - t)(-1)^p (D_t^{2p+2} u) dx dt + \gamma \int_{Q_2} Lu_\varepsilon \cdot (A - t)(-1)^p (D_t^{2p+2} u) dx dt \\
& = \int_{Q_1} f \cdot (A - t)(-1)^p (D_t^{2p+2} u) dx dt + \gamma \int_{Q_2} f \cdot (A - t)(-1)^p (D_t^{2p+2} u) dx dt,
\end{aligned}$$

где $A > T$. Интегрируя по частям в этом равенстве и применяя условия (2)–(5), а также неравенства Гёльдера и Юнга, условия (7)–(13), (16)–(18), получим оценку

$$\int_{Q_1} (D_t^{2p+2} u)^2 dx dt + \int_{Q_2} (D_t^{2p+2} u)^2 dx dt \leq M_3 \|f\|_{L_2(Q)}^2, \quad (27)$$

где M_3 определяется функциями $h(x)$, $a(x)$, $c(x, t)$ и числами ε , α и β .

Из оценок (25)–(27) следует равномерная по параметру λ оценка (24) для всех решений $u(x, t)$ из пространства V_0 краевой задачи (2)–(4), (20)–(23) при фиксированном ε в пространстве V_0 для любой функции $f(x, t)$ из пространства $L_2(Q)$.

Покажем, что для семейства решений $u_\varepsilon(x, t)$ имеет место априорная оценка, равномерная по ε и такая, что с ее помощью можно будет осуществить предельный переход. Воспользуемся тем, что функция $f(x, t)$ имеет обобщенные

производные по переменной x до второго порядка включительно, принадлежащие пространству $L_2(Q)$. Повторяя по сути доказательство оценок (26) и (27), но в правой части дополнительно интегрируя по частям, для семейства решений $u_\varepsilon(x, t)$ получим новую оценку

$$\begin{aligned}
& \int_{Q_1} (D_t^{p+1} u_\varepsilon)^2 dxdt + \int_{Q_2} (D_t^{p+1} u_\varepsilon)^2 dxdt + \int_{Q_1} (D_t^{p+1} u_{\varepsilon xx})^2 dxdt \\
& + \int_{Q_2} (D_t^{p+1} u_{\varepsilon xx})^2 dxdt + \int_{Q_1} (D_t^{2p+2} u_\varepsilon)^2 dxdt \\
& + \int_{Q_2} (D_t^{2p+2} u_\varepsilon)^2 dxdt + \int_{Q_1} u_\varepsilon^2 dxdt + \int_{Q_2} u_\varepsilon^2 dxdt + \int_{Q_1} u_{\varepsilon x}^2 dxdt + \int_{Q_2} u_{\varepsilon x}^2 dxdt \\
& + \varepsilon \int_{Q_1} u_{\varepsilon xx}^2 dxdt + \varepsilon \int_{Q_2} u_{\varepsilon xx}^2 dxdt + \int_{Q_1} u_{\varepsilon xxx}^2 dxdt + \int_{Q_2} u_{\varepsilon xxx}^2 dxdt \\
& + \varepsilon \int_{Q_1} u_{\varepsilon xxxx}^2 dxdt + \varepsilon \int_{Q_2} u_{\varepsilon xxxx}^2 dxdt \\
& \leq M_0 \left(\int_{Q_1} f^2(x, t) dxdt + \int_{Q_2} f^2(x, t) dxdt + \int_{Q_1} f_{xx}^2(x, t) dxdt + \int_{Q_2} f_{xx}^2(x, t) dxdt \right),
\end{aligned}$$

где M_0 определяется функциями $h(x)$, $a(x)$, $c(x, t)$ и числами α , β .

Из этой оценки и рефлексивности пространства L_2 следует, что существуют последовательности $\{\varepsilon_n\}$ положительных чисел и функция $u(x, t)$ такие, что при $n \rightarrow \infty$ выполняется $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $u_{\varepsilon_n}(x, t) \rightarrow u(x, t)$, $D_t^{p+1} u_{\varepsilon_n xx}(x, t) \rightarrow D_t^{p+1} u_{xx}(x, t)$, $D_t^{2p+2} u_{\varepsilon_n}(x, t) \rightarrow D_t^{2p+2} u(x, t)$ слабо в пространстве $L_2(Q)$. Таким образом, предельная функция $u(x, t)$ будет принадлежать пространству V и будет решением краевой задачи (2)–(5) из требуемого класса.

Теорема доказана.

4. Заключение

В работе получены теоремы существования и единственности регулярных решений краевой задачи с условиями Дирихле и дополнительными условиями сопряжения на внутреннем многообразии для некоторого класса дифференциальных уравнений составного типа. Изучаемые уравнения имеют модельный вид, и нетрудно будет получить результаты, аналогичные представленным выше, для более общих уравнений — например, для уравнений с дополнительными младшими производными, для уравнений со старшими коэффициентами, зависящими и от переменной t , и т. п. Краевые условия в изучаемых задачах также можно «пошевелить» — одно или оба из условий (2) можно заменить условием на производную u_x , и т. д. Наконец, коэффициенты α и β условий сопряжения (5) и (6) могут быть функциями переменной t .

ЛИТЕРАТУРА

1. Олейник О. А. Краевые задачи для линейных уравнений эллиптического и параболического типов с разрывными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1961. Т. 25. С. 3–20.
2. Ильин В. А. О разрешимости задач Дирихле и Неймана для линейного эллиптического оператора с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137, № 1. С. 28–30.
3. Ильин В. А. Метод Фурье для гиперболического уравнения с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1962. Т. 142, № 1. С. 21–24.
4. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
5. Ильин В. А., Шишмарев И. А. Метод потенциалов для задач Дирихле и Неймана в случае уравнения с разрывными коэффициентами // Сиб. мат. журн. 1961. Т. 2, № 1. С. 46–58.
6. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
7. Ладыженская О. А., Ступялис Л. Об уравнениях смешанного типа // Вестн. Ленингр. ун-та. 1967. № 18. С. 38–46.
8. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970.
9. Ладыженская О. А., Ступялис Л. Краевые задачи для уравнений смешанного типа // Тр. МИАН СССР. 1971. Т. 116. С. 101–136.
10. Ступялис Л. Краевые задачи для эллиптико-гиперболических уравнений // Тр. МИАН СССР. 1973. Т. 125. С. 211–229.
11. Джураев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1986.
12. Моисеев Е. И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
13. Рогожников А. М. Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков, при условии совпадения времени прохождения волн по каждому из этих участков // Докл. АН. 2012. Т. 441, № 4. С. 449–451.
14. Кулешов А. А. Смешанные задачи для уравнения продольных колебаний неоднородного стержня со свободным либо закрепленным правым концом, состоящего из двух участков разной плотности и упругости // Докл. АН. 2012. Т. 442, № 4. С. 451–454.
15. Рогожников А. М. Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков с произвольными длинами // Докл. АН. 2012. Т. 444, № 5. С. 488–491.
16. Смирнов И. Н. О колебаниях, описываемых телеграфным уравнением в случае системы, состоящей из нескольких участков разной плотности и упругости // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 49, № 5. С. 643–648.
17. Potapova S. V. Boundary value problems for pseudoparabolic equations with a variable time direction. TWMS // J. Inequal. Pure Appl. Math. 2012. V. 3, N 1. P. 73.
18. Кожанов А. И., Потапова С. В. Задача Дирихле для одного класса уравнений составного типа с разрывным коэффициентом при старшей производной // Дальневост. мат. журн. 2014. Т. 14, № 1. С. 48–65.
19. Кожанов А. И., Шарин Е. Ф. Задача сопряжения для некоторых неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка. II // Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 1. С. 18–28.
20. Кожанов А. И., Потапова С. В. Задача сопряжения для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, со знакопостоянной функцией при старшей производной // Сиб. журн. чистой и прикл. математики. 2015. Т. 15, № 2. С. 51–59.
21. Кожанов А. И., Потапова С. В. Задача сопряжения для дифференциальных уравнений нечетного порядка с двумя временными переменными и с меняющимся направлением эволюции // Докл. АН. 2017. Т. 474, № 6. С. 661–664.
22. Кожанов А. И. Задача сопряжения для одного класса уравнений составного типа переменного направления // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2002. С. 96–109.

23. Шубин В. В. Краевые задачи для уравнений третьего порядка с разрывным коэффициентом // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2012. Т. 12, № 1. С. 126–138.
24. Кожанов А. И., Шарин Е. Ф. Задача сопряжения для некоторых неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка // Укр. мат. вісник. 2014. Т. 11, № 2. С. 181–202.
25. Антипин В. И. Разрешимость краевой задачи для уравнения третьего порядка с меняющимся направлением времени // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, № 1. С. 8–15.
26. Pyatkov S. G., Popov S. V., Antipin V. I. On solvability of boundary value problem for kinetic operator-differential equations // Integral Equ. Operator Theory. 2014. V. 80, N 4. P. 557–580.
27. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. кн., 1998.
28. Kozhanov A. I. Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
29. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroup of operators. Utrecht: VSP, 2003.
30. Hayashi N., Kaikina E. I., Naumkin P. I., Shishmarev I. A. Asymptotic for dissipative nonlinear equations. Berlin: Springer-Verl., 2006.
31. Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
32. Корпусов М. О. Разрушение в неклассических нелокальных уравнениях. М.: Либроком, 2011.
33. Кожанов А. И. Псевдогиперболические и гиперболические уравнения с растущими младшими членами // Вестн. Челяб. гос. ун-та. 1999. Т. 3, № 2. С. 31–47.
34. Потапова С. В. О разрешимости краевых задач для псевдогиперболических уравнений переменного направления времени // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, № 1. С. 108–124.
35. Кожанов А. И., Лукина Г. А. Псевдопараболические и псевдогиперболические уравнения в нецилиндрических по временной переменной областях // Мат. заметки СВФУ. 2019. Т. 26, № 3. С. 31–47.
36. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2007.

Поступила в редакцию 20 октября 2021 г.

После доработки 20 октября 2021 г.

Принята к публикации 26 ноября 2021 г.

Григорьева Александра Ивановна,
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики,
кафедра высшей математики,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891;
Академия наук Республики Саха (Якутия),
пр. Ленина, 33, Якутск 677891
shadrina_ai@mail.ru

THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE HIGHER ORDER COMPOSITE TYPE EQUATIONS WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENTS

A. I. Grigorieva

Abstract: We study the Dirichlet problem for the composite type differential equations

$$D_t [(-1)^p D_t^{2p+1} u - h(x)u_{xx}] + a(x)u_{xx} + c(x, t)u = f(x, t)$$

in the domain $Q = \{(x, t) : x \in (-1, 0) \cup (0, 1), t \in (0, T), 0 < T < +\infty\}$, where $p \geq 1$ is an integer, $D_t^k = \frac{\partial^k}{\partial t^k}$, and $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$. The feature of such equations is that the coefficients $h(x)$ and $a(x)$ can have a discontinuity of the first kind when passing through the point $x = 0$. In addition to the usual Dirichlet boundary conditions, the problem under study also specifies the conjugation conditions on the line $x = 0$. Existence and uniqueness theorems are proved for regular solutions (those having all generalized Sobolev derivatives).

DOI: 10.25587/SVFU.2021.56.53.002

Keywords: differential composite type equations, the Dirichlet problem, blow-up coefficient, regular solution, existence, uniqueness.

REFERENCES

1. Oleinik O. A., "Boundary value problems for linear equations of elliptic and parabolic type with discontinuous coefficients," *Izv. AN USSR. Ser. Math*, **25**, 3–20 (1961).
2. Il'in V. A., "On the solvability of the Dirichlet and Neumann problems for a linear elliptic operator with discontinuous coefficients," *Sov. Math., Dokl.*, **2**, 228–231 (1961).
3. Il'in V. A., "The Fourier method for a hyperbolic equation with discontinuous coefficients," *Sov. Math., Dokl.*, **3**, 12–16 (1962).
4. Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., and Ural'tseva N. N., *Linear and Quasilinear Parabolic Equations* [in Russian], Nauka, Moscow (1967).
5. Ilyin V. A. and Shishmarev I. A., "Potential method for the Dirichlet and Neumann problems in the case of equations with discontinuous coefficients," *Sib. Math. J.*, **2**, No. 1, 46–58 (1961).
6. Bitsadze A. V., *Equations of Mixed Type* [in Russian], Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow (1959).
7. Ladyzhenskaya O. A. and Stupyalis L., "About mixed type equations [in Russian]," *Vestn. Leningrad. Gos. Univ.*, No. 18, 38–46 (1967).
8. Smirnov M. M., *Mixed Type Equations* [in Russian], Nauka, Moscow (1970).
9. Ladyzhenskaya O. A. and Stupyalis L., "Boundary value problems for mixed type equations," *Tr. MIAN USSR*, **116**, 101–136 (1971).
10. Stupyalis L., "Boundary value problems for elliptic-hyperbolic equations," *Tr. MIAN USSR*, **125**, 211–229 (1973).
11. Juraev T. D., *Boundary Value Problems for Equations of Mixed and Mixed-Composite Types* [in Russian], Fan, Tashkent (1986).

12. *Moiseev E. I.*, Mixed Type Equations with a Spectral Parameter [in Russian], Izdat. Moskov. Univ., Moscow (1988).
13. *Rogozhnikov A. M.*, "Study of a mixed problem describing the oscillations of a rod consisting of several segments with arbitrary lengths," *Dokl. Math.*, **85**, No. 3, 399–402 (2012).
14. *Kuleshov A. A.*, "Mixed problems for the equation of longitudinal vibrations of a heterogeneous rod and for the equation of transverse vibrations of a heterogeneous string consisting of two segments with different densities and elasticities," *Dokl. Math.*, **85**, No. 1, 98–101 (2012).
15. *Rogozhnikov A. M.*, "Study of the mixed problem, describing the process of shaft vibrations, consisting of several sections with arbitrary lengths," *Dokl. Math.*, **444**, No. 5, 488–491 (2012).
16. *Smirnov I. N.*, "Oscillations described by the telegraph equation for a system consisting of several sections of different density and elasticity [in Russian]," *Differ. Equ.*, **49**, No. 5, 643–648 (2012).
17. *Potapova S. V.*, "Boundary value problems for pseudoparabolic equations with a variable time direction. TWMS," *J. Inequalities Pure Appl. Math.*, **3**, No. 1, 73 (2012).
18. *Kozhanov A. I. and Potapova S. V.*, "The Dirichlet problem for a class of composite equations type with a discontinuous coefficient of the highest derivative [in Russian]," *Dalnevost. Math. J.*, **14**, No. 1, 48–65 (2014).
19. *Kozhanov A. I. and Sharin E. F.*, "A conjugate problem for some higher order nonclassical equations, II [in Russian]," *Mat. Zamet. SVFU*, **21**, No. 1, 18–28 (2014).
20. *Kozhanov A. I. and Potapova S. V.*, "Conjugate problem for a third order equation with multiple characteristics and a positive function at the higher order derivative," *J. Math. Sci., New York*, **215**, No. 4, 510–516 (2016).
21. *Kozhanov A. I. and Potapova S. V.*, "Transmission problem for odd-order differential equations with two time variables and a varying direction of evolution," *Dokl. Math.*, **95**, No. 3, 267–269 (2017).
22. *Kozhanov A. I.*, "A conjugation problem for a class of composite-type equations of variable direction [in Russian]," in: *Nonclassical Equations of Mathematical Physics*, pp. 96–109, Izdat. Sobolev Inst. Mat., Novosibirsk (2002).
23. *Shubin V. V.*, "Boundary problems for third-order equations with discontinuous coefficients [in Russian]," *Vestn. Novosib. Gos. Univ.*, **12**, No. 1, 126–138 (2012).
24. *Kozhanov A. I. and Sharin E. F.*, "A conjugation problem for some nonclassical differential equations of higher order [in Russian]," *Ukr. Mat. Vestn.*, **11**, No. 2, 181–202 (2014).
25. *Antipin V. I.*, "The solvability of the boundary value problem for a third-order equation with changing time direction [in Russian]," *Mat. Zametki YaGU*, **18**, No. 1, 8–15 (2011).
26. *Pyatkov S. G., Popov S. V., and Antipin V. I.*, "On solvability of boundary value problem for kinetic operator-differential equations," *Integral Equ. Oper. Theory*, **80**, No. 4, 557–580 (2014).
27. *Demidenko G. V.*, *Equations and Systems Which Are Not Solved With Respect To Higher Derivative* [in Russian], Nauch. Kniga, Novosibirsk (1998).
28. *Kozhanov A. I.*, *Composite Type Equations and Inverse Problems*, VSP, Utrecht (1999).
29. *Sviridyuk G. A.*, *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroup of Operators*, VSP, Utrecht (2003).
30. *Hayashi N., Kaikina E. I., Naumkin P. I., and Shishmarev I. A.*, *Asymptotic for Dissipative Nonlinear Equations*, Springer (2006).
31. *Sveshnikov A. G., Al'shin A. B., Korpusov M. O., and Pletner Yu. D.*, *Linear and Nonlinear Equations of Sobolev Type* [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2007).
32. *Korpusov M. O.*, *Blow-up in Non-Classical Non-Local Equations* [in Russian], Librokom, Moscow (2011).
33. *Kozhanov A. I.*, "Pseudo-hyperbolic and hyperbolic equations with growing lower terms [in Russian]," *Vestn. Chelyab. Gos. Univ.*, **3**, No. 5, 31–47 (1999).
34. *Potapova S. V.*, "Boundary value problems for pseudohyperbolic equations with a varying time direction [in Russian]," *Mat. Zametki YaGU*, **18**, No. 1, 108–124 (2011).
35. *Kozhanov A. I. and Lukina G. A.*, "Pseudoparabolic and pseudohyperbolic equations in non-cylindrical time domains [in Russian]," *Mat. Zametki SVFU*, **26**, No. 3, 31–47 (2019).

- 36.** *Trenogin V. A.*, Functional Analysis [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2007).

Submitted October 20, 2021

Revised October 20, 2021

Accepted November 26, 2021

Aleksandra I. Grigorieva
Ammosov North-Eastern Federal University,
Institute of Mathematics and Informatics,
48 Kulakovsky Street, Yakutsk 677000, Russia;
Academy of Sciences of the Republic of Sakha (Yakutia),
33 Lenin Avenue, Yakutsk 677000, Russia
`shadrina_ai@mail.ru`

УРАВНЕНИЕ ЭЙНШТЕЙНА НА ТРЕХМЕРНЫХ
ЛОКАЛЬНО ОДНОРОДНЫХ
(ПСЕВДО)РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ
С ВЕКТОРНЫМ КРУЧЕНИЕМ

П. Н. Клепиков,
Е. Д. Родионов, О. П. Хромова

Аннотация. Впервые метрическая связность с векторным кручением, или полусимметрическая метрическая связность, была открыта Э. Картаном. Позднее свойства данной связности изучали многие математики. Так, например, К. Яно, И. Агрикола и другие математики исследовали свойства тензора кривизны, геодезические линии, а также поведение связности при конформных деформациях исходной метрики.

В данной работе исследуется уравнение Эйнштейна на трехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразиях с метрической связностью с инвариантным векторным кручением. Доказана теорема о том, что все такие многообразия либо являются многообразиями Эйнштейна относительно связности Леви-Чивита, либо конформно плоские. Ранее авторами исследовалось уравнение Эйнштейна в случае трехмерных локально симметрических (псевдо)римановых многообразий.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.26.84.003

Ключевые слова: алгебры Ли, векторное кручение, инвариантные (псевдо)римановы метрики, локально однородные пространства, многообразия Эйнштейна.

1. Введение и основные результаты

Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие. Определим на данном многообразии метрическую связность ∇ с помощью формулы

$$\nabla_X Y = \nabla_X^g Y + g(X, Y)V - g(V, Y)X, \quad (1)$$

где V — некоторое фиксированное векторное поле, X и Y — произвольные векторные поля, ∇^g — связность Леви-Чивита. Связность ∇ является одной из трех основных связностей, описанных Э. Картаном в [1], и называется *метрической связностью с векторным кручением* или *полусимметрической связностью* (с точностью до направления).

Данная связность играет важную роль в случае двумерных поверхностей, так как в этом случае любая метрическая связность является связностью с

Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 22–21–00111 «Псевдоримановы многообразия с ограничениями на тензор Риччи»).

векторным кручением [1]. В работах [2–7] изучаются различные аспекты метрических связностей с векторным кручением.

Важная теорема о связи конформных деформаций и метрических связностей с векторным кручением доказана К. Яно в [8].

Теорема 1. *Риманово многообразие допускает метрическую связность с векторным кручением, тензор кривизны которой равен нулю, тогда и только тогда, когда оно является конформно плоским.*

Данная теорема также обобщается и на случай псевдоримановой метрики, так как доказательство не использует положительную определенность метрического тензора.

Тензор кривизны связности ∇ определяется равенством

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z,$$

а тензор Риччи — равенством

$$r(X, Y) = \text{tr}(Z \rightarrow R(X, Z)Y).$$

Отметим, что в отличие от случая связности Леви-Чивита в данном случае тензор Риччи не обязан быть симметричным. Однако верна

Теорема 2 [9, 10]. *Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие с метрической связностью с векторным кручением. Тогда тензор Риччи является симметричным тогда и только тогда, когда 1-форма π замкнута (т. е. $d\pi = 0$), где*

$$\pi(X) = g(X, V),$$

для любого векторного поля X на M .

В случае (псевдо)римановых многообразий со связностью Леви-Чивита достаточно известны многообразия постоянной кривизны Риччи или многообразия Эйнштейна (см., например, известный обзор [11]). Они допускают несколько обобщений на случай многообразий с метрической связностью с векторным кручением [12].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. (Псевдо)риманово многообразие (M, g) с метрической связностью с векторным кручением будем называть *многообразием Эйнштейна*, если тензор Риччи удовлетворяет уравнению Эйнштейна

$$r = \Lambda g \tag{2}$$

для некоторой скалярной функции Λ .

Основным результатом данной работы является

Теорема 3. *Если для трехмерного (псевдо)риманова локально однородного пространства с метрической связностью с инвариантным векторным кручением выполняется уравнение Эйнштейна, то векторное поле V тривиально или тензор кривизны равен нулю.*

Так как условие тривиальности векторного поля V равносильно тому, что данная связность является связностью Леви-Чивита в силу (1), а условие тривиальности тензора кривизны по теореме 1 эквивалентно тому, что группа конформно плоская, немедленным следствием теоремы 3 является

Теорема 4. Если трехмерное локально однородное (псевдо)риманово пространство допускает такую метрическую связность с инвариантным векторным кручением, что выполняется уравнение Эйнштейна, то оно является многообразием Эйнштейна относительно связности Леви-Чивита или является конформно плоским.

2. Предварительные сведения

Пусть далее (M, g) — трехмерное локально однородное (псевдо)риманово пространство. Зафиксируем некоторое инвариантное векторное поле V , с помощью которого определим на M метрическую связность ∇ с векторным кручением. Аналогично общему случаю определим тензор кривизны R и тензор Риччи r .

Отметим, что в трехмерном случае равенство нулю тензора кривизны R равносильно занулению тензора Риччи r в силу того, что в размерности три тензор Вейля всегда равен нулю как для связности Леви-Чивита, так и для метрической связности с векторным кручением (см. [12]). Таким образом, для трехмерного многообразия Эйнштейна равенство нулю тензора кривизны эквивалентно условию $\Lambda = 0$.

Исследование уравнения Эйнштейна на трехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразиях основывается на следующей теореме, которая была доказана в римановом случае в [13], а в лоренцевом — в [14].

Теорема 5. Пусть (M, g) — трехмерное локально однородное (псевдо)риманово многообразие. Тогда либо (M, g) является локально симметричным (относительно связности Леви-Чивита), либо оно локально изометрично трехмерной группе Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой.

Таким образом, с учетом результатов работы [15] для доказательства теоремы 3 достаточно рассмотреть случай метрических групп Ли.

В дальнейшем под метрической группой Ли $(G, \mathfrak{g}, V)$ будем понимать группу Ли G с метрической алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и метрической связностью с векторным кручением, которую порождает левоинвариантное векторное поле $V \in \mathfrak{g}$.

Докажем лемму, которую далее будем использовать для упрощения выкладок.

Лемма 1. Если метрическая группа Ли $(G, \mathfrak{g}, V)$ является многообразием Эйнштейна, то в некотором базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ необходимо выполняется

$$V^i g_{ij} c_{kt}^j = 0, \quad (3)$$

либо в инвариантной форме

$$g(V, [X, Y]) = 0 \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Здесь c_{kt}^j — структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$, определяемые разложением $[e_k, e_t] = c_{kt}^j e_j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $(G, \mathfrak{g}, V)$ — многообразие Эйнштейна, то в силу (2) тензор Риччи должен быть симметричен. Тогда по теореме 2 необходимо

$d\pi = 0$, т. е. для произвольных векторных полей $X, Y \in \mathfrak{g}$ выполняется

$$2d\pi(X, Y) = X\pi(Y) - Y\pi(X) - \pi([X, Y]) = -2\pi([X, Y]) = -2g([X, Y], V) = 0.$$

Фиксируя некоторый базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, из данного равенства получаем условие (3). $\square$

Следующая классификация для трехмерных римановых групп Ли получена в [16].

Теорема 6. Пусть G — трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда

- если G унимодулярная, то в алгебре Ли $\mathcal{U}$ группы G существует ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой, что метрическая алгебра Ли группы G имеет вид

$$[e_1, e_2] = \alpha_3 e_3, \quad [e_1, e_3] = -\alpha_2 e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1.$$

- если G неунимодулярная, то в алгебре Ли $\mathcal{N}\mathcal{U}$ группы G существует ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой, что метрическая алгебра Ли группы G имеет вид

$$[e_1, e_2] = (2 - \alpha_2)e_2 + \alpha_3 e_3, \quad [e_1, e_3] = \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_3, \quad [e_2, e_3] = 0.$$

Классификация для трехмерных лоренцевых групп Ли была получена в [14, 17, 18].

Теорема 7. Пусть G — трехмерная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой. Тогда

- если G унимодулярная, то в алгебре Ли группы G существует псевдо-ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой, что метрическая алгебра Ли группы G содержится в следующем списке:

1) случай $\mathcal{A}_1$:

$$[e_1, e_2] = \alpha_3 e_3, \quad [e_1, e_3] = -\alpha_2 e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1$$

с времениподобным e_1 ;

2) случай $\mathcal{A}_2$:

$$[e_1, e_2] = (1 - \alpha_2)e_3 - e_2, \quad [e_1, e_3] = e_3 - (1 + \alpha_2)e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1$$

с времениподобным e_3 ;

3) случай $\mathcal{A}_3$:

$$[e_1, e_2] = e_1 - \alpha_1 e_3, \quad [e_1, e_3] = -\alpha_1 e_2 - e_1, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1 + e_2 + e_3$$

с времениподобным e_3 ;

4) случай $\mathcal{A}_4$:

$$[e_1, e_2] = \alpha_3 e_2, \quad [e_1, e_3] = -\alpha_2 e_1 - \alpha_1 e_2, \quad [e_2, e_3] = -\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$$

с времениподобным e_1 и $\alpha_2 \neq 0$.

• если G неунимодулярная, то в алгебре Ли группы G существует псевдо-ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой, что метрическая алгебра Ли группы G содержится в следующем списке:

1) случай $\mathcal{A}$:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha_1 \sin \alpha_3 e_1 - \alpha_2 \cos \alpha_3 e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 \cos \alpha_3 e_1 + \alpha_2 \sin \alpha_3 e_2,$$

с времениподобным e_3 и $\sin \alpha_3 \neq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$, $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$;

2) случай $\mathcal{B}$:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha_3 e_1 - \alpha_4 e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$$

с ненулевыми $\langle e_2, e_2 \rangle = -\langle e_1, e_3 \rangle = 1$ и $\alpha_2 \neq \alpha_3$;

3) случай $\mathcal{C}_1$:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha_3 e_1 + \alpha_1 e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$$

с времениподобным e_2 и $\alpha_2 \neq \alpha_3$;

4) случай $\mathcal{C}_2$:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha_2 e_1 - \alpha_3 e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$$

с времениподобным e_2 и $\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_1 + \alpha_3 \neq 0$.

Все вычисления будем проводить в соответствующей алгебре Ли. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G , $\dim \mathfrak{g} = n$. Зафиксируем базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ алгебры $\mathfrak{g}$.

Компоненты связности Леви-Чивита ∇^g выражаются через структурные константы и компоненты метрического тензора:

$$(\Gamma^g)_{ij}^k = \frac{1}{2}(C_{ij}^k + g^{sk} C_{sj}^l g_{il} + g^{sk} C_{si}^l g_{jl}),$$

где $\nabla_{e_i}^g e_j = (\Gamma^g)_{ij}^k e_k$ и $\{g^{ij}\}$ — матрица, обратная к матрице $\{g_{ij}\}$.

Пусть $V \in \mathfrak{g}$, тогда компоненты метрической связности ∇ с векторным кручением (1) задаются равенствами

$$\Gamma_{ij}^k = (\Gamma^g)_{ij}^k + g_{ij} V^k - V^s g_{sj} \delta_i^k,$$

где $\nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^k e_k$.

Компоненты тензора кривизны R и тензора Риччи r можно вычислить с помощью следующих формул:

$$R_{ijks} = (\Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^p - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^p + C_{ij}^l \Gamma_{lk}^p) g_{ps}, \quad r_{ik} = R_{ijks} g^{js}.$$

Доказательство теоремы 3 разобьем на два случая. Трехмерные группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой рассмотрим в следующем разделе, а трехмерные группы Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой — в разд 4. Для оптимизации вычислений будем использовать системы компьютерной математики.

3. Трехмерные группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой и векторным кручением

В данном разделе для доказательства теоремы 3 последовательно рассмотрим все трехмерные метрические алгебры Ли из теоремы 6 и покажем, что уравнение Эйнштейна (2) на них имеет решение, только если $\Lambda = 0$ или $V = 0$.

3.1. Случай $\mathcal{U}$. В данном случае условие (3) имеет вид

$$V^1\alpha_1 = 0, \quad V^2\alpha_2 = 0, \quad V^3\alpha_3 = 0.$$

Если метрическая группа Ли $(G, \mathcal{U}, V)$ является многообразием Эйнштейна, то

- 1) либо $V = (0, 0, 0)$;
- 2) либо $V = (V^1, 0, 0)$ и $\alpha_1 = 0$;
- 3) либо $V = (0, V^2, 0)$ и $\alpha_2 = 0$;
- 4) либо $V = (0, 0, V^3)$ и $\alpha_3 = 0$;
- 5) либо $V = (V^1, V^2, 0)$ и $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$;
- 6) либо $V = (0, V^2, V^3)$ и $\alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$;
- 6) либо $V = (V^1, 0, V^3)$ и $\alpha_1 = 0, \alpha_3 = 0$;
- 7) либо $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$.

В силу переобозначения базисных векторов интерес представляют только случаи 1, 2, 5 и 8.

В первом случае вектор V тривиален.

Пусть $V = (V^1, 0, 0)$ и $\alpha_1 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}V^1\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3V^1 &= 0, & -\Lambda - \frac{1}{2}\alpha_2^2 + \frac{1}{2}\alpha_3^2 - (V^1)^2 &= 0, \\ -\Lambda - \frac{1}{2}\alpha_2^2 + \alpha_3\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3^2 &= 0, & -\Lambda + \frac{1}{2}\alpha_2^2 - \frac{1}{2}\alpha_3^2 - (V^1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V = (V^1, V^2, 0)$ и $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} V^2V^1 &= 0, & -\Lambda - \frac{1}{2}\alpha_3^2 - (V^1)^2 &= 0, \\ -\frac{1}{2}\alpha_3V^1 &= 0, & -\Lambda - \frac{1}{2}\alpha_3^2 - (V^2)^2 &= 0, \\ \frac{1}{2}V^2\alpha_3 &= 0, & -\Lambda - (V^2)^2 + \frac{1}{2}\alpha_3^2 - (V^1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} V^2V^1 &= 0, & -(V^1)^2 - (V^2)^2 - \Lambda &= 0, \\ V^3V^1 &= 0, & -(V^1)^2 - (V^3)^2 - \Lambda &= 0, \\ V^3V^2 &= 0, & -(V^2)^2 - (V^3)^2 - \Lambda &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

3.2. Случай $\mathcal{N}\mathcal{U}$. В данном случае условие (3) имеет вид

$$V^2(-2 + \alpha_2) - V^3\alpha_3 = 0, \quad -\alpha_1 V^2 - \alpha_2 V^3 = 0.$$

Если метрическая группа Ли $(G, \mathcal{N}\mathcal{U}, V)$ является многообразием Эйнштейна, то

- 1) либо $V = (V^1, 0, 0)$;
- 2) либо $V = (V^1, 0, V^3)$ и $\alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$;
- 3) либо $V = (V^1, V^2, V^3)$ и

$$\alpha_1 = -(\alpha_3 V^3 + 2V^2)V^3/(V^2)^2, \quad \alpha_2 = (\alpha_3 V^3 + 2V^2)/V^2.$$

Пусть $V = (V^1, 0, 0)$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\alpha_1 V^1 - 2\alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3 V^1 - \alpha_3 \alpha_2 &= 0, \\ -\Lambda - \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_3^2 - \alpha_2 V^1 - (V^1)^2 - 2\alpha_2 - 2V^1 &= 0, \\ -\Lambda - 4 - \frac{1}{2}\alpha_3^2 - \frac{1}{2}\alpha_1^2 - 2\alpha_2^2 + 4\alpha_2 - 2V^1 - \alpha_3 \alpha_1 &= 0, \\ -\Lambda - 4 - \frac{1}{2}\alpha_3^2 + \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \alpha_2 V^1 + 2\alpha_2 - 4V^1 - (V^1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решения

$$\begin{aligned} \Lambda = 0, \quad \alpha_1 = \alpha_3, \quad \alpha_2 = 1 + \sqrt{1 - \alpha_3^2}, \quad V^1 = -2; \\ \Lambda = 0, \quad \alpha_1 = \alpha_3, \quad \alpha_2 = 1 - \sqrt{1 - \alpha_3^2}, \quad V^1 = -2; \\ \Lambda = 0, \quad \alpha_1 = -\alpha_3, \alpha_2 = 1, \quad V^1 = -1; \\ \Lambda = -2, \quad \alpha_1 = -\alpha_3, \quad \alpha_2 = 1, \quad V^1 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, либо $\Lambda = 0$, либо $V = 0$.

Пусть $V = (V^1, 0, V^3)$ и $\alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} V^3 V^1 = 0, \quad -\Lambda - \frac{1}{2}\alpha_1^2 - (V^1)^2 - 2V^1 &= 0, \\ \frac{1}{2}V^3 \alpha_1 = 0, \quad -\Lambda - (V^3)^2 - 4 - \frac{1}{2}\alpha_1^2 - 2V^1 &= 0, \\ -\frac{1}{2}\alpha_1 V^1 - 2\alpha_1 = 0, \quad -\Lambda - (V^3)^2 - 4 + \frac{1}{2}\alpha_1^2 - 4V^1 - (V^1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V = (V^1, V^2, V^3)$ и

$$\alpha_1 = -(\alpha_3 V^3 + 2V^2)V^3/(V^2)^2, \quad \alpha_2 = (\alpha_3 V^3 + 2V^2)/V^2.$$

Тогда система уравнений (2) примет вид

$$V^2 V^1 - \frac{(V^3)^2(\alpha_3 V^3 + 2V^2)}{2(V^2)^2} - \frac{1}{2}V^3 \alpha_3 = 0,$$

$$\begin{aligned}
& V^3 V^1 + \frac{(\alpha_3 V^3 + 2V^2)V^3}{2V^2} + \frac{1}{2}V^2 \alpha_3 = 0, \\
& V^3 V^2 + \frac{(\alpha_3 V^3 + 2V^2)V^3 V^1}{2(V^2)^2} + \frac{2(\alpha_3 V^3 + 2V^2)V^3}{(V^2)^2} - \frac{(\alpha_3 V^3 + 2V^2)^2 V^3}{(V^2)^3} \\
& \quad - \frac{1}{2}\alpha_3 V^1 - \frac{\alpha_3(\alpha_3 V^3 + 2V^2)}{V^2} = 0, \\
& -\Lambda - (V^2)^2 - \frac{(\alpha_3 V^3 + 2V^2)^2 (V^3)^2}{2(V^2)^4} + \frac{1}{2}\alpha_3^2 - \frac{(\alpha_3 V^3 + 2V^2)V^1}{V^2} - (V^1)^2 \\
& \quad - \frac{2(\alpha_3 V^3 + 2V^2)}{V^2} - 2V^1 = 0, \\
& -\Lambda - (V^3)^2 - \frac{1}{2}\alpha_3^2 + \frac{(\alpha_3 V^3 + 2V^2)^2 (V^3)^2}{2(V^2)^4} + \frac{(\alpha_3 V^3 + 2V^2)V^1}{V^2} + \frac{2(\alpha_3 V^3 + 2V^2)}{V^2} \\
& \quad - 4V^1 - 4 - (V^1)^2 = 0, \\
& -\Lambda - (V^3)^2 - \frac{1}{2}\alpha_3^2 - \frac{(\alpha_3 V^3 + 2V^2)^2 (V^3)^2}{2(V^2)^4} - \frac{2(\alpha_3 V^3 + 2V^2)^2}{(V^2)^2} + \frac{4(\alpha_3 V^3 + 2V^2)}{V^2} - 2V^1 \\
& \quad - 4 + \frac{\alpha_3(\alpha_3 V^3 + 2V^2)V^3}{(V^2)^2} - (V^2)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Заметим, что сумма первого уравнения системы, домноженного на V^2 , и второго уравнения системы, домноженного на V^3 , дает $V^1((V^2)^2 + (V^3)^2) = 0$. Это влечет $V^1 = 0$ и упрощает данную систему уравнений до вида

$$\begin{aligned}
\alpha_3 &= -\frac{2V^2 V^3}{(V^2)^2 + (V^3)^2}, \quad ((V^2)^2 + (V^3)^2 + 4)V^2 V^3 = 0, \quad -2\Lambda = (V^2)^2 + (V^3)^2 + 4, \\
& ((V^2)^2 + (V^3)^2 + 4)((V^2)^2 - (V^3)^2) = 0, \quad (V^2)^2 + (V^3)^2 + 4 = 0.
\end{aligned}$$

Очевидно, что данная система решений не имеет.

4. Трехмерные группы Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и векторным кручением

В данном разделе для доказательства теоремы 3 последовательно рассмотрим все трехмерные метрические алгебры Ли из теоремы 7 и покажем, что уравнение Эйнштейна (2) на них имеет решение, только если $\Lambda = 0$ или $V = 0$.

4.1. Случай $\mathcal{A}_1$. В данном случае условие (3) имеет вид

$$V^1 \alpha_1 = 0, \quad V^2 \alpha_2 = 0, \quad V^3 \alpha_3 = 0.$$

Если метрическая группа Ли $(G, \mathcal{A}_1, V)$ является многообразием Эйнштейна, то

- 1) либо $V = (0, 0, 0)$;
- 2) либо $V = (V^1, 0, 0)$ и $\alpha_1 = 0$;

- 3) либо $V = (0, V^2, 0)$ и $\alpha_2 = 0$;
 4) либо $V = (0, 0, V^3)$ и $\alpha_3 = 0$;
 5) либо $V = (V^1, V^2, 0)$ и $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$;
 6) либо $V = (0, V^2, V^3)$ и $\alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$;
 7) либо $V = (V^1, 0, V^3)$ и $\alpha_1 = 0, \alpha_3 = 0$;
 8) либо $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$.

В первом случае вектор V тривиален.

Пусть $V = (V^1, 0, 0)$ и $\alpha_1 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} V^1 \alpha_2 - \alpha_3 V^1 &= 0, & -\Lambda - \frac{1}{2} \alpha_2^2 + \frac{1}{2} \alpha_3^2 + (V^1)^2 &= 0, \\ -\Lambda + \frac{1}{2} \alpha_2^2 - \frac{1}{2} \alpha_3^2 + (V^1)^2 &= 0, & \Lambda - \frac{1}{2} \alpha_2^2 + \alpha_3 \alpha_2 - \frac{1}{2} \alpha_3^2 &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V = (0, V^2, 0)$ и $\alpha_2 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} \alpha_1 V^2 + V^2 \alpha_3 &= 0, & -\Lambda + \frac{1}{2} \alpha_1^2 - (V^2)^2 - \frac{1}{2} \alpha_3^2 &= 0, \\ -\Lambda + \frac{1}{2} \alpha_1^2 + \alpha_3 \alpha_1 + \frac{1}{2} \alpha_3^2 &= 0, & \Lambda + \frac{1}{2} \alpha_1^2 - \frac{1}{2} \alpha_3^2 + (V^2)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V = (0, 0, V^3)$ и $\alpha_3 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} -\alpha_1 V^3 - V^3 \alpha_2 &= 0, & -\Lambda + \frac{1}{2} \alpha_1^2 - (V^3)^2 - \frac{1}{2} \alpha_2^2 &= 0, \\ -\Lambda + \frac{1}{2} \alpha_1^2 + \alpha_1 \alpha_2 + \frac{1}{2} \alpha_2^2 &= 0, & \Lambda + \frac{1}{2} \alpha_1^2 + (V^3)^2 - \frac{1}{2} \alpha_2^2 &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V = (V^1, V^2, 0)$ и $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \alpha_3 V^1 &= 0, & \frac{1}{2} V^2 \alpha_3 &= 0, & -V^2 V^1 &= 0, & -\Lambda + \frac{1}{2} \alpha_3^2 + (V^1)^2 &= 0, \\ \Lambda - \frac{1}{2} \alpha_3^2 + (V^2)^2 &= 0, & -\Lambda - (V^2)^2 - \frac{1}{2} \alpha_3^2 + (V^1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V = (0, V^2, V^3)$ и $\alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} V^3 V^2 &= 0, & \frac{1}{2} \alpha_1 V^2 &= 0, & -\frac{1}{2} \alpha_1 V^3 &= 0, & -\Lambda + \frac{1}{2} \alpha_1^2 - (V^2)^2 &= 0, \\ -\Lambda + \frac{1}{2} \alpha_1^2 - (V^3)^2 &= 0, & \Lambda + \frac{1}{2} \alpha_1^2 + (V^3)^2 + (V^2)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V = (V^1, 0, V^3)$ и $\alpha_1 = 0, \alpha_3 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}V^1\alpha_2 = 0, \quad -\frac{1}{2}V^3\alpha_2 = 0, \quad -V^3V^1 = 0, \quad -\Lambda + \frac{1}{2}\alpha_2^2 + (V^1)^2 = 0, \\ \Lambda + (V^3)^2 - \frac{1}{2}\alpha_2^2 = 0, \quad -\Lambda - (V^3)^2 - \frac{1}{2}\alpha_2^2 + (V^1)^2 = 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} V^3V^2 = 0, \quad -V^2V^1 = 0, \quad -V^3V^1 = 0, \quad (V^1)^2 - (V^2)^2 - \Lambda = 0, \\ (V^1)^2 - (V^3)^2 - \Lambda = 0, \quad (V^2)^2 + (V^3)^2 + \Lambda = 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

4.2. Случай $\mathcal{A}_2$. В данном случае условие (3) имеет вид

$$V^1\alpha_1 = 0, \quad V^2 - V^3(\alpha_2 - 1) = 0, \quad V^2(1 + \alpha_2) + V^3 = 0.$$

Если метрическая группа Ли $(G, \mathcal{A}_2, V)$ является многообразием Эйнштейна, то

- 1) либо $V = (0, 0, 0)$,
- 2) либо $V = (V^1, 0, 0)$ и $\alpha_1 = 0$,
- 3) $V = (0, V^2, -V^2)$ и $\alpha_2 = 0$,
- 4) либо $V = (V^1, V^2, -V^2)$ и $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$.

В первом случае вектор V тривиален.

Пусть $V = (V^1, 0, 0)$ и $\alpha_1 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} -\Lambda = 0, \quad -2\alpha_2 + V^1 = 0, \\ -(V^1)^2 - \Lambda - 2\alpha_2 + V^1 = 0, \quad (V^1)^2 + \Lambda - 2\alpha_2 + V^1 = 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V = (0, V^2, -V^2)$ и $\alpha_2 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}V^2\alpha_1 = 0, \quad -\frac{1}{2}\alpha_1^2 - \Lambda = 0, \\ -\Lambda + (V^2)^2 + \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \alpha_1 = 0, \quad \Lambda + (V^2)^2 - \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \alpha_1 = 0, \\ (V^2)^2 + \alpha_1 = 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V = (V^1, V^2, -V^2)$ и $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} V^2V^1 = 0, \quad -\Lambda = 0, \\ (V^2)^2 + V^1 = 0, \quad -(V^1)^2 + (V^2)^2 - \Lambda + V^1 = 0, \\ (V^1)^2 + (V^2)^2 + \Lambda + V^1 = 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

4.3. Случай $\mathcal{A}_3$. В данном случае условие (3) имеет вид

$$\alpha_1 V^2 + V^1 = 0, \quad \alpha_1 V^3 + V^1 = 0, \quad -\alpha_1 V^1 - V^2 + V^3 = 0.$$

Если метрическая группа Ли $(G, \mathcal{A}_3, V)$ является многообразием Эйнштейна, то

- 1) либо $V = (0, 0, 0)$;
- 2) либо $V = (0, V^2, V^2)$ и $\alpha_1 = 0$.

В первом случае вектор V тривиален.

Пусть $V = (0, V^2, V^2)$ и $\alpha_1 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} V^2 V^1 &= 0, \quad -\Lambda = 0, \\ (V^2)^2 + V^1 &= 0, \quad -(V^1)^2 + (V^2)^2 - \Lambda + V^1 = 0, \\ (V^1)^2 + (V^2)^2 + \Lambda + V^1 &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

4.4. Случай $\mathcal{A}_4$. В данном случае условие (3) имеет вид

$$V^3 \alpha_3 = 0, \quad \alpha_1 V^2 - \alpha_2 V^1 = 0, \quad \alpha_1 V^1 + \alpha_2 V^2 = 0.$$

Если метрическая группа Ли $(G, \mathcal{A}_4, V)$ является многообразием Эйнштейна, то

- 1) либо $V = (0, 0, 0)$,
- 2) либо $V = (0, 0, V^3)$ и $\alpha_3 = 0$.

В первом случае вектор V тривиален.

Пусть $V = (0, 0, V^3)$ и $\alpha_3 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} 2\alpha_2 \alpha_1 &= 0, \quad -2\alpha_2^2 - \Lambda = 0, \\ \alpha_2 V^3 - (V^3)^2 - \Lambda &= 0, \quad \alpha_2 V^3 + (V^3)^2 + \Lambda = 0. \end{aligned}$$

Данная система решений не имеет.

4.5. Случай $\mathcal{A}$. В данном случае условие (3) имеет вид

$$\cos(\alpha_3) V^1 \alpha_1 + \sin(\alpha_3) \alpha_2 V^2 = 0, \quad \cos(\alpha_3) V^2 \alpha_2 - \sin(\alpha_3) \alpha_1 V^1 = 0.$$

Если метрическая группа Ли $(G, \mathcal{A}, V)$ является многообразием Эйнштейна, то

- 1) либо $V = (0, 0, V^3)$;
- 2) либо $V = (0, V^2, V^3)$ и $\alpha_2 = 0$;
- 3) либо $V = (V^1, 0, V^3)$ и $\alpha_1 = 0$.

Пусть $V = (0, 0, V^3)$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\alpha_1^2 \cos(\alpha_3) \sin(\alpha_3) - \alpha_2^2 \cos(\alpha_3) \sin(\alpha_3) + \frac{1}{2} \cos(\alpha_3) \alpha_1 V^3 - \frac{1}{2} \cos(\alpha_3) \alpha_2 V^3 = 0,$$

$$\begin{aligned} \Lambda + \frac{1}{2} \cos(\alpha_3)^2 \alpha_1^2 + \alpha_2 \cos(\alpha_3)^2 \alpha_1 + \frac{1}{2} \cos(\alpha_3)^2 \alpha_2^2 - \sin(\alpha_3) \alpha_1 V^3 - \alpha_1^2 \\ - \sin(\alpha_3) \alpha_2 V^3 - \alpha_2^2 = 0, \end{aligned}$$

$$-\Lambda - \frac{3}{2} \cos(\alpha_3)^2 \alpha_1^2 - \alpha_2 \cos(\alpha_3)^2 \alpha_1 + \frac{1}{2} \cos(\alpha_3)^2 \alpha_2^2 + 2 \sin(\alpha_3) \alpha_1 V^3 + \sin(\alpha_3) \alpha_2 V^3 + (V^3)^2 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1^2 = 0,$$

$$-\Lambda + \frac{1}{2} \cos(\alpha_3)^2 \alpha_1^2 - \alpha_2 \cos(\alpha_3)^2 \alpha_1 - \frac{3}{2} \cos(\alpha_3)^2 \alpha_2^2 + \sin(\alpha_3) \alpha_1 V^3 + 2 \sin(\alpha_3) \alpha_2 V^3 + (V^3)^2 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2 = 0.$$

Данная система имеет решения

$$\begin{aligned} \Lambda &= 2 \sin(\alpha_3)^2 \alpha_1^2, \quad \alpha_2 = \alpha_1, \quad V^3 = 0; \\ \Lambda &= 0, \quad \alpha_2 = \alpha_1, \quad V^3 = -\alpha_1 \sin(\alpha_3); \\ \Lambda &= 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \pm V^3, \quad \alpha_3 = \mp \frac{\pi}{2}; \\ \Lambda &= 0, \quad \alpha_1 = \pm V^3, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = \mp \frac{\pi}{2}; \\ \Lambda &= 0, \quad \alpha_1 = \pm V^3, \quad \alpha_2 = \pm V^3, \quad \alpha_3 = \mp \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, либо $\Lambda = 0$, либо $V = 0$.

Пусть $V = (0, V^2, V^3)$ и $\alpha_2 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} -V^2 V^3 &= 0, \quad -\frac{1}{2} \alpha_1 \cos(\alpha_3) V^2 = 0, \\ \alpha_1^2 \cos(\alpha_3) \sin(\alpha_3) + \frac{1}{2} \cos(\alpha_3) \alpha_1 V^3 &= 0, \\ -\Lambda + \frac{1}{2} \cos(\alpha_3)^2 \alpha_1^2 + \sin(\alpha_3) \alpha_1 V^3 + (V^3)^2 &= 0, \\ \Lambda + \frac{1}{2} \cos(\alpha_3)^2 \alpha_1^2 - \sin(\alpha_3) \alpha_1 V^3 + (V^2)^2 - \alpha_1^2 &= 0, \\ -\Lambda - \frac{3}{2} \cos(\alpha_3)^2 \alpha_1^2 + 2 \sin(\alpha_3) \alpha_1 V^3 + (V^3)^2 - (V^2)^2 + \alpha_1^2 &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V = (V^1, 0, V^3)$ и $\alpha_1 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} -V^1 V^3 &= 0, \quad \frac{1}{2} \cos(\alpha_3) V^1 \alpha_2 = 0, \\ -\alpha_2^2 \cos(\alpha_3) \sin(\alpha_3) - \frac{1}{2} \cos(\alpha_3) \alpha_2 V^3 &= 0, \\ -\Lambda + \frac{1}{2} \cos(\alpha_3)^2 \alpha_2^2 + \sin(\alpha_3) \alpha_2 V^3 + (V^3)^2 &= 0, \\ \Lambda + \frac{1}{2} \cos(\alpha_3)^2 \alpha_2^2 - \sin(\alpha_3) \alpha_2 V^3 + (V^1)^2 - \alpha_2^2 &= 0, \\ -\Lambda - \frac{3}{2} \cos(\alpha_3)^2 \alpha_2^2 + 2 \sin(\alpha_3) \alpha_2 V^3 + (V^3)^2 - (V^1)^2 + \alpha_2^2 &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

4.6. Случай $\mathcal{B}$. В данном случае условие (3) имеет вид

$$\alpha_1 V^3 - \alpha_2 V^2 = 0, \quad \alpha_4 V^2 - \alpha_3 V^3 = 0.$$

Если метрическая группа Ли $(G, \mathcal{B}, V)$ является многообразием Эйнштейна, то

- 1) либо $V = (V^1, 0, 0)$,
- 2) либо $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $\alpha_1 = \alpha_2 V^2 / V^3$, $\alpha_3 = -\alpha_4 V^2 / V^3$,
- 3) либо $V = (V^1, V^2, 0)$ и $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 0$.

Пусть $V = (V^1, 0, 0)$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\alpha_4^2 - \Lambda &= 0, & -\frac{1}{2}\alpha_4^2 + \Lambda &= 0, \\ \alpha_2\alpha_4 + \frac{1}{2}V^1\alpha_4 &= 0, & \alpha_1\alpha_4 - \alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3V^1 + (V^1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $\alpha_1 = \alpha_2 V^2 / V^3$, $\alpha_3 = -\alpha_4 V^2 / V^3$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} (V^3)^2 &= 0, & -\frac{1}{2}(\alpha_4 + 2V^2)V^3 &= 0, \\ \alpha_2\alpha_4 - \alpha_2V^2 + \frac{1}{2}V^1\alpha_4 - V^1V^2 &= 0, \\ \frac{\alpha_2(V^2)^2}{V^3} - \alpha_2^2 - \frac{\alpha_4V^2V^1}{V^3} + (V^1)^2 &= 0, \\ -\Lambda + 2\alpha_2V^3 - \alpha_4V^2 + 2V^3V^1 - \frac{1}{2}\alpha_4^2 &= 0, \\ \Lambda - \frac{1}{2}\alpha_4^2 + (V^2)^2 + \frac{3}{2}\alpha_4V^2 - \alpha_2V^3 - V^3V^1 &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку предполагается, что в рассматриваемом случае $V^3 \neq 0$, из первого уравнения системы заключаем, что данная система решений не имеет.

Пусть $V = (V^1, V^2, 0)$ и $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} -\Lambda &= 0, & -V^1V^2 &= 0, \\ (V^2)^2 + \Lambda &= 0, & \alpha_1V^2 + \alpha_3V^1 + (V^1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

4.7. Случай $\mathcal{C}_1$. В данном случае условие (3) имеет вид

$$\alpha_2V^2 - \alpha_1V^1 = 0, \quad \alpha_1V^2 + \alpha_3V^1 = 0.$$

Если метрическая группа Ли $(G, \mathcal{C}_1, V)$ является многообразием Эйнштейна, то

- 1) либо $V = (0, 0, V^3)$,
- 2) либо $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $\alpha_1 = \alpha_3 V^1 / V^2$, $\alpha_2 = \alpha_3 (V^1)^2 / (V^2)^2$,
- 3) либо $V = (V^1, 0, V^3)$ и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 0$.

Пусть $V = (0, 0, V^3)$. Тогда система уравнений (3) примет вид

$$\begin{aligned} \alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\alpha_3 &= 0, \\ -\alpha_2\alpha_3 + \alpha_2V^3 - \alpha_3^2 + 2\alpha_3V^3 - (V^3)^2 - \Lambda &= 0, \\ -\alpha_2^2 + \alpha_2V^3 - \alpha_3^2 + \alpha_3V^3 - \Lambda &= 0, \\ \alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3 - 2\alpha_2V^3 - \alpha_3V^3 + (V^3)^2 + \Lambda &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решения

$$\begin{aligned}\Lambda &= -2\alpha_3^2, \quad \alpha_2 = \alpha_3, \quad V^3 = 0; \\ \Lambda &= 0, \quad \alpha_2 = V^3, \quad \alpha_3 = V^3; \\ \Lambda &= 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = V^3, \quad \alpha_3 = 0; \\ \Lambda &= 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = V^3; \\ \Lambda &= 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0, \quad V^3 = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, либо $\Lambda = 0$, либо $V = 0$.

Пусть $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $\alpha_1 = \alpha_3 V^1/V^2$, $\alpha_2 = \alpha_3 (V^1)^2/(V^2)^2$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned}(\frac{\alpha_3 (V^1)^2}{(V^2)^2} - V^3)V^2 &= 0, \quad -V^1(\alpha_3 - V^3) = 0, \quad \frac{\alpha_3 (V^1)^2}{V^2} - V^2 V^3 = 0, \\ \frac{\alpha_3^2 (V^1)^3}{(V^2)^3} - \frac{\alpha_3^2 V^1}{V^2} - V^2 V^1 &= 0, \\ -\Lambda - \frac{\alpha_3^2 (V^1)^2}{(V^2)^2} + \frac{\alpha_3 (V^1)^2 V^3}{(V^2)^2} - \alpha_3^2 + 2\alpha_3 V^3 + (V^2)^2 - (V^3)^2 &= 0, \\ -\Lambda - \frac{\alpha_3^2 (V^1)^4}{(V^2)^4} + \frac{\alpha_3 (V^1)^2 V^3}{(V^2)^2} - \alpha_3^2 + \alpha_3 V^3 - (V^1)^2 + (V^2)^2 &= 0, \\ \Lambda + \frac{\alpha_3^2 (V^1)^4}{(V^2)^4} + \frac{\alpha_3^2 (V^1)^2}{(V^2)^2} - \frac{2\alpha_3 (V^1)^2 V^3}{(V^2)^2} - \alpha_3 V^3 + (V^1)^2 + (V^3)^2 &= 0, \\ -\alpha_3 V^1 + V^1 V^3 &= 0.\end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V = (V^1, 0, V^3)$ и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned}V^1 V^3 &= 0, \quad \alpha_2 V^3 - (V^3)^2 - \Lambda = 0, \quad -\alpha_2^2 + \alpha_2 V^3 - (V^1)^2 - \Lambda = 0, \\ \alpha_2^2 - 2\alpha_2 V^3 + (V^1)^2 + (V^3)^2 + \Lambda &= 0.\end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

4.8. Случай $\mathcal{E}_2$. В данном случае условие (3) имеет вид

$$\alpha_2 V^2 - \alpha_1 V^1 = 0, \quad \alpha_2 V^1 + \alpha_3 V^2 = 0.$$

Если метрическая группа Ли $(G, \mathcal{E}_2, V)$ является многообразием Эйнштейна, то

- 1) либо $V = (0, 0, V^3)$,
- 2) либо $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $\alpha_1 = -\alpha_3 (V^2)^2/(V^1)^2$, $\alpha_2 = -\alpha_3 V^2/V^1$.

Пусть $V = (0, 0, V^3)$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} -\alpha_2\alpha_1 - \alpha_2\alpha_3 + \frac{1}{2}V^3\alpha_1 + \frac{1}{2}V^3\alpha_3 &= 0, \\ -\Lambda - \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_3^2 - 2\alpha_2^2 + 3\alpha_2V^3 - (V^3)^2 &= 0, \\ -\Lambda + \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_3^2 - 2\alpha_2^2 + 2\alpha_2V^3 + \alpha_1\alpha_3 &= 0, \\ \Lambda + 2\alpha_2^2 - 3\alpha_2V^3 + (V^3)^2 - \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_3^2 &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решения

$$\begin{aligned} \Lambda &= 0, \quad \alpha_2 = V^3, \quad \alpha_3 = -\alpha_1; \\ \Lambda &= -2\alpha_2^2, \quad \alpha_3 = -\alpha_1, \quad V^3 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, либо $\Lambda = 0$, либо $V = 0$.

Пусть $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $\alpha_1 = -\alpha_3(V^2)^2/(V^1)^2$, $\alpha_2 = -\alpha_3V^2/V^1$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} -V^2V^3 - \frac{\alpha_3(V^2)^2}{2V^1} - \frac{1}{2}V^1\alpha_3 &= 0, \quad \frac{\alpha_3(V^2)^3}{2(V^1)^2} + \frac{1}{2}V^2\alpha_3 + V^1V^3 = 0, \\ -V^2V^1 - \frac{\alpha_3^2(V^2)^3}{(V^1)^3} + \frac{\alpha_3^2V^2}{V^1} - \frac{V^3\alpha_3(V^2)^2}{2(V^1)^2} + \frac{1}{2}V^3\alpha_3 &= 0, \\ -\Lambda + (V^2)^2 + \frac{\alpha_3^2(V^2)^4}{2(V^1)^4} + \frac{1}{2}\alpha_3^2 - \frac{3\alpha_3^2(V^2)^2}{(V^1)^2} - \frac{2\alpha_3V^2V^3}{V^1} - (V^1)^2 &= 0, \\ -\Lambda - \alpha_3^2(V^2)^4 2(V^1)^4 + \frac{1}{2}\alpha_3^2 - \frac{2\alpha_3^2(V^2)^2}{(V^1)^2} - \frac{3\alpha_3V^2V^3}{V^1} - (V^3)^2 + (V^2)^2 &= 0, \\ \Lambda + \frac{2\alpha_3^2(V^2)^2}{(V^1)^2} + \frac{3\alpha_3V^2V^3}{V^1} + (V^3)^2 - \frac{\alpha_3^2(V^2)^4}{2(V^1)^4} + \frac{1}{2}\alpha_3^2 + (V^1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Заметим, что из первого и второго уравнений системы соответственно получаем

$$\alpha_3 = -\frac{2V^1V^2V^3}{(V^1)^2 + (V^2)^2}, \quad \alpha_3 = -\frac{2V^1V^3}{V^2((V^1)^2 + (V^2)^2)},$$

что влечет $(V^2)^2 = 1$. Сумма пятого и шестого уравнений системы с последующей подстановкой $(V^2)^2 = 1$ и $\alpha_3^2 = \frac{4(V^1)^2(V^3)^2}{((V^1)^2+1)^2}$ дает

$$(V^1)^2((1 + (V^1)^2)^3 + 4(V^1)^2(V^3)^2) = 2(V^3)^2(4(V^1)^8 + 1), \quad (4)$$

а из третьего уравнения системы для $V^2 = 1$ заключаем

$$2(V^1)^2(V^3)^2 + (1 + (V^1)^2)^2(1 + (V^3)^2) + 2V^3(1 + (V^1)^2) = 4(V^3)^2. \quad (5)$$

Поскольку система равенств (4), (5) неразрешима в действительных числах (как показывает анализ в системах символьных вычислений), исходная система уравнений решений не имеет. Аналогичные рассуждения для $V^2 = -1$ также приводят к выводу об отсутствии решения системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cartan E. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée, II // Ann. Ecole Norm. Sup. 1925. V. 42. P. 17–88.
2. Muniraja G. Manifolds admitting a semi-symmetric metric connection and a generalization of Schur's theorem // Int. J. Contemp. Math. Sci. 2008. V. 3, N 25. P. 1223–1232.
3. Agricola I., Thier C. The geodesics of metric connections with vectorial torsion // Ann. Global Anal. Geom. 2004. V. 26. P. 321–332.
4. Murathan C., Özgür C. Riemannian manifolds with a semi-symmetric metric connection satisfying some semisymmetry conditions // Proc. Eston. Acad. Sci. 2008. V. 57, N 4. P. 210–216.
5. Yilmaz H. B., Zengin F. Ö., Uysal. S. A. On a semi symmetric metric connection with a special condition on a Riemannian manifold // Eur. J. Pure Appl. Math. 2011. V. 4, N 2. P. 152–161.
6. Zengin F. Ö., Demirbağ S. A., Uysal. S. A., Yilmaz H. B. Some vector fields on a Riemannian manifold with semi-symmetric metric connection // Bull. Iran. Math. Soc. 2012. V. 38, N 2. P. 479–490.
7. Agricola I., Kraus M. Manifolds with vectorial torsion // Differ. Geom. Appl. 2016. V. 46. P. 130–147.
8. Yano K. On semi-symmetric metric connection // Rev. Roum. Math. Pures Appl. 1970. V. 15. P. 1579–1586.
9. Barua B., Ray A. Kr. Some properties of a semi-symmetric metric connection in a Riemannian manifold // Indian J. Pure Appl. Math. 1985. V. 16, N 7. P. 736–740.
10. De U. C., De B. K. Some properties of a semi-symmetric metric connection on a Riemannian manifold // Istanbul Univ. Fen. Fak. Mat. Der. 1995. V. 54. P. 111–117.
11. Бесце А. Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990.
12. Chaturvedi B. B., Gupta B. K. Study on semi-symmetric metric spaces // Novi Sad J. Math. 2014. V. 44, N 2. P. 183–194.
13. Sekigawa K. On some 3-dimensional curvature homogeneous spaces // Tensor N. S. 1977. V. 31. P. 87–97.
14. Calvaruso G. Homogeneous structures on three-dimensional Lorentzian manifolds // J. Geom. Phys. 2007. V. 57. P. 1279–1291.
15. Клепиков П. Н., Родионов Е. Д., Хромова О. П. Уравнение Эйнштейна на трехмерных локально симметрических (псевдо)римановых многообразиях с векторным кручением // Мат. заметки СВФУ. 2019. Т. 26, № 6. С. 25–36.
16. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups // Adv. Math. 1976. V. 21. P. 293–329.
17. Rodionov E. D., Slavskii V. V., Chibrikova L. N. Locally conformally homogeneous pseudo-Riemannian spaces // Sib. Adv. Math. 2007. V. 17, N 3. P. 186–212.
18. Cordero L. A., Parker P. E. Left-invariant Lorentzian metrics on 3-dimensional Lie groups // Rend. Mat. 1997. V. 17. P. 129–155.

Поступила в редакцию 27 октября 2020 г.

После доработки 29 октября 2021 г.

Принята к публикации 26 ноября 2021 г.

Клепиков Павел Николаевич, Родионов Евгений Дмитриевич,
Хромова Олеся Павловна
Алтайский государственный университет,
кафедра математического анализа,
пр. Ленина, 61, Барнаул 656049
klepikov.math@gmail.com, edr2002@mail.ru, khromova.olesya@gmail.com

EINSTEIN EQUATION ON THREE-DIMENSIONAL
LOCALLY HOMOGENEOUS (PSEUDO)RIEMANNIAN
MANIFOLDS WITH VECTORIAL TORSION

P. N. Klepikov, E. D. Rodionov,
and O. P. Khromova

Abstract: A metric connection with vectorial torsion, or a semi-symmetric metric connection, was discovered by E. Cartan. Later, many mathematicians studied the properties of this connection. For example, K. Yano, I. Agricola and other mathematicians investigated the properties of the curvature tensor, geodesic lines, and also the behavior of the connection under conformal deformations of the original metric.

In this paper, we study the Einstein equation on three-dimensional locally homogeneous (pseudo)Riemannian manifolds with metric connection with invariant vectorial torsion. A theorem is obtained stating that all such manifolds are either Einstein manifolds with respect to the Levi-Civita connection or conformally flat. Earlier, the Einstein equation in the case of three-dimensional locally symmetric (pseudo)Riemannian manifolds have been investigated by the authors.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.26.84.003

Keywords: Einstein manifold, invariant (pseudo)Riemannian metric, Lie algebra, locally homogeneous space, vectorial torsion.

REFERENCES

1. *Cartan E.*, “Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée, II,” *Ann. Ecole Norm. Sup.*, **42**, 17–88 (1925).
2. *Muniraja G.*, “Manifolds admitting a semi-symmetric metric connection and a generalization of Schur’s theorem,” *Int. J. Contemp. Math. Sci.*, **3**, No. 25, 1223–1232 (2008).
3. *Agricola I. and Thier C.*, “The geodesics of metric connections with vectorial torsion,” *Ann. Global Anal. Geom.*, **26**, 321–332 (2004).
4. *Murathan C. and Özgür C.*, “Riemannian manifolds with a semi-symmetric metric connection satisfying some semisymmetry conditions,” *Proc. Eston. Acad. Sci.*, **57**, No. 4, 210–216 (2008).
5. *Yilmaz H. B., Zengin F. Ö., and Uysal S. A.*, “On a semi-symmetric metric connection with a special condition on a Riemannian manifold,” *Eur. J. Pure Appl. Math.*, **4**, No. 2, 152–161 (2011).
6. *Zengin F. Ö., Demirbağ S. A., Uysal S. A., and Yilmaz H. B.*, “Some vector fields on a Riemannian manifold with semi-symmetric metric connection,” *Bull. Iran. Math. Soc.*, **38**, No. 2, 479–490 (2012).
7. *Agricola I. and Kraus M.*, “Manifolds with vectorial torsion,” *Differ. Geom. Appl.*, **46**, 130–147 (2016).
8. *Yano K.*, “On semi-symmetric metric connection,” *Rev. Roum. Math. Pures Appl.*, **15**, 1579–1586 (1970).
9. *Barua B. and Ray A. Kr.*, “Some properties of a semi-symmetric metric connection in a Riemannian manifold,” *Indian J. Pure Appl. Math.*, **16**, No. 7, 736–740 (1985).

10. De U. C. and De B. K., "Some properties of a semi-symmetric metric connection on a Riemannian manifold," Istanbul Univ. Fen. Fak. Mat. Der., **54**, 111–117 (1995).
11. Besse A., Einstein Manifolds, Springer-Verl., Berlin; Heidelberg (1987).
12. Chaturvedi B. B. and Gupta B. K., "Study on semi-symmetric metric spaces," Novi Sad J. Math., **44**, No. 2, 183–194 (2014).
13. Sekigawa K., "On some 3-dimensional curvature homogeneous spaces," Tensor N. S., **31**, 87–97 (1977).
14. Calvaruso G., "Homogeneous structures on three-dimensional Lorentzian manifolds," J. Geom. Phys., **57**, 1279–1291 (2007).
15. Klepikov P. N., Rodionov E. D., and Khromova O. P., "Einstein equation on three-dimensional locally symmetric (pseudo)Riemannian manifolds with vectorial torsion," Mat. Zamet. SVFU, **26**, No 6. 25–36 (2019).
16. Milnor J., "Curvature of left invariant metric on Lie groups," Adv. Math., **21**, 293–329 (1976).
17. Rodionov E. D., Slavskii V. V., and Chibrikova L. N., "Locally conformally homogeneous pseudo-Riemannian spaces," Sib. Adv. Math., **17**, No. 3, 186–212 (2007).
18. Cordero L. A. and Parker P. E., "Left-invariant Lorentzian metrics on 3-dimensional Lie groups," Rend. Mat., **17**, 129–155 (1997).

Submitted October 27, 2020

Revised October 29, 2021

Accepted November 26, 2021

Pavel N. Klepikov, Evgenii D. Rodionov, and Olesya P. Khromova
Altai State University,
Department of Mathematical Analysis,
61 Lenin Street, Barnaul 656049, Russia
klepikov.math@gmail.com, edr2002@mail.ru, khromova.olesya@gmail.com

КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ СО СЛАБЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

А. И. Кожанов, Г. А. Варламова

Аннотация. Целью работы является исследование разрешимости естественных краевых задач для некоторых классов вырождающихся квазиэллиптических уравнений. Особенностями изучаемых задач является то, что, несмотря на вырождение, граничные многообразия в них не освобождаются от несения краевых условий. Для изучаемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений, т. е. решений, имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение. Указываются также некоторые обобщения и усиления представленных в работе результатов.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.18.43.004

Ключевые слова: квазиэллиптические уравнения, краевые задачи, вырождение, регулярные решения, существование, единственность.

Введение

В 1951 году М. В. Келдыш [1] (см. также [2]) показал, что для эллиптических вырождающихся по прямой $y = 0$ уравнений

$$u_{xx} + y^m u_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, t) \quad (m \geq 0) \quad (*)$$

корректными могут быть как задача с заданием краевых условий на всей границе области определения уравнения (задача Д), так и задача с освобождением от несения краевого условия части границы, лежащей на оси абсцисс (задача Е). В дальнейшем результаты М. В. Келдыша в достаточно полной степени переносились и обобщались на краевые задачи для эллипτικο-параболических уравнений второго порядка [2–4], для параболических уравнений с меняющимся направлением времени, гиперболо-параболических уравнений и уравнений смешанного типа [5–7]. Но в то же время столь же полного исследования разрешимости краевых задач для квазиэллиптических уравнений [8, 9] с вырождением на сегодняшний день нет. Частично восполнить данный пробел и предполагают авторы в настоящей работе.

Все построения и рассуждения будут основаны на свойствах пространств Лебега L_p и Соболева W_p^l . Необходимые определения можно найти в монографиях [10–12].

Дифференциальные уравнения, изучаемые в работе, могут иметь как характеристическое вырождение, подобное вырождению в уравнении М. В. Келдыша (*), так и нехарактеристическое и двойное вырождение, т. е. вырождение порядка. Несмотря на это обстоятельство, в работе будет доказано существование регулярных решений изучаемых задач, т. е. решений, имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

Изучаемые в работе уравнения имеют модельный вид. Возможные обобщения (на более общие уравнения, на другие краевые задачи, и т. п.) будут описаны в конце статьи.

1. Постановка задач

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$ переменных $x_1, \dots, x_n$, Γ — граница Ω . Будем считать для простоты, что Γ — бесконечно дифференцируемое компактное многообразие. Далее, пусть Q — цилиндр $\Omega \times (0, T)$ конечной высоты T , $S = \Gamma \times (0, T)$ — боковая граница Q , $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $c(x, t)$ и $f(x, t)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T]$, D_t^k — производная $\frac{\partial^k}{\partial t^k}$ ($D_t^1 = D_t$), p — целое неотрицательное число, Δ — оператор Лапласа, действующий по переменным $x_1, \dots, x_n$, L — дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x, t)$ определяется равенством

$$Lv = \varphi(t)D_t^{2p}v + (-1)^{p+1}\psi(t)\Delta v + c(x, t)v.$$

Краевая задача I. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$Lu = f(x, t) \quad (1)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, t)|_S = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$D_t^k u(x, t)|_{t=0} = 0, \quad x \in \Omega, \quad k = 0, \dots, p-1, \quad (3)$$

$$D_t^k u(x, t)|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega, \quad k = 0, \dots, p-1. \quad (4)$$

Краевая задача II. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2) и (3), а также условия

$$D_t^k u(x, t)|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega, \quad k = p, \dots, 2p-1. \quad (5)$$

Кроме краевых задач I и II методами настоящей работы можно исследовать и другие задачи. О некоторых из них будет сказано ниже.

2. Разрешимость краевых задач I и II

Как указано выше, цель настоящей работы состоит в доказательстве существования и единственности регулярных решений краевых задач I и II, т. е. в доказательстве существования и единственности решений, принадлежащих пространству $W_2^{2,2p}(Q)$.

Теорема 1. Пусть выполняются условия

$$\varphi(t) \in C([0, T]), \quad \varphi(t) > 0 \text{ при } t \in (0, T], \quad \varphi(0) = 0; \quad (6)$$

$$\psi(t) \in C([0, T]), \quad \psi(t) \geq 0 \text{ при } t \in [0, T]; \quad (7)$$

$$c(x, t) \in C^2(\overline{Q}), \quad (-1)^p c(x, t) \geq c_0 > 0, \quad (-1)^p \Delta c(x, t) \leq 0 \text{ при } (x, t) \in \overline{Q}; \quad (8)$$

$$t^{p-\frac{1}{2}}[\varphi(t)]^{-1} \in L_2([0, T]). \quad (9)$$

Тогда для любой функции $f(x, t)$ такой, что

$$[\varphi(t)]^{-1} f(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \mathring{W}_2^1(\Omega)),$$

краевая задача I имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству $W_2^{2,2p}(Q)$.

Доказательство. Воспользуемся методом регуляризации.

Пусть $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^\infty$ — последовательность чисел из интервала $(0, 1)$, монотонно сходящаяся к 0. Положим

$$\varphi_m(t) = \varphi(t) + \varepsilon_m, \quad \psi_m(t) = \psi(t) + \varepsilon_m.$$

Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$\varphi_m(t) D_t^{2p} u + (-1)^{p+1} \psi_m(t) \Delta u + c(x, t) u - \varepsilon_m \varphi_m(t) \Delta^2 u = f(x, t) \quad (10)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2)–(4), а также

$$\Delta u(x, t)|_S = 0, \quad x \in \Omega. \quad (11)$$

В этой задаче уравнение (10) является невырожденным квазиэллиптическим уравнением. Используя классический метод Галёркина [13, 14] или метод продолжения по параметру [15], нетрудно показать, что при фиксированном m и при принадлежности функции $f(x, t)$ пространству $L_2(Q)$ задача (10), (2)–(4), (11) имеет решение $u_m(x, t)$, принадлежащее пространству $W_2^{4,2p}(Q)$. Покажем, что для семейства $\{u_m(x, t)\}_{m=1}^\infty$ имеют место равномерные по m априорные оценки.

Последовательно умножая уравнение (10) (при $u = u_m$) на функции

$$[\varphi_m(t)]^{-1} u_m(x, t), \quad [\varphi_m(t)]^{-1} \Delta u_m(x, t), \quad [\varphi_m(t)]^{-1} \Delta^2 u_m(x, t),$$

интегрируя по цилиндру Q , далее используя формулу интегрирования по частям, применяя условия (6)–(8) и дополнительно учитывая принадлежность

функции $f(x, t)$ пространству $L_2(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega))$, нетрудно показать, что для функций $u_m(x, t)$ будет выполняться оценка

$$\int_Q (D_t^p \Delta u_m)^2 dxdt + \varepsilon_m \int_Q (\Delta^2 u_m)^2 dxdt \leq M_1 \int_Q \left[\frac{f^2}{\varphi_m^2(t)} + \frac{(\Delta f)^2}{\varphi_m^2(t)} \right] dxdt \quad (12)$$

с постоянной M_1 , определяющейся лишь функцией $c(x, t)$.

На следующем шаге умножим уравнение для $u_m(x, t)$ на $[\varphi_m(t)]^{-1} D_t^{2p} u_m(x, t)$ и проинтегрируем по цилиндру Q . Получим равенство

$$\begin{aligned} \int_Q (D_t^{2p} u_m)^2 dxdt &= (-1)^p \int_Q \frac{\psi_m}{\varphi_m} \Delta u_m D_t^{2p} u_m dxdt + \varepsilon_m \int_Q \Delta^2 u_m D_t^{2p} u_m dxdt \\ &\quad - \int_Q \frac{c}{\varphi_m} u_m D_t^{2p} u_m dxdt + \int_Q \frac{f}{\varphi_m} u_m D_t^{2p} u_m dxdt. \end{aligned} \quad (13)$$

Оценим первое слагаемое в правой части равенства (13):

$$\begin{aligned} &\left| (-1)^p \int_Q \frac{\psi_m}{\varphi_m} \Delta u_m D_t^{2p} u_m dxdt \right| \\ &\leq (\max_{[0, T]} \psi(t) + 1) \int_Q \frac{1}{\varphi_m} \left(\int_{\Omega} (\Delta u_m(x, t))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} (D_t^{2p} u_m(x, t))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt. \end{aligned}$$

Оценка (12) означает, что выполняется неравенство

$$\int_{\Omega} (\Delta u_m(x, t))^2 dx \leq M_2 t^{2p-1}$$

с постоянной M_2 , определяющейся лишь функциями $c(x, t)$ и $f(x, t)$. Используя это неравенство, далее условие (9) и применяя неравенство Юнга, получим, что выполняется оценка

$$\left| (-1)^p \int_Q \frac{\psi_m}{\varphi_m} \Delta u_m D_t^{2p} u_m dxdt \right| \leq \delta \int_Q (D_t^{2p} u_m)^2 dxdt + M(\delta), \quad (14)$$

в которой δ — произвольное положительное число, $M(\delta)$ определяется помимо числа δ также функциями $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $c(x, t)$ и $f(x, t)$.

Для третьего слагаемого в правой части равенства (13) имеет место оценка, аналогичная оценке (14), второе и четвертое слагаемые в правой части равенства (13) оцениваются непосредственно с помощью неравенства Юнга. Подбирая далее параметр δ , а также соответствующий параметр, полученный при оценке второго и четвертого слагаемых в правой части равенства (13) малыми, получим априорную оценку

$$\int_Q (D_t^p \Delta u_m)^2 dxdt \leq M_3 \quad (15)$$

с постоянной M_3 , определяющейся лишь функциями $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $c(x, t)$ и $f(x, t)$.

Из оценок (12) и (15), а также из свойства рефлексивности гильбертова пространства [15] следует, что существуют последовательность $\{u_{m_k}(x, t)\}_{k=1}^\infty$ и функция $u(x, t)$ такие, что при $k \rightarrow \infty$ имеют место сходимости

$$u_{m_k}(x, t) \rightarrow u(x, t) \quad \text{слабо в пространстве } W_2^{2,2p}(Q),$$

$$\varepsilon_{m_k} D_t^{2p} u_{m_k}(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{слабо в пространстве } L_2(Q),$$

$$\varepsilon_{m_k} \Delta u_{m_k}(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{слабо в пространстве } L_2(Q),$$

$$\varepsilon_{m_k} \Delta^2 u_{m_k}(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{слабо в пространстве } L_2(Q).$$

Очевидно, что предельная функция $u(x, t)$ и будет требуемым решением краевой задачи I.

Теорема доказана.

Следствие. Пусть выполняются условия (6)–(9), а также условие

$$[\varphi(t)]^{-1} f(x, t) \in L_2(0, T; L_2(\Omega)).$$

Тогда для решения $u(x, t)$ краевой задачи I из пространства $W_2^{2,2p}(Q)$ будет справедливо включение $[\varphi(t)]^{-1} u(x, t) \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ε — фиксированное положительное число. Умножим уравнение (1) на функцию $[\varphi(t) + \varepsilon]^{-1} u(x, t)$ и проинтегрируем по цилиндру Q . Получим равенство

$$\begin{aligned} \int_Q D_t^{2p} u \cdot u \, dxdt + (-1)^{p+1} \int_Q \frac{\psi(t)}{\varphi(t) + \varepsilon} \Delta u \cdot u \, dxdt + \int_Q \frac{c(x, t)}{\varphi(t) + \varepsilon} u^2 \, dxdt \\ = \varepsilon \int_Q \frac{1}{\varphi(t) + \varepsilon} D_t^{2p} u \cdot u \, dxdt + \int_Q \frac{f(x, t)}{\varphi(t) + \varepsilon} u \, dxdt. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям в этом равенстве, а также используя условия следствия, получим, что для решений $u(x, t)$ краевой задачи I из пространства $W_2^{2,2p}(Q)$ выполняется оценка

$$\int_Q (D_t^p u)^2 \, dxdt \leq R_0.$$

Имеют место неравенства

$$\int_Q \frac{u^2}{\varphi^2(t)} \, dxdt \leq C \int_Q \frac{t^{2p-1}}{\varphi^2(t)} \left(\int_Q (D_\tau^p u)^2 \, dxdt \right) dxdt \leq CR_0 \operatorname{mes} \Omega \int_0^T \frac{t^{2p-1}}{\varphi^2(t)} dt < +\infty.$$

Из этих неравенств и следует, что функция $[\varphi(t)]^{-1} u(x, t)$ принадлежит пространству $L_2(Q)$.

Следствие доказано.

Теорема 2. Пусть выполняются условия (4)–(6). Тогда краевая задача I не может иметь в пространстве $W_2^{2,2p}(Q)$ более одного решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в краевой задаче I выполняется $f(x, t) \equiv 0$, и пусть $u(x, t)$ — решение из пространства $W_2^{2,2p}(Q)$ задачи I с такой правой частью. Умножим уравнение (1) на функцию $[\varphi(t)]^{-1}u(x, t)$ и проинтегрируем по цилиндру Q (согласно доказанному следствию это возможно). Интегрируя по частям и используя условия (6)–(9), получим, что выполняется неравенство

$$\int_Q (D_t^p u)^2 dx dt \leq 0.$$

Из этого неравенства следует, что $D_t^p u$ — тождественно нулевая в Q функция. Другими словами, для функции $u(x, t)$ выполняется уравнение

$$(-1)^{p+1}\psi(t)\Delta u + c(x, t)u = 0.$$

Из этого уравнения и условия (8) вытекает, что $u(x, t)$ есть тождественно нулевая в Q функция. А это означает, что краевая задача I при выполнении условий теоремы не может иметь в пространстве $W_2^{2,2p}(Q)$ более одного решения.

Теорема доказана.

Для краевой задачи II имеют место полностью аналогичные результаты о существовании и единственности решений. Объединим результаты в одну теорему.

Теорема 3. Пусть выполняются условия (6)–(9). Тогда для любой функции $f(x, t)$ такой, что

$$[\varphi(t)]^{-1}f(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)),$$

краевая задача II имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству $W_2^{2,2p}(Q)$, и при этом ровно одно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы состоит в повторении доказательств теорем 1 и 2.

3. Комментарии и дополнения

3.1. Условие (9) теорем 1 и 3 означает, что характер вырождения уравнения (1) связан с порядком уравнения (т. е. он не может быть произвольным). Именно поэтому авторы и называют изученные уравнения «уравнениями со слабым вырождением». Вместе с тем заметим, что функция $\psi(t)$ может вырождаться, наоборот, произвольным образом и может даже обращаться в нуль на подмножестве отрезка $[0, T]$ ненулевой меры.

3.2. В краевой задаче I функция $\varphi(t)$ может обращаться в нуль и при $t = T$. В этом случае дополнительно к условию (9) необходимо потребовать выполнения условия

$$(T - t)^{\frac{p}{2}-1}\varphi(t) \in L_2([0, T]).$$

3.3. Краевое условие Дирихле (условие (2)) вполне можно заменить условиями второй или же третьей краевых задач. Суть результатов о существовании и единственности регулярных решений от этого не изменится.

3.4. Оператор Лапласа в уравнении (1) можно заменить более общим эллиптическим оператором, например, оператором вида

$$Au = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a^{ij}(x)u_{x_j}) + a_0(x)u.$$

Далее, нетрудно изучить разрешимость некоторых краевых задач и для дважды вырождающихся уравнений вида

$$\varphi(t)D_t^{2p}u + \psi(t)\Delta^l u + c(x,t)u = f(x,t), \quad (16)$$

в которых l — фиксированное натуральное число (с естественным добавлением краевых условий на боковой поверхности S), а также для уравнений (1) и (16) со всеми младшими членами. Суть результатов при этом не изменится, но условия и выкладки будут более громоздкими.

3.5. В работах авторов [16, 17] изучены другие классы дифференциальных уравнений со слабым вырождением — именно, изучены квазипараболические уравнения и уравнения с кратными характеристиками. Для этих уравнений также получены теоремы о существовании и единственности регулярных решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77, № 2. С. 181–183.
2. Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М.: Наука, 1966.
3. Fichera G On a unified theory of boundary value problems for elliptic-parabolic equations of second order // *Matematika*. 1963. V. 7, N 6. P. 99–122.
4. Олейник О. А., Радкевич Е. В. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой. М.: ВИНТИ, 1971.
5. Врагов В. Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа в пространстве // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 6. С. 1098–1105.
6. Врагов В. Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ, 1983.
7. Егоров И. Е., Федоров В. Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Вычисл. центр СО РАН, 1995.
8. Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г. Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. Новосибирск: Наука, 1984.
9. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998.
10. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
11. Ладженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
12. Triebel H. Interpolation theory. Functional spaces. Differential operators. Berlin: VEB Deutscher Verl. Wiss., 1978.

13. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
14. Дубинский Ю. А. Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка // Успехи мат. наук. 1968. Т. 23, № 1. С. 45–90.
15. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
16. Кожанов А. И. Квазипараболические уравнения со слабым вырождением // Мат. заметки СВФУ. 2021. Т. 28, № 1. С. 27–36.
17. Кожанов А. И., Лукина Г. А. Вырождение в дифференциальных уравнениях с кратными характеристиками // Мат. заметки СВФУ. 2021. Т. 28, № 3. С. 19–30.

Поступила в редакцию 1 ноября 2021 г.

После доработки 1 ноября 2021 г.

Принята к публикации 26 ноября 2021 г.

Кожанов Александр Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Академия наук Республики Саха (Якутия),
ул. Ленина, 33, Якутск 677007
kozhanov@math.nsc.ru

Варламова Галина Александровна
Политехнический институт (филиал) ФГАОУ ВО «Северо-Восточный федеральный
университет им. М. К. Аммосова» в г. Мирном,
ул. Тихонова, 5/1, Мирный 678175, Республика Саха (Якутия)
lukina-g@mail.ru

QUASI-ELLIPTIC EQUATIONS WITH DEGENERATION

A. I. Kozhanov and G. A. Varlamova

Abstract: We study the solvability of boundary value problems for some classes of degenerate quasi-elliptic equations. The main feature of the problems under study is that, despite the degeneration, boundary conditions should still be imposed on the boundary manifolds. We prove the existence and uniqueness theorems for the regular solutions, those having all generalized Sobolev derivatives required in the equation in the inner subdomains. Moreover, we describe some possible enhancements and generalizations of the obtained results.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.18.43.004

Keywords: quasi-elliptic equations, degeneration, boundary value problem, regular solution, existence, uniqueness.

REFERENCES

1. Keldysh M. V., "On some cases of degeneration of an equation of elliptic type on the domain boundary [in Russian]," *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **77**, No. 2, 181–183 (1951).
2. Smirnov M. M., *Degenerating Elliptic and Hyperbolic Equations* [in Russian], Nauka, Moscow (1966).
3. Fichera G., "On a unified theory of boundary value problems for elliptic-parabolic equations of second order," *Matematika*, **7**, No. 6, 99–122 (1963).
4. Oleinik O. A. and Radkevich E. V., *Second Order Equations with Nonnegative Characteristic form*, VINITI, Moscow (1971).
5. Vragov V. N., "Theory of boundary value problems for equations of mixed type in space," *Differ. Equ.*, **13**, 759–764 (1977).
6. Vragov V. N., *Boundary Value Problems for Nonclassical Equations of Mathematical Physics* [in Russian], Novosib. Gos. Univ., Novosibirsk (1983).
7. Egorov I. E. and Fedorov V. E., *High-Order Nonclassical Equations of Mathematical Physics* [in Russian], Vychisl. Tsentr SO RAN, Novosibirsk (1995).
8. Uspenskii S. V., Demidenko G. V., and Perepelkin V. G., *Embedding Theorems and Applications to Differential Equations* [in Russian], Nauka, Novosibirsk (1984).
9. Demidenko G. V. and Uspenskii S. V., *Partial Differential Equations and Systems Not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative*, Marcel Dekker, New York; Basel (2003).
10. Sobolev S. L., *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1991).
11. Ladyzhenskaya O. A. and Ural'tseva N. N., *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, Acad. Press, New York; London (1968).
12. Triebel H., *Interpolation Theory, Functional Spaces, Differential Operators*, VEB Deutscher Verl. Wiss., Berlin (1978).
13. Lions J.-L., *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*, Gauthier-Villars, Paris (1969).
14. Dubinskii Yu. A., "Quasilinear elliptic and parabolic equations of arbitrary order," *Russ. Math. Surv.*, **23**, No. 1, 45–91 (1968).

-
15. *Trenogin V. A.*, Functional Analysis [in Russian], Nauka, Moscow (1980).
 16. *Kozhanov A.*, “Boundary value problems for third-order pseudoelliptic equations with degeneration [in Russian],” *Mat. Zametki SVFU*, **28**, No. 1, 27–36 (2021).
 17. *Kozhanov A. and Lukina G.*, “Degeneration in differential equations with multiple characteristics [in Russian],” *Mat. Zametki SVFU*, **28**, No. 3, 19–30 (2021).

Submitted November 1, 2021

Revised November 1, 2021

Accepted November 26, 2021

Alexandr I. Kozhanov
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptug Avenue, Novosibirsk 630090, Russia;
Academy of Science of the Republic of Sakha (Yakutia),
33 Lenin Avenue, Yakutsk 677007, Russia
`kozhanov@math.nsc.ru`

Galina A. Varlamova
Ammosov North-Eastern Federal University,
Mirny Polytechnic Institute,
5/1 Tikhonov Street, Mirny 678175, Russia
`lukina-g@mail.ru`

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
УГЛОМ НАКЛОНА ТРЕЩИНЫ
В ЗАДАЧЕ О РАВНОВЕСИИ ПЛАСТИНЫ
ТИМОШЕНКО С УПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Н. В. Неустроева, Н. П. Лазарев

Аннотация. Математическое моделирование и исследование задач о деформировании неоднородных тел, содержащих трещины вдоль упругих включений, предполагает задание условий сопряжения на границе стыка разных материалов. Трудности связаны с возможностью появления больших значений напряжений вблизи включений. Определение неоднородных тел с наиболее оптимальными параметрами представляет собой одно из самых востребованных направлений теоретических и экспериментальных исследований. В данной работе исследована задача оптимального управления углом наклона трещины к срединной плоскости в задаче о равновесии упругой пластины Тимошенко, содержащей наклонную трещину на границе упругого включения. Сложность задачи заключается в том, что на берегах трещины существует условие непроникания, имеющее вид неравенства. Функционал качества характеризует отклонение от заданных перемещений. Доказана разрешимость задачи оптимального управления. Установлена непрерывная зависимость решений от значения угла наклона трещины.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.71.81.005

Ключевые слова: наклонная трещина, упругое включение, пластина, оптимальное управление, модель Тимошенко.

Проблемы оптимизации форм и структуры упругих конструкций, содержащих включения и трещины (разрезы) привлекают большой интерес как с прикладной стороны, так и с теоретической. Классический подход к описанию трещин, возникающих между упругой областью и включением, заключается в задании на берегах трещины линейных краевых условий. Хорошо известно, что получаемые для таких линейных моделей решения краевых задач обладают недостатком, противоположные берега трещины могут проникать друг в друга [1, 2]. Интерес представляют задачи о равновесии упругих тел с включениями и трещинами с нелинейными краевыми условиями [1, 3–10]. В работе исследуется задача, в которой учитывается условие непроникания при отыскании оптимальной формы упругого тела. Соответствующие задачи формулируются в виде проблем управления для краевых задач с неизвестными границами.

Работа выполнена при поддержке Мегагранта Правительства Российской Федерации 14.Y26.31.0013, гранта РФФИ и Республики Саха (Якутия) (проект № 18-41-140003).

© 2021 Неустроева Н. В., Лазарев Н. П.

В постановках задач оптимального управления главным моментом является выбор модели, управляющих функций или параметров, выбор функционала качества, подлежащего оптимизации, и системы ограничений, накладываемых на управляющие переменные, функции состояния и рассматриваемые функционалы. Задачами оптимального управления для упругих тел при наличии ограничений на множество решений можно ознакомиться в работах [11–20]. Управляющие функции задаются с помощью физических или геометрических параметров, характеризующих внешние нагрузки, форму трещин, коэффициенты упругости, форму и размер включений и т. д. Например, в работе [17] параметром управления является угол наклона плоской трещины. В статье исследована зависимость производной функционала энергии от угла наклона плоской трещины в задаче о равновесии пластины Тимошенко. В работе [19] рассматривается задача управления по нахождению наиболее оптимальных форм жестких включений в упругих пластинах с трещинами с точки зрения критерия разрушения Гриффитса. Классические задачи оптимизации форм упругих тел можно найти в [21, 22].

В настоящей работе исследуется задача о равновесии композитной пластины, содержащей сквозную трещину на границе упругого включения с бесконечной жесткостью поперечного сдвига. Геометрия взаимного расположения матрицы и упругого включения определяется поверхностью, проходящей через замкнутый контур в срединной плоскости пластины. Нормаль к поверхности трещины образует малый угол со срединной плоскостью пластины. При этом деформирование матрицы описывается с помощью модели Тимошенко, упругого включения — моделью Кирхгофа — Лява. На внешней границе пластины ставятся условия жесткого защемления, на кривой задающей трещину — условия взаимного непроникания берегов. Параметр управления задается с помощью угла наклона трещины к срединной плоскости (в исходном состоянии), а функционал качества характеризует отклонение от заданных перемещений. Задача оптимального управления сводится к решению вариационной задачи с неизвестной границей. Доказывается разрешимость задачи оптимального управления.

Математическое моделирование задач о деформировании неоднородных тел, содержащих трещины вдоль включений, предполагает задание условий сопряжения на границе раздела различных двух сред [23]. Данную задачу можно также отнести к задачам сопряжения. Условия непроникания для пластин Кирхгофа — Лява, Тимошенко с наклонной трещиной предложены и исследованы в [24–27].

1. Постановка задачи. Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Подобласть ω находится строго внутри Ω , т. е. $\overline{\omega} \cap \partial\Omega = \emptyset$. Границу подобласти ω обозначим через Σ , которая является достаточно гладкой. Кривая Σ состоит из двух частей γ и $\Sigma \setminus \gamma$, причем $\text{meas}(\Sigma \setminus \gamma) > 0$. Соответственно γ лежит на границе подобласти ω . Выберем внешнюю единичную нормаль $n = n(x) = (n_1, n_2)$ к $\partial\Omega$, а нормаль $\nu = \nu(x) = (\nu_1, \nu_2)$ — к кривой γ , $x = (x_1, x_2) \in \gamma$.

Предположим, что пластина, содержащая наклонную трещину на границе упругого включения, в исходном недеформируемом состоянии задается в трех-

мерном пространстве $\mathbb{R}^3$ множеством $\Omega \times [-h, h] \setminus \bar{\Gamma}_1$, где $\Gamma_1 \subset \Xi$. Упругое включение (до нагружения) задаем с помощью объемного тела, ограниченного плоскостями $z = h$, $z = -h$ и поверхностью

$$\Xi = \{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, z) \mid \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \tilde{x} = x - z\nu \operatorname{tg} \alpha(x), x \in \Sigma\},$$

где $\alpha(x) \in C^1(\Sigma)$, $|\alpha(x)| < \pi/2$. Будем считать, что толщина пластины равна $2h$. Единичную нормаль к поверхности Ξ в точке (x, z) обозначим через $\bar{n}(x, z)$. Обозначим через $\hat{\alpha}(x, z)$ угол между $\bar{n}(x, z)$ и срединной плоскостью Ω . Поверхность Γ_1 будет описывать наклонную трещину нулевой ширины:

$$\Gamma_1 = \{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, z) \mid |z| \leq h, \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \tilde{x} = x - z\nu \operatorname{tg} \alpha(x), x \in \gamma\}.$$

Пусть единичный вектор $(\nu_1(x), \nu_2(x), 0)$ совпадает по направлению с проекцией $\bar{n}(x, 0)$ на плоскость $\{x_1, x_2\}$. Тогда $\bar{n}(x, 0) = (\nu(x) \cos \hat{\alpha}(x, 0), \sin \hat{\alpha}(x, 0))$. Пусть Π_x — вертикальная плоскость, проходящая через точку $x \in \Sigma$ в направлении $\bar{n}(x, 0)$, и C_x — отрезок, полученный в пересечении Π_x и Γ_1 . Будем считать, что в точках C_x , $x \in \Sigma$, нормаль $\bar{n}(\tilde{x}, z)$ к поверхности Ξ не меняется, т. е. $\bar{n}(\tilde{x}, z) = \bar{n}(x, 0) \equiv \bar{n}(x)$, $\alpha(\tilde{x}, z) = \hat{\alpha}(x, 0) \equiv \alpha(x) \forall \tilde{x} = x - z\nu(x) \operatorname{tg} \alpha(x)$, $|z| \leq h$ (рис. 1).

Подобласть ω будет соответствовать части пластины, описываемой моделью Кирхгофа — Лява, а $\Omega \setminus \bar{\omega}$ — моделью Тимошенко для трансверсально-изотропного материала. Кривая γ задает трещину, расположенную на границе включения. В срединной плоскости $z = 0$ имеем область $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$. В случае $\alpha(x) \equiv 0$ получим постановку задачи, исследованную в [28].

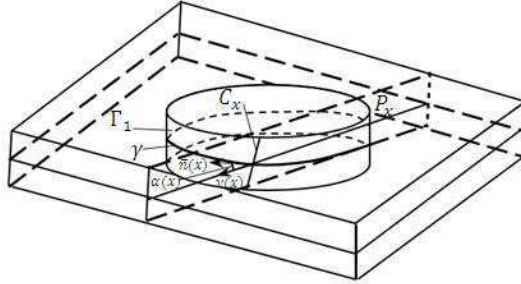


Рис. 1. Пластина с наклонной трещиной на границе упругого включения.

Пусть $\chi = \chi(x) = (W, w)$ — вектор перемещений точек срединной поверхности, $x = (x_1, x_2)$, где $W = (w^1, w^2)$ и w — горизонтальные и вертикальные перемещения точек пластины соответственно, $x \in \Omega_\gamma$; $\phi = \phi(x) = (\phi^1, \phi^2)$ — углы поворота нормальных сечений, $x \in \Omega_\gamma$. Скачок функции v на Σ обозначим через $[v] = v^+ - v^-$.

Приведем тензоры, описывающие деформацию трансверсально-изотропной пластины $\varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2}(w_{,j}^i + w_{,i}^j)$, $\varepsilon_{ij}(\phi) = \frac{1}{2}(\phi_{,j}^i + \phi_{,i}^j)$, $i, j = 1, 2$, где нижние индексы после запятой обозначают дифференцирование по соответствующей координате. Тензоры моментов и напряжений вычисляются по формулам

$$m_{ij} = b_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\phi), \quad \sigma_{ij}(W) = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(W), \quad i, j, k, l = 1, 2, \quad (1)$$

где $A = \{a_{ijkl}\}$, $B = \{b_{ijkl}\}$ — тензоры модулей упругости, удовлетворяющие условиям симметрии и положительной определенности: $a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}$, $a_{ijkl} = \text{const}$, $i, j, k, l = 1, 2$, $a_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geq C_0\xi_{ij}\xi_{ij} \quad \forall \xi_{ij} = \xi_{ji}$, $C_0 > 0$. Аналогичные условия справедливы и для $B = \{b_{ijkl}\}$. Здесь и далее по повторяющимся индексам проводится суммирование. В силу предположений о трансверсальной изотропности материала матрицы пластины в области $\Omega \setminus \bar{\omega}$ ненулевые коэффициенты тензоров A и B определяются соотношениями

$$b_{iiii} = D, \quad b_{iijj} = D\kappa, \quad b_{ijij} = b_{ijji} = D(1 - \kappa)/2, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2,$$

$$a_{ijkl} = 3b_{ijkl}, \quad i, j, k, l = 1, 2,$$

где D — цилиндрическая жесткость, $0 < \kappa < 1/2$ — коэффициент Пуассона [29]. Поперечные силы, действующие в области пластины, описываемые моделью Тимошенко, задаются выражениями

$$q_i(w, \phi) = \Lambda(w_{,i} + \phi^i) \quad \text{в } \Omega \setminus \bar{\omega}, \quad i = 1, 2,$$

где $\Lambda = 2\kappa^2 G$; κ^2 — коэффициент сдвига, G — модуль сдвига на площадках, перпендикулярных срединной плоскости пластины; $\kappa^2, G = \text{const}$.

Гипотеза прямых нормалей Кирхгофа — Лява эквивалентна допущению, что жесткость на сдвиг в нормальных к срединной плоскости сечениях равна бесконечности. Считая параметр жесткости поперечного сдвига равной бесконечности на ω , задаем отсутствие сдвигов в нормальных к срединной поверхности пластины плоскостях. Следовательно, в области ω выполнены равенства

$$w_{,i} + \phi^i = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1) для m_{ij} , $i, j = 1, 2$, получим тензор моментов в упругом включении (в модели Кирхгофа — Лява)

$$m_{ij} = -b_{ijkl}w_{,kl} \quad \text{в } \omega, \quad i, j, k, l = 1, 2.$$

Для напряжений и деформаций в ω будут справедливы соотношения

$$\varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2}(w_{,j}^i + w_{,i}^j), \quad \sigma_{ij}(W) = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(W), \quad i, j, k, l = 1, 2.$$

Пусть $H^{1,0}(\Omega_\gamma)$ — подпространство пространства Соболева $H^1(\Omega_\gamma)$, состоящее из всех функций, которые обращаются в нуль на внешней границе $\partial\Omega$. Обозначим $H(\Omega_\gamma) = H^{1,0}(\Omega_\gamma)^5$, где норма вводится стандартным образом: $\|\cdot\|_{H(\Omega_\gamma)} = \|\cdot\|_{H^{1,0}(\Omega_\gamma)^5}$.

Сформулируем вариационную постановку задачи. Рассмотрим функционал энергии пластины

$$\begin{aligned} \Pi(\Omega; \xi) &= \frac{1}{2}b_\omega(\chi, \chi) - \int_\omega (f_i w^i + f_3 w) dx \\ &+ \frac{1}{2}B_{\Omega \setminus \bar{\omega}}(\xi, \xi) - \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} (f_i w^i + f_3 w + \mu_i \phi^i) dx, \quad \chi = (W, w), \quad \xi = (\chi, \phi), \end{aligned} \quad (3)$$

где билинейные формы $b_\omega(\cdot, \cdot)$ и $B_{\Omega \setminus \bar{\omega}}(\cdot, \cdot)$ для достаточно гладких функций $\xi = (\chi, \phi)$, $\chi = (W, w)$, $\bar{\xi} = (\bar{\chi}, \bar{\phi})$, $\bar{\chi} = (\bar{W}, \bar{w})$ определяются равенствами

$$b_\omega(\chi, \bar{\chi}) = \int_{\omega} (b_{ijkl} w_{,kl} \bar{w}_{,ij} + \sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(\bar{W})) dx,$$

$$B_{\Omega \setminus \bar{\omega}}(\xi, \bar{\xi}) = \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} (m_{ij}(\phi) \varepsilon_{ij}(\bar{\phi}) + \Lambda(w_{,i} + \phi^i)(\bar{w}_{,i} + \bar{\phi}^i) + \sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(\bar{W})) dx.$$

Используя условие (2), функционал (3) представим в виде

$$\Pi(\Omega_\gamma; \xi) = \frac{1}{2} B_{\Omega_\gamma}(\xi, \xi) - \int_{\Omega_\gamma} f \chi dx - \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \mu_i \phi^i dx, \quad \xi = (\chi, \phi),$$

где

$$B_{\Omega_\gamma}(\xi, \bar{\xi}) = \int_{\Omega_\gamma} (m_{ij}(\phi) \varepsilon_{ij}(\bar{\phi}) + \Lambda(w_{,i} + \phi^i)(\bar{w}_{,i} + \bar{\phi}^i) + \sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(\bar{W})) dx.$$

Справедливы следующие неравенства [30] для некоторых положительных постоянных C_1, C_2, δ , не зависящих от ξ :

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(W) dx \geq C_1 \|W\|_{H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2}^2, \quad \int_{\Omega_\gamma} m_{ij}(\phi) \varepsilon_{ij}(\phi) dx \geq C_2 \|\phi\|_{H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2}^2;$$

(4)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\gamma} \Lambda(w_{,i} + \phi_i)(w_{,i} + \phi_i) dx \\ & \geq \Lambda \left(\|\phi\|_{L^2(\Omega_\gamma)^2}^2 + \|\nabla w\|_{L^2(\Omega_\gamma)^2}^2 - \delta \|\phi\|_{L^2(\Omega_\gamma)^2}^2 - \frac{1}{\delta} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega_\gamma)^2}^2 \right) \\ & = \Lambda \left((1 - \delta) \|\phi\|_{L^2(\Omega_\gamma)^2}^2 + \left(1 - \frac{1}{\delta}\right) \|\nabla w\|_{L^2(\Omega_\gamma)^2}^2 \right). \end{aligned} \quad (5)$$

На основании вышеуказанных неравенств можно сделать вывод об эквивалентности в $H(\Omega_\gamma)$ стандартной нормы и нормы, введенной с помощью выражения $\{B_{\Omega_\gamma}(\xi, \xi)\}^{\frac{1}{2}}$.

При определении множества допустимых перемещений K_α используем условие непроникания противоположных берегов сквозной трещины

$$[W_\nu] + [w] \operatorname{tg} \alpha \geq h |[\phi_\nu]|, \quad x \in \gamma, \quad W_\nu = w^i \nu_i, \quad \phi_\nu = \phi^i \nu_i. \quad (6)$$

Множество допустимых перемещений K_α определяется следующим образом:

$$K_\alpha = \{\xi = (\chi, \phi) \in H(\Omega_\gamma) \mid w_{,i} + \phi^i = 0 \text{ в } \omega, \ i = 1, 2, \\ [W_\nu] + [w] \operatorname{tg} \alpha \geq h |[\phi_\nu]| \text{ на } \gamma\}.$$

Заметим, что поскольку решение $\xi = (\chi, \phi)$ принадлежит пространству $H(\Omega_\gamma)$, на границе раздела двух сред без ослоения $\Sigma \setminus \bar{\gamma}$ будет выполняться условие склейки

$$[\xi] = (0, 0, 0, 0, 0).$$

Сформулируем задачу равновесия в виде минимизации функционала энергии на множестве допустимых перемещений K_α :

$$\inf_{\xi_\alpha \in K_\alpha} \Pi(\Omega_\gamma; \xi_\alpha). \quad (7)$$

Задача (7) имеет единственное решение ξ_α и эквивалентна следующему вариационному неравенству:

$$\begin{aligned} \xi_\alpha = (\chi_\alpha, \phi_\alpha) \in K_\alpha, \quad B_{\Omega_\gamma}(\xi_\alpha, \bar{\xi} - \xi_\alpha) \geq \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{\chi} - \chi_\alpha) dx \\ + \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \mu(\bar{\phi} - \phi_\alpha) dx \quad \forall \bar{\xi} = (\bar{\chi}, \bar{\phi}) \in K_\alpha. \end{aligned} \quad (8)$$

При условии достаточной гладкости решения вариационного неравенства (8) с помощью подходящего выбора пробных функций можно вывести дифференциальную постановку задачи (7). При этом вариационная и дифференциальная постановки задачи будут эквивалентны.

Требуется найти функцию $\xi = (W, w, \phi)$ такую, что

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= -f_i \quad \text{в } \Omega \setminus \bar{\omega}, \quad i = 1, 2, \\ \sigma_{ij}(W) &= a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(W), \quad \text{в } \Omega \setminus \bar{\omega}, \quad i, j = 1, 2, \\ q_{i,i} &= -f_3 \quad \text{в } \Omega \setminus \bar{\omega}, \\ m_{ij,j} - q_i &= -\mu_i, \quad \text{в } \Omega \setminus \bar{\omega}, \quad i = 1, 2, \\ -m_{ij,ij} &= f_3 \quad \text{в } \omega, \\ m_{ij} &= b_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\phi) \quad \text{в } \omega, \\ \sigma_{ij,j} &= -f_i \quad \text{в } \omega, \quad i = 1, 2, \\ \sigma_{ij}(W) &= a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(W), \quad \text{в } \omega, \quad i, j = 1, 2, \\ w_{,i} + \phi^i &= 0, \quad \text{на } \omega, \quad i = 1, 2, \\ \xi &= (0, 0, 0, 0, 0) \quad \text{на } \partial\Omega, \\ [\xi] &= (0, 0, 0, 0, 0) \quad \text{на } \Sigma \setminus \bar{\gamma}, \\ [t_\nu] &= [m_\nu] = [\sigma_\tau] = [\sigma_\nu] = 0 \quad \text{на } \Sigma, \\ t_\nu = \sigma_\tau = m_\tau^+ &= 0, \quad |m_\nu| \leq -h\sigma_\nu \quad \text{на } \gamma, \\ [W_\nu] + [w] \operatorname{tg} \alpha &\geq h|\phi_\nu| \quad \text{на } \gamma, \\ (-h\sigma_\nu - m_\nu)([W_\nu] + [w] \operatorname{tg} \alpha + h|\phi_\nu|) &= 0, \quad \text{на } \gamma, \\ (-h\sigma_\nu + m_\nu)([W_\nu] + [w] \operatorname{tg} \alpha - h|\phi_\nu|) &= 0 \quad \text{на } \gamma, \end{aligned}$$

где $f = (f_1, f_2, f_3) \in [C^1(\bar{\Omega})]^3$ и $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in [C^1(\bar{\Omega} \setminus \omega)]^2$ — векторы, задающие внешние нагрузки; число α задает величину угла наклона трещины, $\sigma_\nu = \sigma_{ij} \nu_j \nu_i$, $\sigma_\tau = \sigma_{ij} \nu_j \tau_i$, $m_\nu = m_{ij} \nu_j \nu_i$, $m_\tau^+ = m_{ij} \nu_j \tau_i$, $t_\nu^+ = \Lambda \left(\frac{\partial w^+}{\partial \nu} \right) + \frac{\partial m^+}{\partial \tau}$, $t_\nu^- = m_{ij,k} \tau_k \tau_j \nu_i + m_{ij,j} \nu_i$, $\tau = (-\nu_2, \nu_1)$.

2. Задача оптимального управления. В рамках этого пункта будем считать, что угол наклона трещины считается постоянным, т. е. функция $\alpha(x)$, $x \in \gamma$, не зависит от $x \in \gamma$. Задача оптимального управления углом наклона трещины к срединной плоскости пластины состоит в том, чтобы среди множества чисел углов наклона трещины $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$ выбрать такой угол, при котором отклонение решения задачи (7) от заданной функции ξ^* является наименьшим. Другими словами, требуется найти число $\alpha^* \in [-\alpha_0, \alpha_0]$:

$$J(\alpha^*, \xi_{\alpha^*}) = \inf_{\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]} J(\alpha, \xi_\alpha), \quad (9)$$

где $J(\alpha, \xi_\alpha) = \|\xi_\alpha - \xi^*\|_{H(\Omega_\gamma)}$ — функционал качества.

Теорема. *Задача оптимального управления (11) имеет решение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\alpha_n\}$ — минимизирующая последовательность в задаче (9). В силу ограниченности интервала $[-\alpha_0, \alpha_0]$ из $\{\alpha_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность (с прежним обозначением) $\alpha_n \rightarrow \alpha^*$, где α^* некоторое число из промежутка $[-\alpha_0, \alpha_0]$. В соответствии с утверждением ниже доказанной леммы можно выделить подпоследовательность такую, что $\alpha_n \rightarrow \alpha^*$ при $n \rightarrow \infty$, и для которой $\xi_{\alpha_n} \rightarrow \xi_{\alpha^*}$ при $n \rightarrow \infty$ сильно в пространстве $H(\Omega_\gamma)$. Для этой последовательности в силу сильной сходимости справедливо соотношение

$$J(\alpha_n, \xi_{\alpha_n}) \rightarrow J(\alpha^*, \xi_{\alpha^*}) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что α^* — решение задачи оптимального управления (9). Теорема доказана.

Лемма. *Пусть $\alpha^* \in [-\alpha_0, \alpha_0]$ — фиксированное число, $\xi_\alpha, \xi_{\alpha^*}$ — решения задачи (7), соответствующие параметрам $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$ и α^* . Тогда из последовательности ξ_α можно выделить подпоследовательность ξ_{α_n} , для которой*

$$\xi_{\alpha_n} \rightarrow \xi_{\alpha^*} \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

сильно в пространстве $H(\Omega_\gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем от противного. Пусть существуют число $\epsilon > 0$ и последовательность $\{\alpha_n\}$ такие, что

$$\alpha_n \rightarrow \alpha^*, \quad \alpha_n \in [-\alpha_0, \alpha_0], \quad \|\xi_{\alpha_n} - \xi_{\alpha^*}\|_{H(\Omega_\gamma)} > \epsilon \quad \forall n \in N.$$

Для любого фиксированного $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$ имеет место соотношение

$$B_{\Omega_\gamma}(\xi_\alpha, \xi_\alpha) = \int_{\Omega_\gamma} f \chi_\alpha dx + \int_{\Omega \setminus \overline{\omega}} \mu \phi_\alpha dx.$$

В силу неравенств (4), (5) выводим равномерную по α оценку

$$\|\xi_\alpha\|_{H(\Omega_\gamma)} \leq C$$

с постоянной $C > 0$, не зависящей от α . Значит, из последовательности $\{\xi_{\alpha_n}\}$ можно выделить подпоследовательность с прежним обозначением, для которой соответствующая подпоследовательность функций $\{\xi_{\alpha_n}\}$ слабо сходится к некоторой функции $\tilde{\xi}$ в $H(\Omega_\gamma)$ при $\alpha_n \rightarrow \alpha^*$.

Докажем, что $\tilde{\xi} \in K_{\alpha^*}$. В силу слабой сходимости $\{\xi_{\alpha_n}\}$ к функции $\tilde{\xi}$ в $H(\Omega_\gamma)$ по теореме вложения для пространства Соболева имеем сильную сходимость

$$\xi_{\alpha_n} \rightarrow \tilde{\xi} \text{ в } L_2(\gamma)^5, \quad w_{\alpha_n, i} \rightarrow \tilde{w}_{,i} \text{ в } L_2(\omega) \text{ при } \alpha_n \rightarrow \alpha^*, \quad i = 1, 2. \quad (10)$$

Покажем, что $\tilde{\xi} = (\tilde{\chi}, \tilde{\phi})$, $\chi = (\tilde{W}, \tilde{w})$ удовлетворяет неравенству $[\tilde{W}_\nu] + [\tilde{w}] \operatorname{tg} \alpha \geq h|[\tilde{\phi}_\nu]|$, $x \in \gamma$ на γ и соотношению $\tilde{w}_{,i} + \tilde{\phi}^i = 0$ в ω , $i = 1, 2$. В силу сходимости (10) можно извлечь еще раз подпоследовательности и считать, что $\xi_{\alpha_n} \rightarrow \tilde{\xi}$ и $w_{\alpha_n, i} \rightarrow \tilde{w}_{,i}$ п.в. на γ при $\alpha_n \rightarrow \alpha^*$. Переходя к пределу в неравенствах

$$[W_{\alpha_n \nu}] + [w_{\alpha_n}] \operatorname{tg} \alpha_n \geq h|[\phi_{\alpha_n \nu}]| \quad \text{п.в. на } \gamma$$

и соотношениях

$$w_{\alpha_n, i} + \phi_{\alpha_n}^i = 0 \text{ в } \omega, \quad i = 1, 2$$

при $\alpha_n \rightarrow \alpha^*$, имеем

$$[\tilde{W}_\nu] + [\tilde{w}] \operatorname{tg} \alpha^* \geq h|[\tilde{\phi}_\nu]| \quad \text{п.в. на } \gamma,$$

$$\tilde{w}_{,i} + \tilde{\phi}^i = 0 \text{ в } \omega, \quad i = 1, 2.$$

Это означает, что $\tilde{\xi} \in K_{\alpha^*}$.

Целью последующих рассуждений является доказательство справедливости равенства $\tilde{\xi} = \xi_{\alpha^*}$ и существования сильно сходящейся к ξ_{α^*} в пространстве $H(\Omega_\gamma)$ последовательности решений $\xi_n = \xi_{\alpha_n}$, $n = 1, 2$.

Построим для любой пробной функции $\eta \in K_{\alpha^*}$ последовательность $\{\eta_\alpha\}$: $\eta_\alpha \in K_\alpha$ и $\eta_\alpha \rightarrow \eta_{\alpha^*}$ сильно в пространстве $H(\Omega_\gamma)$ при $\alpha \rightarrow \alpha^*$. Продолжим $\nu_1(x)$, $\nu_2(x)$, определенные для $x \in \gamma$, на всю область Ω гладким и финитным образом. Затем рассмотрим функции вида

$$\eta_\alpha = (w_\alpha^1, w_\alpha^2, w_\alpha, \phi_\alpha^1, \phi_\alpha^2) = \eta_{\alpha^*} + (w_{\alpha^*}(\operatorname{tg} \alpha^* - \operatorname{tg} \alpha)\nu_1, w_{\alpha^*}(\operatorname{tg} \alpha^* - \operatorname{tg} \alpha)\nu_2, 0, 0, 0).$$

Построенная функция, очевидно, принадлежит $H(\Omega_\gamma)$ и удовлетворяет необходимым свойствам. Проверим выполнение условий (2), (6). По построению имеем

$$[W_{\alpha \nu}] = [W_{\alpha^* \nu}] + [w_{\alpha^*}](\operatorname{tg} \alpha^* - \operatorname{tg} \alpha), \quad [w_\alpha] = [w_{\alpha^*}], \quad [\phi_{\alpha \nu}] = [\phi_{\alpha^* \nu}] \quad \text{на } \gamma.$$

В силу включения $\eta_\alpha \in K_{\alpha^*}$ справедливы неравенство и соотношение

$$[W_{\alpha^* \nu}] + [w_{\alpha^*}](\operatorname{tg} \alpha^* - \operatorname{tg} \alpha) + [w_{\alpha^*}] \operatorname{tg} \alpha \geq h|[\phi_{\alpha^* \nu}]| \quad \text{п.в. на } \gamma,$$

$$w_{\alpha^*, i} + \phi_{\alpha^*}^i = 0 \quad \text{в } \omega.$$

Следовательно, $\eta_\alpha \in K_{\alpha^*}$. Кроме того, очевидно, что при $\alpha \rightarrow \alpha^*$ функции $\eta_\alpha \rightarrow \eta_{\alpha^*}$ сильно в $H(\Omega_\gamma)$.

Указанная сильная сходимость позволяет перейти к пределу при $\alpha_n \rightarrow \alpha^*$ в следующих неравенствах с тестовой функцией $\eta_\alpha \in K_{\alpha^*}$:

$$\xi_{\alpha_n} \in K_{\alpha_n}, \quad B_{\Omega_\gamma}(\xi_{\alpha_n}, \eta_\alpha - \xi_{\alpha_n}) \geq \int_{\Omega_\gamma} f(\chi_\alpha - \chi_{\alpha_n}) dx + \int_{\Omega \setminus \overline{\omega}} \mu(\phi_\alpha - \phi_{\alpha_n}) dx.$$

В силу слабой сходимости ξ_{α_n} к $\tilde{\xi}$ при $\alpha_n \rightarrow \alpha^*$ в $H(\Omega_\gamma)$ предельное неравенство примет вид

$$B_{\Omega_\gamma}(\tilde{\xi}, \eta_\alpha - \tilde{\xi}) \geq \int_{\Omega_\gamma} f(\chi_\alpha - \tilde{\chi}) dx + \int_{\Omega \setminus \overline{\omega}} \mu(\phi_\alpha - \tilde{\phi}) dx \quad \forall \eta_\alpha = (\chi_\alpha, \phi_\alpha) \in K_{\alpha^*}. \quad (11)$$

Принимая во внимание единственность разрешимости задачи (11), получим $\tilde{\xi} = \xi_{\alpha^*}$.

Установим сильную сходимость $\xi_{\alpha_n} \rightarrow \xi_{\alpha^*}$. Ввиду сходимости $\xi_{\alpha_n} \rightarrow \xi_{\alpha^*}$ слабо в $H(\Omega_\gamma)$ при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} B_{\Omega_\gamma}(\xi_{\alpha_n}, \xi_{\alpha_n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_\gamma} f \chi_{\alpha_n} dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega \setminus \overline{\omega}} \mu \phi_{\alpha_n} dx \\ &= \int_{\Omega_\gamma} f \chi_{\alpha^*} dx + \int_{\Omega \setminus \overline{\omega}} \mu \phi_{\alpha^*} dx = B_{\Omega_\gamma}(\xi_{\alpha^*}, \xi_{\alpha^*}). \end{aligned}$$

Ввиду эквивалентности стандартной нормы и нормы, введенной с помощью $\{B_{\Omega_\gamma}(\xi, \xi)\}^{\frac{1}{2}}$ в пространстве $H(\Omega_\gamma)$, последнее равенство означает, что $\xi_{\alpha_n} \rightarrow \xi_{\alpha^*}$ сильно в $H(\Omega_\gamma)$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, пришли к противоречию с исходным предположением $\|\xi_{\alpha_n} - \xi_{\alpha^*}\| \geq \epsilon$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Это означает, что для любой последовательности $\alpha_n \in [-\alpha_0, \alpha_0]$, сходящейся к α^* , выполняется

$$\|\xi_{\alpha_n} - \xi_{\alpha^*}\|_{H(\Omega_\gamma)} \rightarrow 0 \quad \text{при } \alpha_n \rightarrow \alpha^*.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Хлуднев А. М. Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
2. Khludnev A. M., Kovtunen V. A. Analysis of cracks in solids. Southampton; Boston: WIT Press, 2000.
3. Lazarev N., Semenova G. An optimal size of a rigid thin stiffener reinforcing an elastic two-dimensional body on the outer edge // J. Optim. Theory Appl. 2018. V. 178, N. 2. P. 614–626.
4. Khludnev A. M. On modeling thin inclusions in elastic bodies with a damage parameter // Math. Mech. Solids. 2019. V. 24, N. 9. P. 2742–2753.
5. Khludnev A., Popova T. Equilibrium problem for elastic body with delaminated T-shape inclusion // J. Comput. Appl. Math. 2020. V. 376. P. 112870.
6. Rudoy E., Shcherbakov V. First-order shape derivative of the energy for elastic plates with rigid inclusions and interfacial cracks // Appl. Math. Optimization. 2021. V. 84, N 3. P. 2775–2802.
7. Khludnev A., Fankina I. Equilibrium problem for elastic plate with thin rigid inclusion crossing an external boundary // Z. Angew. Math. Phys. 2021. Bd 72, Heft 3. S. 121.
8. Khludnev A., Esposito A. C., Faella L. Optimal control of parameters for elastic body with thin inclusions // J. Optimization Theory Appl. 2020. V. 184, N 1. P. 293–314.
9. Khludnev A. T-shape inclusion in elastic body with a damage parameter // J. Comput. Appl. Math. 2021. V. 393. P. 113540.
10. Lazarev N., Rudoy E. Optimal location of a finite set of rigid inclusions in contact problems for inhomogeneous two-dimensional bodies // J. Comput. Appl. Math. 2022. V. 403. P. 113710.
11. Khludnev A. M., Sokolowski J. Modelling and control in solid mechanics. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser-Verl., 1997.
12. Вторушин Е. В. Управление формой трещины в упругом теле при условии возможного контакта берегов // Сиб. журн. индустр. математики. 2006. Т. 9, № 2. С. 20–30.
13. Khludnev A. M., Leugering G. R. Optimal control of crack in elastic bodies with thin rigid inclusions // Z. Angew. Math. Mech. 2011. Bd 91, Heft 2. S. 125–137.

14. Лазарев Н. П. Существование экстремальной формы трещины в задаче о равновесии пластины Тимошенко // Вестн. Новосибир. гос. ун-та. Математика, механика, информатика. 2011. Т. 11, вып. 4. С. 49–62.
15. Khludnev A. M., Negri M. Optimal rigid inclusion shapes in elastic bodies with cracks // Z. Angew. Math. Phys. 2013. Bd 64, Heft 1. S. 179–191.
16. Лазарев Н. П. Задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину вдоль тонкого жесткого включения // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. № 1. С. 32–45.
17. Лазарев Н. П., Неустроева Н. В., Николаева Н. А. Оптимальное управление углом наклона трещины в задаче о равновесии пластины Тимошенко // Сиб. электрон. мат. изв. 2015. Т. 12. С. 300–308.
18. Lazarev N. P. Optimal control of the thickness of a rigid inclusion in equilibrium problems for inhomogeneous two-dimensional bodies with a crack // Z. Angew. Mech. 2016. Bd 96, Heft 4. S. 509–518.
19. Shcherbakov V. Shape optimization of rigid inclusions for elastic plates with cracks // Z. Angew. Math. Phys. 2016. Bd 67, Heft 3. S. 71.
20. Kovtunen V. A., Leugering G. A shape-topological control problem for nonlinear crack-defect interaction: The antiplane variational model // SIAM. J. Control Optim. 2016. V. 54, N 3. P. 1329–1351.
21. Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980.
22. Литвинов В. Г. Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике. М.: Наука, 1987.
23. Khludnev A. M., Faella L., Popova T. S. Junction problem for rigid and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies // Math. Mech. Solids. 2017. V. 22, N 4. P. 1–14.
24. Хлуднев А. М. Задача о равновесии пластины, содержащей наклонную трещину // Прикл. механика и техн. физика. 1997. Т. 38, № 5. С. 117–121.
25. Ковтуненко В. А., Леонтьев А. Н., Хлуднев А. М. Задача о равновесии пластины с наклонным разрезом // Прикл. механика и техн. физика. 1998. Т. 39, № 2. С. 164–174.
26. Лазарев Н. П. Задача о равновесии пластины Тимошенко с наклонной трещиной // Прикл. механика и техн. физика. 2013. Т. 54, № 4. С. 171–181.
27. Неустроева Н. В. Задача о равновесии упругой пластины, содержащей наклонную трещину на границе жесткого включения // Сиб. журн. индустр. математики. 2015. Т. 18, № 2. С. 74–84.
28. Лазарев Н. П. Задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину на границе упругого включения с бесконечной жесткостью поперечного сдвига // Прикл. математика и техн. физика. 2013. Т. 54, № 2. С. 179–189.
29. Пелех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. К.: Наук. думка, 1973.
30. Лазарев Н. П. Дифференцирование функционала энергии в задаче о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину // Прикл. математика и техн. физика. 2012. Т. 53, № 2. С. 175–185.

Поступила в редакцию 7 августа 2021 г.

После доработки 7 октября 2021 г.

Принята к публикации 26 ноября 2021 г.

Неустроева Наталья Валериановна
Северо-Восточный федеральный университет,
Институт математики и информатики,
Кулаковского, 48, Якутск 677000
nnataliav@mail.ru,

Лазарев Нюргун Петрович
Северо-Восточный федеральный университет,
Научно-исследовательский институт математики,
Белинского, 58, Якутск 677891
nyurgun@ngs.ru

OPTIMAL CONTROL OF THE CRACK
ANGLE IN THE EQUILIBRIUM
PROBLEM FOR A TIMOSHENKO
PLATE WITH ELASTIC INCLUSION

N. V. Neustroeva and N. P. Lazarev

Abstract: Mathematical modeling and research of problems on the deformation of inhomogeneous bodies containing cracks along elastic inclusions involves setting the conjugation conditions at the interface between different materials. Difficulties are associated with the possibility of large stress values appearing near the inclusions. Determining the inhomogeneous bodies with the most optimal parameters is one of the most popular areas of theoretical and experimental research. In this paper, we study the problem of optimal control of the angle of the crack inclination to the median plane in the equilibrium problem for an elastic Timoshenko plate containing an oblique crack at the boundary of an elastic inclusion. The complexity of the problem is due to the fact that the non-penetration condition on the crack faces is given in the form of inequality. The quality functional characterizes the deviation from the specified displacements. We prove solvability of the optimal control problem and establish continuous dependence of the solutions on the value of the crack inclination angle.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.71.81.005

Keywords: inclined crack, elastic inclusion, optimal control, plate, Timoshenko model.

REFERENCES

1. *Khudnev A. M.*, Elasticity Problems in Nonsmooth Domains [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2010).
2. *Khudnev A. M. and Kovtunen V. A.*, Analysis of Cracks in Solids, WIT Press, Southampton; Boston (2000).
3. *Lazarev N. and Semenova G.*, “An optimal size of a rigid thin stiffener reinforcing an elastic two-dimensional body on the outer edge,” *J. Optim. Theory Appl.*, **178**, 2, 614–626 (2018).
4. *Khudnev A. M.*, “On modeling thin inclusions in elastic bodies with a damage parameter,” *Math. Mech. Solids*, **24**, No. 9, 2742–2753 (2019).
5. *Khudnev A. and Popova T.*, “Equilibrium problem for elastic body with delaminated *T*-shape inclusion,” *J. Comput. Appl. Math.*, **376**, 112870 (2020).
6. *Rudoy E. and Shcherbakov V.*, “First-order shape derivative of the energy for elastic plates with rigid inclusions and interfacial cracks,” *Appl. Math. Optimization*, **84**, No. 3, 2775–2802 (2021).
7. *Khudnev A. and Fankina I.*, “Equilibrium problem for elastic plate with thin rigid inclusion crossing an external boundary,” *Z. Angew. Math. Phys.*, **72**, No. 3, 121 (2021).
8. *Khudnev A., Esposito A. C., and Faella L.*, “Optimal control of parameters for elastic body with thin inclusions,” *J. Optimization Theory Appl.*, **184**, No. 1, 293–314 (2020).
9. *Khudnev A.*, “*T*-shape inclusion in elastic body with a damage parameter,” *J. Comput. Appl. Math.*, **393**, 113540 (2021).

10. Lazarev N. and Rudoy E., "Optimal location of a finite set of rigid inclusions in contact problems for inhomogeneous two-dimensional bodies," *J. Comput. Appl. Math.*, **403**, 113710 (2022).
11. Khludnev A. M. and Sokolowski J., *Modelling and Control in Solid Mechanics*, Birkhäuser-Verl., Basel; Boston; Berlin (1997).
12. Vtorushin E. V., "Crack shape management in the elastic body under the condition of possible contact of shores [in Russian]," *Sib. J. Ind. Math.*, **9**, No. 2, 20–30 (2006).
13. Khludnev A. M. and Leugering G. R., "Optimal control of crack in elastic bodies with thin rigid inclusions," *Z. Angew. Math. Mech.*, **91**, No. 2, 125–137 (2011).
14. Lazarev N. P., "The existence of an extreme crack form in the problem of Timoshenko plate equilibrium [in Russian]," *Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform.*, **11**, No. 4, 49–62 (2011).
15. Khludnev A. M. and Negri M., "Optimal rigid inclusion shapes in elastic bodies with cracks," *Z. Angew. Math. Phys.*, **64**, No. 1, 179–191 (2013).
16. Lazarev N. P., "Problem of the Timoshenko plate equilibrium containing a crack along the thin rigid inclusion [in Russian]," *Vestn. Udmurt. Univ., Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, No. 1, 32–45 (2014).
17. Lazarev N. P., Neustroeva N. V., and Nikolaeva N. V., "Optimal control of tilt angles in equilibrium problems for the Timoshenko plate with an oblique cut," *Sib. Electron. Math. Rep.*, No. 12, 300–308 (2015).
18. Lazarev N. P., "Optimal control of the thickness of a rigid inclusion in equilibrium problems for inhomogeneous two-dimensional bodies with a crack," *Z. Angew. Math. Mech.*, **96**, No. 4, 509–518 (2016).
19. Shcherbakov V., "Shape optimization of rigid inclusions for elastic plates with cracks," *Z. Angew. Math. Phys.*, **67**, No. 3, 71 (2016).
20. Kovtunenkov V. A. and Leugering G., "A shape-topological control problem for nonlinear crack-defect interaction: The antiplane variational model," *SIAM J. Control Optim.*, **54**, No. 3, 1329–1351 (2016).
21. Banichuk N. V., *Optimization of Elastic Body Forms [in Russian]*, Nauka, Moscow (1980).
22. Litvinov V. G., *Optimization in the Elliptical Boundary Problems with Applications to Mechanics [in Russian]*, Nauka, Moscow (1987).
23. Khludnev A. M., Faella L., and Popova T. S., "Junction problem for rigid and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies," *Math. Mech. Solids*, **22**, No. 4, 1–14 (2017).
24. Khludnev A. M., "Equilibrium problem of an elastic plate with an oblique crack," *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **38**, No. 5, 757–761 (1997).
25. Kovtunenkov V. A., Leontiev A. N., and Khludnev A. M., "An equilibrium problem of a plate with an oblique cut," *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **39**, No. 2, 302–311 (1998).
26. Lazarev N. P., "Problem of Timoshenko plate equilibrium with an oblique crack," *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **54**, No. 4, 662–671 (2013).
27. Neustroeva N. V., "An equilibrium problem for an elastic plate with an inclined crack on the boundary of a rigid inclusion," *Sib. Zh. Ind. Mat.*, **18**, No. 2, 74–84 (2015).
28. Lazarev N. P., "Problem of the Timoshenko plate equilibrium containing a crack on the boundary of the elastic inclusion with infinite shear stiffness," *Appl. Math. Tech. Phys.*, **54**, No. 2, 179–189 (2013).
29. Pelekh B. L., *Theory of Shells with Finite Shear Rigidity [in Russian]*, Naukova Dumka, Kiev (1973).
30. Lazarev N. P., "Differentiation of the energy functional in the equilibrium problem for a Timo-

shenko plate containing a crack,” J. Appl. Mech. Tech. Phys., **53**, No. 2, 299–307 (2012).

Submitted August 7, 2021

Revised October 7, 2021

Accepted November 26, 2021

Natalia V. Neustroeva
North-Eastern Federal University,
Institute of Mathematics and Informatics,
48 Kulakovsky Street, Yakutsk 677000, Russia
nnataliav@mail.ru

Nyurgun P. Lazarev
North-Eastern Federal University,
Scientific Research Institute of Mathematics,
58 Belinsky Street, Yakutsk 677891, Russia
nyurgun@ngs.ru

О ТЕОРЕМАХ КОМПАКТНОСТИ, СВЯЗАННЫХ С ЗАДАЧАМИ С НЕИЗВЕСТНОЙ ГРАНИЦЕЙ

А. Г. Подгаев

Аннотация. Доказывается часть результатов, относящихся к исследованию задач с неизвестной границей методами компактности, которые были представлены на IX Международной конференции по математическому моделированию, посвященной 75-летию В. Н. Врагова. Дано обоснование теоремы об относительной компактности, которую можно применять при исследовании задач типа задачи Стефана с неизвестной частью границы, а также в задачах для уравнений переменного типа с неизвестной границей смены типа. Приведен пример такой задачи и показано, что полученные оценки на приближенные решения уравнения и функции, описывающие последовательность границ, приближающуюся к искомой границе фазового перехода, полностью совпадают с условиями, сформулированными в основной теореме о компактности.

Автору не известны теоремы подобного типа. Теорема является новым видом теорем компактности, приспособленным к задачам типа Стефана.

Для лучшего восприятия приведены наиболее простые условия при которых справедлив результат, совпадающие с условиями рассмотренного примера. Однако результат может быть обобщен на значительно более общие ситуации, такие как число границ фазового перехода и замену оценки второй производной оценкой более сложного агрегата, встречающегося в уравнениях с вырождениями на решениях.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.37.71.006

Ключевые слова: относительная компактность, нецилиндрическая область, неизвестная граница, условие Стефана.

Введение

Необходимость обоснования предложенных в работе результатов вызвана одним из разрабатываемых автором методов исследования задач с неизвестной границей. В параболических уравнениях к таким задачам можно отнести задачи типа Стефана, а также некоторые задачи для уравнений переменного типа, в которых граница смены типа (смены направления параболичности) также определяется вместе с решением. В этих задачах неизвестная граница (называемая свободной) находится по дополнительному условию на этой границе.

Некоторые результаты и обзоры по современному состоянию первого типа задач изложены в [1–8]. Имеются также классические работы А. Фридмана, Л. Рубинштейна, А. М. Мейрманова.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, Хабаровского отделения регионального научно-образовательного математического центра «Дальневосточный центр математических исследований» (дополнительное соглашение № 075–02–2020–1529/1 от 21 апреля 2020 г.).

Последние публикации по задачам для уравнений переменного типа с неизвестными границами смены типа в основном относятся к случаю, когда на свободной границе явно дополнительные условия не рассматриваются [9–14]. Но и к этим задачам можно применить построенный в этой работе алгоритм.

Рассматривая нестационарные задачи в естественной физической меняющейся со временем пространственной области и получив соотношение между искомым решением и функцией, описывающей неизвестную границу, мы строим итерационный процесс. На одном из шагов процесса необходимо по заданной криволинейной границе (и тем самым в нецилиндрической области переменных (x, t)) определить решение краевой задачи. А после его нахождения определить следующую криволинейную границу. При этом для рассматриваемой здесь задачи, одновременно определяем и приближение к одному из постоянных коэффициентов задачи.

Один из шагов процесса требует развития методов исследования нестационарных задач в нецилиндрической области. Этот вопрос решался в ряде старых исследований, но интерес к нему в связи с новыми идеями и целями возникает и сейчас постоянно. В частности, этому посвящены некоторые работы автора.

Следующий шаг, когда получена последовательность решений, каждое из которых определено в своей области, требует обоснования возможности предельного перехода. Оставаясь в физической области решения, для этого желательно иметь некоторые теоремы компактности. Главной целью работы и является получение результата такого типа. Используя монотонность элементов последовательности границ, можно построить монотонную (по t) «шкалу» пространств (функций от пространственной переменной). И тогда на полученные здесь результаты для случая нецилиндрических областей можно смотреть как на теоремы (относительной) компактности некоторых множеств абстрактных функций со значениями в «шкале» банаховых пространств. Поэтому идейно результаты опираются на методику, приведенную в [15]. Для случая цилиндрических областей и анизотропных пространств (типа $L_p(0, T; B)$) такие теоремы имеются, например, в [16, 17].

Другой, наиболее распространенный, подход (см., например, работы А. М. Мейрманова) к исследованию задач с неизвестной границей состоит в том, чтобы, используя растяжение переменных, задачу в неизвестной области свести к начально-краевой задаче для параболического уравнения в известной цилиндрической области, но с неизвестными коэффициентами в уравнении. Эти коэффициенты находятся по дополнительному краевому условию. Чтобы их найти, необходимо построить некоторый нелинейный оператор, неподвижные точки которого определяют решение исходной задачи. Этот подход, как правило, приводит к некоторым требованиям малости (обычно промежутка времени) и более жестким требованиям (по сравнению с предлагаемым в работе) на гладкость искомой границы.

Еще один подход, основанный на введенном С. Л. Каменостской и О. А. Олейник понятии обобщенного решения задачи Стефана оказался эф-

фективным при рассмотрении многомерных задач. Дюво предложил способ сведения этой задачи к вариационному неравенству. Однако оба эти подхода, обладая большой общностью, теряют значительную часть полученной информации: не остается никакой информации о структуре раздела фаз, о принадлежности неизвестной границы какому-либо классу и о том, в каком смысле удовлетворяется условие Стефана. Предлагаемый в работе подход гарантирует принадлежность границы классу типа W_p^1 , а также в явном виде может дать информацию о границе фазового перехода, например, с использованием численных расчетов.

Перед формулировкой и обосновыванием основной теоремы будет разобран конкретный пример задачи, выведен итерационный процесс, показано, что для нее можно получить именно те оценки, которые будут использованы в теореме компактности.

Однако рассматриваемая в примере задача отличается от стандартной задачи Стефана. В работе рассматривается однофазная задача с расширением жидкой фазы в среду с постоянной температурой, равной температуре плавления ($= 0$), в которой считается заданной величина растаявшего вещества за данный промежуток времени. Неизвестными в этой задаче, как и в задаче Стефана, являются, температура в каждой точке в каждый момент времени, а также граница перехода твердой фазы в жидкую. Но, в отличие от задачи Стефана, скрытая удельная теплота плавления также подлежит определению.

1. Пример получения необходимых оценок и вывода итерационного процесса

Трехмерная задача с неизвестной границей для нелинейного уравнения теплопроводности

$$c_t = \varphi(c)\Delta c = \operatorname{div}(\varphi(c)\nabla c) - \varphi'(c)|\nabla c|^2$$

(чаще записывают уравнение в виде $\frac{1}{\varphi(c)}c_t = \Delta c$) в шаровом слое $1 < |x| < r(t)$, где $r(t)$ — неизвестная функция, подлежащая определению вместе с решением $c(x, t)$ уравнения, при предположении центральной симметричности начальной функции может быть сведена (заменой $c(x, t) = u(r, t)$, где r — евклидово расстояние от x до начала координат) к следующей задаче ($\Phi(u) = \int_0^u \varphi(\xi)d\xi$):

$$u_t = (\Phi(u))_{rr}'' - \varphi'(u)(u_r')^2 + \frac{2}{r}\varphi(u)u_r', \quad 1 < r < r(t), \quad t \in (0, T), \quad (1)$$

$$u(r, 0) = u_0(r), \quad 1 \leq r \leq 2, \quad (2)$$

$$(\Phi(u))_r' = 0 \quad \text{при } r = 1, \quad t \in (0, T), \quad (3)$$

$$u = 0 \quad \text{при } r = r(t), \quad t \in (0, T), \quad (4)$$

$$(\Phi(u))_r' = -Lr'(t) \quad \text{при } r = r(t), \quad t \in (0, T). \quad (5)$$

Предполагаем, что функция $\varphi'(\xi)$ непрерывна для всех ξ , а также что

$$\varphi(\xi) \geq \delta > 0, \quad \xi\varphi'(\xi) \geq 0. \quad (6)$$

Введем нецилиндрическую область $Q_t = \{(r, \tau) : 1 < r < r(\tau), \tau \in (0, t)\}$. При предположении, что $u_0(r) \geq 0$, $u_0(2) = 0$, $u_0 \in W_2^1$, будет видно, что $r(t)$ не убывает, что $r(t) \in W_2^1(0, T)$ и, следовательно, непрерывна по Гёльдеру.

Представляя интеграл по Q_t как

$$\int_1^2 \int_0^t d\tau dr + \int_2^{r(t)} \int_{\theta(r)}^t d\tau dr$$

и как

$$\int_0^t \int_1^2 dr d\tau + \int_0^t \int_2^{r(t)} dr d\tau$$

(где $t = \theta(r)$ — уравнение неизвестной границы) и интегрируя по Q_t уравнение (1) с условиями (2)–(5), выведем важное для дальнейшего интегральное соотношение

$$L(r(t) - 2) = \int_1^2 u_0(r) dr - \int_1^{r(t)} u(r, t) dr + \int_0^t \int_1^{r(\tau)} \left(\frac{2}{r} \varphi(u) u' - \varphi'(u) u'^2 \right) dr d\tau. \quad (7)$$

Однако можно и непосредственно проверить, что задачи (1)–(5) и (1)–(4), (7) эквивалентны.

В отличие от задачи Стефана, в данной задаче мы считаем величину L — скрытую удельную теплоту плавления вещества, также подлежащей определению, поэтому дополнительно требуем, чтобы в заданный (конечный) момент времени $t = T$ объем растаявшей фазы достиг заданной величины. Это эквивалентно заданию величины $r(T)$. Поэтому далее считаем, что

$$r(T) = \ell, \quad \text{где } \ell > 2 \text{ — заданная постоянная.} \quad (8)$$

На основании соотношения (7) определим следующий итерационный процесс:

$$\begin{aligned} L_n(r^{n+1}(t) - 2) = & \int_1^2 u_0(r) dr - \int_1^{r^n(t)} u^n(r, t) dr \\ & + \int_0^t \int_1^{r^n(\tau)} \left(\frac{2}{r} \varphi(u^n) u_r^n - \varphi'(u^n) u_r^{n2} \right) dr d\tau \end{aligned} \quad (9)$$

$$r^{n+1}(T) = \ell, \quad r^0(t) = \frac{\ell - 2}{T} t + 2, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Функция $u^n(r, t)$ строится по $r^n(t)$ как решение следующей краевой задачи в заданной нецилиндрической области $Q_T^n = \{(r, \tau) : 1 < r < r^n(t), \tau \in (0, T)\}$:

$$u_t^n = (\Phi(u^n))_{rr}'' - \varphi'(u^n)(u_r^n)^2 + \frac{2}{r} \varphi(u^n) u_r^n, \quad 1 < r < r^n(t), \quad t \in (0, T), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} u^n(r, 0) &= u_0(r), \quad 1 \leq r \leq 2, \quad u_0 \geq 0, \\ (\Phi(u^n))'_r &= 0 \quad \text{при } r = 1, \quad t \in (0, T), \\ u^n &= 0 \quad \text{при } r = r^n(t), \quad t \in (0, T) \end{aligned}$$

по известной правой границе такой, что для всех n

$$r^n(t) \in W_2^1(0, T), \quad \frac{d}{dt} r^n(t) \geq 0, \quad r^n(0) = 2, \quad r^n(T) = \ell,$$

а L^n определяется после этого из (9), исходя из требования $r^{n+1}(T) = \ell$ для всех $n = 0, 1, 2, \dots$, т. е.

$$L_n(\ell - 2) = \int_1^2 u_0(r) dr - \int_1^\ell u^n(r, T) dr + \int_0^T \int_1^{r^n(\tau)} \left(\frac{2}{r} \varphi(u^n) u_r^n - \varphi'(u^n) u_r^{n2} \right) dr d\tau. \quad (11)$$

Если $L_n = 0$, то полагаем, например, $r^{n+1}(t) = r^0(t)$.

В случае решения обычной задачи Стефана с заданной L , которую мы здесь, однако, не рассматриваем, r^{n+1} находится из (9) при $L_n = L$.

Покажем, как для случая нецилиндрической области получаются оценки производных по r .

Опуская в задаче (10) на время индексы n сверху, будем искать приближенное решение задачи (10) в виде

$$u_m = \sum_{k=0}^m c_k^n(t) \omega_k(r, t), \quad \text{где } \omega_k(r, t) = \sqrt{2} \cos \left[\left(\frac{\pi}{2} + \pi k \right) \frac{r-1}{r(t)-1} \right],$$

исходя из требований

$$\begin{aligned} & \int_1^{r(t)} u_{mt}(r, t) \omega_j(r, t) dr + \int_1^{r(t)} (\Phi(u_m))'_r \omega_{jr}(r, t) dr \\ & + \int_1^{r(t)} \varphi'(u_m) u_{mr}^2 \omega_j(r, t) dr = 2 \int_1^{r(t)} \frac{1}{r} \varphi(u_m) u_{mr} \omega_j(r, t) dr, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (12)$$

$$u_m(r, 0) = \sum_{k=1}^m c_k \omega_k(r, 0), \quad c_k = \int_1^2 u_0(r) \omega_k(r, 0) dr.$$

Заметим, что для всех $t \in [0, T]$ система функций $\{\omega_k(r, t)\}_{k=1}^\infty$ ортогональная и полная как в пространстве $L_2(1, r(t))$, так и в пространстве функций из $W_2^1(1, r(t))$, равных нулю при $r = r(t)$. При этом

$$\int_1^{r(t)} \omega_k(r, t) \omega_j(r, t) dr = \delta_k^j (r(t) - 1).$$

Отсюда, в частности, следует, что для коэффициентов Фурье c_k функции $u_0(r) \in W_2^1(1, 2)$ такой, что $u_0(2) = 0$, будем иметь

$$u_m(r, 0) = \sum_{k=0}^m c_k \omega_k(r, 0) \rightarrow u_0(r)$$

в $L_2(1, 2)$ и в $W_2^1(1, 2)$.

Важно заметить здесь, что

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} = \sum_{k=0}^m \left(\frac{dc_k^m}{dt} \omega_k(r, t) + c_k^m(t) \frac{\partial \omega_k}{\partial t}(r, t) \right), \quad (*)$$

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial t} = \sqrt{2} \left(\frac{\pi}{2} + \pi k \right) \frac{r-1}{(r(t)-1)^2} r'(t) \sin \left[\left(\frac{\pi}{2} + \pi k \right) \frac{r-1}{r(t)-1} \right]. \quad (**)$$

Это отличает проекционный метод данной работы от классического случая цилиндрических областей.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (12) эквивалентна нормальной форме

$$\begin{aligned} \sqrt{2}(r(t)-1) \frac{dc_j^m(t)}{dt} &= - \sum_{k=0}^m c_k^m(t) \int_1^{r(t)} \omega'_{kt}(r, t) \omega_j(r, t) dr \\ &- \int_1^{r(t)} [(\Phi(u_m))'_r \omega'_{jr}(r, t) + \varphi'(u_m) u_{mr}^2 \omega_j(r, t)] dr, \quad c_j^m(0) = c_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Заметим, что в силу (**) в правую часть этой системы входит $r'(t) \in L_2(0, T)$. Выполнение условия леммы Вишика — Дубинского, гарантирующего глобальную разрешимость задачи Коши, следует из полученной ниже оценки. Остальные условия для системы выполнены ($\varphi'(\xi)$ непрерывна), кроме линейной части, в которую входит $r'(t)$. Однако это не мешает гарантировать (одна из публикаций автора) существование глобального решения из класса $W_2^1(0, T)$ и в этом случае.

Стандартно из равенства (12) можно получить равенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_1^{r(t)} u_m^2 dr + \int_1^{r(t)} [\varphi(u_m) + \varphi'(u_m) u_m] u_{mr}^2 dr = 2 \int_1^{r(t)} \frac{1}{r} \varphi(u_m) u_m u_{mr} dr. \quad (13)$$

Преобразуем правую часть, вводя функцию

$$\varphi_1(\xi) = \int_0^\xi \varphi(\eta) \eta d\eta \geq \frac{\delta}{2} \xi^2,$$

а именно:

$$2 \int_1^{r(t)} \frac{1}{r} \varphi(u_m) u_m u_{mr} dr = 2 \int_1^{r(t)} \frac{\partial}{\partial r} (\varphi_1(u_m)) \frac{1}{r} dr = 2 \int_1^{r(t)} \frac{\varphi_1(u_m)}{r^2} dr - 2\varphi_1(u_m(1, t)).$$

Определив функцию

$$\psi(u) = \int_0^u \sqrt{\varphi(\eta) + \eta\varphi'(\eta)} d\eta,$$

тождество (13) можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_1^{r(t)} u_m^2 dr + \int_1^{r(t)} \left| \frac{\partial \psi(u_m)}{\partial r} \right|^2 dr + 2\varphi_1(u_m(1, t)) = 2 \int_1^{r(t)} \frac{\varphi_1(u_m)}{r^2} dr. \quad (14)$$

Кроме условия (6) на функцию φ предполагается выполненным:

$$\forall u \in R \quad \varphi_1(u) \leq c_1 \psi^2(u) + c_2 u^2 + c_3, \text{ где } 2c_1(\ell - 1 - \ln \ell) < 1. \quad (15)$$

Также отметим, что для функций $u(r, t)$, равных нулю при $r = r(t)$, выполнено неравенство

$$|\psi(u)|^2 \leq (r(t) - r) \int_1^{r(t)} \left| \frac{\partial}{\partial r} \psi(u) \right|^2 dr. \quad (16)$$

Из (15), (16) вытекает

$$\begin{aligned} 2 \int_1^{r(t)} \frac{\varphi_1(u_m)}{r^2} dr &\leq 2c_1 \int_1^{r(t)} \frac{r(t) - r}{r^2} dr \int_1^{r(t)} \left| \frac{\partial}{\partial r} \psi(u_m) \right|^2 dr + 2c_2 \int_1^{r(t)} u_m^2 dr + 2c_3(\ell - 1) \\ &\leq 2c_1(\ell - 1 - \ln \ell) \int_1^{r(t)} \left| \frac{\partial}{\partial r} \psi(u_m) \right|^2 dr + 2c_2 \int_1^{r(t)} u_m^2 dr + 2c_3(\ell - 1). \end{aligned}$$

Здесь использован тот факт, что на каждом шаге $r(t) \leq \ell$, и возрастание функции $r - 1 - \ln r$ при $r > 1$. Из последней оценки, оценок (15), (16) и леммы Гронуолла получаем равномерную по m оценку

$$\int_1^{r(t)} u_m^2 dr + \int_0^t \int_1^{r(\tau)} \left| \frac{\partial}{\partial r} \psi(u_m) \right|^2 dr d\tau + \int_0^t \varphi_1(u_m(1, \tau)) d\tau \leq c, \quad (17)$$

из (17) и (16) следует, что $\int_0^t |\psi(u_m)| d\tau$ также равномерно ограничен.

Оценку (17) можно получить (при других предположениях) без условия связи φ и параметра ℓ . Действительно, предположим, что вместо (15) выполнено неравенство

$$\varphi_1(u) \leq \overline{c}_1 |\psi(u)|^{p_1} + \overline{c}_2 u^2 + \overline{c}_3, \quad 1 \leq p_1 < 2. \quad (18)$$

Используя неравенство Коши с ε , оценивая первое слагаемое справа в (18) через $\varepsilon \psi^2(u) + c(\varepsilon)$, аналогично получим оценку (17). Условие (18) интересно тем, что

оно выполнено, например, для важного случая степенной зависимости φ от u . Так, функция

$$\varphi(u) = \frac{1}{2s+1} \left(u^s + \frac{2s+1}{s+1} \right)^2 + \left(\frac{s}{s+1} \right)^2,$$

для которой $\varphi_1(u) = (u^s + 1)^2$, s четное, удовлетворяет (18) с $p_1 = \frac{2s}{s+1}$ (и условию (6)).

Для получения второй группы оценок умножим левые и правые части равенств на $-\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \pi j}{r(t) - 1}\right)^2 c_j^m(t)$ и просуммируем по j от 0 до m . После некоторых преобразований, используя равенства

$$u_m(r(t), t) = 0, \quad u_{mr}(1, t) = 0, \quad u_{mt}(r(t), t) = -u_{mr}(r(t), t)r'(t),$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_1^{r(t)} u_{mr}^2 dr + \frac{1}{2} u_{mr}^2(r(t), t) r'(t) + \int_1^{r(t)} \varphi(u_m) u_{mrr}^2 dr &= 2 \int_1^{r(t)} \frac{\varphi(u_m) u_{mr} u_{mrr}}{r} dr \\ &\leq \varepsilon \int_1^{r(t)} \varphi(u_m) u_{mrr}^2 dr + c(\varepsilon) \int_1^{r(t)} \varphi(u_m) u_{mr}^2 dr, \quad \varepsilon < 1. \end{aligned} \quad (19)$$

Используя неотрицательность $r'(t)$ и выполнение условия (6), интегрируя по t (19), из (17) получим вторую равномерную оценку ($\varepsilon = \frac{1}{2}$):

$$\int_1^{r(t)} u_{mr}^2 dr + \int_0^t u_{mr}^2(r(\tau), \tau) r'(\tau) d\tau + 2\delta(1 - \varepsilon) \int_0^t \int_1^{r(\tau)} u_{mrr}^2 dr d\tau \leq c\varepsilon + \tilde{c}, \quad (20)$$

где $\tilde{c}$ равномерно ограничивают $\int_1^2 u_{mr}^2(r, 0) dr$ в силу $u_0(r) \in W_2^1(1, 2)$ и $u_0(2) = 0$.

Из этой оценки, в частности, следует, что $|u_m(r, t)| \leq c$.

Для получения равномерных оценок по t напомним, что имеют место равенства (*) и (**). Поэтому

$$\sum_{k=0}^m \frac{\partial c_k^m}{\partial t} \omega_k(r, t) = \frac{\partial u_m}{\partial t} + \frac{\partial u_m}{\partial r} \frac{r-1}{r(t)-1} r'(t). \quad (21)$$

Умножим каждое уравнение в (12) на $\frac{d}{dt} c_j^m(t)$ и просуммируем по j от 0 до m . Преобразуя полученное равенство и используя (21), выведем

$$\begin{aligned} \int_1^{r(t)} u_{mt} \left(u_{mt} + u_{mr} \frac{r-1}{r(t)-1} r'(t) \right) dr \\ = \int_1^{r(t)} \left(\varphi(u_m) u_{mrr} + \frac{2}{r} \varphi(u_m) u_{mr} \right) \left(u_{mt} + u_{mr} \frac{r-1}{r(t)-1} r'(t) \right) dr \end{aligned}$$

$$= \int_1^{r(t)} u_{mt}^2 dr + \frac{r'(t)}{r(t)-1} \int_1^{r(t)} u_{mt} u_{mr} (r-1) dr.$$

Используем это представление для оценки u_{mt}^2 . Из (20) получим с новым ε

$$\begin{aligned} \frac{r'(t)}{r(t)-1} \int_1^{r(t)} u_{mt} u_{mr} (r-1) dr &\leq r'(t) \left(\int_1^{r(t)} u_{mr}^2 dr \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_1^{r(t)} u_{mt}^2 dr \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \varepsilon \int_1^{r(t)} u_{mt}^2 dr + c(\varepsilon) r'^2(t). \end{aligned}$$

Из непрерывности φ , равномерной ограниченности u_m и (20) получим

$$\begin{aligned} &\int_1^{r(t)} \left(\varphi(u_m) u_{mrr} + \frac{2}{r} \varphi(u_m) u_{mr} \right) \left(u_{mt} + u_{mr} \frac{r-1}{r(t)-1} r'(t) \right) dr \\ &\leq c \left(\int_1^{r(t)} \varphi(u_m) u_{mrr}^2 dr \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_1^{r(t)} u_{mt}^2 dr \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \varepsilon \int_1^{r(t)} u_{mt}^2 dr + c(\varepsilon) + cr'(t) \left(\int_1^{r(t)} \varphi(u_m) u_{mrr}^2 dr \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ cr'(t) \leq 2\varepsilon \int_1^{r(t)} u_{mt}^2 dr + c(\varepsilon) \int_1^{r(t)} \varphi(u_m) u_{mrr}^2 dr + cr'^2(t) + c \int_1^{r(t)} \varphi(u_m) u_{mrr}^2 dr + c(\varepsilon). \end{aligned}$$

Выбирая $\varepsilon = \varepsilon_0 < \frac{1}{3}$ и интегрируя неравенство, получим равномерную по m оценку

$$\int_0^t \int_1^{r(\tau)} u_{mt}^2 dr d\tau \leq c \left(\int_0^T r'^2(\tau) d\tau + 1 \right). \quad (22)$$

При фиксированной $r(t) \in W_2^1(0, T)$ из оценок (20), (21), применяя теорему компактности для «шкалы» пространств из работы [15], можно вывести наличие подпоследовательности, сходящейся по норме

$$\left(\int_0^T \int_1^{r(t)} (|u(r, \tau)|^{p_1} + |u_r(r, \tau)|^{p_1}) dr d\tau \right)^{\frac{1}{p_1}}$$

для любого $p_1 \in [1, \infty)$ и почти всюду. Тогда из оценки

$$u_{mr}^4(r, t) = \left(\int_1^r \frac{\partial u_{mr}^2(s, t)}{\partial s} ds \right)^2 \leq 4 \int_1^r u_{mr}^2 ds \int_1^r u_{mrr}^2 ds \leq 4c \int_1^r u_{mrr}^2 ds,$$

следует, что семейство $\{u_{mr}^2\}$ равномерно ограничено в норме $L_2(Q_T)$. И по известной лемме это позволяет заключить, что u_{mr}^2 сходится в $L_q(0, T; L_q(1, r(t)))$, $q < 2$.

Воспользуемся леммой, установленной в одной из работ автора.

Лемма. Пусть $T \in (0, \infty)$ — заданное число, $x = s(t)$ — заданная функция, определенная на отрезке $[0, T]$, такая, что $s(t) \in W_2^1(0, T)$, $s(0) = 1$, $s(t) > 0$, $t \in [0, T)$ и отрезок $[0, T]$ можно разбить на конечное число интервалов, на каждом из которых $s'(t) \geq 0$ п.в. либо $s'(t) \leq 0$ п.в. Случай $s(T) = 0$ допустим. Тогда

$$(W_2^1(Qs) \cap L_\infty(0, T; \widetilde{W}_2^1(0, s(t)))) \subset C^{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}(\overline{Q}_s) \subset C^{\frac{1}{4}}(\overline{Q}_s).$$

Здесь $Q_s = \{(x, t) : 0 < x < s(t), t \in (0, T)\}$.

Для случая цилиндрических областей этот результат известен.

Вместе с равномерной сходимостью, следующей из этой леммы, установленная предыдущая сходимость позволяет перейти к пределу в нелинейных членах $\varphi(u_m)u_{mr}$, $\varphi'(u_m)u_{mr}^2$ соответствующего интегрального тождества, получающегося из (12) стандартным образом.

Это заканчивает обоснование наличия решения задачи (10) при фиксированной функции $r(t) \in W_2^1(0, T)$.

Теперь покажем, как для этой задачи получить равномерные оценки по номеру итерации n .

Оценки типа (20), очевидно, остаются справедливыми и для семейства u_n .

Исключение составляет оценка u_t^n . При ее оценке в правую часть входила норма $\frac{dr^n(t)}{dt}$ в $L_2(0, T)$. Она гарантировала непрерывность (и на самом деле даже гёльдеровость) u^n при фиксированном n , но не давала равномерной по n оценки u_t^n . Однако поскольку уравнение для u^n можно записать (почти всюду) в виде

$$u_t^n = \varphi(u^n) \left(u_{rr}^n + \frac{2}{r} u_r^n \right) \quad \text{в } Q_T^n = \{(r, t) : 1 < r < r^n(t), t \in (0, T)\}, \quad (23)$$

равномерная по n оценка производной по t следует из этого уравнения и имеющихся оценок величин, стоящих справа. Поэтому далее считаем, что для u^n выполнены равномерные по n оценки в $L_\infty(0, T; L_2(1, r^n(t)))$ функций u^n , u_r^n , и в $L_2(Q_T^n)$ функций u_{rr}^n , и u_t^n и, следовательно, равномерные оценки u^n в $C(\overline{Q}_T^n)$.

Ниже мы покажем, что неотрицательность $\frac{d}{dt}r^n(t)$ следует из принципа максимума, состоящего в том, что при $u_0(r) \geq 0$, $u_0 \in W_2^1(1, 2)$, $u_0(2) = 0$ решение задачи (10) неотрицательно в $Q_T = \{(r, t) : 1 < r < r(t), t \in (0, T)\}$.

Последний можно установить стандартными рассуждениями, применявшимися для уравнений в цилиндрических областях.

Некоторые детали состоят в том, что первоначально надо переписать уравнение для u^n в виде

$$\frac{u_t^n}{\varphi(u^n)} = \left(u_{rr}^n + \frac{2}{r} u_r^n \right). \quad (24)$$

Записать (24) в виде интегрального тождества

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_1^{r^n(t)} \frac{u_t^n(r, \tau)}{\varphi(u^n)} f(r, \tau) dr d\tau + \int_0^T \int_1^{r^n(t)} u_r^n(r, \tau) f_r(r, \tau) dr d\tau \\ - 2 \int_0^T \int_1^{r^n(t)} \frac{u_r^n(r, \tau) f(r, \tau)}{r} dr d\tau = 0 \end{aligned}$$

для любых f из $L_2((1, \ell) \times (0, T))$ таких, что $f_r \in L_2((1, \ell) \times (0, T))$ и $f(r(t), t) = 0$.

Ввести определенную на $[1, \ell] \times [0, T]$ функцию

$$U^n(r, t) = \begin{cases} u^n(r, t), & \text{если } r \leq r^n(t), \\ 0, & \text{если } r \geq r^n(t), \end{cases}$$

непрерывность которой на $[1, \ell] \times [0, T]$ следует из непрерывности u^n .

Перепишем для нее интегральное тождество в виде

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_1^\ell \frac{U_t^n(r, \tau)}{\varphi(U^n)} f(r, \tau) dr d\tau + \int_0^T \int_1^\ell U_r^n(r, \tau) f_r(r, \tau) dr d\tau \\ - 2 \int_0^T \int_1^\ell \frac{U_r^n(r, \tau) f(r, \tau)}{r} dr d\tau = 0. \quad (25) \end{aligned}$$

После этого можно приступить к обоснованию принципа максимума. Для этого рассмотрим срезку $\bar{U}^n(r, t) = \min(U^n(r, t), 0)$.

Известно, что так как для почти всех t функция U^n имеет обобщенную производную по r из $L_2(1, \ell)$, то $\frac{\partial \bar{U}^n}{\partial r} \in L_2(1, \ell)$ и на измеримом множестве

$$E_{nt}^- = \{r \in (1, \ell) : U^n < 0\} = \{r \in (1, \ell) : \bar{U}^n < 0\}$$

выполнены равенства $\bar{U}^n = U^n$, $\bar{U}_r^n = U_r^n$, а также равенство $\frac{\partial \bar{U}^n}{\partial r} = 0$ на множестве $\{r \in (1, \ell) : U^n \geq 0\}$.

Аналогично для п.в. $r \in (1, \ell)$ функция U^n имеет обобщенную производную по t из $L_2(0, T)$ и

$$U^n = \bar{U}^n, \quad \frac{\partial \bar{U}^n}{\partial t} = \frac{\partial U^n}{\partial t} \quad \text{на } E_{nr}^- = \{t \in (0, T) : U^n < 0\},$$

а также U^n , $\frac{\partial \bar{U}^n}{\partial t} \in L_2(0, T)$, где $\frac{\partial}{\partial t}$ — обобщенная производная. Кроме того, $\frac{\partial \bar{U}^n}{\partial t} = 0$ на $E_{nr}^+ = \{t \in (0, T) : U^n \geq 0\}$.

По теореме Фубини поменяем порядок интегрирования в первом слагаемом тождества (25) и рассмотрим его на пробных функциях $f = f^t(r, \tau)$: $f^t(r, \tau) = 0$ при $\tau \geq t$. Затем одну из них возьмем равной $\bar{U}^n(r, \tau)$ при $\tau < t$ и равной 0 при $\tau \geq t$.

Для первого слагаемого получим

$$\begin{aligned}
 \int_1^\ell \int_0^t \frac{U_t^n(r, \tau) \bar{U}^n(r, \tau)}{\varphi(U^n)} d\tau dr &= \int_1^\ell \int_{E_{n-r}^-} \frac{\bar{U}_t^n(r, \tau) \bar{U}^n(r, \tau)}{\varphi(\bar{U}^n)} d\tau dr \\
 &= \frac{1}{2} \int_1^\ell \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \Phi_1(\bar{U}^n) d\tau dr = \frac{1}{2} \int_1^\ell (\Phi_1(\bar{U}^n(r, t)) - \Phi_1(\bar{U}^n(r, 0))) dr \\
 &= \frac{1}{2} \int_1^\ell \Phi_1(\bar{U}^n(r, t)) dr. \quad (26)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\Phi_1(u) = \int_0^u \frac{\xi}{\varphi(\xi)} d\xi \geq 0,$$

а $\Phi_1(\bar{U}^n(r, 0)) = 0$, так как $u_0 \geq 0$ на $(1, 2)$.

Для остальных слагаемых тождества получим

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \int_1^\ell r U_r^n \bar{U}_r^n dr d\tau - \int_0^t \int_1^\ell U_r^n \bar{U}^n dr d\tau &= I - \frac{1}{2} \int_0^t \int_1^\ell ((\bar{U}^n)^2)_r dr d\tau \\
 &= I - \frac{1}{2} \int_0^t ((\bar{U}^n(\ell, \tau))^2 - (\bar{U}^n(1, \tau))^2) d\tau = I + \frac{1}{2} \int_0^t (\bar{U}^n)^2(1, \tau) d\tau \geq 0.
 \end{aligned}$$

Поэтому

$$\int_0^\ell r \Phi_1(\bar{U}^n(r, t)) dr = 0.$$

А так как $\Phi_1(\xi) \geq 0$ для всех ξ и $\Phi_1(\xi) = 0$ тогда и только тогда, когда $\xi = 0$, то $\bar{U}^n(r, t) = 0$ п.в. Это означает, что $U^n(r, t) \geq 0$ п.в., т. е. $u^n \geq 0$. Принцип максимума установлен.

Осталось показать, что неравенство $\frac{dr(t)}{dt} \geq 0$ и условие $r^n(t) \in W_2^1(0, T)$, которые использованы в формулировке теоремы компактности, действительно возникает в задачах с условием Стефана.

Для этого продифференцируем равенство (9) по t . Получим, используя наличие следа у функции $u_r^n(r, t)$ на непрерывной кривой $r = r^n(t)$ и условие (3), что

$$\begin{aligned}
 L_n \frac{d}{dt} r^{n+1}(t) &= - \int_1^{r^n(t)} u_t^n dr + \int_1^{r^n(t)} \left(\frac{2}{r} \varphi(u^n) u_r^n - \varphi'(u^n) u_r^{n2} \right) dr \\
 &= -\varphi(0) u_r^n(r^n(t), t). \quad (27)
 \end{aligned}$$

Это и есть условие Стефана (5). Однако в силу того, что $u^n(r, t) \geq 0$, будет выполнено $u_r^n(r^n(t), t) \leq 0$. Если $L_n = 0$, то полагали, что $r^{n+1}(t) = r^0(t) =$

$\frac{\ell-2}{T}t + 2$, т. е. для таких n монотонность выполнена. Если же $L_n \neq 0$, то (в силу (27)) величина $\frac{dr(t)}{dt}$ знакопостоянная. Но так как $0 = r(0) < r(T) = \ell$, $\ell > 2$, необходимо $\frac{dr(t)}{dt} \geq 0$ (а потому и $L_n > 0$).

ЗАМЕЧАНИЕ. В условии Стефана можно рассмотреть и случай, когда коэффициент L может зависеть от $r(t)$, как в [4, 7].

2. Теоремы об относительной компактности

Переходим к формулировкам и обоснованиям основной части работы — утверждениям об относительной компактности множеств функций, определенных на нецилиндрических областях (каждая на своей) в анизотропных пространствах.

2.1. Стационарный случай. Пусть, на время, r^n и r константы, $1 \leq r^n \leq \ell$ и $r^n \rightarrow r$ при $n \rightarrow \infty$; $0 < \nu < 1$. Обозначим для заданных c и $\ell > 2$ множество функций, определенных на $[1, \ell]$:

$$G_c = \left\{ \tilde{v}_n(\varrho) \in C^\nu([1, \ell]) : \tilde{v}_n(\varrho) = \begin{cases} w_n(\varrho), & 1 \leq \varrho < r^n, \\ 0, & r^n \leq \varrho \leq \ell, \end{cases} \quad \text{где} \right. \\ \left. 1 \leq r^n \leq \ell, \quad r^n \rightarrow r, \quad \int_1^\ell (\tilde{v}_n^2 + \tilde{v}_{n\varrho}^2) d\varrho \leq c, \quad \int_1^{r^n} w_{n\varrho}^2 d\varrho \leq c \right\}.$$

Очевидно, что $\tilde{v}_n(r^n) = 0$.

Лемма 1. Для любого $c < \infty$ множество G_c для всех q_0 : $1 \leq q_0 < 2$ относительно (счетно) компактно в $W_{q_0}^1(0, l)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим числа $R^N = \inf_{n \geq N} \{r^n, n = 1, 2, 3, \dots\}$. Тогда $R^{N+1} \geq R^N$ и $R^N \rightarrow r$ при $N \rightarrow \infty$. Функции $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_n, \dots$ из пространства $W_2^1(1, \ell)$ начиная с $n \geq N$ принадлежат $W_2^2(1, R^N)$ и в силу последней оценки в определении G_c равномерно ограничены в норме $W_2^2(1, R^N)$. Поэтому существует подпоследовательность, для которой $\tilde{v}_n \rightarrow v$ в $W_2^1(1, R^1)$. Отбросим у этой последовательности первый элемент (если он оказался элементом $\tilde{v}_1$.) Оставшаяся часть будет состоять из функций, определенных в области $\varrho \in (1, \ell)$ и равномерно ограниченных в норме $W_2^2(1, R^2)$, и т.д. Диагональная последовательность состоит из функций пространства $W_2^1(1, \ell)$ и обладает тем свойством, что для всех N ее «хвост» начиная с номера N равномерно ограничен в $W_2^2(1, R^N)$. Обозначим ее $\{\tilde{v}_n\}_{n \in A}$, где A — некоторое бесконечное подмножество натуральных чисел. Сохраняя для этой последовательности прежнее обозначение $\tilde{v}_n$, далее считаем, что $n \in A$. Докажем, что она сходится в $W_{q_0}^1(1, \ell)$ для любого $1 \leq q_0 < 2$.

Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $N_1(\varepsilon)$ так, чтобы для всех $n \in A$, $n \geq N_1$, выполнялось неравенство $|R^{N_1} - r^n| < \varepsilon$. Тогда для $n \geq N_1$, $m \geq N_1$ имеем $R^{N_1} \leq r^n$,

$R^{N_1} \leq r^m$ и, используя тот факт, что $\tilde{v}_\varrho^n = 0$ при $\varrho \geq r^n$, получим

$$\int_1^\ell |\tilde{v}_\varrho^n - \tilde{v}_\varrho^m|^{q_0} d\varrho \leq \int_1^{R^{N_1}} + \int_{R^{N_1}}^{r^n} + \int_{R^{N_1}}^{r^m}.$$

Далее,

$$\int_{R^{N_1}}^{r^n} |\tilde{v}_\varrho^n - \tilde{v}_\varrho^m|^{q_0} d\varrho \leq \left\{ \int_{R^{N_1}}^{r^n} |\tilde{v}_\varrho^n - \tilde{v}_\varrho^m|^2 d\varrho \right\}^{\frac{q_0}{2}} |r^n - R^{N_1}|^\chi \leq c^{\frac{q_0}{2}} \varepsilon^\chi, \quad \chi > 0.$$

Аналогично для третьего слагаемого. Для первого имеем

$$\int_1^{R^{N_1}} |\tilde{v}_\varrho^n - \tilde{v}_\varrho^m|^{q_0} d\varrho =_{n,m \geq N_1} \int_1^{R^{N_1}} |w_\varrho^n - w_\varrho^m|^{q_0} d\varrho \leq (\ell - 1)^{\frac{2-q_0}{2}} \|w^n - w^m\|_{W_2^1(1, R^{N_1})}^{q_0}. \quad (28)$$

Так как хвост диагональной последовательности $\{\tilde{v}_n\}_{n \in A}$ сходится в норме $W_2^1(1, R^{N_1})$, по $\varepsilon > 0$ найдется такое $N_2(\varepsilon)$, что при $n, m \geq N_2$ выполнено неравенство $\|w^n - w^m\|_{W_2^1(1, R^{N_1})} < \varepsilon$, $n, m \in A$. Увеличив, если надо, $N_2(\varepsilon)$, считаем, что $N_2(\varepsilon) \geq N_1$. Отсюда следует, что правая часть (28) для $n, m \geq N_2(\varepsilon)$, $n, m \in A$, оценивается через $\tilde{c}\varepsilon^{q_0}$. Поэтому

$$\int_1^\ell |\tilde{v}_\varrho^n - \tilde{v}_\varrho^m|^{q_0} d\varrho \leq \tilde{c}(\varepsilon^{q_0} + \varepsilon^\chi),$$

$$\tilde{c} = \max(2c^{\frac{q_0}{2}}, (\ell - 1)^{\frac{2-q_0}{2}}) \text{ для всех } n, m \geq N_2(\varepsilon), \quad n, m \in A.$$

2.2. Нестационарный случай. Зададим последовательность неубывающих функций $\{r^n(t)\}_{n=1}^\infty$, $t \in [0, T]$, такую, что $1 \leq r^n(t) \leq \ell$, $r^n(t) \rightarrow r(t)$ для всех $t \in [0, T]$. (Возможность выбора такой подпоследовательности из построенной в п. 1 последовательности $r^n(t)$ следует из условий $r^n(0) = 2$, $r^n(T) = \ell$ и второй теоремы Хелли.) По функциям $w_n(r, t)$, заданным на нецилиндрических областях $\{(r, t) : t \in [0, T], 1 \leq r \leq r^n(t)\}$, определим множество

$$F = \left\{ \widetilde{W}_n(r, t) : \widetilde{W}_n(r, t) = \begin{cases} w^n, & 1 \leq r < r^n(t), \\ 0, & r^n(t) \leq r \leq \ell, \end{cases} \right\}$$

и будем считать, что для его элементов выполнены равномерные оценки

$$\|\widetilde{W}_n\|_{L_\infty(0, T; W_2^1(1, \ell))} \leq c, \quad \|\widetilde{W}_{nt}\|_{L_2(Q_\ell)} \leq c, \quad \int_0^T \int_1^{r^n(t)} w_{nrr}^2 dr dt \leq c.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в качестве функций w^n , $r^n(t)$ взять u^n , $r^n(t)$ (или их подпоследовательности), построенные в п. 1, то множество F будет определено корректно, а последние неравенства будут выполнены, так как $u^n(r^n(t), t) = 0$.

Определим измеримые множества

$$S_n = \{t \in [0, T] : \|\widetilde{W}_n(\cdot, t)\|_{W_2^1(1, \ell)} \leq c < \infty, \|\widetilde{W}_{nrr}\|_{L_2(1, r^n(t))} < \infty\}.$$

Мера S_n равна мере $[0, T]$, так как для $\widetilde{W}_n$ выполнена первая оценка при определении F и в силу третьей оценки функция $\|\widetilde{W}_{nrr}(\cdot, t)\|_{L_2(1, r^n(t))}$ как функция t п.в. на $[0, T]$ конечна. Поэтому для множества $S = \bigcup_n S_n$, имеем $S \subseteq [0, T]$ и мера S равна мере $[0, T]$.

Имеет место следующее утверждение, аналогичное леммам из [15].

Лемма 2. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $c(\varepsilon)$ такое, что для всех $t \in S$ и для всех натуральных n и m выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \|\widetilde{W}_n(\cdot, t) - \widetilde{W}_m(\cdot, t)\|_{W_2^1(1, \ell)}^{q_0} &\leq \varepsilon \left(1 + \int_1^{r^n(t)} w_{nrr}^2(r, t) dr + \int_1^{r^n(t)} w_{mrr}^2(x, t) dx \right) \\ &\quad + c(\varepsilon) \|\widetilde{W}_n(\cdot, t) - \widetilde{W}_m(\cdot, t)\|_{L_2(1, \ell)}^2. \end{aligned}$$

Доказательство. При отрицании утверждения существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого натурального k найдутся $t_k \in S$ и натуральные n_k и m_k , для которых выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \|\widetilde{W}_{n_k}(\cdot, t_k) - \widetilde{W}_{m_k}(\cdot, t_k)\|_{W_{q_0}^1(1, \ell)}^{q_0} &> \varepsilon_0 \left(1 + \int_1^{r^{n_k}(t_k)} w_{n_krr}^2(r, t_k) dr \right. \\ &\quad \left. + \int_1^{r^{m_k}(t_k)} w_{m_krr}^2(r, t_k) dr + k \|\widetilde{W}_{n_k}(\cdot, t_k) - \widetilde{W}_{m_k}(\cdot, t_k)\|_{L_2(1, \ell)}^2 \right). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\varphi_k(r) = \widetilde{W}_{n_k}(r, t_k), \psi_k(r) = \widetilde{W}_{m_k}(r, t_k), \quad r_k^1 = r^{n_k}(t_k), \quad r_k^2 = r^{m_k}(t_k).$$

В этих обозначениях, вспоминая определения F и S , последнее неравенство можно переписать в виде

$$c_1 \geq \|\varphi_k - \psi_k\|_{W_{q_0}^1(1, \ell)}^{q_0} > \varepsilon_0 \left(1 + \int_0^{r_k^1} \varphi_{krr}^2 dr + \int_1^{r_k^2} \psi_{krr}^2 dr \right) + k \|\varphi_k - \psi_k\|_{L_2(1, \ell)}^2.$$

Выбирая подпоследовательность, считаем, что $r_k^1 \rightarrow r_1, r_k^2 \rightarrow r_2$. Нетрудно увидеть, что φ_k и ψ_k принадлежат G_{c_1/ε_0} . Тогда в силу леммы 1, выбирая, если необходимо, подпоследовательность, можно считать, что $\varphi_k \rightarrow \varphi$ и $\psi_k \rightarrow \psi$ в $W_{q_0}^1(1, \ell)$. Отсюда

$$\varphi_k - \psi_k \rightarrow \varphi - \psi \quad \text{в } W_{q_0}^1(1, \ell).$$

Из последнего неравенства следует, что $\|\varphi_k - \psi_k\|_{L_2(1, \ell)}^2 \leq c_1/k \rightarrow 0$, т. е. $\varphi - \psi = 0$. Это противоречит условию $\|\varphi_k - \psi_k\|_{W_{q_0}^1(1, \ell)}^{q_0} > \varepsilon_0$, вытекающему из того же неравенства.

Теорема. Множество F относительно компактно в $L_{q_0}(0, T; W_{q_0}^1(1, \ell))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируя неравенство леммы 2 по t , получим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется постоянная $c(\varepsilon)$ такая, что для всех n и m верно неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\widetilde{W}_n(\cdot, t) - \widetilde{W}_m(\cdot, t)\|_{W_{q_0}^1(1, \ell)}^{q_0} dt &\leq \varepsilon \left(T + \int_0^T \int_1^{r^n(t)} w_{nrr}^2(r, t) dr dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \int_1^{r^n(t)} w_{nrr}^2(r, t) dr dt \right) + c(\varepsilon) \int_0^T \|\widetilde{W}_n(\cdot, t) - \widetilde{W}_m(\cdot, t)\|_{L_2(1, \ell)}^2 dt \\ &\leq \varepsilon(T + 2c) + c(\varepsilon) \int_0^T \|\widetilde{W}_n(\cdot, t) - \widetilde{W}_m(\cdot, t)\|_{L_2(1, \ell)}^2 dt. \quad (29) \end{aligned}$$

По определению F верна оценка $\|\widetilde{W}_n\|_{W_2^1(Q_\ell)} \leq c$. Поэтому существует подпоследовательность $\widetilde{W}_n$, сходящаяся сильно в $L_2(Q_\ell)$. Из неравенства (29) легко выводим, что эта подпоследовательность будет также сходиться по норме пространства $L_{q_0}(0, T; W_{q_0}^1(0, l))$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условия в теореме можно значительно обобщить, заменив ограниченность норм u_r^n и u_{rr}^n ограниченностью соответствующих норм некоторых функций от u_r^n и от производной функции u_r^n .

ЛИТЕРАТУРА

1. Подгаев А. Г. Разрешимость осесимметричной задачи для нелинейного параболического уравнения в областях с нецилиндрической или неизвестной границей. I // Челяб. физ.-мат. журн. 2020. Т. 5, вып. 1. С. 44–55.
2. Бородин А. М. Задача Стефана // Укр. мат. вісн. 2011. Т. 8. С. 17–54.
3. Мейрманов А. М., Гальцева О. А., Сельдемиров В. Е. О существовании обобщенного решения в целом по времени одной задачи со свободной границей // Мат. заметки. 2020. Т. 107, вып. 2. С. 229–240.
4. Bollati J., Tarzia A. D. One-phase Stefan problem with a latent heat depending on the position of the free boundary and its rate of change // Electron. J. Differ. Equ. 2018. N 10. P. 1–12.
5. Белых В. Н. Корректность одной нестационарной осесимметричной задачи гидродинамики со свободной поверхностью // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 4. С. 728–744.
6. Тахиров Ж. О., Тураев Р. Н. Нелокальная задача Стефана для квазилинейного параболического уравнения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2012. № 3. С. 8–16.
7. Bollati J., Tarzia D. A. Explicit solution for the one-phase Stefan problem with latent heat depending on the position and a convective boundary condition at the fixed face // Commun. Appl. Anal. 2018. V. 22. P. 309–322.
8. Ли Ф., Лу Д. Распространение решений для уравнения диффузии реакции со свободными границами в периодической среде // Электрон. журн. дифференц. уравн. 2018. № 185. С. 1–12.
9. Kuznetsov I. V. Kinetic formulation of forward-backward parabolic equations // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2016. V. 13. P. 930–949.
10. Kuznetsov I. V., Sazhenkov S. A. Anisotropic vanishing diffusion method applied to genuinely nonlinear forward-backward ultra-parabolic equations // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2018. V. 15. P. 1158–1173.

11. Antontsev S. N., Kuznetsov I. V. Existence of entropy measure-valued solutions for forward-backward p -parabolic equations // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2017. V. 14. P. 774–793.
12. Кожанов А. И., Мациевская Е. Е. Вырождающиеся параболические уравнения с переменным направлением эволюции // Сиб. электрон. мат. изв. 2019. Т. 16. С. 718–731.
13. Монахов В. Н., Попов С. В. Контактные задачи математической физики // Динамика сплошной среды. 2000. № 116. С. 62–72.
14. Егоров И. Е., Ефимова Е. С. Модифицированный метод Галёркина для полулинейного параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Сиб. журн. чистой и прикл. математики. 2016. Т. 16, № 2. С. 6–15.
15. Подгаев А. Г. Об относительной компактности множества абстрактных функций из шкалы банаховых пространств // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 2. С. 135–137.
16. Simon J. Compact sets in the space $L_p(0, T; B)$ // Ann. Mat. Pura Appl. 1987. V. 146. P. 65–96.
17. Темиргалиев Н., Жайнибекова М. А., Джумакаева Г. Т. Критерий вложения анизотропных классов Соболева — Морри в пространство равномерно непрерывных функций // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 5. С. 1156–1170.

Поступила в редакцию 30 мая 2021 г.

После доработки 15 августа 2021 г.

Принята к публикации 26 ноября 2021 г.

Подгаев Александр Григорьевич
Тихоокеанский государственный университет,
ул. Тихоокеанская, 136, Хабаровск 680035
pvu1707@mail.ru

COMPACTNESS THEOREMS CONNECTED WITH PROBLEMS WITH UNKNOWN BOUNDARY

A. G. Podgaev

Abstract: The paper provides some of the results that were presented at the IX International Conference on Mathematical Modeling dedicated to the 75th anniversary of V. N. Vragov and are related to the study of problems with an unknown boundary by methods of compactness. A substantiation of the theorem on relative compactness is given, which can be used in the study of problems of the Stefan type with an unknown part of the boundary, as well as in problems for equations of variable type with an unknown boundary of type change. An example of such problem is given, and it is shown that the estimates obtained for approximate solutions of the equation and functions describing a sequence of boundaries approaching the sought boundary of the phase transition completely coincide with the conditions formulated in the main theorem on compactness.

The author is not aware of theorems of such type. The theorem is a new kind of compactness theorem, adapted to problems of the Stefan type.

For better perception, the simplest conditions are given under which the result is valid, which coincide with the conditions of the considered example. However, the result can be generalized to much more general situations, including the number of phase transition boundaries and replacing the estimate of the second derivative with an estimate of a more complex aggregate that occurs in equations with degenerations on solutions.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.37.71.006

Keywords: relative compactness, non-cylindrical domain, unknown boundary, Stefan condition.

REFERENCES

1. Podgaev A. G., "Solvability of boundary value problems for non-linear parabolic equation in domains with a non-cylindrical or unknown boundary, I [in Russian]," *Chelyabinsk. Fiz.-Mat. Zh.*, **5**, No. 1, 44–55 (2020).
2. Borodin A. M., "Stefan's problem [in Russian]," *Ukrainsk. Mat. Vestn.*, **8**, 17–54 (2011).
3. Meirmanov A. M., Galtseva O. A., and Seldemirov V. E., "On the global-in-time existence of a generalized solution to a free boundary problem," *Math. Notes*, **107**, No. 2, 274–283 (2020).
4. Bollati J. and Tarzia A. D., "One-phase Stefan problem with a latent heat depending on the position of the free boundary and its rate of change," *Electron. J. Differ. Equ.*, No. 10, 1–12 (2018).
5. Belykh V. N., "Correctness of one unsteady axisymmetric problem of hydrodynamics with a free surface," *Sib. Math. J.*, **58**, No. 4, 728–744 (2017).
6. Takhirov Zh. O. and Turaev R. N., "Nonlocal Stefan problem for a quasilinear parabolic equation [in Russian]," *Vestn. Samarsk. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, No. 3, 8–16 (2012).
7. Bollati J. and Tarzia A. D., "Explicit solution for the one-phase Stefan problem with latent heat depending on the position and a convective boundary condition at the fixed face," *Commun. Appl. Anal.*, **22**, 309–322 (2018). See <http://arxiv.org/abs/1610.09338>

8. Lee F. and Lu D., "Propagation of solutions for the diffusion equation of a reaction with free boundaries in a periodic medium [in Russian]," *Elektron. Zh. Differents. Uravn.*, No. 185, 1–12 (2018).
9. Kuznetsov I. V., "Kinetic formulation of forward-backward parabolic equations," *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, **13**, 930–949 (2016).
10. Kuznetsov I. V. and Sazhenkov S. A., "Anisotropic vanishing diffusion method applied to genuinely nonlinear forward-backward ultra-parabolic equations," *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, **15**, 1158–1173 (2018).
11. Antontsev S. N. and Kuznetsov I. V., "Existence of entropy measure-valued solutions for forward-backward p-parabolic equations," *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, **14**, 774–793 (2017).
12. Kozhanov A. I. and Matsievskaya E. E., "Degenerate parabolic equations with a variable direction of evolution [in Russian]," *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, **16**, 718–731 (2019).
13. Monakhov V. N. and Popov S. V., "Contact problems of mathematical physics [in Russian]," *Dinamika Sploshnoy Sredy*, No. 116, 62–72 (2000).
14. Egorov I. E. and Efimova E. S., "Modified Galerkin method for a semilinear parabolic equation with changing direction of time [in Russian]," *Sib. Zh. Chist. Prikl. Mat.*, **16**, No. 2, 6–15 (2016).
15. Podgaev A. G., "On relative compactness of a set of abstract functions in a scale of Banach spaces," *Sib. Math. J.*, **34**, No. 2, 135–145 (1993).
16. Simon J., "Compact sets in the space $L_p(0, T; B)$," *Ann. Mat. Pura Appl.*, **146**, 65–96 (1987).
17. Temirgaliev N., Zhainibekova M. A., and Dzhumakaeva G. T., "A criterion for embedding of anisotropic Sobolev–Morrey classes in the space of uniformly continuous functions," *Sib. Math. J.*, **57**, No. 5, 905–917 (2016).

Submitted May 30, 2021

Revised August 15, 2021

Accepted November 26, 2021

Aleksandr G. Podgaev
 Pacific National University,
 136 Tikhookeanskaya Street, Khabarovsk 680035, Russia
 pvu1707@mail.ru

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА

Г. И. Тарасова

Аннотация. Изучается разрешимость в анизотропных пространствах Соболева нелокальных по временной переменной задач для дифференциальных уравнений составного (соболевского) типа

$$u_{tt} + \left(\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta \right) \Delta u + \gamma u = f(x, t),$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $t \in (0, T)$, $0 < T < +\infty$, α, β, γ — заданные действительные числа, $f(x, t)$ — заданная функция. Доказываются теоремы существования и несуществования, единственности и неединственности регулярных решений (решений, имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение).

DOI: 10.25587/SVFU.2021.27.62.007

Ключевые слова: дифференциальные уравнения составного типа, нелокальные задачи, регулярные решения, существование, единственность.

Введение

Нелокальными задачами для дифференциальных уравнений называют задачи, в которых вместо обычных краевых условий задаются условия, связывающие значения решения или (и) его производных в различных точках тех или иных граничных многообразий или же в точках границы и в точках некоторых внутренних многообразий. Подобные задачи достаточно хорошо исследованы для классических эллиптических, параболических и гиперболических уравнений, для уравнений смешанного типа [1–4], для некоторых классов уравнений высокого по выделенной переменной порядка [4–12]. Менее исследованными представляются нелокальные краевые задачи для уравнений составного типа в целом и для уравнений соболевского типа в частности. Восполнить этот пробел (хотя бы в малой степени) и должна настоящая работа. Более точно, настоящая работа посвящена исследованию разрешимости — исследованию существования и несуществования, единственности и неединственности решений нелокальных

по временной переменной задач для дифференциальных уравнений соболевского типа следующего вида:

$$u_{tt} + \left(\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta \right) \Delta u + \gamma u = f(x, t),$$

в которых α , β и γ суть заданные действительные числа. Основной целью работы будет описание условий на параметры α , β и γ , а также на параметры нелокальных условий, обеспечивающих существование или несуществование, единственность или неединственность решений нелокальных задач для данных уравнений.

Уточним, что всюду в работе под решением той или иной задачи для дифференциальных уравнений понимается регулярное решение, т. е. решение, имеющее все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в соответствующие уравнения.

Все построения и рассуждения будут вестись с использованием пространств Лебега L_p и Соболева W_p^l . Необходимые определения и описания свойств этих пространств можно найти в монографиях [13–15].

Нелокальные задачи для уравнений соболевского типа второго порядка по переменной t

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$ переменных $x_1, \dots, x_n$, Γ — граница Ω . Будем считать, что Γ — бесконечно дифференцируемая поверхность. Далее, пусть Q — цилиндр $\Omega \times (0, T)$ конечной высоты T , $S = \Gamma \times (0, T)$ — боковая граница Q , $f(x, t)$ — заданная функция, α, β, γ , a и b суть заданные действительные числа.

Нелокальная задача I. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$u_{tt} + \left(\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta \right) \Delta u + \gamma u = f(x, t), \quad (1)$$

где Δ — оператор Лапласа по переменным $x_1, \dots, x_n$, и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, t)|_S = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = au(x, T), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

$$u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (4)$$

Нелокальная задача II. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условие (2), а также условия

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (5)$$

$$u_t(x, 0) = bu_t(x, T), \quad x \in \Omega. \quad (6)$$

Нелокальная задача III. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условие (2), а также условия

$$u(x, 0) = au(x, T), \quad x \in \Omega, \quad (7)$$

$$u_t(x, 0) = bu_t(x, T), \quad x \in \Omega. \quad (8)$$

Обозначим через V_1 линейное пространство

$$V_1 = \{v(x, t) : v(x, t) \in L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega)), \\ v_t(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega)), v_{tt}(x, t) \in L_2(Q)\}.$$

Снабдим V_1 нормой

$$\|v\|_{V_1} = (\|v\|_{L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega))}^2 + \|v_t\|_{L_2(0, T; W_2^2(\Omega))}^2 + \|v_{tt}\|_{L_2(Q)}^2)^{1/2}.$$

Очевидно, что пространство V_1 с этой нормой будет банаховым пространством.

Пусть $\{w_k(x)\}_{k=1}^\infty$ и $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — ортонормированная система в $L_2(\Omega)$ собственных функций и соответственно система собственных чисел задачи

$$\Delta w = \lambda w \quad \text{в } \Omega, \quad w|_\Gamma = 0,$$

причем собственные числа λ_k образуют монотонно убывающую последовательность. Существование указанных систем собственных функций и собственных чисел известно (см. [15, 16]); известно также, что функции $w_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, образуют базис в пространстве $L_2(\Omega)$ и все числа λ_k отрицательны, а последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ не имеет конечных предельных точек.

Обозначим через $Y_{1,k}(t)$ и $Y_{2,k}(t)$ фундаментальную систему решений дифференциального уравнения

$$\varphi''(t) + \alpha \lambda_k \varphi'(t) + (\lambda_k \beta + \gamma) \varphi(t) = 0.$$

Теорема 1. Пусть

$$Y'_{1,k}(0)[Y_{2,k}(0) - aY_{2,k}(T)] - Y'_{2,k}(0)[Y_{1,k}(0) - aY_{1,k}(T)] \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Тогда нелокальная задача I не может иметь в пространстве V_1 более одного решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решение $u(x, t)$ нелокальной задачи I из пространства V_1 представимо в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) w_k(x),$$

при этом в случае $f(x, t) \equiv 0$ функции $c_k(t)$ являются решениями задачи

$$c_k''(t) + \alpha \lambda_k c_k'(t) + (\lambda_k \beta + \gamma) c_k(t) = 0, \quad c_k(0) = ac_k(T), \quad c_k'(0) = 0.$$

Представляя функции $c_k(t)$ через функции $Y_{1,k}(t)$ и $Y_{2,k}(t)$, учитывая далее граничные условия и условие теоремы, получим $c_k(t) \equiv 0$ при $t \in [0, T]$. Отсюда

следует, что $u(x, t)$ — тождественно нулевая в Q функция. Это означает, что нелокальная задача I не может иметь в пространстве V_1 более одного решения.

Теорема доказана.

Аналогичные теоремы единственности имеют место и для локальных задач II и III. Формулировать и доказывать эти теоремы ввиду их очевидности не будем.

Очевидно, что если условие (9) или аналогичные условия единственности для нелокальных задач II и III не выполняются, то нетрудно построить примеры нетривиальных решений однородных задач I–III.

Перейдем к исследованию разрешимости нелокальных задач I–III.

Приведем один вспомогательный результат о разрешимости начально-краевой задачи для уравнения (1).

Рассмотрим задачу: найти функцию $v(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), (4), а также условие

$$v(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (10)$$

Теорема 2. Пусть α — отрицательное число, и пусть выполняется включение $f(x, t) \in L_2(Q)$. Тогда начально-краевая задача (1), (2), (10), (4) имеет решение $v(x, t)$, принадлежащее пространству V_1 и такое, что для него выполняется априорная оценка

$$\|v\|_{V_1} \leq N_0 \|f\|_{L_2(Q)} \quad (11)$$

с постоянной N_0 , определяющейся лишь числами α , β и γ , областью Ω и числом T .

Доказательство этой теоремы приведено, например, в [9].

Следующая теорема незначительно усиливает результаты работы [9].

Для функций $w(x)$ из пространства $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ выполняется неравенство

$$\int_{\Omega} w^2(x) dx \leq c_0 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x) dx \quad (12)$$

с постоянной c_0 , определяющейся лишь областью Ω (см. [13, 14]).

Теорема 3. Пусть выполняются условия:

- 1) $\alpha < 0$, $\beta \leq 0$;
- 2) $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1$, $\gamma_0 \geq 0$, $\beta - c_0 \gamma_1 \leq 0$;
- 3) $|a| < 1$.

Тогда для любой функции $f(x, t)$ из пространства $L_2(Q)$ нелокальная задача I имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству V_1 .

Доказательство. Пусть $u(x, t)$ — регулярное решение нелокальной задачи I. Умножим уравнение (1) на функцию $u_t(x, t)$ и проинтегрируем по цилиндру Q . Используя условия 1–3, а также неравенство (12), нетрудно показать,

что выполняется априорная оценка

$$\sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i t}^2 dx dt + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i}^2(x, T) dx + \int_{\Omega} u_t^2(x, T) \leq N_1 \int_Q f^2 dx dt \quad (13)$$

с постоянной N_1 , определяющейся лишь числами α , β , γ и c_0 . Далее, умножая последовательно уравнение (1) на функции $\Delta u_t(x, t)$ и $u_{tt}(x, t)$, вновь используя условия 1–3, а также оценку (13), получим, что выполняется оценка

$$\|v\|_{V_1} \leq N_1 \|f\|_{L_2(Q)}.$$

Эта оценка и означает, что нелокальная задача I разрешима в пространстве V_1 . Теорема доказана.

Следующий результат существенно отличается от полученных ранее.

Определим числа D_k , $z_{1,k}$ и $z_{2,k}$:

$$D_k = \alpha^2 \lambda_k^2 - 4\beta \lambda_k - 4\gamma, \quad z_{1,k} = \frac{1}{2}(-\alpha \lambda_k + \sqrt{D_k}),$$

$$z_{2,k} = \frac{1}{2}(-\alpha \lambda_k - \sqrt{D_k}), \quad k = 1, 2, \dots$$

Обозначим через k_1 наименьшее натуральное число такое, что при $k \geq k_1$ выполняется $D_k > 0$ (если $\alpha \neq 0$, то такое число однозначно определено).

Теорема 4. Пусть $\alpha < 0$, $\beta < 0$, $a < 0$. Тогда для любой функции $f(x, t)$ из пространства $L_2(Q)$ нелокальная задача I имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству V_1 .

Доказательство. Пусть $v(x, t)$ — решение начально-краевой задачи (1), (2), (10), (4), $u_0(x)$ — функция $av(x, T)$. Определим функцию $\bar{u}(x, t)$ как решение задачи

$$\bar{u}_{tt} + \left(\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta \right) \Delta \bar{u} + \gamma \bar{u} = 0, \quad (x, t) \in Q, \quad (14)$$

$$\bar{u}(x, t)|_S = 0, \quad (15)$$

$$\bar{u}(x, 0) = a\bar{u}(x, T) + u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (16)$$

$$\bar{u}_t(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (17)$$

Покажем, что функция $\bar{u}(x, t)$ корректно определена и принадлежит V_1 .

Поскольку $v(x, t)$ принадлежит V_1 , функция $u_0(x)$ будет принадлежать пространству $W_2^2(\Omega)$. Представим ее рядом Фурье по системе $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k} w_k(x), \quad u_{0k} = \int_{\Omega} u_0(x) w_k(x) dx.$$

Функцию $\bar{u}(x, t)$ также будем искать в виде ряда Фурье:

$$\bar{u}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) w_k(x); \quad (18)$$

функции $\varphi_k(t)$ здесь определяются как решения задач

$$\begin{aligned}\varphi_k''(t) + \alpha\lambda_k\varphi_k'(t) + (\beta\lambda_k + \gamma)\varphi_k(t) &= 0, \\ \varphi_k(0) &= a\varphi_k(T) + u_{0k}, \quad \varphi_k'(0) = 0.\end{aligned}$$

Найдя $\varphi_k(t)$, найдем функцию $\bar{u}(x, t)$, но она будет представлять собой формальное решение задачи (14)–(17), реальным же решением она станет тогда, когда будет установлена сходимость ряда (18), а также сходимость рядов, составленных из соответствующих производных слагаемых ряда (18).

Пусть k_2 — наименьшее натуральное число такое, что $\beta\lambda_k + \gamma \geq 0$ при $k \geq k_2$. Далее, зафиксируем положительное число D_0 . Поскольку последовательность $\{D_k\}_{k=1}^\infty$ не ограничена сверху, существует наименьшее натуральное число k_3 такое, что при $k \geq k_3$ выполняется $D_k \geq D_0$.

Положим $k_0 = \max(k_1, k_2, k_3)$. Определим числа d_k :

$$d_k = z_{1,k}(1 - ae^{z_{2,k}T}) - z_{2,k}(1 - ae^{z_{1,k}T}).$$

Заметим, что при $k \geq k_0$ все числа $z_{1,k}$ и $z_{2,k}$ отрицательны, для них выполняются неравенства $z_{2,k} < z_{1,k}$ и при этом последовательность $\{z_{1,k}\}_{k=k_0}^\infty$ будет ограниченной, последовательность $\{z_{2,k}\}_{k=k_0}^\infty$ будет сходиться к $-\infty$. Далее, для чисел d_k при $k \geq k_0$ имеют место неравенства

$$d_k \geq az_{2,k}e^{z_{1,k}T}(1 - e^{-\sqrt{D_k}T}) \geq \delta_0 az_{2,k}; \quad (19)$$

δ_0 в этих неравенствах — некоторое положительное число, определяющееся числами α, β, γ, T и D_0 , а также областью Ω .

Вернемся к функциям $\varphi_k(t)$. При $k \geq k_0$ имеют место равенства

$$\varphi_k(t) = \frac{u_{0k}}{d_k}(z_{1,k}e^{z_{2,k}T} - z_{2,k}e^{z_{1,k}T}).$$

Вследствие (19) функции $\varphi_k(t)$ корректно определены. Далее, имеют место оценки

$$|\varphi_k(t)| \leq M_0|u_{0k}|, \quad |\varphi_k'(t)| \leq M_1|u_{0k}|, \quad |\varphi_k''(t)| \leq M_2|u_{0k}||z_{2,k}| \quad (20)$$

с постоянными M_0, M_1 и M_2 , определяющимися числами $a, \alpha, \beta, \gamma, T$ и D_0 , а также областью Ω .

Определим функции $\bar{u}_1(x, t)$ и $\bar{u}_2(x, t)$:

$$\bar{u}_1(x, t) = \sum_{k=1}^{k_0-1} \varphi_k(t)w_k(x), \quad \bar{u}_2(x, t) = \sum_{k=k_0}^{\infty} \varphi_k(t)w_k(x).$$

В силу неравенства Бесселя [17] для коэффициентов ряда Фурье и оценок (20) для функции $\bar{u}_2(x, t)$ выполняются равенства

$$\int_{\Omega} [\bar{u}_2(x, t)]^2 dx dt \leq R_0 \sum_{k=k_0}^{\infty} u_{0k}^2, \quad (21)$$

$$\int_{\Omega} [\Delta \bar{u}_2(x, t)]^2 dx dt \leq R_1 \sum_{k=k_0}^{\infty} \lambda_k^2 u_{0k}^2, \quad (22)$$

$$\int_{\Omega} [\Delta \bar{u}_{2t}(x, t)]^2 dx dt \leq R_2 \sum_{k=k_0}^{\infty} \lambda_k^2 \bar{u}_{0k}^2, \quad (23)$$

$$\int_{\Omega} [\bar{u}_{2tt}(x, t)]^2 dx dt \leq R_3 \sum_{k=k_0}^{\infty} z_{2k}^2 u_{0k}^2 \leq R_4 \sum_{k=k_0}^{\infty} \lambda_k^2 u_{0k}^2, \quad (24)$$

в которых числа R_0 – R_4 определяются числами a , α , β , γ , T и D_0 , а также областью Ω .

С другой стороны, вследствие принадлежности функции $u_0(x)$ пространству $W_2^2(\Omega)$ и вновь в силу неравенства Бесселя ряды в правых частях неравенств (21)–(24) сходятся. Отсюда и из второго основного неравенства для эллиптических операторов [14] следует, что функция $\bar{u}_2(x, t)$ принадлежит пространству V_1 . Очевидно, что и $\bar{u}_1(x, t)$ принадлежит V_1 .

Определим функцию

$$u(x, t) = v(x, t) + \bar{u}(x, t).$$

Она принадлежит пространству V_1 и представляет собой искомое решение нелокальной задачи I.

Теорема доказана.

Теорема 5. Пусть выполняются условия $\alpha < 0$, $\beta < 0$, $b > 0$. Тогда для любой функции $f(x, t)$ такой, что $f(x, t) \in L_2(Q)$, $f_t(x, t) \in L_2(Q)$, нелокальная задача II имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству V_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По решению $v(x, t)$ краевой задачи (1), (2), (10), (4) определим функцию $u_1(x)$: $u_1(x) = bv_t(x, T)$. Вследствие принадлежности функции $f(x, t)$ указанному в формулировке теоремы классу функция $u_1(x)$ корректно определена и принадлежит пространству $W_2^2(\Omega)$. Представим эту функцию рядом Фурье по системе $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{1k} w_k(x), \quad u_{1k} = \int_{\Omega} u_1(x) w_k(x) dx.$$

Определим функцию $\tilde{u}(x, t)$ как решение задачи

$$\tilde{u}_{tt} + \left(\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta \right) \Delta \tilde{u} + \gamma \tilde{u} = 0, \quad (x, t) \in Q, \quad (25)$$

$$\tilde{u}(x, t)|_S = 0, \quad (26)$$

$$\tilde{u}(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (27)$$

$$\tilde{u}_t(x, 0) = b\tilde{u}_t(x, T) + u_1(x), \quad x \in \Omega. \quad (28)$$

Положим

$$\tilde{d}_k = z_{1,k} - z_{2,k} + b(z_{2,k}e^{z_{2,k}T} - z_{1,k}e^{z_{1,k}T}),$$

$$\psi_k(t) = \frac{u_{1k}}{\tilde{d}_k}(e^{z_{1,k}t} - e^{z_{2,k}t}), \quad k = 1, 2, \dots$$

Формальное решение задачи (25)–(28) определяется равенством

$$\tilde{u}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(t) w_k(x).$$

Вследствие условия $b > 0$ имеют место неравенства

$$\tilde{d}_k \geq \delta_1 |z_{1,k}|, \quad \delta_1 > 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Из этих неравенств следует, что, во-первых, все функции $\psi_k(t)$ корректно определены, а во-вторых, для функций $\psi_k(t)$ выполняются неравенства

$$|\psi_k(t)| \leq M'_0 |u_{1,k}|, \quad |\psi'_k(t)| \leq M'_1 |u_{1,k}|, \quad |\psi''_k(t)| \leq M'_2 |u_{1,k}| \cdot |z_{2,k}|, \quad (29)$$

постоянные M'_0, M'_1, M'_2 в которых определяются числами α, β, γ, T и b , а также областью Ω .

Поскольку $u_1(x)$ принадлежит $W_2^2(\Omega)$, из неравенств (29) вытекает, что $\tilde{u}(x, t)$ принадлежит V_1 (см. доказательство теоремы 4).

Положим

$$u(x, t) = v(x, t) + \tilde{u}(x, t).$$

Эта функция и даст искомое решение нелокальной задачи II.

Теорема доказана.

Исследование разрешимости нелокальной задачи III нетрудно провести по схеме, представленной при доказательстве теорем 4 и 5, но выкладки будут существенно более громоздкими. Очевидно лишь, что условиями разрешимости будут условия $\alpha < 0, \beta < 0, a < 0, b > 0$, а для правой части $f(x, t)$ должны выполняться включения $f(x, t) \in L_2(Q), f_t(x, t) \in L_2(Q)$.

Заключение

Представленные в работе результаты о разрешимости нелокальных задач для уравнений (1) новые, поскольку новыми являются условия $a < 0$ или $b > 0$. Ранее разрешимость таких же задач была установлена при условиях $|a| < 1$ или $|b| < 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Skubachevskii A. L. Elliptic functional differential equations and applications. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser-Verl., 1997.
2. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.
3. Скубачевский А. Л. Неклассические краевые задачи. I // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 26. М.: РУДН, 2007. С. 3–132; Неклассические краевые задачи. II, Уравнения в частных производных // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 33. М.: РУДН, 2009. С. 3–179.
4. Пулькина Л. С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений. Самара: Изд-во Самар. ун-та, 2012.

5. *Pulkina L. S., Beylin A. B.* Nonlocal approach to problems on longitudinal vibration in a short bar // *Electron. J. Differ. Equ.* 2019. Paper No. 29, 9 p.
6. *Попов Н. С.* Разрешимость краевой задачи для псевдопараболического уравнения с нелокальными интегральными условиями // *Дифференц. уравнения.* 2015. Т. 51. № 3. С. 359.
7. *Попов Н. С.* О разрешимости пространственно нелокальных краевых задач для одномерных псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений // *Вестн. СамГУ. Естественнаучн. сер.* 2015. Т. 3. С. 29–43.
8. *Алсыкова А. А.* Нелокальные задачи с интегральными условиями для уравнения Буссинеска // *Мат. заметки СВФУ.* 2016. Т. 23, № 1. С. 3–11.
9. *Сафиуллова Р. Р.* Краевая задача с интегральными условиями для дифференциального уравнения третьего порядка // *Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Математика, механика, информатика.* 2007. Т. 7, № 1. С. 85–101.
10. *Кожанов А. И., Дюжева А. В.* Нелокальные задачи с интегральным условием для дифференциальных уравнений третьего порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.* 2020. Т. 24, № 4. С. 607–620.
11. *Кожанов А. И., Дюжева А. В.* Нелокальные задачи с интегральным смещением для параболических уравнений высокого порядка // *Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика.* 2021. Т. 36. С. 14–28.
12. *Кожанов А. И., Дюжева А. В.* Вторая начально-краевая задача с интегральным смещением для гиперболических и параболических уравнений второго порядка // *Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.* 2021. Т. 25, № 3. С. 423–434.
13. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
14. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
15. *Triebel H.* Interpolation theory. Functional spaces. Differential operators. Berlin: VEB Deutscher Verl. Wiss., 1978.
16. *Evans L. C.* Partial differential equations. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998. (Grad. Stud. Math.; V. 19).
17. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию 25 октября 2021 г.

После доработки 25 октября 2021 г.

Принята к публикации 26 ноября 2021 г.

Тарасова Галина Ивановна
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики,
кафедра высшей математики,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891
gi-tarasova@mail.ru

ON SOLVABILITY OF NONLOCAL BOUNDARY
VALUE PROBLEM FOR A DIFFERENTIAL
EQUATION OF COMPOSITE TYPE

G. I. Tarasova

Abstract: We study the solvability in anisotropic Sobolev spaces of nonlocal in time problems for the differential equations of composite (Sobolev) type

$$u_{tt} + \left(\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta \right) \Delta u + \gamma u = f(x, t),$$

where $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $t \in (0, T)$, $0 < T < +\infty$, α, β , and γ are real numbers, and $f(x, t)$ is a given function. We prove theorems of existence and non-existence, uniqueness and non-uniqueness for regular solutions, those having all generalized Sobolev derivatives in the equation.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.27.62.007

Keywords: differential equation of composite type, nonlocal problem, regular solution, existence, uniqueness.

REFERENCES

1. Skubachevskii A. L., Elliptic Functional Differential Equations and Applications, Birkhäuser-Verl., Basel; Boston; Berlin (1997).
2. Nakhushev A. M., Problems with Shifts for Partial Differential Equations [in Russian], Nauka, Moscow (2006).
3. Skubachevskii A. L., “Nonclassical boundary value problems, I,” J. Math. Sci., **155**, No. 2, 199–334 (2008); “Nonclassical boundary value problems, II,” J. Math. Sci., **166**, No. 4, 377–561 (2010).
4. Pulkina L. S., Problems with Nonclassical Conditions for Hyperbolic Equations [in Russian], Izdat. Samarsk. Univ., Samara (2012).
5. Pulkina L. S. and Beylin A. B., “Nonlocal approach to problems on longitudinal vibration in a short bar,” Electron. J. Differ. Equ., Paper No. 29 (2019).
6. Popov N. S., “Solvability of a boundary value problem for a pseudoparabolic equation with nonlocal integral conditions,” Differ. Equ., **51**, No. 3, 362–375 (2015).
7. Popov N. S., “On the solvability of spatial nonlocal boundary value problems for one-dimensional pseudoparabolic and pseudohyperbolic equations [in Russian],” Vestn. Samar. Gos. Univ., Ser. Estestvennonauch. Nauki, **125**, No. 3, 29–43 (2015).
8. Alsykova A. A. “Nonlocal problems with integral conditions for Boussinesq equations [in Russian],” Math. Zametki SVFU, **23**, No. 1, 3–11 (2016).
9. Safiullova R. R., “The boundary-value problem with integral conditions for differential equations of third order [in Russian],” Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform., **7**, No. 1, 85–101 (2007).
10. Kozhanov A. I. and Dyuzheva A. V., “Non-local problems with an integral condition for third-order differential equations [in Russian],” Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki, **24**, No. 4, 607–620 (2020).

11. Kozhanov A. I. and Dyuzheva A. V., “Non-local problems with integral displacement for high-order parabolic equations [in Russian],” *Izv. Irkut. Univ., Ser. Mat.*, **36**, 14–28 (2021).
12. Kozhanov A. I. and Dyuzheva A. V., “The second initial-boundary value problem with integral displacement for second-order hyperbolic and parabolic equations [in Russian],” *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, **25**, No. 3, 423–434 (2021).
13. Sobolev S. L., *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics* [in Russian], Nauka, Moscow (1988).
14. Ladyzhenskaya O. A. and Ural'tseva N. N., *Linear and Quasilinear Elliptic Equations* [in Russian], Nauka, Moscow (1973).
15. Triebel H., *Interpolation Theory, Functional Spaces, Differential Operators*, VEB Deutscher Verl. Wiss., Berlin (1978).
16. Evans L. C., *Partial Differential Equations*, Amer. Math. Soc. Publ., Providence, RI (1998) (Grad. Stud. Math.; vol. 19).
17. Trenogin V. A., *Functional Analysis* [in Russian], Nauka, Moscow (1980).

Submitted October 25, 2021

Revised October 25, 2021

Accepted 26 November, 2021

Galina I. Tarasova
Ammosov North-Eastern Federal University,
Institute of Mathematics and Informatics,
48 Kulakovsky Street, Yakutsk 677891, Russia
gi-tarasova@mail.ru

APPROXIMATION AND COMPARISON
OF THE EMPIRICAL LIQUIDITY COST FUNCTION
FOR VARIOUS FUTURES CONTRACTS

M. Dyshaev, D. Izergin, and V. Fedorov

Abstract. The article is dedicated to the study and comparison of the empirical liquidity cost function for various futures contract. The function is determined by the current state of the limit order book (LOB). Comparing the liquidity cost of futures contracts, we suggest the use of the initial margin instead of the number of lots or asset units. The form of the empirical liquidity cost function is obtained and a number of approximations for practical use are proposed. The approximations were achieved by quadratic, linear and power functions. The explanation of the difference in the distribution of the values of the liquidity cost function depending on the required initial margin is proposed. These results can be used for optimal execution of large orders, including portfolio hedging.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.37.62.008

Keywords: cost of liquidity, limit order book, futures contracts, initial margin, optimal execution.

1. Introduction

Currently, a large number of studies are dedicated to market liquidity issues from both theoretical and empirical points of view. As noted in [1]: “... ‘Market liquidity’ is a slippery and elusive concept, in part because it encompasses a number of transactional properties of markets. These include ‘tightness’ (the cost of turning around a position over a short period of time), ‘depth’ (the size of an order flow innovation required to change prices a given amount), and ‘resiliency’ (the speed with which prices recover from a random, uninformative shock)”. For example, in the work [2] the authors distinguish the generic, systematic components (“across-measure” systematic liquidity factors) of liquidity from a set of eight measures of liquidity.

As one of the four characteristics of a liquid market, [3] mentions that if a trader immediately buys or sells a large block of shares, the order is executed at a premium or discount, depending on the block size: “The larger the block, the larger the premium or discount”. In this context, the contribution of our work is to provide answers to the questions: a) what is the mentioned dependence in practice and b) what can be taken as the “block size” for futures contracts.

The reported study was funded by The Russian Foundation of Basic Research according to the research project No 19-01-00244. We would like to thank Professor L. C. G. Rogers of the Cambridge University Statistics Laboratory for helpful comments on some of the issues raised in this article.

It seems interesting to estimate the value of the premium or discount mentioned in work [3] in the case of absolute resiliency. The term “resiliency” in the limit order book has several interpretations [4–7]. As a rule, “resiliency” reflects the speed at which the limit order book (LOB) returns to its original state after the so-called “liquidity shock”, when a series of market orders “sweeps out” the limit orders in the LOB. This situation is quite often the subject of research, see for example [8–11]. Absolute resiliency in this context means that arriving market order fills the existing limit orders in the LOB. Immediately after that the order book is filled with new limit orders. This situation is similar to the one actually observed.

We are interested in the value of the discount or premium in the case of absolute resiliency. In what follows, we will refer to this discount or premium as the “cost of liquidity.” To estimate the cost of liquidity, we use the model proposed in [11] as described in Section 3.1. The authors used the quadratic liquidity cost function $l(h)$, which depends on h units of the traded asset.

In the case when the liquidity cost function for stocks or currencies is being investigated, the comparison of different assets can be made by going to the money equivalent, as is done, for example, in the work [12]. In the case when it is necessary to compare the liquidity cost function for various futures contracts, the approach may be difficult to apply, as it will be shown in the Section 3.3. In the papers of other researchers, we have not found a way to compare the liquidity cost function for different futures contracts. Therefore, we have developed our own methodology based on the use of “initial margin”.

The initial margin is the amount of money that market participants must pay when buying or selling a futures contract. Another similar and complementary measure is “maintenance margin”. Maintenance margin is the minimum level of funds that market participants must hold or “maintain” in their account while a position is open. When a trader buys or sells a futures contract, the exchange or clearing firm blocks that amount in the trader’s account. Therefore, a trader cannot obtain an infinitely large position. The presence of an initial or maintenance margin helps to reduce risks in the financial system. The initial and maintenance margins depends of many parameters, such as exchange rates, interest rate curves and volatility curves (see [13–15] or [16] for details). Since these measures already take into account most of the market parameters, their use will allow more accurate comparisons of various futures contracts. Further only the term “initial margin” is used.

Thus, the value of the initial margin can serve as an answer to the question of determining the units of measure for block sizes. Further in Sections 3.2, 3.3 we will present the developed method and demonstrate its practical implementation.

In order to answer the question about the type of dependence of the empirical liquidity cost on the block size, we studied the distribution of prices and order volumes in LOB. The most liquid futures contracts traded on the Moscow Exchange are considered. The calculation based on snapshots of the limit order book was performed for both the bid and the ask sides of the LOB. The obtained empirical values allow us to propose three possible approximations of this function. These approximations can be used to estimate the cost of the hedging, taking into account

the additional liquidity costs in the LOB. Or, they can be used to verify the models of LOB.

In addition, some differences in the distribution of the empirical liquidity cost function were found for various futures contracts. Significant differences have been revealed between futures contracts for a local underlying asset (RTS index or USD/RUB) and an international underlying asset (Brent).

The paper is organized as follow. Section 2 briefly describes the dataset and how it is collected. Section 3 explains the approach used in the work. Section 4 provides results. Section 5 discusses the results, practical implementation and future research directions.

2. Data

The main source of data for this work is the actual online data from the Moscow Exchange. The most liquid futures contracts are taken into consideration (see [17] for details). The raw data was obtained from the LOB snapshots with an interval of 5 seconds for the cash-settled futures contracts on the RTS index (RI), on Brent oil (BR) and FX-rate of US dollar versus Russian ruble (Si). The data correspond to the period from 05 May 2020 to 26 Feb 2021.

Approximately 2.6 millions snapshots were processed with 100 price levels per snapshot. There are 50 price levels for the bid side and 50 price levels for the ask side. In this way, the empirical liquidity cost function is represented by 100 points on each snapshot. Table 1 summarizes the amount of the raw data.

REMARK 1. It should be noted that the data was collected online, so there are small gaps for technical reasons. Also, data for the first few seconds after the start of trading hours are excluded from the consideration. A few seconds before the end of trading hours are also excluded. This is due to significant deviations in filling the LOB at these moments from the average daily level. Given the overall size of the sample under study, we consider these losses to be insignificant. However, it is worth mentioning that sometimes in practice, strategies are used that perform operations in the first and last moments of trading hours. Our research cannot be used for these strategies.

REMARK 2. Despite the seemingly large volume of the presented raw data, in our opinion, it is not enough to form a complete picture. The best solution would be the restoration of the LOB state based on high-frequency data on orders arrived, executed and canceled (as dataset from [18]).

3. Approach

3.1. Liquidity cost models. There is a large number of works devoted to the construction of models or the study of empirical properties of the LOB [19–25]. In addition, the interested reader can find many useful references in the works [26] or [27].

Briefly recall the method for estimating the cost of liquidity, proposed in [11]. The authors describe the cost of liquidity as a nonlinear transaction cost. For example, suppose a trader wants to acquire h units of an asset. The cost of liquidity

Table 1. The amount of snapshots for various futures contracts on the Moscow Exchange

	Days	Brent	RTS index	USDRUB	Total for the month
May 2020	18	81 240	81 240	81 239	243 719
June 2020	20	91 843	91 843	91 843	275 529
July 2020	20	85 344	85 344	85 344	256 032
August 2020	21	86 674	86 674	83 260	256 608
September 2020	22	89 073	89 073	89 073	267 219
October 2020	22	98 172	98 172	98 172	294 516
November 2020	19	84 091	84 091	84 091	252 273
December 2020	22	101 861	101 861	101 861	305 583
January 2021	18	84 365	84 365	79 661	248 391
February 2021	19	82 216	82 216	82 216	246 648
Total	201	884 879	884 879	876 760	2 646 518

Note: This table reports the number of snapshots processed for each futures contract. Given that each snapshot contains 100 values of the empirical liquidity cost function $l(h)$, about 88 million of $l(h)$ values are processed for each futures.

$C(h)$, expressed as difference between the total cost $T(h)$ of acquisition h units and the mark-to-market value $h\bar{s}$ in the amount of money, takes the form

$$C(h) = T(h) - h\bar{s} = \bar{s}l(h), \quad (1)$$

where

$$\bar{s} = \frac{s_{bid} + s_{ask}}{2} \quad (2)$$

and

$$l(h) = \int_1^{s^m(h)} (s - 1)\rho(s) ds.$$

Here $s^m(h)$ is a marginal, maximal (for a buy market order) ‘relative’ price and $\rho(s)$ is the density of the asset volume in the LOB. The authors used for the liquidity cost function $l(h)$ for units of the underlying asset in form

$$l(h) = \frac{1}{2}\gamma h^2, \quad (3)$$

where γ is a small parameter. For numerical solutions, the authors take $\gamma = 0.006$, based on practical measurements. This form of $l(h)$ was chose for reasons of the tractability of the HJB equation (see [11, Remark and equation (3.12)]).

The cost of liquidity presented in a different way can be found in [12]. Authors suggested to use the function, that in our notation has a form

$$r(h\bar{s}) = \ln(s^m(h)).$$

The function $r(\cdot)$ is called “the relative price impact curve”. This function depends on the mark-to-market value of the asset $h\bar{s}$. If an incoming market order is executed at the best ask price, then this means $s^m(h) \rightarrow 1$ and $r \rightarrow 0$. If a trader cannot buy the needed volume at the best ask price, then $r > 0$ and this situation corresponds to the presence of illiquidity. The relative price impact curve r is non-decreasing, piecewise constant function of the mark-to-market value of a market order of h shares.

The marginal relative price $s^m(h)$ can be expressed in terms of mark-to-market value as $s^m(h) = e^{r(h\bar{s})}$. And then the cost of liquidity $C(h)$, expressed in the amount of money, takes the form

$$C(h) = T(h) - h\bar{s} = \bar{s} \int_0^h e^{r(z\bar{s})} dz - h\bar{s} = \bar{s} \left(\int_0^h e^{r(z\bar{s})} dz - h \right).$$

The authors considered the function r as

$$r(h\bar{s}) = \beta\bar{s}h,$$

where $\beta > 0$ characterizes the liquidity in LOB. The smaller β , the greater the liquidity. The authors find values of β for the bid and ask sides of LOB separately for many stocks, that trades on the Copenhagen Stock Exchange. A comparison of these both ways and one of possible practical implementations can be found in [28].

3.2. Calculation of the empirical liquidity cost function. First of all, using the approach from [11], empirical values for $l(h)$ are calculated. Let us denote by q_i^{bid} and q_i^{ask} the quantity of lots at each i -th price level on the bid or ask side in the LOB, respectively. On the i -th level all orders has one price, s_i^{bid} or s_i^{ask} . The values of this function were calculated separately for the bid side ($l(h^-)$) and the ask side ($l(h^+)$) using the formulas:

$$l(h_k^+) = \sum_{i=1}^k (p_i - 1)q_i^{\text{ask}}, \quad p_i = s_i^{\text{ask}}/\bar{s}, \quad h_k^+ = \sum_{i=1}^k q_i^{\text{ask}}, \quad k = 1, 2, \dots, 50, \quad (4)$$

and

$$l(h_k^-) = \sum_{i=1}^k (1 - p_i)q_i^{\text{bid}}, \quad p_i = s_i^{\text{bid}}/\bar{s}, \quad h_k^- = (-1) \sum_{i=1}^k q_i^{\text{bid}}, \quad k = 1, 2, \dots, 50, \quad (5)$$

where p_i is relative price on the i -th price level in LOB and $\bar{s}$ is determined by (2). For the bid side $p_i < 1$ and for the ask side $p_i > 1$. Note that for the bid side $h_k^- < 0$, and for the ask side $h_k^+ > 0$.

3.3. Using initial margin instead of lots or money equivalent. Since the function $l(h)$ (4), (5) measures the cost of liquidity depending on the number of lots h , it is difficult to use $l(h)$ when comparing several different futures contracts. The futures contracts under consideration vary widely in parameters such as lot size or value of price tick. If we compare for them the empirical liquidity cost function depending on the number of lots, then the result will not reflect the true relationship between them. The money value or risk of holding the position in one lot varies for

Table 2. The parameters for various futures contracts on the Moscow Exchange

	Brent	RTS index	USDRUB
Contract size (lot)	10 barrel	1 RTS index	1000 USD
Quotation	USD per 1 barrel	points	RUB per 1000 USD
Price tick	0.01	10	1
Value of price tick	0.1 USD	0.2 USD	1 RUB

Note: This table presents the parameters of various futures contracts. The existing differences in these parameters make it difficult to compare the contracts with each other. Obviously, comparisons cannot be made on a per contract basis. Comparison in monetary terms is also difficult as contracts have different price step and therefore different minimum spreads between the best bids and offers. The minimum spread affects the estimate of transaction costs and asset volatility.

different futures contracts. For example, table 2 provides the nominal characteristics of the futures contracts under consideration.

The question arises as to which equivalent to choose that would allow comparing the cost of liquidity for different futures contracts. The authors [12] investigated the relative change in the marginal price relative to the mid-price, as a function of the mark-to-market value of a market order of h stock. In the case of futures contracts, this equivalent may be the initial margin. As mentioned above, the initial margin will be locked in the trader's account as soon as h futures contracts are acquired or sold. Typically, the initial margin is defined as a fraction of the market value of the underlying asset.

REMARK 3. The value of the initial margin can be different for the same contract for different exchanges or clearing firms, as they assess risk differently. However, we assume that the same algorithm for determining the initial margin on the same trading venue is used for different contracts. In this case, initial margin can serve as a basis for comparing different futures contracts.

It is also necessary to note a number of works that demonstrate the differences in the empirical properties of the bid side and the ask side in the LOB [12, 29–31]. Likewise, on some trading venues the regulations prescribe that the initial margin may be different for buying and selling a futures contract.

The initial margin $im^\pm$ on the Moscow Exchange is denominated in Russian rubles. Therefore, for convenience, we will convert all used values into US dollars. Here it would be more correct to also take into account the difference between USDRUB bid and ask spot prices, but for simplicity the average spot rate $fx = (USDRUB_{bid} + USDRUB_{ask})/2$ is used. This rate was calculated at the same time that each LOB snapshot is generated. Thus, instead of the number of lots in the market order $h^\pm$, we will use the value of the required initial margin $m^\pm = im^\pm h^\pm / fx$. Although the values of m on the bid side, m^- , will be negative in this definition, this should not be misleading. In any case, the exchange or clearing firm blocks the amount of $|m^\pm|$, regardless of whether the trader buys or sells. We

introduced the signs because the initial margin is different for the bid and ask sides of the LOB. Hereinafter, we will not indicate the sign of the initial margin m .

3.4. Approximation of the empirical liquidity cost function. First of all, it is necessary to choose the functions that will approximate the empirical liquidity cost function. As pointed in [11], a quadratic form (3) was chosen for the function $l(h)$. Consequently, the coefficient γ will be found to approximate the empirical function of the liquidity cost $l(m)$ by a quadratic function in the form

$$l(m) = \frac{1}{2}\gamma m^2, \quad \gamma > 0. \quad (6)$$

The next step suggests the shape of graphs on figures 1–3. Looking at them, one can assume that the best approximation for ‘maximum’ liquidity costs would be two straight lines starting from the origin of coordinates. Therefore, another version of the approximation will be represented by a linear function in the form

$$l(m) = \frac{1}{2}vm, \quad v = \text{const}. \quad (7)$$

In this case, the approximation was performed using the least squares method. The difference from other approximations is that only the points corresponding to the maximum value of the empirical function $l(m)$ were used for each specific m . Recall that for each h_k there can be several values of the function $l(h)$ obtained from different snapshots.

At the same time, one cannot exclude the possibility when the empirical function of the liquidity cost can be approximated as

$$l(m) = \frac{1}{2}\varepsilon m^\alpha, \quad \varepsilon > 0, \quad \alpha > 0. \quad (8)$$

As mentioned, number of research shows that the bid side and the ask side have different empirical properties. Therefore, all approximations were performed separately for the bid side and ask side of the LOB.

3.5. The software used in the work. Futures contract prices were collected online using the QUIK workstation (<https://arqatech.com>). The primary processing of the snapshots of LOB were carried out using self-developed Lua scripts. For this, the Lua Interpreter library (QLua) was used.

The empirical function was approximated using the nonlinear least squares method. The function `curve_fit()` from SciPy package (<https://www.scipy.org>) for Python was used for this. The graphs plotted using the Matplotlib library for Python (<https://matplotlib.org>).

4. Results

Fig. 1 shows a typical picture of the obtained empirical data for the Brent oil futures contract calculated for all LOB snapshots in one month. There are also charts for the RTS Index futures contract (fig. 2) and the FX rate futures contract of US dollar versus Russian ruble (fig. 3). The vertical axis on the main panel corresponds to the empirical function $l(m)$. The horizontal axis corresponds to the

required initial margin m . A value on the axis with a minus sign indicates the bid side of the limit order book. The top panel shows the distribution of the number of $l(m)$ values depending on the required initial margin to buy ($m > 0$) or to sell ($m < 0$). The right panel shows the distribution of the number of empirical point depending on the $l(m)$ value. As one can see in the upper histogram of each figure, there is a difference in the distribution of the volumes of limit orders in the LOB. We'll discuss the difference in distributions in Section 5, but for now just want to point it out.

Fig. 4 compares the empirical liquidity cost function for the futures contracts under consideration. This comparison was made possible by measurements using the initial margin. The large area on left panel reflects data on the Brent oil futures contract. The lower areas correspond to an RTS Index futures contract and the FX rate futures contract of US dollar versus Russian ruble. The last two areas overlap each other.

Fig. 5 shows a typical empirical liquidity cost function calculated for all LOB snapshots in one month. This figure corresponds to a futures contract on the RTS Index (July 2020). In general, the picture is not very different for various futures contracts. The plot also shows three lines for each side of the LOB. They represent the results of approximation by various functions as described in Section 3.4. In supplement materials [32] presented the results of the quadratic, linear and power approximations for all futures contracts under consideration. For practical purposes, one can use (1) and the obtained approximations.

Also, a visualization of the dynamics of the empirical function of the liquidity cost has been created [33]. The top panel shows the empirical liquidity cost function. The bottom panel shows the dynamics of the average price of a futures contract. The time interval between each value is 5 seconds. Visualization is performed in accelerated mode.

Fig. 6 compares the cost of liquidity $C(m)$ (1) depending on the initial margin. The vertical width of the area for each level of initial margin gives an estimate of the amount of possible liquidity costs. For example, when buying the FX rate futures contract of US dollar versus Russian ruble, the additional liquidity costs will not exceed 10,000 US dollars using an initial margin of 1 million US dollars. For the RTS Index futures contract on the same terms, the maximum liquidity cost will be about 20,000 US dollars. The right panel of figure 6 shows the same data, but enlarged. It can be seen that the cost of liquidity is the same for different futures contracts when using an initial margin of up to 100,000 US dollars.

This article presents results for one month, July 2020, as an example. The interested reader can find results for the entire observation period in [32].

5. Discussion and conclusions

The article deals with the empirical liquidity cost function for various futures contract. The function is determined from snapshots of the limit order book (LOB). Also, for futures contracts, it is proposed to use the initial margin instead of the number of lots. This allowed us to compare the empirical liquidity cost function for various futures contracts.

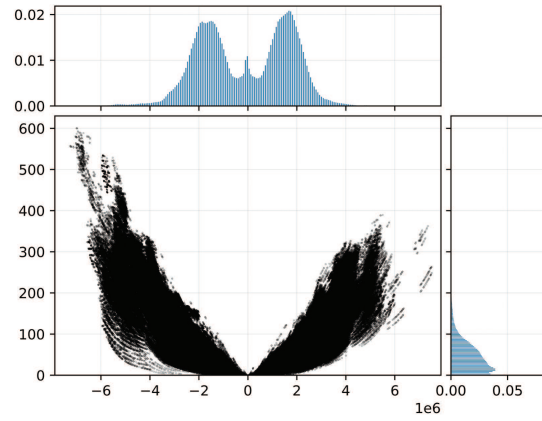


Fig. 1. Empirical values and distributions of the liquidity cost function $l(m)$ for the Brent oil futures contract (BRQ0). Data for July 2020

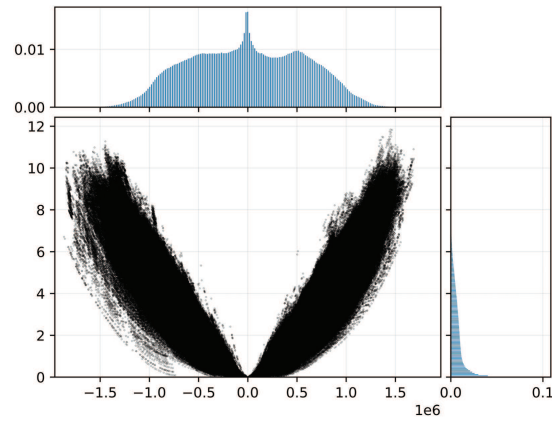


Fig. 2. Empirical values and distributions of the liquidity cost function $l(m)$ for the RTS Index futures contract (RIU0). Data for July 2020

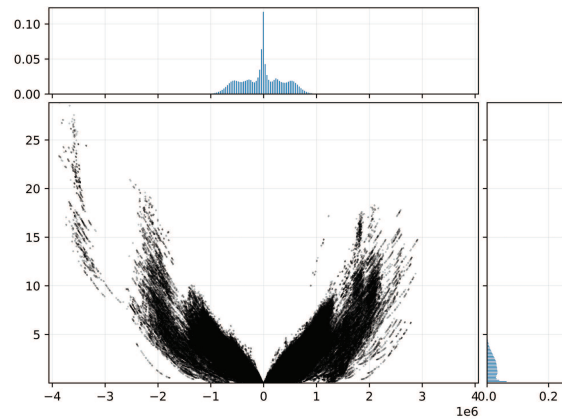


Fig. 3. Empirical values and distributions of the liquidity cost function $l(m)$ for the FX rate futures contract of US dollar versus Russian ruble (SiU0). Data for July 2020

The article proposes several variants for approximating the empirical liquidity cost function. These approximations can be used to solve various practical and theoretical problems. In particular, the linear approximation can be useful to estimate the maximum cost of executing a market order or for dynamic hedging. The quadratic approximation is used in theoretical research. Some of the results deserve special mention.

The difference in the distributions. As seen in fig. 1–3, there are differences in the distribution of the empirical liquidity cost function. In particular, the figures show two well-visible symmetric distribution highs for Brent crude oil futures. For futures on the RTS index and the US dollar against the Russian ruble, these highs are less noticeable. Instead, there is only one notable maximum located in the central part.

The differences arise, in our opinion, due to the presence of orders from large market makers in the limit order book for a futures contract for Brent crude oil. The contract is one of the most significant ones traded all over the world. Quotes for this contract are supported by many market makers around the world. Therefore, most of the orders posted in LOB are relatively large. These orders can also be posted in LOB for arbitrage purposes between the Moscow Exchange and international trading venues. The small peak in the center of the distribution also reflects the large number of orders posted, probably by individual traders.

The situation is different with the contracts for the RTS Index and the US dollar against the Russian ruble. We suppose that there are no large orders from market makers for these financial instruments. Due to the domestic, regional nature of these trading assets, the arbitrage between the Moscow Exchange and other trading venues also does not require large volumes. In most cases, local traders post limit orders for these assets. The distribution pattern shows that most orders are posted in relatively small amounts.

Additional confirmation of this assumption is also the fact that the areas corresponding to futures on the RTS index and the exchange rate of the US dollar against the Russian ruble in figure 4 almost coincide. They have the same shape in the area of small values of m and differ little in the region of large values of m .

Variation of the empirical liquidity cost function. Fig. 4 and 5 shows that the nature of the empirical liquidity cost function changes over time. Its shape at different times can change from quadratic to linear and vice versa. The $l(m)$ function takes a linear form when the size of the required initial margin (or the number of units of the underlying asset) increases evenly with distance from the average LOB price. The rate of such an increase or the slope of the straight line is an indicator of liquidity. The higher the absolute value of this indicator, the higher the cost of liquidity.

Sometimes the exponent α in the approximating function (8) is less than 1. This situation is observed when the cost of liquidity does not increase significantly with an increase in the quantity of the market order h (or the required initial margin m). For example, if there are several very large orders in the LOB.

The quadratic and power-law forms of the liquidity cost function indicate an

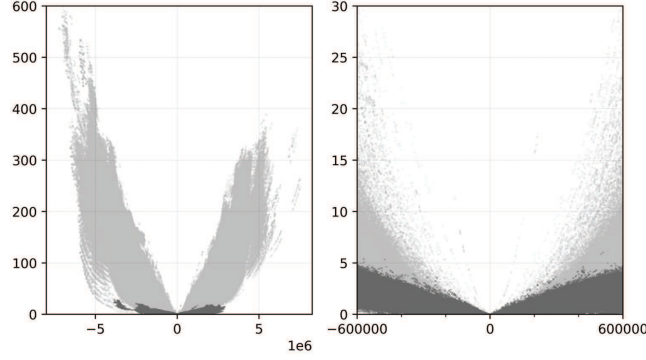


Fig. 4. The left panel shows comparison of the empirical function of the liquidity cost for the futures contracts under consideration. The large area reflects data on a futures contract for Brent crude oil. The lower areas correspond to the RTS Index futures contract and the FX rate futures contract of US dollar versus Russian ruble. The last two areas almost overlap each other. The right panel shows the same data, but enlarged. Data for July 2020

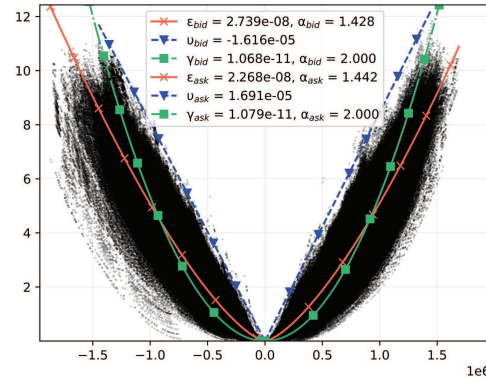


Fig. 5. The approximations of the empirical liquidity cost function $l(m)$ for the RTS Index futures contract (RIU0). Data for July 2020

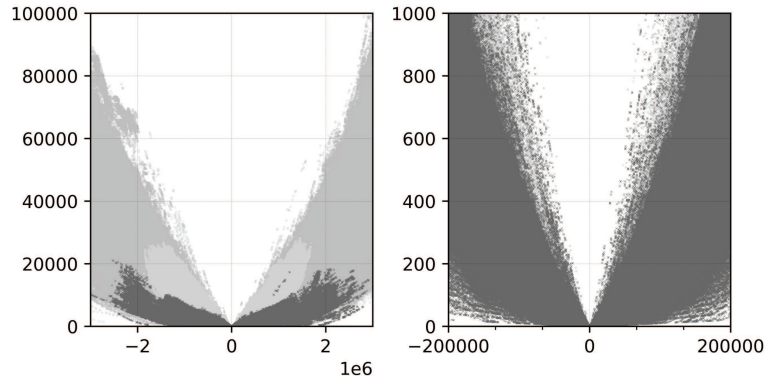


Fig. 6. The left panel shows comparison of the liquidity cost $C(m)$ for the futures contracts under consideration. The large area reflects data on a futures contract for Brent crude oil(grey). The lower areas correspond to the RTS Index futures contract (light grey) and the FX rate futures contract of US dollar versus Russian ruble (dark grey). The right panel shows the same data, but enlarged. Data for July 2020

uneven distribution of limit orders in LOB. This fact can be used to verify LOB-models simulating the processes of arriving, executing and canceling market and limit orders using various stochastic processes.

Future directions of research. In our opinion, the relationship between the empirical liquidity cost function and asset volatility or return requires further research. In particular, it would be interesting to assess changes in the volatility of futures contracts based on the observed values of the function $l(m)$ or its high-frequency changes.

Also it seems fruitful the studying of the variation of the empirical liquidity cost function. The temporal dynamics of such changes, depending on the parameters of the LOB state, may highlight new aspects of market liquidity.

REFERENCES

1. Kyle A. S., "Continuous auctions and insider trading," *Econometrica*, **53**, No. 6, 1315–1335 (1985).
2. Korajczyk R. A. and Sadka R., "Pricing the commonality across alternative measures of liquidity," *J. Financ. Econ.*, **87**, No. 1, 45–72 (2008).
3. Black F., "Toward a fully automated stock exchange, Part I," *Financ. Analysts J.*, **27**, No. 4, 28–35 (1971).
4. Degryse H., De Jong F., Van Ravenswaaij M., and Wuyts G., "Aggressive orders and the resiliency of a limit order market," *Rev. Finance*, **9**, No. 2, 201–242 (2005).
5. Foucault T., Kadan O., and Kandel E., "Limit order book as a market for liquidity," *Rev. Financ. Stud.*, **18**, No. 4, 1171–1217 (2005).
6. Large J., "Measuring the resiliency of an electronic limit order book," *J. Financ. Markets*, **10**, No. 1, 1–25 (2007).
7. Olbrys J. and Mursztyn M., "Estimation of intraday stock market resiliency: short-time Fourier transform approach," *Phys. A: Stat. Mech. Appl.*, **535**, 122413 (2019).
8. Giot P. and Grammig J., "How large is liquidity risk in an automated auction market?" *Empirical Econ.*, **30**, No. 4, 867–887 (2006).
9. Obizhaeva A. A. and Wang J., "Optimal trading strategy and supply/demand dynamics," *J. Financ. Markets*, **16**, No. 1, 1–32 (2013).
10. Roch A. F. and Mete Soner H., "Resilient price impact of trading and the cost of illiquidity," *Int. J. Theor. Appl. Finance*, **16**, No. 06 (2013).
11. Rogers L. C. G. and Singh S., "The cost of illiquidity and its effects on hedging," *Math. Finance*, **20**, No. 4, 597–615 (2010).
12. Malo P. and Pennanen T., "Reduced form modeling of limit order markets," *Quant. Finance*, **12**, No. 7, 1025–1036 (2012).
13. Margins Handbook, National Futures Association (1999).
<https://www.nfa.futures.org/members/member-resources/files/margins-handbook.pdf>
14. ICE Risk Model, Intercontinental Exchange (2018).
https://www.theice.com/publicdocs/clear_europe/ice_risk_model_tool_user_guide.pdf
15. Margin Methodology, Options Clearing Corporation (2021).
<https://www.theocc.com/Risk-Management/Margin-Methodology>
16. Initial Margin, Moscow Exchange (2020).
<https://www.moex.com/s1696>
17. Search by Contracts, Moscow Exchange (2020).
<https://www.moex.com/en/derivatives/contracts.aspx?p=act>
18. Market Data Subscription, Moscow Exchange (2021).
<https://www.moex.com/en/orders/historicaldata>
19. Sandås P., "Adverse selection and competitive market making: empirical evidence from a limit order market," *Rev. Financ. Stud.*, **14**, No. 3, 705–734 (2001).
20. Roşu I., "A dynamic model of the limit order book," *Rev. Financ. Stud.*, **22**, No. 11, 4601–4641 (2009).

21. Bouchaud J.-P., Farmer J. D., and Lillo F., "Chapter 2. How markets slowly digest changes in supply and demand," in: Handbook of Financial Markets: Dynamics and Evolution (T. Hens and K. R. Schenk-Hoppé, eds.), Handbooks in Finance, pp. 57–160, North-Holland (2009).
22. Cont R., Stoikov S., and Talreja R., "A stochastic model for order book dynamics," Oper. Res., **58**, No. 3, 549–563 (2010).
23. Kelly F. and Yudovina E., "A Markov model of a limit order book: thresholds, recurrence, and trading strategies," Math. Oper. Res., **43**, No. 1, 181–203 (2018).
24. Parlour C. A., "Price dynamics in limit order markets," Rev. Financ. Stud., **11**, No. 4, 789–816 (1998).
25. Korolev V. Y., Chertok A. V., Korchagin A. Y., and Zeifman A. I., "Modeling high-frequency order flow imbalance by functional limit theorems for two-sided risk processes," Appl. Math. Comput., **253**, 224–241 (2015).
26. Gould M. D., Porter M. A., Williams S., McDonald M., Fenn D. J., and Howison S. D., "Limit order books," Quant. Finance, **13**, No. 11, 1709–1742 (2013).
27. Lehoczky J. and Schervish M., "Overview and history of statistics for equity markets," Annu. Rev. Stat. Appl., **5**, 265–288 (2018).
28. Dyshaev M. M., "On measuring the cost of liquidity in the limit order book," Chelyab. Fiz. Mat. Zhurn., **5**, No. 1, 96–104 (2020).
29. Harris L. and Hasbrouck J., "Market vs. limit orders: the SuperDOT evidence on order submission strategy," J. Financ. Quant. Anal., **31**, No. 2, 213–231 (1996).
30. Rinaldo A., "Order aggressiveness in limit order book markets," J. Financ. Markets, **7**, No. 1, 53–74 (2004).
31. Escibano A. and Pascual R., "Asymmetries in bid and ask responses to innovations in the trading process," Empirical Econ., **30**, No. 4, 913–946 (2006).
32. Dyshaev M. M., "Values, distributions and approximations of the empirical liquidity cost function for various futures contracts" (2021).
<https://zenodo.org/record/5522451>
33. Izergin D. B. and Dyshaev M. M., "The visualization of the dynamics of the empirical liquidity cost function (for the Brent futures contracts)" (2021).
<https://zenodo.org/record/4461771>

Submitted May 10, 2021

Revised October 19, 2021

Accepted November 26, 2021

Mikhail M. Dyshaev, Dmitrii B. Izergin, Vladimir E. Fedorov
Chelyabinsk State University,
129 Brat'yev Kashirinikh Street, Chelyabinsk 454091, Russia
mikhail.dyshaev@gmail.com, izergin@csu.ru, kar@csu.ru

Математическая жизнь
Межгородской научно-исследовательский семинар
«Неклассические задачи математической физики»

25 сентября 2021 г.

«Задачи без начальных условий для диффузионно-волнового уравнения»

Докладчик: А. В. Псху (Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН, Россия)

Рассматривается диффузионно-волновое уравнение с дробной производной, определенной на бесконечном промежутке (с началом в минус бесконечности), по временной переменной. В неограниченных областях исследованы задачи без начальных условий с прямым и обратным временем.

9 октября 2021 г.

«Обратные и нелокальные задачи для уравнений и систем диффузии и фильтрации»

Докладчик: А. Ш. Любанова (Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия)

В докладе представлены основные результаты докторской диссертации. Она посвящена некоторым новым классам обратных задач для линейных и нелинейных уравнений фильтрации, а также нелокальных задач для систем нагруженных уравнений диффузии. В работе рассматриваются возможные постановки краевых условий и условий переопределения в обратных задачах для линейных уравнений фильтрации. Исследуется корректность некоторых новых коэффициентных обратных задач для уравнений эллиптического, параболического и соболевского типов. Исследуются свойства решений некоторых из обратных задач для уравнений соболевского типа (устойчивость, гладкость, асимптотическое поведение). Обсуждаются вопросы регуляризации параболических обратных задач с помощью соответствующих задач для уравнений третьего порядка. Постановки коэффициентных обратных задач для линейных уравнений эллиптического и соболевского типов и результаты, полученные для них, обобщаются на случай нелинейных уравнений фильтрации. Исследуется корректность обратных задач для таких уравнений и свойства решений стационарных обратных задач. Методы решения обратных задач для эволюционных уравнений применяются для исследования нелокальных краевых задач для систем нагруженных уравнений параболического и соболевского типов, в которых условия по времени заданы только для одной из неизвестных функций. Рассматриваются два варианта условий: либо следы одной из функций в начальный и финальный моменты времени, либо нелокальные условия в виде заданного интеграла по времени и комбинации следов в начальный и финальный моменты. Устанавливаются достаточные условия глобальной однозначной разрешимости таких задач.

23 октября 2021 г.

«Сглаживающий эффект от дробной производной в нелинейном волновом уравнении»

Докладчик: А. Н. Артюшин (Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия)

В докладе рассматриваются некоторые известные нелинейные уравнения, для которых имеется лишь энергетическая априорная оценка. Отсутствие «хороших» оценок не позволяет доказать существование глобальных регулярных решений, а нелинейность не позволяет доказать существование обобщенных решений. Оказывается, что введение дробной производной в эти уравнения оказывает определенный сглаживающий эффект. В результате существование обобщенных решений удастся доказать с помощью комбинации методов компактности и монотонности.

6 ноября 2021 г.

«Обратные задачи с точечным переопределением»

Докладчик: С. Г. Пятков (Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, Россия)

В докладе описаны некоторые результаты по разрешимости обратных задач об определении коэффициентов и правой части в регулярном случае (гладкие данные); точечных источников (задача некорректна в смысле Адамара); граничных режимов (в случае данных, заданных на границе области, и в случае задания данных внутри области (в этом случае задача некорректна)); коэффициентов теплопередачи и потоков (в случае слоистых сред).

20 ноября 2021 г.

«О корректности одной прямой и обратной задачи с нелокальным краевым условием для трехмерного уравнения Чаплыгина в неограниченной призматической области»

Докладчик: С. З. Джамалов (Институт математики АН РУз, лаборатория «Дифференциальные уравнения и их приложения», Ташкент, Узбекистан)

Изучается методами регуляризации и априорных оценок с применением преобразование Фурье однозначная разрешимость одной прямой и обратной задачи с нелокальным краевым условием для трехмерного уравнения Чаплыгина в неограниченной призматической области.

4 декабря 2021 г.

«Критерий минимальности оператора Лапласа»

Докладчики: Т. Ш. Кальменов, Н. Кахарман (Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан)

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — конечная область с гладкой границей Γ . Линейным оператором Δ_0 назовем замыкание дифференциального оператора Δ в $L_2(\Omega)$ на подмножестве функций $u \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ с условиями

$$u|_{x \in \partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n_x} \Big|_{x \in \partial\Omega} = 0.$$

Изложен критерий обратимости минимального оператора.

18 декабря 2021 г.

«Применение смешанного оператора теплопроводности в нелинейном уравнении составного типа четвертого порядка»

Докладчик: В. Н. Ханхасаев (Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Улан-Удэ, Россия)

Введенный автором на основе обобщенного закона Фурье смешанный оператор теплопроводности использовался им ранее для исследования математических моделей тепломассопереноса некоторых режимов коммутации электрической дуги в спутном потоке газа. Этот оператор применяется при составлении нелинейного неклассического уравнения четвертого порядка. Получены теоремы существования и единственности для решений первой краевой задачи с освобождением части краевых условий на характеристиках.

«О существовании собственных колебаний в круглом волноводе с препятствиями»

Докладчик: И. Б. Юмов (Бурятский государственный университет, Улан-Удэ, Россия)

В докладе исследуется существование собственных колебаний в акустическом волноводе цилиндрической формы с круговым поперечным сечением при наличии препятствий. Рассмотрены случаи тонкостенных и толстостенных препятствий.

УКАЗАТЕЛЬ

	Номер
Акимов М. П., Мордовской С. Д., Старостин Н. П.	Расчетное определение параметров подземного полиэтиленового трубопровода теплоснабжения в многолетнемерзлых грунтах 1
Байбулатова Г. Д.	см. Плеханова М. В., Байбулатова Г. Д., Киен Б. Т.
Бойко К. В.	см. Федоров В. Е., Бойко К. В., Фуонг Т. Д.
Бубякин И. В., Гоголева И. В.	К дифференциальной геометрии ρ -мерных комплексов $C^p(1, 1)$ m -мерных плоскостей проективного пространства P^n 4
Варламова Г. А.	см. Кожанов А. И., Варламова Г. А.
Гоголева И. В.	см. Бубякин И. В., Гоголева И. В.
Голубятников В. П., Кириллова Н. Е.	Фазовые портреты моделей двух генных сетей 1
Григорьева А. И.	Задача Дирихле для уравнений составного типа высокого порядка с разрывными коэффициентами 4
Демиденко Г. В., Кудрявцев А. А.	Краевые задачи в четверти плоскости для уравнения Рэлея — Бишопы 3
Дубко В. А., Зубарев С. В., Карачанская Е. В.	Нахождение решения характеристического уравнения для одной неклассической модели диффузии 1
Зубарев С. В.	см. Дубко В. А., Зубарев С. В., Карачанская Е. В.
Имомназаров Ш. Х., Михайлов А. А.	Спектральный метод Лагерра для решения одномерной динамической задачи магнитоупругости 2
Карачанская Е. В.	см. Дубко В. А., Зубарев С. В., Карачанская Е. В.
Киен Б. Т.	см. Плеханова М. В., Байбулатова Г. Д., Киен Б. Т.
Кириллова Н. Е.	см. Голубятников В. П., Кириллова Н. Е.
Клепиков П. Н., Родионов Е. Д., Хромова О. П.	Уравнение Эйнштейна на трехмерных локально однородных (псевдо)римановых пространствах с векторным кручением 4
Кожанов А. И.	Квазипараболические уравнения со слабым вырождением 1
Кожанов А. И., Варламова Г. А.	Квазиэллиптические уравнения со слабым вырождением 4
Кожанов А. И., Лукина Г. А.	Вырождение в дифференциальных уравнениях с кратными характеристиками 3
Кононенко Л. И.	Задача идентификации для невырожденной системы дифференциальных уравнений с быстрыми и медленными переменными 2

Кудрявцев А. А.	см. Демиденко Г. В., Кудрявцев А. А.	
Лазарев Н. П.	см. Неустроева Н. В., Лазарев Н. П.	
Лазарев Н. П., Шарин Е. Ф., Семенова Г. М.	Оптимальное расположение жесткого включения в задаче о равновесии пластины Кирхгофа — Лява с условиями непроникания для известной конфигурации изгиба	2
Лукина Г. А.	см. Кожанов А. И., Лукина Г. А.	
Матвеева И. И., Хмиль А. В.	Устойчивость решений одного класса нелинейных систем разностных уравнений с запаздыванием	3
Минушкина Л. С.	Фазовые портреты блочно-линейной динамической системы в одной модели кольцевой геномной сети	2
Михайлов А. А.	см. Имомназаров Ш. Х., Михайлов А. А.	
Мордовской С. Д.	см. Акимов М. П., Мордовской С. Д., Старостин Н. П.	
Неустроева Н. В., Лазарев Н. П.	Оптимальное управление углом наклона трещины в задаче о равновесии пластины Тимошенко с упругим включением	4
Орлова Д. С.	см. Пятков С. Г., Орлова Д. С.	
Плеханова М. В., Байбулатова Г. Д., Киен Б. Т.	Распределенное управление для полулинейных уравнений с производными Герасимова — Капуто	2
Подгаев А. Г.	О теоремах компактности, связанных с задачами с неизвестной границей	4
Пятков С. Г., Орлова Д. С.	О некоторых обратных задачах для уравнения Блэка — Шоулза	3
Рахмелевич И. В.	Многомерное неавтономное нелинейное уравнение со старшей частной производной	1
Родионов Е. Д.	см. Клепиков П. Н., Родионов Е. Д., Хромова О. П.	
Семенова Г. М.	см. Лазарев Н. П., Шарин Е. Ф., Семенова Г. М.	
Солдатов А. П.	Сингулярные интегральные операторы с обобщенным ядром Коши на кусочно-гладком контуре	3
Старостин Н. П.	см. Акимов М. П., Мордовской С. Д., Старостин Н. П.	
Тарасова Г. И.	Нелокальные краевые задачи для некоторых классов дифференциальных уравнений составного типа	4
Федоров В. Е., Бойко К. В., Фуонг Т. Д.	Начальные задачи для некоторых классов линейных эволюционных уравнений с несколькими дробными производными	3
Фуонг Т. Д.	см. Федоров В. Е., Бойко К. В., Фуонг Т. Д.	
Фурцев А. И.	Производная энергии для конструкции, состоящей из пластины и тонкой балки	2
Хлуднев А. М.	О равновесии пластины с тонким жестким включением и свободным краем	3
Хмиль А. В.	см. Матвеева И. И., Хмиль А. В.	
Хромова О. П.	см. Клепиков П. Н., Родионов Е. Д., Хромова О. П.	
Шарин Е. Ф.	см. Лазарев Н. П., Шарин Е. Ф., Семенова Г. М.	

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. К публикации в журнале «Математические заметки СВФУ» принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики, механики и информатики. Статьи, опубликованные ранее, а также направленные в другие издания, редакцией не рассматриваются. Редакционный совет вправе воздержаться от принятия статьи к рассмотрению, если она не соответствует профилю журнала.

2. Направляя статью в редакцию журнала, автор (соавторы) на безвозмездной основе передает(ют) издателю на срок действия авторского права по действующему законодательству РФ исключительное право на использование статьи или отдельной ее части (в случае принятия статьи к опубликованию) на территории всех государств, где авторские права в силу международных договоров Российской Федерации являются охраняемыми, в том числе следующие права: на воспроизведение, на распространение, на публичный показ, на доведение до всеобщего сведения, на перевод на иностранные языки (и исключительное право на использование переведенного произведения вышеуказанными способами), на предоставление всех вышеперечисленных прав другим лицам. Одновременно со статьей автор (соавторы) направляет в редакцию подписанный лицензионный договор на право использования научного произведения в журнале. Образец договора высылается авторам по электронной почте вместе с сообщением о принятии статьи к печати.

3. Для рассмотрения статьи на предмет ее публикации в журнале в редакцию представляются текст статьи объемом не более 1,5 авторских листов (18 страниц журнального текста), написанной на русском или, по согласованию с редакцией, на английском языке, а также сопроводительное письмо, в котором сообщается, что статья направляется именно в журнал «Математические заметки СВФУ», и информация об авторе (коллективе авторов) с указанием фамилии, имени и отчества, полного почтового адреса для переписки, места работы, подробного служебного адреса, адреса электронной почты и номера телефона. Статьи объемом более 1,5 авторских листов, как правило, не рассматриваются и могут быть приняты к рассмотрению и опубликованы лишь по специальному решению редакционного совета.

4. Статья должна быть подготовлена с использованием текстового редактора LaTeX и представлена в виде файлов форматов pdf и tex.

5. В начале статьи указывается индекс УДК и/или MSC. Статья сопровождается аннотацией объемом не менее 100 слов, желательно без формул, и списком ключевых слов. Аннотация и список должны быть представлены на русском и английском языках.

6. Список литературы печатается в конце текста. Ссылки на литературу в тексте нумеруются в порядке их появления и даются в квадратных скобках. Ссылки на неопубликованные работы нежелательны. Оформление литературы должно соответствовать требованиям стандартов (примеры библиографических описаний см. в последних номерах журнала).

7. Издание осуществляет рецензирование всех поступающих в редакцию материалов, соответствующих ее тематике, с целью их экспертной оценки. Все рецензенты являются признанными специалистами по тематике рецензируемых материалов и имеют в течение последних 3 лет публикации по тематике рецензируемой статьи. Рецензии хранятся в редакции издания в течение 5 лет.

8. Принятая к рассмотрению статья направляется на анонимное рецензирование. На основании рецензии редсовет принимает решение о возможности публикации статьи, которое сообщается автору. Автор вправе сообщить свои замечания и возражения к рецензии. Повторное решение редсовета по статье является окончательным.

9. Редакция издания направляет авторам представленных материалов копии рецензий или мотивированный отказ, а также обязуется направлять копии рецензий в Министерство науки и высшего образования Российской Федерации при поступлении в редакцию издания соответствующего запроса.

10. После редакционной подготовки непосредственно перед публикацией автору высылается корректура. По возможности в наиболее короткие сроки необходимо ее прочесть, внести исправления (правка против авторского оригинала нежелательна) и направить в редакцию. Статья выходит в свет только после получения от автора (коллектива авторов) авторской корректуры, подписанной автором (всеми соавторами) в печать.

11. В соответствии с международными законами об авторском праве Редакция уведомляет авторов журнала об их ответственности за получение ими в случае необходимости письменного разрешения на использование охраняемых авторским правом материалов, таких, как цитаты, воспроизведение данных, иллюстраций и любых иных материалов, которые могут быть использованы в их публикациях, а также о том, что вытекающая отсюда ответственность за нарушение таких авторских прав лежит на авторах. Плата за опубликование с авторов или учреждений, где работают авторы, не взимается, и опубликованные статьи не оплачиваются.

12. Права авторов на использование материалов статей и переводов статей из журнала «Математические заметки СВФУ» в иных публикациях определяются общими международными и российскими законами об авторских правах.



Журнал подготовлен с использованием макро-пакета $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\text{\TeX}$,
разработанного Американским математическим обществом.

This publication was typeset using $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\text{\TeX}$,
the American Mathematical Society's $\text{\TeX}$ macro system.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций
Свидетельство о регистрации № ПИ № ФС 77–59001 от 11.08.2014 г.

Учредитель: ФГАОУ ВО «Северо-Восточный
федеральный университет имени М. К. Аммосова»
ул. Белинского, 58, Якутск 677000

Подписано в печать 15.12.2021. Дата выхода 25.01.2022. Формат $70 \times 108\frac{1}{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 10. Уч.-изд. л. 10.
Тираж 100 экз. Заказ № 3. Цена договорная.

Отпечатано ИП С. Е. Ипатов,
пр. Академика М. А. Лаврентьева, 6, 630090 Новосибирск, Россия.