СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. К. АММОСОВА

ISSN 2411-9326

# Математические заметки СВФУ

Том 32
№ 1. 2025

СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М. К. АММОСОВА

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ СВФУ

ОСНОВАН В 1994 ГОДУ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ВЫХОДИТ 4 РАЗА В ГОД

**Том 32, № 1 (125)** **Январь—март, 2025**

## *СОДЕРЖАНИЕ*

### Математика

**Математическое моделирование**



**Тезисы докладов на конференции «Неклассические дифференциальные уравнения и математическое моделирование.»**

**Самара, 15–17 июля 2024 г.**

Адрес издателя:
СВФУ, ул. Белинского, 58, Якутск, 677000
Адрес редакции:
СВФУ, ул. Кулаковского, 48, каб. 543, Якутск, 677000
Телефон: 8(4112)32-14-99, Факс: 8(4112)36-43-47;
http://mzsvfu.ru
e-mail: prokopevav85@gmail.com; yktmatzam@gmail.com;
ivanegorov51@mail.ru

*Математические заметки СВФУ*
*Январь—март, 2025. Том 32, № 1*

*УДК 517.938*

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИКЛОВ КУСОЧНО–ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ БИОЛОГИИ

**А. В. Глубоких, В. П. Голубятников, Е. П. Волокитин**

**Аннотация.** Для кусочно-линейной трехмерной динамической системы биохимической кинетики с трехступенчатыми правыми частями получены условия существования двух устойчивх циклов в ее фазовом портретете. Построены торические окрестности этих циклов.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-1-4-14

**Ключевые слова:** математическая модель, кусочно-линейная динамическая система, фазовые портреты, цикл, устойчивость, отображение Пуанкаре.

## Введение

Следуя [1, 2], мы изучаем траектории динамической системы, моделирующей генную сеть, регулируемую отрицательными связями:

$$\frac{dx_1}{dt} = L_3(x_3) - x_1; \quad \frac{dx_2}{dt} = L_3(x_1) - x_2; \quad \frac{dx_3}{dt} = L_3(x_2) - x_3. \tag{1}$$

Общие схемы построения аналогичных моделей генных сетей см. в [3–5].

Положительные переменные $x_j$ обозначают концентрации компонент, монотонно убывающая трехступенчатая функция $L_3$ описывает отрицательные регуляторные связи между этими компонентами и задается уравнениями

$$\begin{gathered} L_3(w) = 2c, \text{ если } 0 < w < c - \varepsilon; \quad L_3(w) = c + \varepsilon, \text{ если } c - \varepsilon \le w < c; \\ L_3(w) = c - \varepsilon, \text{ если } c \le w < c + \varepsilon; \quad L_3(w) = 0, \text{ если } c + \varepsilon \le w < \infty. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $c > \varepsilon > 0$. Система (1) симметрична относительно циклической перестановки переменных $\sigma : x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_1$.

Как отмечено в [6], «количество ступенек может оказаться больше количества переменных».

Куб $Q^3 := [0, 2c] \times [0, 2c] \times [0, 2c]$ является положительно инвариантной областью системы (1), (2), в том числе и для многомерных аналогов динамической

Работа проводилась в рамках госзаданий Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН FWNF-2022-0009 и FWNF-2022-0005.

системы (1), (2), траектории всех его точек не выходят из него при $t \to \infty$ (см. [7–9].

Для контроля поведения траекторий этой динамической системы разобьем $Q^3$ плоскостями $x_j = c - \varepsilon$, $x_j = c$, $x_j = c + \varepsilon$, $j = 1, 2, 3$, которые содержат все точки разрыва трехступенчатых функций в правых частях уравнений (1). Тем самым куб $Q^3$ разбивается на 64 более мелких параллелепипеда; будем называть их *блоками.* В каждом из них система (1), (2) расщепляется на три линейных уравнения с постоянными коэффициентами. Будем нумеровать все эти блоки мультииндексами $\{r_1 r_2 r_3\}$ так, что

$r_j := A$, если в блоке $0 \le x_j < c - \varepsilon$;

$r_j := 0$, если для всех точек этого блока $c - \varepsilon \le x_j < c$;

$r_j := 1$, если для всех точек этого блока $c \le x_j < c + \varepsilon$;

$r_j := B$, если для всех точек этого блока $c + \varepsilon \le x_j \le 2c$.

Обозначим через $Q_1$ куб $\{c-\varepsilon \le x_1, x_2, x_3 \le c+\varepsilon\}$, и через $Q_2$ — объединение 18 блоков, имеющих непустые пересечения с шестью ребрами куба $Q^3$:

$$x \equiv x_1 = 2c, \quad 0 \le y \equiv x_2 \le 2c, \quad z \equiv x_3 = 0;$$

$$x = 2c, \quad y = 0, \quad 0 \le z \le 2c;$$

$$0 \le x \le 2c, \quad y = 0, \quad z = 2c; \quad x = 0, \quad 0 \le y \le 2c, \quad z = 2c;$$

$$x = 0, \quad y = 2c, \quad 0 \le z \le 2c; \quad 0 \le x \le 2c, \quad y = 2c, \quad z = 0.$$

Подобные построения были проделаны в [10, 11] для динамических систем вида (1) с одноступенчатыми функциями в правых частях их уравнений. Для таких систем правые части их уравнений имеют в точности по одной точке разрыва, поэтому в перечисленных публикациях инвариантный куб $Q$ разбивался подходящими плоскостями на восемь блоков, занумерованных бинарными мультииндексами $\{r_1 r_2 r_3\}$, $r_j = 0, 1$, $j = 1, 2, 3$. Аналогичные конструкции возникают и для подобных динамических систем в старших размерностях (см. [8, 12, 13]).

## 1. Основные результаты

Поскольку функция $L_3$ монотонно убывает, куб $Q_1$ также является положительно инвариантной областью в фазовом портрете системы (1), (2); в этом кубе функция $L_3$ является одноступенчатой, поэтому нумеруем лежащие в $Q_1$ блоки бинарными мультииндексами. Ранее, в [14], было установлено, что инвариантная область $Q_1$ содержит в точности один цикл $C_1$ и что этот цикл устойчив и переходит из блока в блок согласно стрелкам кольцевой диаграммы

$$\{001\} \to \{011\} \to \{010\} \to \{110\} \to \{100\} \to \{101\} \to \{001\} \to \dots \tag{3}$$

Обозначим через $W_1$ объединение шести блоков, перечисленных в диаграмме (3). Для одноступенчатых правых частей систем уравнений вида (1) область $W_1$ является положительно инвариантной, и траектории всех ее точек притягиваются циклом $C_1$ (см. [14]). В дальнейшем будем называть этот цикл системы (1), (2) *малым.*

**Теорема 1.** *Если $c > \varepsilon > 0$, то область $W_1$ содержит цикл $C_1$ системы* (1)*. Этот цикл состоит из шести прямолинейных отрезков, устойчив и переходит из блока в блок согласно стрелкам диаграммы* (3).

**Теорема 2.** (a) *Если $4\varepsilon \leq c$, то область $Q_2$ содержит в точности один цикл $C_2$ системы* (1), (2)*. Этот цикл состоит из* 18 *прямолинейных отрезков и переходит из блока в блок согласно стрелкам следующей кольцевой диаграммы:*

$$\begin{aligned}\ldots \to \{BBA\} \to \{B1A\} \to \{B0A\} \to \{BAA\} \to \{BA0\} \to \{BA1\}\\ \to \{BAB\} \to \{1AB\} \to \{0AB\} \to \{AAB\} \to \{A0B\}\\ \to \{A1B\} \to \{ABB\} \to \{AB1\} \to \{AB0\} \to \ldots\\ \ldots \to \{ABA\} \to \{0BA\} \to \{1BA\} \to \{BBA\} \to \ldots\ . \end{aligned} \tag{4}$$

(b) *Этот цикл устойчив и симметричен относительно $\sigma$.*

Цикл $C_2$ будем называть *большим.* Так же, как и в работах [7, 15], мы не рассматриваем траектории системы (1), (2), проходящие через ребра блоков, на которые разбивается инвариантная область $Q^3$. Циклы $C_1$ и $C_2$ переходят из блока в блок через внутренние точки граней, разделяющих эти блоки. Объединение блоков, перечисленных в диаграмме (4), является торической окрестностью цикла $C_2$. Объединение блоков, перечисленных в диаграмме (3), из которого выколота точка $(c, c, c)$, является торической окрестностью цикла $C_1$.

**1.1. Описание большого цикла системы (1), (2).** Пусть $F_2 := \{B1A\} \cap \{B0A\}$, $F_3 := \{B0A\} \cap \{BAA\}$ — общие грани пар соседних блоков диаграммы (4). Аналогично определяются и другие такие пересечения: $F_4 := \{BAA\} \cap \{BA0\}$, $F_5 := \{BA0\} \cap \{BA1\}, \ldots$ Для произвольной точки $X_2(x_2, y_2, z_2)$ из внутренности $F_2$, где

$$c + \varepsilon < x_2 < 2c; \quad y_2 = c; \quad 0 < z_2 < c - \varepsilon, \tag{5}$$

построим ее траекторию, сначала в блоке $\{B0A\}$, в котором система (1), (2) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = 2c - x; \quad \frac{dy}{dt} = -y; \quad \frac{dz}{dt} = c + \varepsilon - z.$$

В этом блоке траектория точки $X_2$ описывается уравнениями

$$x = 2c + (x_2 - 2c)e^{-t}; \quad y = y_2 e^{-t}; \quad z = c + \varepsilon + (z_2 - c - \varepsilon)e^{-t},$$

это прямолинейный отрезок в $\mathbb{R}^3$. Если $t_1 = \ln \frac{c-\varepsilon}{c}$, то $y(t_1) = c - \varepsilon$ и точка $X_3 = X_2(t_1)$ лежит в плоскости $y = c - \varepsilon$. Для того чтобы эта точка оказалась в грани $F_3$, необходимо выполнение условия

$$z_3 < c - \varepsilon, \quad \text{эквивалентного} \quad z_2 < c + \varepsilon - \frac{2c\varepsilon}{c - \varepsilon}. \tag{6}$$

Отметим, что

$$c + \varepsilon - \frac{2c\varepsilon}{c - \varepsilon} = c - \varepsilon - \frac{2\varepsilon^2}{c - \varepsilon}.$$

В следующем блоке $\{BAA\}$ диаграммы (4) наша система принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = 2c - x; \quad \frac{dy}{dt} = -y; \quad \frac{dz}{dt} = 2c - z,$$

и в нем траектория точки $X_3$ задается уравнениями

$$x = 2c + (x_3 - 2c)e^{-t+t_1}; \quad y = y_3 e^{-t+t_1}; \quad z = 2c + (z_3 - 2c)e^{-t+t_1}.$$

Если $t_2 := t_1 - t = \ln \frac{c+\varepsilon}{2c-z_3}$, то $z(t_2) = c - \varepsilon$, тогда $X_4 = X_2(t_2) \in F_4$. Следующий шаг построения траектории точки $X_2$ в блоке $\{BA0\}$ описывается уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = c + \varepsilon - x; \quad \frac{dy}{dt} = -y; \quad \frac{dz}{dt} = 2c - z,$$

и эта траектория при $t = t_3 = \ln \frac{c}{c+\varepsilon}$ попадает на грань $F_5 = \{BA0\} \cap \{BA1\}$, где $z = c$, в точку $X_5(x_5, y_5, z_5)$ с координатами $x_5 = c + \varepsilon + (x_4 - c - \varepsilon)$; $y_5 = y_4 \frac{c}{c+\varepsilon}$.

В итоге траектория точки $X_2 \in F_2$ будет пересекать грани $F_3, F_4, F_5, \ldots$ в точках $X_3(x_3, y_3, z_3)$, $X_4(x_4, y_4, z_4)$, $X_5(x_5, y_5, z_5), \ldots$ таких, что

$$x_3 = 2c + (x_2 - 2c)\frac{c - \varepsilon}{c}; \quad y_3 = c - \varepsilon; \quad z_3 = c + \varepsilon + (z_2 - c - \varepsilon)\frac{c - \varepsilon}{c}, \tag{7}$$

$$x_4 = 2c + (x_3 - 2c)\frac{c + \varepsilon}{2c - z_3}; \quad y_4 = y_3\frac{c + \varepsilon}{2c - z_3}; \quad z_4 = c - \varepsilon, \tag{8}$$

$$x_5 = c + \varepsilon + (x_4 - c - \varepsilon)\frac{c}{c + \varepsilon}; \quad y_5 = y_4\frac{c}{c + \varepsilon}; \quad z_5 = c. \tag{9}$$

Из (7) следует, что $2c - z_3 = c - \varepsilon + (x_3 - 2c)\frac{c+\varepsilon}{2c-z_3}$.

**1.2. Гипербола и парабола.** Будем искать на грани $F_2$ такую точку $P_2$, у которой координаты удовлетворяют условиям (6) и ее траектория при переходе через три блока $\{B0A\}$, $\{BAA\}$, $\{BA0\}$ диаграммы (4) попадает на грань $F_5$ в точку $P_5$ с координатами

$$x_5 = 2c - z_2, \quad y_5 = 2c - x_2, \quad z_5 = 2c - y_2 = c. \tag{10}$$

Тогда в следующих блоках диаграммы (4) формулы перехода с грани на грань имеют тот же вид, что и в ее предыдущих блоках. Например, в блоке $\{BA1\}$ система (1), (2) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = c - \varepsilon - x; \quad \frac{dy}{dt} = -y; \quad \frac{dz}{dt} = 2c - z,$$

а формулы перехода

$$x_6 = c - \varepsilon + (x_5 - c + \varepsilon)\frac{c - \varepsilon}{c}; \quad y_6 = y_5\frac{c - \varepsilon}{c}; \quad z_6 = c + \varepsilon.$$

Из замены $x_5 = 2c - z_2$, $y_5 = 2c - x_2$, $z_5 = 2c - y_2 = c$, $x_6 = 2c - z_3$, $y_6 = 2c - x_3$, $z_6 = 2c - y_3$ следует, что

$$2c - z_3 = c - \varepsilon + (2c - z_2 - c + \varepsilon)\frac{c - \varepsilon}{c}; \quad 2c - x_3 = (2c - x_2)\frac{c - \varepsilon}{c}; \quad 2c - y_3 = c + \varepsilon.$$

Окончательно

$$z_3 = c+\varepsilon+(z_2-c-\varepsilon)\frac{c-\varepsilon}{c};\quad x_3 = 2\mathrm{c}+(x_2-2\mathrm{c})\frac{c-\varepsilon}{c};\quad y_3 = c-\varepsilon,$$

что совпадает с уравнениями, описывающими переход $F_2 \to F_3$. Если через следующие три шага по диаграмме (4) положить $x_8 = 2c - z_5$, $y_8 = 2c - x_5$, $z_8 = 2c - y_5$, получим $x_8 = y_2$, $y_8 = z_2$, $z_8 = x_2$, откуда следует симметричность построенной траектории относительно циклической перестановки $\sigma$.

Второе из уравнений (10) задает гиперболу

$$c^2 = (2c+\varepsilon-z_2)(2c-x_2). \tag{11}$$

Ее асимптоты описываются уравнеными $x_2 = 2c$ и $z_2 = 2c+\varepsilon$. Обе они не пересекаются с внутренностью лежащего в $F_2$ прямоугольника

$$\mathscr{R} := \left\{c+\varepsilon < x_2 < 2c;\ y_2 = c;\ 0 < z_2 < c+\varepsilon-\frac{2c\varepsilon}{c-\varepsilon}\right\}.$$

Соответственно уравнение $x_5 = 2c - z_2$ подстановками (7)–(9) сводится к уравнению параболы:

$$(2c+\varepsilon-z_2)((c+\varepsilon)^2+c(c-\varepsilon))+(x_2-2c)c(c+\varepsilon) = (2c+\varepsilon-z_2)(2c-z_2)(c+\varepsilon). \tag{12}$$

Здесь

$$\begin{aligned} x_4-c-\varepsilon &= c-\varepsilon+(x_3-2c)\frac{c+\varepsilon}{2c-z_3} \\ &= c-\varepsilon+(x_2-2c)\frac{c-\varepsilon}{c}\frac{c+\varepsilon}{(c-\varepsilon+(z_2-c-\varepsilon)\frac{c-\varepsilon}{c})} = c-\varepsilon+\frac{(x_2-2c)(c+\varepsilon)}{(c+z_2-c-\varepsilon)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_5 &= c+\varepsilon+\frac{c}{c+\varepsilon}\left(c-\varepsilon+\frac{(x_2-2c)(c+\varepsilon)}{(c+z_2-c-\varepsilon)}\right) \\ &= \frac{(c+\varepsilon)^2+c(c-\varepsilon)}{c+\varepsilon}+\frac{(x_2-2c)c}{z_2-\varepsilon} = 2c-z_2. \end{aligned}$$

С целью построения большого цикла $C_2$ ищем точку пересечения кривых (11) и (12) во внутренности прямоугольника $\mathscr{R}$. Нижнее его основание $z_2 = 0$ пересекается с гиперболой (11) при $x_2 = x_2^h = c\frac{(3c+2\varepsilon)}{2c+\varepsilon}$ и при $x_2 = x_2^p = 2c+\frac{(c-\varepsilon)\varepsilon(2c+\varepsilon)}{c(c+\varepsilon)}$ пересекается с параболой (12). Здесь при $0 < 4\varepsilon \le c$ для координат этих точек пересечения выполняются соотношения

$$x_2^p > 2c > x_2^h. \tag{13}$$

Аналогичным образом прямая $z_2 = c+\varepsilon-\frac{2c\varepsilon}{c-\varepsilon}$, содержащая верхнее основание прямоугольника $\mathscr{R}$, пересекается с гиперболой (11) при $x_2 = \overline{x}_2^h = c\frac{(c+3\varepsilon)}{c+\varepsilon}$ и при $x_2 = \overline{x}_2^p = \frac{c^3-2c\varepsilon+3c\varepsilon^2+2\varepsilon^3}{(c-\varepsilon)^2}$ пересекается с параболой (12). Так же, как и выше, при $0 < 4\varepsilon \le c$ координаты этих точек пересечения удовлетворяют неравенствам

$$\overline{x}_2^p < c+\varepsilon < \overline{x}_2^h. \tag{14}$$

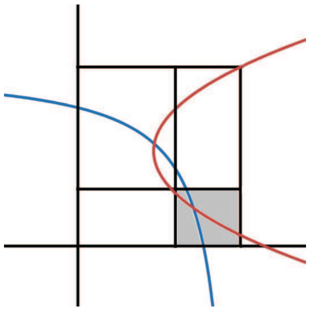


Рис. 1. Пересечение гиперболы и параболы в сером прямоугольнике $\mathscr{R}$; $c = 5\varepsilon$.

Из (13) и (14) вытекает, что при $4\varepsilon \leq c$ гипербола (11) пересекает границу прямоугольника $\mathscr{R}$ по ее горизонтальным отрезкам, а с параболой (12) эта граница пересекается по ее вертикальным отрезкам. Из теоремы Жордана следует, что эти две кривые второго порядка имеют по крайней мере одну точку пересечения во внутренности $\mathscr{R} \subset F_2$. Поскольку при $x_2 < 2c$ гипербола (11) выпукла вверх, а при $z_2 < c - \varepsilon - \frac{2\varepsilon^2}{c-\varepsilon}$ парабола (12) выпукла вниз, эта точка пересечения единственна (рис. 1).

Система (1) симметрична относительно циклической перестановки переменных $\sigma$, поэтому при выполнении условий (6) после трех шагов по диаграмме (4) траектория точки $X_5$ попадает на грань $F_8 = \{1AB\} \cap \{0AB\}$, после 18 шагов по стрелкам этой диаграммы

$$\Pi : F_2 \to F_3 \to f_4 \to F_5 \to F_6 \to F_7 \to F_8 \ldots \to F_{14} \to F_2$$

траектория точки $X_2$ возвращается в $X_2$ и, следовательно, является циклом. Композиция $\Pi$ перечисленных выше отображений является отображением Пуанкаре системы (1).

Как установлено в [15], симметричные относительно перестановки $\sigma$ динамические системы вида (1) не имеют циклов, которые несимметричны относительно $\sigma$. Тем самым первая часть теоремы 2 доказана.

## 2. Устойчивость большого цикла системы (1), (2)

Из предыдущих вычислений следует, что сдвиг $\Pi_{2,5} : F_2 \to F_5$ вдоль траекторий системы (1), (2) описывается дробно-линейными функциями

$$x_5 = \varepsilon + \frac{2c^2}{c+\varepsilon} + (x_2 - 2c)\frac{c}{2c+\varepsilon-z_2}; \quad y_5 = \frac{c^2}{2c+\varepsilon-z_2}; \quad y_2 = z_5 = c.$$

Рассмотрим матрицу Якоби этого сдвига:

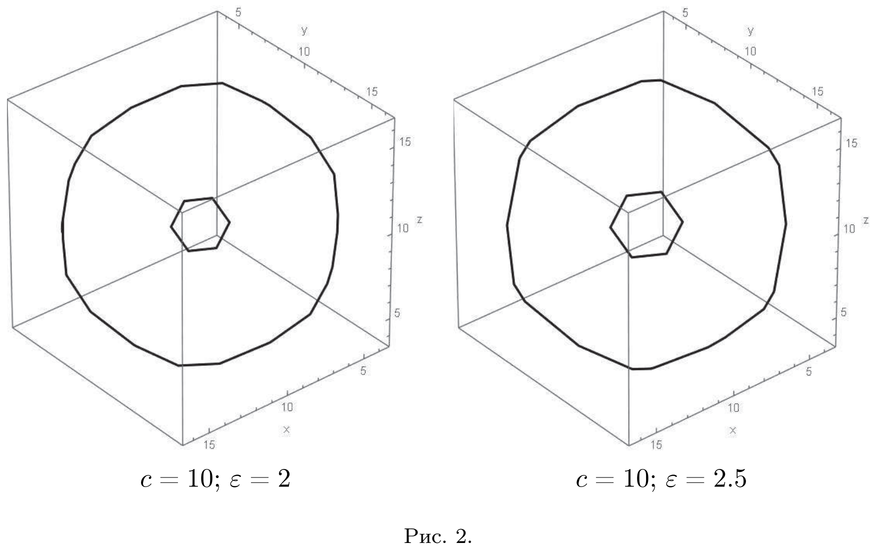
$$J = \frac{\partial(x_5 y_5)}{\partial(x_2 z_2)} = \begin{pmatrix} \frac{c}{2c+\varepsilon-z_2} & \frac{c(x_2-2c)}{(2c+\varepsilon-z_2)^2} \\ 0 & \frac{c^2}{(2c+\varepsilon-z_2)^2} \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения имеют вид $\lambda_1 = \frac{c}{2c+\varepsilon-z_2}$ и $\lambda_2 = \frac{c^2}{(2c+\varepsilon-z_2)^2} = \lambda_1^2$. Поскольку для точек грани $F_2$ выполнены соотношения (5), то $0 < \lambda_1 < 1$;

собственное число $\lambda_2$ также положительно и строго меньше единицы. Так как система (1), (2) симметрична относительно перестановки $\sigma$, сдвиги $\Pi_{2,5}$, $\Pi_{5,8} : F_5 \to F_8$, $\Pi_{8,14} : F_8 \to F_{8,14}$ и $\Pi_{14,12} : F_{14} \to F_{12}$ вдоль траекторий этой системы конгруентны, поэтому у отображения Пуанкаре $\Pi$ матрица Якоби представима в виде $J^6$ и ее собственные числа имеют вид $\lambda_1^6$, $\lambda_2^6$, положительны и также строго меньше единицы. Как показано в [16] (см. также [12, 14, 17]), если у динамической системы вида (1) абсолютные величины собственных чисел матрицы Якоби отображения Пуанкаре строго меньше единицы и имеют кратность один, то соответствующий цикл такой системы устойчив. $\square$

## 3. Результаты численных экспериментов

На рис. 2 показаны два устойчивых цикла системы (1), (2) при различных соотношениях между ее параметрами $c$ и $\varepsilon$. Аналогичные результаты были получены и для систем вида (1) с пятиступенчатыми правыми частями (см. [18], где были установлены условия существовния трех циклов). Во всех указанных случаях самый маленький цикл состоит из шести отрезков, как на рис. 2. Для этого рисунка все вычисления проводились с помощью пакета Matematica 12.1, лицензия 3322-8225.




$c = 10$; $\varepsilon = 2$ $\qquad$ $c = 10$; $\varepsilon = 2.5$

Рис. 2.

## Заключение

В работе получены достаточные условия существования двух устойчивых периодических режимов функционирования простейшей, содержащей всего три компоненты, модели молекулярного репрессилятора [19, 20], у которого отрицательные регуляторные связи описываются многоступенчатыми функциями — как в публикациях [1, 2, 6], где с помощью подобных пороговых связей построена и изучена модель бактериофага $\lambda$, имеющая два устойчивых режима функционирования. В фазовых портретах систем вида (1), (2) также наблюдается явление бистабильности — часть траекторий притягивается к устойчивому циклу $C_1$, а *почти все* остальные траектории — к устойчивому циклу $C_2$. Как было указано выше в разд. 1, здесь не рассматривались траектории, пересекающиеся с ребрами блоков разбиения инвариантного куба $Q^3$; в выделенном курсивом исключении имеются в виду как раз такие траектории.

Разработанные подходы применимы и к моделированию более сложных генных сетей [11, 21]. У динамических систем вида (1) с немонотонными правыми частями траектории могут вести себя хаотически (см. [22]).

**Благодарность.** Авторы выражают искреннюю благодарность Н. А. Колчанову за полезные обсуждения и конструктивные предложения.

### *ЛИТЕРАТУРА*


**1.** *Böttner R., Bellman K., Tchuraev R. N, Ratner V. A.* Modelling of epigenetic networks composed of monogenetic units of gene expression, with reference to characteristics bacteriophage lambda development // Molecular Genetic Information System. Modelling and Simulation (Ed. K. Bellman). Berlin: Academie-Verl., 1983. P. 81–132.

**2.** *Tchuraev R. N., Ratner V. A.* A continuous approach with threshold characteristics for simulation of gene expression // Molecular Genetic Information System. Modelling and Simulation (Ed. K. Bellman). Berlin: Academie-Verl., 1983. P. 64–80.

**3.** *Murray J. D.* Mathematical biology. Berlin: Springer-Verl., 2002. V. 1.

**4.** *Системная компьютерная биология* (Ред. Колчанов Н. А., Гончаров С. С., Иванисенко В. А., Лихошвай В. А.). Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008.

**5.** *Golubyatnikov V. P., Gaidov Yu. A., Kleshchev A. G., Volokitin E. P.* Modeling of asymmetric gene networks functioning with different types of regulation // Biophys. 2006. V. 51, Suppl. 1. P. 61–65.

**6.** *Tchuraev R. N., Galimzyanov A. V.* Modeling of actual eukaryotic control gene subnetworks based on the method of generalized threshold models // Molecular Biol. 2001. V. 35, N 6. P. 933–939.

**7.** *Gaidov Yu. A., Golubyatnikov V. P.* On cycles and other geometric phenomena in phase portraits of some nonlinear dynamical system // Geometry and its Applications (V. Rovenskii, P. Walczak, eds.). Berlin: Springer-Verl. 2014. P. 225–233.

**8.** *Голубятников В. П., Минушкина Л. С.* Монотонность отображения Пуанкаре в некоторых моделях кольцевых генных сетей // Сиб. журн. индустр. математики. 2019. Т. 22, № 3. С. 39–47.

**9.** *Minushkina L. S.* Periodic trajectories of nonlinear circular gene networks models // Sib. Math. J. 2024. V. 63, N 1. P. 95–103.

**10.** *Glass L., Pasternack J. S.* Stable oscillations in mathematical models of biological control systems // J. Math. Biol. 1978. V. 6. P. 207–223.

**11.** *Golubyatnikov V. P., Akinshin A. A., Ayupova N. B., Minushkina L. S.* Stratifications and foliations in phase portraits of gene network models // Vavilov J. Genetics Breeding. 2022. V. 26, N 8. P. 758–764.

**12.** *Иванов В. В.* Притягивающий предельный цикл модели нечетномерной генной сети // Сиб. журн. индустр. математики. 2022. Т. 31, № 3. С. 25–32.

**13.** *Golubyatnikov V. P., Minushkina L. S.* On geometric structure of phase portraits of some piecewise linear dynamical systems // Tbilisi Math. J. 2021. V. 7, Special issue. P. 49–56.

**14.** *Голубятников В. П., Иванов В. В.* Единственность и устойчивость цикла в трехмерных блочно-линейных моделях кольцевых генных сетей // Сиб. журн. чистой и прикл. математики. 2018. Т. 18, № 4. С. 19–28.

**15.** *Golubyatnikov V. P., Ayupova N. B., Bondarenko N. E., Glubokikh A. V.* Hidden attractors and nonlocal oscillations in gene networks models // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2024. V. 39, N 2. P. 75–81.

**16.** *Анищенко В. С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.

**17.** *Hartman P.* Ordinary differential equations. New York: John Wiley, 1964.

**18.** *Аюпова Н. Б., Волокитин Е. П., Голубятников В. П.* О нелокальных осцилляциях в моделях генных сетей // Мат. заметки СВФУ. 2024. Т. 31, № 1. С. 7–20.

**19.** *Hirsch M.* Systems of differential equations which are competitive or cooperative. I: Limit sets // SIAM J. Math. Anal. 1982. V. 13. P. 167–179.

**20.** *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Существование и устойчивость релаксационного цикла в математической модели молекулярного репрессилятора // Мат. заметки. 2017. Т. 101, № 1. С. 58–67.

**21.** *Чумаков Г. А., Чумакова Н. А.* Гомоклинические циклы в одной модели генной сети // Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 14. С. 97–106.

**22.** *Likhoshvai V. A., Kogai V. V., Fadeev S. I., Khlebodarova T. M.* Alternative splicing can lead to chaos // J. Bioinform. Comput. Biol. 2015. V. 13. 1540003.

*Поступила в редакцию 20 декабря г.*
*После доработки 21 января г.*
*Принята к публикации 25 февраля г.*

Глубоких Алина Витальевна
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
a.glubokikh@g.nsu.ru

Голубятников Владимир Петрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
vladimir.golubyatnikov1@fulbrightmail.org

Волокитин Евгений Павлович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
volok@math.nsc.ru

*Математические заметки СВФУ*
*Январь—март, 2025. Том 32, № 1*

*UDC 517.938*

# ON STABILITY OF CYCLES IN SOME PIECEWISE DYNAMICAL SYSTEMS OF MATHEMATICAL BIOLOGY

**A. V. Glubokikh, V. P. Golubyatnikov, and E. P. Volokitin**

**Abstract:** For a piecewise linear three-dimensional dynamical system of biochemical kinetics with three-steps righthand sides, we find conditions of existence of two stable cycles in the phase portrait. Toroidal neighborhoods of these cycles are constructed.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-1-4-14

**Keywords:** mathematical modelling, piecewise-linear dynamical systems, phase portrait, cycle, stability, the Poincaré map.

## *REFERENCES*

1. *Böttner R., Bellman K., Tchuraev R. N., and Ratner V. A.*, "Modelling of epigenetic networks composed of monogenetic units of gene expression, with reference to bacteriophage lambda development," in: Molecular Genetic Information System, Modelling and Simulation (K. Bellman, ed.), pp. 81–132, Academie, Berlin (1983).
2. *Tchuraev R. N. and Ratner V. A.*, "A continuous approach with threshold characteristics for simulation of gene expression," in: Molecular Genetic Information System, Modelling and Simulation (K. Bellman, ed.), pp. 64–80, Academie, Berlin (1983).
3. *Murray J. D.*, Mathematical Biology, vol. 1, Springer, Berlin (2002).
4. *System Computational Biology* (N. A. Kolchanov, S. S. Goncharov, V. A. Ivanisenko, V. A. Likhoshvai, eds.) [in Russian], SB RAS, Novosibirsk (2008).
5. *Golubyatnikov V. P., Gaidov Yu. A., Kleshchev A. G., and Volokitin E. P.*, "Modeling of asymmetric gene networks functioning with different types of regulation," Biophys., **51**, suppl. 1, 61–65 (2006).
6. *Tchuraev R. N. and Galimzyanov A. V.*, "Modeling of actual eukaryotic control gene subnetworks based on the method of generalized threshold models," Molecular Biol., **35**, No. 6, 933–939 (2001).
7. *Gaidov Yu. A. and Golubyatnikov V. P.*, "On cycles and other geometric phenomena in phase portraits of some nonlinear dynamical system," in: Geometry and its Applications (V. Rovenskii, P. Walczak, eds.), Springer-Verl., Berlin, pp. 225–233, (2014).
8. *Golubyatnikov V. P. and Minushkina L. S.*, "Monotonicity of the Poincaré mapping in some models of circular gene networks," J. Appl. Ind. Math., **13**, No. 3, 472–479 (2019).
9. *Minushkina L. S.* , "Periodic trajectories of nonlinear circular gene networks models," Sib. Math. J., **63**, No. 1, 95–103 (2024).
10. *Glass L. and Pasternack J. S.*, "Stable oscillations in mathematical models of biological control systems," J. Math. Biol., **6**, 207–223 (1978).
11. *Golubyatnikov V. P., Akinshin A. A., Ayupova N. B., and Minushkina L. S.*, "Stratifications and foliations in phase portraits of gene network models," Vavilov J. Genetics Breeding, **26**, No. 8, 758–764 (2022).

**12.** *Ivanov V. V.*, "Attracting limit cycle of an odd-dimensional circular gene network model," J. Appl. Ind. Math., **16**, No. 3, 409–415 (2022).
**13.** *Golubyatnikov V. P. and Minushkina L. S.*, "On geometric structure of phase portraits of some piecewise linear dynamical systems," Tbilisi Math. J., **7**, Special Issue, 49–56 (2021).
**14.** *Golubyatnikov V. P. and Ivanov V. V.* "Uniqueness and stability of a cycle in 3-dimensional circular block-linear gene network model [in Russian]," Sib. J. Pure Appl. Math., **18**, No. 4, 19–28 (2018).
**15.** *Golubyatnikov V. P., Ayupova N. B., Bondarenko N. E., and Glubokikh A. V.*, "Hidden attractors and nonlocal oscillations in gene networks models," Russ. J. Numer. Anal. Math. Model., **39**, No. 2, 75–81 (2024).
**16.** *Anishchenko V. S.*, Complicated Oscillations in Simple Systems [in Russian], Nauka, Moscow (1990).
**17.** *Hartman P.* Ordinary differential equations. John Wiley, New York (1964).
**18.** *Ayupova N. B., Volokitin E. P., and Golubyatnikov V. P.*, "Non-local oscillations in gene networks models [in Russian]," Mat. Zamet. SVFU, **31**, No. 1, 7–20 (2024).
**19.** *Hirsch M.*, "Systems of differential equations which are competitive or cooperative I: Limit sets," SIAM J. Math. Anal., **13**, 167–179 (1982).
**20.** *Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., and Rozov N. Kh.*, "Existence and stability of the relaxation cycle in a mathematical repressilator model," Math. Notes, **101**, No. 1, 71–86 (2017).
**21.** *Chumakov G. A. and Chumakova N. A.*, "Homoclinic cycles in one gene network model [in Russian]," Mat. Zamet. SVFU, **21**, No. 14, 97–106 (2014).
**22.** *Likhoshvai V. A., Kogai V. V., Fadeev S. I., and Khlebodarova T. M.*, "Alternative splicing can lead to chaos," J. Bioinform. Comput. Biol., **13**, 1540003 (2015).

*Submitted December 29, 2024*
*Revised January 21, 2025*
*Accepted February 25, 2025*

Alina V. Glubokikh
Novosibirsk State University,
1 Pirogov Street, Novosibirsk 630090, Russia
`a.glubokikh@g.nsu.ru`

Vladimir P. Golubyatnikov
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Avenue, Novosibirsk 630090, Russia
`vladimir.golubyatnikov1@fulbrightmail.org`

Evgenii P. Volokitin
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Avenue, Novosibirsk 630090, Russia
`volok@math.nsc.ru`

*Математические заметки СВФУ*
*Январь—март, 2025. Том 32, № 1*

*УДК 517.9*

# О ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ЗВЕЗДНЫХ ОБЛАСТЯХ С ЛЯПУНОВСКОЙ ГРАНИЦЕЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. II

**Т. В. Капицына**

**Аннотация.** Работа является продолжением статьи «О первой смешанной задаче для вырождающихся параболических уравнений в звездных областях с ляпуновской границей в банаховых пространствах» // Мат. заметки СВФУ. 2023. Т. 30, № 1. С. 21–39, и посвящена исследованию поведения решения параболического уравнения второго порядка с вырождением Трикоми на боковой границе цилиндрической области $Q^T$, где $Q$ — звездная область, граница которой $\partial Q$ — $(n-1)$-мерная замкнутая поверхность без края класса $C^{1+\lambda}$, $0 < \lambda < 1$.

При этом рассматриваются два случая принятия граничного условия: 1) по звездности, 2) выделяется некоторое ортогональное к границе направление и утверждается непрерывность решения как функции по специальной переменной со значениями в $L_p$ по этому направлению. Для этого в определении принятия граничного значения при отображении границы $\partial Q$ нужно брать сдвиг не по нормали в каждой точке $x \in \partial Q$, а взять достаточно мелкое покрытие границы и каждый кусок этого покрытия «параллельно» сдвигать по нормали в одной фиксированной точке этого куска $x_0$.

Рассматривается также вопрос об однозначной разрешимости первой смешанной задачи для уравнения, когда граничная и начальная функции принадлежат пространствам типа $L_p$, $p > 1$.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-1-15-31

**Ключевые слова:** вырождающиеся параболические уравнения, вырождение типа Трикоми, функциональные пространства, первая смешанная задача, разрешимость, граничные и начальные значения решений, априорные оценки.

Начнем со следующего результата, который в случае $p > 2$ был установлен в [1].

**Теорема 1.** *Пусть $p > 1$ и функция $u(x,t)$ в области $Q^T$ является решением из $W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(Q^T)$ уравнения*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} + au = f(x,t), \tag{1}$$

*где $f \in L_p(Q^T)$ и коэффициенты удовлетворяют следующему дополнительному условию: существует такое число $\gamma_2 > 0$, что для всех $(x,t) \in Q^T$ и для всех $\xi \in R_n$ выполняется неравенство*

$$\gamma_2 r^m(x) \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j$$

*с показателем $0 < m < 2$. Если $u(x,t)$ принадлежит классу Харди $H_p$, то существуют такие функции $\varphi \in L_p(\partial Q \times (0,T))$ и $u_0 \in L_p(Q,r)$, что имеют место равенства*

$$\lim_{\delta\to+0} \int\limits_{\delta}^{T'} \int\limits_{\partial Q} \|u((1-\delta)x,t) - \varphi(x,t)\|^p \, dxdt = 0,$$

$$\lim_{\delta\to+0} \int\limits_{Q_*^\delta} \|u(x,\delta) - u_0(x)\|^p r(x)\, dxdt = 0.$$

Доказательство. Напомним, что рассматриваемая теорема при $p > 2$ сводилась к случаю $f = 0$ однородного уравнения. Пусть теперь $u(x,t)$ — обобщенное из $W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(Q^T)$ решение уравнения (1), принадлежащее классу $H_p^*$, $1 < p \leq 2$. Заметим, что при сделанных предположениях относительно коэффициентов уравнения функция $u(x,t)$ непрерывна в $Q^T$. Положим $u^+(x,t) = \max\{u(x,t), 0\}$ и обозначим через $v_\delta(x,t)$, $(x,t) \in Q_*^\delta \times (\delta, T')$, $\delta \in (0, \delta_0]$, решение в $Q_*^\delta \times (\delta, T')$ первой смешанной задачи с граничным и начальным значениями:

$$v|_{(x,t)\in Q_*^\delta\times(\delta,T')} = u^+|_{(x,t)\in Q_*^\delta\times(\delta,T')}; \quad v_\delta|_{t=\delta} = u^+|_{t=\delta}.$$

В силу принципа максимума $v_\delta(x,t) \geq u(x,t)$, $v_\delta(x,t) \geq 0$ для всех $(x,t) \in Q_*^\delta \times (\delta, T')$ и, следовательно, $v_\delta(x,t) \geq u^+(x,t)$.

Таким образом, в каждой точке $(x,t) \in Q^{T'}$ функция $v_\delta(x,t)$ переменного $\delta$ ($\delta$ настолько мало, что $(x,t) \in Q_*^\delta \times (\delta, T')$) монотонно убывает. Так как

$$\begin{aligned} \|v_\delta\|_{L_p(\partial Q_*^\delta\times(\delta,T'))} + \|v_\delta(x,\delta)\|_{L_p(Q_*^\delta,\rho)} &= \|u^+\|_{L_p(\partial Q_*^\delta\times(\delta,T'))} + \|u^+\|_{L_p(Q_*^\delta,\rho)} \\ &\leq \|u\|_{L_p(\partial Q_*^\delta\times(\delta,T'))} + \|u(x,\delta)\|_{L_p(Q_*^\delta,\rho)} \leq \mathrm{const}, \end{aligned}$$

в силу теоремы 2 из [1] дополнительно имеем

$$\begin{aligned} \int\limits_{Q_*^\delta} |v_\delta(x,T')|^p(\rho-\delta)dx + \int\limits_0^{T'}\int\limits_{Q_*^\delta} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{\delta_{x_i}} v_{\delta_{x_j}} |v_\delta|^{p-2}(\rho-\delta)\, dxdt + \int\limits_0^{T'}\int\limits_{Q_*^\delta} |v_\delta|^p\, dxdt \\ \leq C_7\big(\|v_\delta\|^p_{L_p(\partial Q_*^\delta\times(\delta,T'))} + \|v_\delta\|^p_{L_p(Q_*^\delta,\rho)}\big) \leq C_8. \end{aligned}$$

Используя теорему Леви, заключаем, что функция, равная $v_\delta(x,t)$ при $(x,t) \in Q_*^\delta \times (\delta, T')$ и нулю при $(x,t) \in Q^{T'}\backslash\{Q_*^\delta \times (\delta, T')\}$, имеет предел при

$\delta \to +0$ п.в. в $Q^{T'}$ и в $L_p(Q^{T'})$. Обозначим этот предел через $v(x,t) = R(u)$, $(x,t) \in Q^{T'}$. Очевидно,

$$\int\limits_{\delta}^{T'} \int\limits_{Q_*^\delta} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(v - v_\delta)_{x_i}(v - v_\delta)_{x_j}|v - v_\delta|^{p-2}\rho(x)\,dxdt$$
$$+ \int\limits_{Q_*^\delta} |v(x,T') - v_\delta(x,T')|^p(\rho - \delta)\,dx + \int\limits_{Q^{T'}} |v - v_\delta|^p(\rho - \delta)\,dxdt \to 0 \quad (2)$$

при $\delta \to +0$. Функция $v(x,t) \in W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(Q^T)$ является в $Q^T$ обобщенным из $W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(Q^T)$ решением уравнения (1) (на самом деле $v(x,t) \in W^{2,1}_{p,\mathrm{loc}}(Q^T)$ и $v(x,t)$ есть решение уравнения (1) п.в. в $Q^T$). Кроме того, очевидно, что

$$\|v\|_{L_p(\partial Q_*^\delta \times (\delta,T'))} + \|v(x,\delta)\|_{L_p(Q_*^\delta,\rho)}$$
$$\le \mathrm{const} \cdot \sup\{\|u^+\|_{L_p(\partial Q_*^\delta \times (\delta,T'))} + \|u^+(x,\delta)\|_{L_p(Q_*^\delta,\rho)}\}.$$

Заметим, что

$$\text{если } u(x,t) \le M \text{ в } Q^T, \text{ то и } v(x,t) \le M \text{ в } Q^T,$$

$$\text{если } u(x,t) \ge M \text{ в } Q^T, \text{ то и } v(x,t) \ge M \text{ в } Q^T,$$

где $M \ge 0$ — некоторая произвольная постоянная.

**Лемма 1.** *Пусть принадлежащая классу $H_p^*$, $1 < p \le 2$, функция $u(x,t)$ является обобщенным из $W^{2,1}_{p,\mathrm{loc}}(Q^T)$ решением уравнения (1). Тогда для разности $u^+ - v$, где $v = R(u)$ при любом $q \in (1,p)$, и для любого $T' \in \left(\frac{T}{2}, T\right)$ справедливо соотношение*

$$\|u^+ - v\|_{L_q(\partial Q_*^\delta \times (\delta,T'))} + \|u^+ - v\|_{L_q(Q_*^\delta,\rho)} \to 0 \ \text{ при } \delta \to +0.$$

Доказательство. Введем обозначение

$$\Lambda(\delta) = \max_{\delta \le \mu \le \delta_0} \int\limits_{\mu}^{T'} \int\limits_{\partial Q_*^\mu} |v - v_\delta|\,dSdt.$$

Возьмем произвольные $\delta \in (0,\delta_0]$ и $T' \in \left(\frac{T}{2}, T\right)$. По определению функции $v_\delta(x,t)$ она удовлетворяет интегральному тождеству

$$-\int\limits_{Q_*^\delta} v_\delta(x,\delta)\eta(x,\delta)\,dx + \int\limits_{Q_*^\delta} v_\delta(x,T')\eta(x,T')\,dx$$
$$+ \int\limits_{\delta}^{T'} \int\limits_{Q_*^\delta} \left[-v_\delta\eta_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}v_{\delta x_i}\eta_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i v_{\delta x_j}\eta + a v_\delta \eta\right] dxdt = 0$$

для всех $\eta(x,t) \in W^{1,1}_{p'}(Q^\delta_* \times (\delta, T'))$, $\eta|_{\partial Q^\delta_* \times (\delta,T')} = 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Подставим в это равенство вместо $\eta(x,t)$ функцию $\rho\big(\frac{x}{1-\delta}\big)$. В результате получим

$$\int\limits_{Q^\delta_*} v_\delta(x,\delta)\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right)\,dx - \int\limits_{Q^\delta_*} v_\delta(x,T')\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right)\,dx + \int\limits_\delta^{T'}\int\limits_{\partial Q^\delta_*}\sum_{i,j=1}^n \frac{a_{ij}\rho_{x_i}\rho_{x_i}}{|\nabla\rho|} v_\delta\,dSdt$$
$$-\int\limits_\delta^{T'}\int\limits_{Q^\delta_*}\left[\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}\rho_{x_i})_{x_j} v_\delta - \sum_{i=1}^n a_i v_{\delta x_j}\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right) + a v_\delta \rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right)\right] dxdt = 0.$$

Аналогично для функции $v(x,t)$ имеем

$$\int\limits_{Q^\delta_*} v(x,\delta)\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right)\,dx - \int\limits_{Q^\delta_*} v(x,T')\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right)\,dx + \int\limits_\delta^{T'}\int\limits_{\partial Q^\delta_*}\sum_{i,j=1}^n \frac{a_{ij}\rho_{x_i}\rho_{x_i}}{|\nabla\rho|} v\,dSdt$$
$$-\int\limits_\delta^{T'}\int\limits_{Q^\delta_*}\left[\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}\rho_{x_i})_{x_j} v - \sum_{i=1}^n a_i v_{x_j}\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right) + a v \rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right)\right] dxdt = 0.$$

Так как $(v - v_\delta) \geq 0$, получаем

$$\int\limits_{Q^\delta_*} (v(x,\delta) - v_\delta(x,\delta))\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right)\,dx + \int\limits_\delta^{T'}\int\limits_{\partial Q^\delta_*} (v - v_\delta)\,dSdt$$
$$\leq \frac{1}{\gamma_2\gamma^0}\int\limits_\delta^{T'}\int\limits_{Q^\delta_*}\left[\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}\rho_{x_i})_{x_j}(v - v_\delta) - \sum_{i=1}^n a_i (v-v_\delta)_{x_i}\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right)\right.$$
$$\left. - a(v-v_\delta)\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right)\right] dxdt - \int\limits_{Q^\delta} (v(x,T') - v_\delta(x,T'))\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right)\,dx$$
$$\leq C_9\left\{\int\limits_\delta^{T'}\int\limits_{Q^\delta_*} \frac{v - v_\delta}{\rho(x)^{1-\lambda'}}\,dxdt + \int\limits_\delta^{T'}\int\limits_{Q^\delta_*}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(v-v_\delta)_{x_i}(v-v_\delta)_{x_j}\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right)\,dxdt\right.$$
$$\left. + \int\limits_{Q^\delta_*} |v(x,T') - v_\delta(x,T')|\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right)\,dx\right\}.$$

Следовательно,

$$\Lambda(\delta) \leq C_8\left\{\int\limits_\delta^{T'}\int\limits_{Q^\delta_*} \frac{v - v_\delta}{\rho(x)^{1-\lambda'}}\,dxdt + \int\limits_{Q^\delta_*} |v(x,T') - v_\delta(x,T')|\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right)\,dx\right.$$
$$\left. + \int\limits_\delta^{T'}\int\limits_{Q^\delta_*}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(v-v_\delta)_{x_i}(v-v_\delta)_{x_j}\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right)\,dxdt\right\}. \quad (3)$$

Оценим первый интеграл в правой части неравенства (3). Возьмем произвольное $\delta_3 \in (\delta, \delta_0)$:

$$\int_{\delta}^{T'} \int_{Q_*^\delta} \frac{v - v_\delta}{\rho(x)^{1-\lambda'}}\, dxdt \le \int_{\delta}^{T'} \int_{Q_*^{\delta_3}} \frac{v - v_\delta}{\rho(x)^{1-\lambda'}}\, dxdt + c\int_{\delta}^{T'} \int_{\delta}^{\delta_3} \frac{d\mu}{\mu^{1-\lambda'}} \int_{\partial Q_*^\mu} (v - v_\delta)\, dSd\mu dt$$

$$\le C_{10} \int_{\delta}^{T'} \int_{Q_*^{\delta_3}} (v - v_\delta)\, dxdt + c\Lambda(\delta)\frac{1}{\lambda'}\delta_3^{\lambda'}.$$

Подставляя эту оценку в неравенство (3), получим

$$\Lambda(\delta) \le C_8 c\Lambda(\delta)\frac{1}{\lambda'}{\delta_3}^{\lambda'} + C_8 C_{10} \int_{\delta}^{T'} \int_{Q_*^{\delta_3}} (v - v_\delta)\, dxdt + C_8\|v(x, T') - v_\delta(x, T')\|.$$

Выберем $\delta_3$ настолько малым, что $C_8 c\frac{1}{\lambda'}\delta_3^{\lambda'} < \frac{1}{2}$. Тогда для всех $\delta < \delta_3$ имеем

$$\Lambda(\delta) \le C_{11}\Bigg[\int_{\delta}^{T'} \int_{Q_*^{\delta_3}} (v - v_\delta)\, dxdt + \int_{Q_*^\delta} |v(x, T') - v_\delta(x, T')|\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right) dx$$

$$+ \int_{\delta}^{T'} \int_{Q_*^\delta} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(v - v_\delta)_{x_i}(v - v_\delta)_{x_j}\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right) dxdt\Bigg].$$

Так как

$$v_\delta|_{\partial Q_*^\delta \times (\delta, T')} = v^+|_{\partial Q_*^\delta \times (\delta, T')}; \quad v_\delta|_{t=\delta} = v^+|_{t=\delta},$$

имеем

$$\int_{Q_*^\delta} (v(x, \delta) - u^+(x, \delta))\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right) dx + \int_{\delta}^{T'} \int_{\partial Q_*^\delta} (v - u^+)\, dSdt$$

$$\le C_{12}\Bigg[\int_{\delta}^{T'} \int_{Q_*^\delta} |v - v_\delta|^p\, dxdt + \int_{Q_*^\delta} |v(x, T') - v_\delta(x, T')|^p\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right) dx$$

$$+ \int_{\delta}^{T'} \int_{Q_*^\delta} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(v - v_\delta)_{x_i}(v - v_\delta)_{x_j}|v - v_\delta|^{p-2}\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right) dxdt$$

$$+ \int_{\delta}^{T'} \int_{Q_*^\delta} |v - v_\delta|^{2-p}\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right) dxdt\Bigg] \le C_{13}\Bigg[\int_{Q_*^\delta} |v(x, T') - v_\delta(x, T')|\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right) dx$$

$$+ \int_{\delta}^{T'} \int_{Q_*^\delta} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(v - v_\delta)_{x_i}(v - v_\delta)_{x_j}|v - v_\delta|^{p-2}\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right) dxdt$$

$$+\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{Q_*^\delta}|v-v_\delta|^p\,dxdt\Bigg]. \quad (4)$$

Кроме того,

$$\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{Q_*^\delta}|v-u^+|^p\,dxdt+\int\limits_{Q_*^\delta}|v(x,\delta)-u^+(x,\delta)|^p\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right)dx$$
$$\le\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{Q_*^\delta}|v|^p\,dxdt+\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{Q_*^\delta}|u^+|^p\,dxdt+\int\limits_{Q_*^\delta}|v(x,\delta)|^p\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right)dx$$
$$+\int\limits_{Q_*^\delta}|u^+(x,\delta)|^p\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right)dx. \quad (5)$$

Поэтому для любого $q\in(1,p)$

$$\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{\partial Q_*^\delta}|v-u^+|^q\,dxdt\to 0,\quad \int\limits_{Q_*^\delta}|v(x,\delta)-u^+(x,\delta)|^q\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right)dx\to 0$$

при $\delta\to+0$. Лемма 1 доказана.

Из этой леммы следует, что утверждение теоремы 1 достаточно доказать для неотрицательных решений уравнения (1).

Пусть $u(x,t)\ge 0$ в $Q^T$. Возьмем произвольное $N>0$ и рассмотрим функцию

$$u_N=\begin{cases}u(x,t), & u<N,\\ N, & u\ge N.\end{cases}$$

Обозначим через $w_\delta$ решение из $W_2^{1,0}(Q_*^\delta\times(\delta,T''))$, $T'<T''<T$, первой смешанной задачи для уравнения (1) с условиями

$$w_\delta|_{\partial Q_*^\delta\times(\delta,T'')}=u_N|_{\partial Q_*^\delta\times(\delta,T'')},\quad w_\delta|_{t=\delta}=u_N|_{t=\delta}.$$

В силу принципа максимума для уравнения (1) $w_\delta(x,t)\le u_N(x,t)$, и функция $w_\delta(x,t)$ переменного $\delta$ монотонно не возрастает при $\delta\to+0$.

Аналогично вышеизложенному получаем, что $w_\delta\to w(x,t)$ при $\delta\to+0$ п.в. в $Q^{T''}$ и в $L_2(Q^{T''})$, причем $w(x,t)$ является решением из $W_{p,\mathrm{loc}}^{1,0}(Q^{T''})$ уравнения (1).

Так как $0\le w(x,t)\le N$, по утверждению теоремы при $p=2$ функция $w(x,t)$ имеет предел в $L_2(\partial Q,T')$, т. е. существует такая функция $\varphi^N(x,t)\in L_2(\partial Q\times(0,T'))$, $\varphi^N(x,t)\in L_p(\partial Q\times(0,T'))$, что выполняется равенство

$$\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{\partial Q}|w((1-\delta)x,t)-\varphi^N(x,t)|^p\,dSdt\to 0\ \text{ при }\ \delta\to+0.$$

Аналогично существует такая функция $u_0^N(x) \in L_p(Q,r)$, что

$$\int\limits_{Q^\delta} |w(x,\delta) - u_0^N(x)|^p \rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right) dx \to 0 \ \text{ при } \ \delta \to +0.$$

Таким образом, для любого $q \in (1,p)$ в силу леммы 1

$$\int\limits_\delta^{T'} \int\limits_{\partial Q} |u_N((1-\delta)x,t) - \varphi^N(x,t)|^q \, dSdt \to 0 \ \text{ при } \ \delta \to +0,$$

$$\int\limits_{Q_*^\delta} |u_N(x,\delta) - u_0^N(x)|^q \rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right) dx \to 0 \ \text{ при } \ \delta \to +0.$$

Пусть $N_1 < N_2$. Тогда существует последовательность $\delta^k$, $\delta^k \to +0$ при $k \to \infty$, такая, что

$$u_{N_1}((1-\delta^k)x,t) \to \varphi^{N_1} \ \text{ при } \ k \to \infty \ \text{ для п.в. } \ (x,t) \in \partial Q \times (0,T'),$$

$$u_{N_2}((1-\delta^k)x,t) \to \varphi^{N_2} \ \text{ при } \ k \to \infty \ \text{ для п.в. } \ (x,t) \in \partial Q \times (0,T').$$

Следовательно, $\varphi^{N_2}(x,t) < N_1$, $\varphi^{N_2}(x,t) = \varphi^{N_1}(x,t)$ для п.в. $(x,t) \in \partial Q \times (0,T')$, т. е. существует такая функция $\varphi(x,t) \geq 0$, $(x,t) \in \partial Q \times (0,T')$, что для любого $N > 0$

$$\varphi^N(x,t) = \varphi_N(x,t) = \begin{cases} \varphi & \text{при } \ \varphi < N, \\ N & \text{при } \ \varphi > N. \end{cases}$$

Аналогично доказывается, что существует такая функция $u_0(x) \geq 0$, $x \in Q$, что для любого $N > 0$

$$u_0^N(x,t) = u_{0N}(x,t) = \begin{cases} u_0 & \text{при } \ u_0 < N, \\ N & \text{при } \ u_0 > N. \end{cases}$$

А так как для любого $N > 0$

$$\|\varphi_N\|_{L_p(\partial Q \times (0,T'))} \leq \sup_{0<\delta<\delta_0} \|u\|_{L_p(\partial Q^\delta \times (\delta,T'))} \leq \text{const},$$

$$\|u_{0N}\|^p_{L_p(Q^\delta,\rho)} \leq \sup_{0<\delta<\delta_0} \int\limits_{Q_*^\delta} |u(x,\delta)|^p \rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right) dx \leq \text{const},$$

то $\varphi \in L_p(\partial Q \times (0,T'))$ и $u_0(x) \in L_p(Q,r)$.

Таким образом, для любых $q \in (1,p)$ и $N > 0$

$$\|u_N((1-\delta)x,t) - \varphi_N(x,t)\|^p_{L_q(\partial Q \times (\delta,T'))} \to 0 \ \text{ при } \ \delta \to +0.$$

При фиксированном $q \in (1,p)$ имеем

$$\int\limits_\delta^{T'} \int\limits_{\partial Q} |u((1-\delta)x,t) - \varphi(x,t)|^q \, dSdt$$

$$\le \int\limits_{\varepsilon_N} |u((1-\delta)x,t)-\varphi(x,t)|^q\,dSdt + \int\limits_{\varepsilon_N^\delta} |u((1-\delta)x,t)-\varphi_N(x,t)|^q\,dSdt$$
$$+ \int\limits_{\partial Q\setminus\varepsilon_N} |u_N((1-\delta)x,t)-\varphi_N(x,t)|^q\,dSdt,$$

где

$$\varepsilon_N = \{(x,t)\in\partial Q\times(\delta,T'),\ \varphi(x,t)>N\},$$
$$\varepsilon_N^\delta = \{(x,t)\in\partial Q\times(\delta,T'),\ u((1-\delta)x,t)>N\}.$$

Так как

$$\int\limits_{\varepsilon_N} |u((1-\delta)x,t)-\varphi(x,t)|^q\,dSdt$$
$$\le \|u((1-\delta)x,t)-\varphi_N(x,t)\|^{q/p}_{L_p(\partial Q\times(\delta,T'))}(\operatorname{mes}\varepsilon_N)^{(p-q)/p}$$
$$\le \mathrm{const}(\operatorname{mes}\varepsilon_N)^{(p-q)/p}\to 0 \quad \text{при} \quad N\to\infty,$$

$$\int\limits_{\varepsilon_N^\delta} |u((1-\delta)x,t)-\varphi_N(x,t)|^q\,dSdt \le \int\limits_{\varepsilon_N^\delta} |u((1-\delta)x,t)|^q\,dSdt$$
$$\le \frac{1}{N^{p-q}}\int\limits_{\varepsilon_N^\delta} |u((1-\delta)x,t)|^p\,dSdt$$
$$\le \frac{1}{N^{p-q}}\sup_{0<\delta<\delta_0}\|u\|^p_{L_p(\partial Q^\delta\times(\delta,T'))}\to 0 \quad \text{при} \quad N\to\infty,$$

то для любого $\varepsilon>0$ существует $N_0>0$ такое, что для всех $\delta\in(0,\delta_0]$ и $N>N_0$

$$\int\limits_{\varepsilon_N} |u((1-\delta)x,t)-\varphi(x,t)|^q\,dSdt + \int\limits_{\varepsilon_N^\delta} |u((1-\delta)x,t)-\varphi_N(x,t)|^q\,dSdt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Фиксируем некоторое $N>N_0$ и выберем $\delta_1\in(0,\delta_0]$ такое, что для всех $\delta\in(0,\delta_1]$

$$\int\limits_\delta^{T'}\int\limits_{\partial Q^\delta} |u_N((1-\delta)x,t)-\varphi^N(x,t)|^q\,dSdt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для всех $\delta\in(0,\delta_1]$

$$\int\limits_\delta^{T'}\int\limits_{\partial Q} |u((1-\delta)x,t)-\varphi(x,t)|^q\,dSdt < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_\delta^{T'}\int\limits_{\partial Q} |u((1-\delta)x,t)-\varphi(x,t)|^q\,dSdt = 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{Q_*^\delta}|u(x,\delta)-u_0(x)|^q\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right)dx=0.$$

Утверждение теоремы 1 в рассматриваемом случае $1<p\le 2$ теперь легко вытекает из леммы 5 в [1].

Однако для звездной области можно рассмотреть принятие граничного условия и по другому условию, а именно по приближению к боковой границе по «параллельным» поверхностям аналогично тому, как рассматривалось в работе [2].

Обозначим через $\delta_1$ столь малое число, что поверхности уровня $\rho(x)=\delta$, $0<\delta<\delta_1$, $x\in Q$, находятся в области $Q\backslash\{Q_\delta(r(x)>r_0)\}$. Кроме того, будем предполагать число $\delta_1$ настолько малым, что подмножество $Q_\delta=\{Q\cap\{x\in Q,\ \rho(x)>\delta\}\}$, $0<\delta<\delta_1<\delta_0$, точек области $Q$ является областью с границей $\partial Q_\delta$ (класса $C^2$) и нормаль, проведенная в любой точке $x_0\in\partial Q$, пересекает $\partial Q_\delta\cap\{|x-x^0|<r_0\}$ для всех $\delta\in(0,\delta_1]$.

Будем говорить, что функция $u(x,t)$ *принадлежит классу Харди* $H_p$, если функция

$$\widetilde{M}(\delta)=\int\limits_\delta^{T'}\int\limits_{\partial Q_\delta}|u|^p(\rho(x)-\delta)\,dSdt+\int\limits_{Q_\delta}|u(x,\delta)|^p\rho(x)\,dx$$

ограничена на $(0,\delta_0]$, т. е. если $\sup\limits_{0<\mu\le\delta_1}\widetilde{M}(\mu)<\infty(H_p)$.

**Теорема 2.** *Для того чтобы обобщенное из* $W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(Q^T)$ *решение уравнения* (1) *с* $f(x,t)\in L_p(Q^T)$ *принадлежало классу Харди* $H_p$*, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_Q|u(x,T')|^p\rho(x)\,dx+\int\limits_0^T\int\limits_Q\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\rho(x)\,dxdt<\infty.$$

Прежде чем сформулировать основную теорему этой части статьи, введем следующую систему координат.

Пусть $x^0$ — произвольная точка поверхности $\partial Q$. Проведем через точку $x^0$ прямую, совпадающую с нормалью в этой точке к поверхности $\partial Q$, и обозначим через $x^0_{\delta_1}$ точку пересечения этой прямой с поверхностью $\partial Q_{\delta_1}$ (ближайшую к $x^0$).

Введем ортогональную систему координат $Oy_1,y_2,\dots,y_n$ так, чтобы точка $x^0_{\delta_1}$ была началом координат, а внешняя нормаль к границе $\partial Q$ в точке $x^0$ имела направление, совпадающее с направлением оси $Oy_n$. Такую систему координат будем называть *местной системой координат.* Координаты точки $x$ в местной системе координат будем обозначать через $(y_1,y_2,\dots,y_n)=(y',y_n)$. Координаты точки $x^0$ — это $(0,0,\dots,0,y_n^0)$. Функцию $\rho(x)$ в местной системе координат будем обозначать через $\overline{\rho}(y)$.

Рассмотрим функцию $n+1$ переменных $R(\delta, y', y^n) = \overline{\rho}(y) - \delta$.

При фиксированном $\delta \in (0, \delta_1]$ поверхность нулевого уровня $R(\delta, y', y^n)$, находящаяся в $Q$, совпадает с поверхностью $\partial Q_\delta$. Так как

$$\frac{\partial R}{\partial y_n}(0, 0, y_n^0) = \frac{\partial \rho(x^0)}{\partial v} < 0,$$

по теореме о неявной функции существуют такие положительные числа $r_1$, $\delta < \delta_1/2$, $h$, что при $\delta \in (0, \delta_1]$ связный кусок $\Gamma_\delta$ поверхности $\partial Q_\delta$, находящейся в пересечении

$$\partial Q_\delta = \bigl\{y : |y'| < r_1,\ y_n^0 - h < y_n < y_n^0 + h\bigr\},$$

описывается уравнением $y_n = \varphi(\delta, y')$, где

$$\varphi(\delta, y') \in C^1([0, \delta_1], |y'| < r_1).$$

При этом можно считать $r_1$ настолько малым, что гиперплоскость $y_n = 0$ не пересекает $\Gamma_\delta$ поверхности $\partial Q_\delta$ для всех $\delta \in (0, \delta_1/2]$, угол между нормалью к $\partial Q$ в точке $x^0$ и нормалью, проведенной в любой точке к поверхности

$$\Gamma_0(x^0) = \partial Q \cap \{y : |y'| < r_1,\ y_n^0 - h < y_n < y_n^0 + h\},$$

не превышает $\pi/8$ и цилиндр $Q^h = \{y : |y'| < r_1,\ 0 < y_n < \varphi(0, y') + h\}$ при любом $\delta \in (0, \delta_1]$ не содержит точек поверхности $\partial Q_\delta$, отличных от точек $\Gamma_\delta$, описываемой уравнением $y_n = \varphi(\delta, y')$, $|y'| < r_1$.

Пусть $0 < \delta < \delta_1$. Положим

$$Q_\delta = \{y : |y'| < r,\ 0 < y_n < \varphi(\delta, y')\}.$$

Построим отображение $A_\delta$ цилиндра $Q_\delta$ на $\Omega = \{Q^h \cap Q\}$ следующим образом: точка $x \in \Omega_\delta$ с местными координатами $(y', y_n)$ переходит в точку $A_\delta(x) \in \Omega$ с местными координатами $\bigl(y', \frac{y_n}{\varphi(\delta, y')}\varphi(0, y')\bigr)$. При этом поверхность $\Gamma_\delta$ переходит в $\Gamma_0(x^0)$. Обратное отображение $A_\delta^{-1}$ задается аналогично. Точка $x \in \Omega$ с местными координатами $(y', y_n)$ переходит в точку $A_\delta^{-1} \in \Omega$ с местными координатами $\bigl(y', \frac{y_n}{\varphi(0, y')}\varphi(\delta, y')\bigr)$.

Заметим, что в силу свойств функции $\varphi(\delta, y')$ для любых $\delta \in (0, \delta_1]$ отображения $A_\delta(x)$ и $A_\delta^{-1}(x)$ принадлежат $C^1$. Отображение точек $\Gamma_0(x^0)$ на $\Gamma_\delta$ будем обозначать через $x_{\delta_{x_0}}(x)$, а обратное к нему отображение $\Gamma_\delta$ на $\Gamma_0(x^0)$ — через $x^{-1}_{\delta_{x^0}}(x)$.

Возьмем некоторое $\delta \in (0, \delta_1]$, и пусть $\overline{x}_\delta$ — произвольная точка поверхности $\Gamma_\delta$. Обозначим через $\frac{dS_\delta}{dS_0}(\overline{x}_\delta)$ предел при $\varepsilon \to 0$ отношения площади поверхности $\Gamma_\delta \cap \{|x - \overline{x}_\delta| < \varepsilon\}$ к площади куска поверхности $\partial Q$, состоящей из точек

$$x = x^{-1}_{\delta_{x^0}}(x^\delta),\ x_\delta \in \Gamma_\delta \cap \{|x - \overline{x}_\delta| < \varepsilon\}.$$

Из свойств функции $\varphi(\delta, y')$ вытекает существование такого $\gamma_{01} > 0$, что для всех точек $x_\delta \in \Gamma_\delta$ имеют место неравенства $\gamma_{01}^{-1} \le \frac{dS}{dS_0} < \gamma_{01}$ и

$$\frac{dS_\delta}{dS_0}(x_\delta) \to 1, \quad \delta \to +0.$$

Будем говорить, что обобщенное из $W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(Q^T)$ решение уравнения (1) *принимает граничное значение*

$$u|_{\partial Q} = \varphi, \quad \varphi(x,t) \in L_p(\partial Q \times (0,T)), \tag{6}$$

*в смысле* $L_p$, если для каждой точки $x_0 \in \partial Q$ существует такая поверхностная окрестность $\mho(x_0) \subset \Gamma_0(x_0)$, что

$$\lim_{\delta\to+0} \int\limits_0^T \int\limits_{\mho(x_0)} |u(x_{\delta_{x_0}}, t) - \varphi(x,t)|^p \, dSdt = 0. \tag{7}$$

Будем также говорить, что принадлежащая $W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(Q^T)$ функция $u(x,t)$ *удовлетворяет начальному условию*

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_0(x) \in L_p(Q, r), \tag{8}$$

*в смысле* $L_p$ *с весом* $r(x)$, если

$$\lim_{\delta\to+0} \int\limits_{Q_\delta} |u(x,\delta) - u_0(x)|^p r(x) \, dx = 0. \tag{9}$$

**Теорема 3.** *При любых функциях $\varphi \in L_p(\partial Q \times (0,T))$, $u_0(x) \in L_p(Q,r)$ и любой функции $f(x,t) \in L_p(Q^T)$ первая смешанная задача (1), (6), (8) имеет обобщенное решение $u(x,t) \in W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(Q^T)$. Это решение единственно и для него справедлива оценка*

$$\int\limits_Q |u(x,T')|^p r(x)\, dx + \int\limits_0^{T'} \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} |u|^{p-2} r(x) \, dxdt + \int\limits_{Q^{T'}} |u|^p \, dxdt$$
$$+ \max_{0\le\delta\le\delta_1} \left[ \int\limits_\delta^{T'} \int\limits_{\partial Q_\delta} |u|^p \, dSdt + \int\limits_{Q_\delta} |u(x,\delta)|^p (\rho(x) - \delta)\, dx \right]$$
$$\le C_6 \big[ \|f\|^p_{L_p(Q^{T'})} + \|\varphi\|^p_{L_p(\partial Q\times(0,T'))} + \|u_0\|^p_{L_p(Q,r)} \big].$$

Отметим, что доказательства теорем 2 и 3 практически аналогичны доказательствам теорем 1 и 2 из [1], поэтому их приводить не будем.

**Теорема 4.** *Пусть функция $u(x,t)$ в области $Q^T$ является решением из $W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(Q^T)$ уравнения (1) $f \in L_p(Q^T)$ с коэффициентами, удовлетворяющими дополнительному условию: существует такое число $\gamma_2 > 0$, что для всех $(x,t) \in Q^T$ и для всех $\xi \in R_n$ выполняется неравенство*

$$\gamma_2 r(x)^m \le \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \xi_i \xi_j$$

*с показателем* $0 < m < 2$. *Если* $u(x,t)$ *принадлежит классу Харди* $H_p$, *то существуют такие функции* $\varphi \in L_p(\partial Q \times (0,T))$ *и* $u_0 \in L_p(Q,r)$, *что имеют место равенства* (7), (9).

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ — решение уравнения (1) из $W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(Q^T)$, принадлежащее классу $H_p$. Тогда в силу теоремы 2 функция

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} |u|^{p-2} \rho(x)$$

принадлежит $L_1(Q^T)$. Аналогично функция $|u(x,T')|^p r(x)$ принадлежит $L_1(Q)$. Следовательно, на основании теоремы 1 существуют функция $\varphi(x,t) \in L_p(\partial Q \times (0,T))$ такая, что

$$\lim_{\delta \to 0} \int\limits_{\delta}^{T'} \int\limits_{\partial Q} |u((1-\delta)x,t) - \varphi(x,t)|^p \, ds dt = 0, \tag{10}$$

и функция $u_0(x)$ такая, что

$$\lim_{\delta \to +0} \int\limits_{Q_*^\delta} |u(x,\delta) - u_0(x)|^p \rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right) dx dt = 0.$$

Покажем, что функция $\varphi(x,t)$ является пределом в $L_p$ в смысле равенства (7). Возьмем произвольную точку $x_0 \in \partial Q$. Построим в окрестности точки $x_0$ местную систему координат $(y', y_n)$. Выберем числа $r_0$ и $h_0$ настолько малыми, что

$$U_1(x_0) = \{y : |y'| < r_0,\ -h_0 < y_n < \varphi(0,y') + h_0\},$$

$$U_2(x_0) = \left\{y : |y'| < \frac{3}{4} r_0,\ -\frac{3}{4} h_0 < y_n < \varphi(0,y') + \frac{3}{4} h_0\right\},$$

$$U_3(x_0) = \left\{y : |y'| < \frac{1}{2} r_0,\ -\frac{1}{2} h_0 < y_n < \varphi(0,y') + \frac{1}{2} h_0\right\};$$

$$\Gamma_1(x_0) \in \partial Q \cap U_1(x_0), \quad \Gamma_2(x_0) \in \partial Q \cap U_2(x_0), \quad \Gamma_3(x_0) \in \partial Q \cap U_3(x_0);$$

$$\Gamma_{1\delta}(x_0) \in \partial Q_\delta \cap U_1(x_0), \quad \Gamma_{2\delta}(x_0) \in \partial Q_\delta \cap U_2(x_0), \quad \Gamma_{3\delta}(x_0) \in \partial Q_\delta \cap U_3(x_0).$$

Выбрав из покрытия $U_3(x_0)$, $x_0 \in \partial Q$, конечное подпокрытие области $Q \backslash Q_{\delta_1}$, получим конечное число $N_1$ областей $B_1(x_1), B_2(x_2), \dots, B_{N_1}(x_{N_1})$ (далее будем обозначать их через $\widetilde{B}_1, \widetilde{B}_2, \dots, \widetilde{B}_{N_1}$ соответственно) таких, что

$$\bigcup_{i=1}^{N_1} \widetilde{B}_i = Q \backslash Q_{\delta_1}, \quad \bigcup_{i=1}^{N_1} \Gamma_3(x_0) = \partial Q, \quad \Gamma_{3\delta}(x_i) \in \partial Q_\delta, \quad i = 1, 2, \dots, N_1.$$

Отметим, что из справедливости $(x_0,t) \in \Gamma(x_i^0) \times (0,T)$ и для всех $i = 1, \dots, N_1$ равенства (10) будет следовать, что если

$$\Gamma_1(x_i) \times (0,T) \cap \Gamma_1(x_j) \times (0,T) \neq \varnothing,$$

то $\varphi_i(x,t) = \varphi_j(x,t)$ для всех $x \in \Gamma_1(x_i) \times (0,T) \cap \Gamma_1(x_j) \times (0,T)$. Таким образом, существует функция

$$\varphi(x,t) \in L_p(\partial Q \times (0,T)) \quad (\varphi = \varphi_i \text{ на } \Gamma_1(x_i) \times (0,T)),$$

являющаяся пределом $u(x,t)$ на $(\partial Q \times (0,T))$ в $L_p$ в смысле равенства (10).

Построим функцию $\xi(x) \in C^\infty(R_n)$ такую, что

$$\xi(x) = 1,\ x \in U_3(x_i); \quad \xi(x) = 0,\ x \in R_n \backslash U_2(x_i),$$

и рассмотрим функцию

$$v(x,t) = u(x,t)\xi(x).$$

Так как $u(x,t)$ — решение из $W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(Q^T)$ уравнения (1), принадлежащее классу $H_p$, то функция $v(x,t)$ — решение из $W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(Q^T)$ с правой частью $\widetilde{f}(x,t)$, равной

$$\widetilde{f}(x,t) = f(x,t) - 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_j}\xi_{x_i} - \left[\sum_{i,j=1}^{n}(a_{i_j}\xi_{x_i})_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i\xi_{x_i}\right],$$

также принадлежит классу $H_p$. (Заметим, что $\widetilde{f}(x,t) \in L_p(Q^T)$.)

Из принадлежности решения $u(x,t)$ классу $H_p$ вытекает, что функция $\xi(x)\varphi_i(x,t)$ является пределом в $L_p$ по звездности функции $v(x,t)$ на $\partial Q \times (0,T)$, т. е.

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{\partial Q} |v((1-\delta)x,t) - \xi(x)\varphi_i(x,t)|^p\, dSdt = 0. \tag{11}$$

Кроме того, из принадлежности классу $H_p$ функции $v(x,t)$ вытекает, что для любого $\delta \in (0,\delta^1]$ функция

$$M_i(\delta) = \int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{\Gamma_1(x_i)} |v|^p(x,t)\, dsdt$$

ограничена и, стало быть, ограничена функция

$$M_{x_i}(\delta) = \int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{\Gamma_1(x_i)} |u|^p(x_{\delta_{x_i}}(x),t)\, dsdt, \tag{12}$$

т. е. существует такая функция $\widetilde{\varphi}_i(x,t) \in L_p(\Gamma_1(x_i) \times (0,T))$ и, следовательно, $\widetilde{\varphi}_i(x,t) \in L_p(\Gamma_1(x_i) \times (0,T)$, к которой слабо в $L_p$ сходится функция $u(x_{\delta_{k,x_i}}(x),t)$.

Практически совершенно аналогично, как это делается в работах [3, 4], доказывается

**Лемма 2.** *Пусть $u_0(x,t)$ — решение из $W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q^T)$ уравнения* (1). *Тогда функции $\varphi(x,t)$ и $\xi(x)\widetilde{\varphi}_i(x,t)$ совпадают на $\Gamma_1(x_i) \times (0,T)$, т. е.*

$$\varphi(x,t) = \xi(x)\widetilde{\varphi}_i(x,t) \quad \forall (x,t) \in \Gamma_1(x_i) \times (0,T).$$

Обозначим через $u_1(x,t)$ обобщенное из $W^{1,0}_{2,\mathrm{loc}}(Q^T)$ решение уравнения (1), (6), (8). Функция $u_0(x,t) = u(x,t) - u_1(x,t)$ является решением однородного уравнения $L(u) = 0$, удовлетворяющим нулевым граничному и начальному условиям. При этом

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{\partial Q}|u_0((1-\delta)x,t)|^p\,dsdt = 0, \tag{13}$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{\Gamma_{0\delta}}|u_0(x,\delta)|^p\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right)dx = 0; \tag{14}$$

$$\frac{1}{p}\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{\partial Q_\delta}\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}\frac{\rho_{x_i}\rho_{x_j}}{|\nabla\rho|}\right)|u_0|^p\,dsdt + \frac{1}{p}\int\limits_{Q_\delta}|u_0(x,\delta)|^p(\rho(x)-\delta)\,dx$$
$$= \frac{1}{p}\int\limits_{Q_\delta}|u_0(x,T')|^p(\rho(x)-\delta)\,dx + \int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}a|u_0|^p(\rho(x)-\delta)\,dxdt$$
$$+ (p-1)\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{0_{x_i}}u_{0_{x_j}}|u_0|^{p-2}(\rho(x)-\delta)\,dxdt$$
$$-\frac{1}{p}\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}\sum_{i=1}^{n}(a_i(\rho(x)-\delta)_{x_i}|u_0|^p\,dxdt - \frac{1}{p}\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}\rho_{x_i})_{x_j}|u_0|^p\,dxdt. \tag{15}$$

Аналогично

$$\frac{1}{p}\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{\partial Q_*^\delta}\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}\frac{\rho_{x_i}\rho_{x_j}}{|\nabla\rho|}\right)|u_0|^p\,dsdt + \frac{1}{p}\int\limits_{Q_*^\delta}|u_0(x,\delta)|^p\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right)dx$$
$$= \frac{1}{p}\int\limits_{Q_*^\delta}|u_0(x,T')|^p\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right)dx + \int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{Q_*^\delta}a|u_0|^p\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right)dxdt$$
$$+ (p-1)\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{Q_*^\delta}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{0_{x_i}}u_{0_{x_j}}|u_0|^{p-2}\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right)dxdt$$
$$-\frac{1}{p}\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{Q_*^\delta}\sum_{i=1}^{n}\left(a_i\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right)\right)_{x_i}|u_0|^p\,dxdt - \frac{1}{p}\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{Q_*^\delta}\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}\rho_{x_i})_{x_j}|u_0|^p\,dxdt. \tag{16}$$

Перейдя в (15) и (16) к пределу при $\delta\to+0$, получим в силу равенств (13) и (14):

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{\partial Q_\delta}\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}\frac{\rho_{x_i}\rho_{x_j}}{|\nabla\rho|}\right)|u_0|^p\,dsdt = 0$$

и

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{Q_\delta}|u_0(x,\delta)|^p(\rho(x)-\delta)\,dx=0.$$

Теорема 4 доказана.

## *ЛИТЕРАТУРА*

**1.** *Капицына Т. В., Петрушко И. М., Петрушко М. И.* О первой смешанной задаче для вырождающихся параболических уравнений в звездных областях с ляпуновской границе в банаховых пространствах // Мат. заметки СВФУ. 2023. Т. 30, № 1. С. 21–39.

**2.** *Гущин А. К., Михайлов В. П.* О граничных значениях в $L_p$, $p>1$, решений эллиптических уравнений // Мат. сб. 1979. Т. 108, № 1. С. 3–21.

**3.** *Капицына Т. В.* О существовании граничных и начальных значений для вырождающихся параболических уравнений в звездных областях. II // Мат. заметки СВФУ. 2020. Т. 27, № 2. С. 21–38.

**4.** *Петрушко И. М.* О граничном значении решений эллиптических уравнений в областях с ляпуновской границей // Мат. сб. 1984. Т. 47, № 1. С. 43–72.

*Поступила в редакцию 26 июоя 2024 г.*
*После доработки 6 декабря 2024 г.*
*Принята к публикации 25 февраля 2025 г.*

Капицына Татьяна Владимировна
Национальный исследовательский университет «МЭИ»,
Красноказарменная, 14, Москва 111250
kapitsynatv@mpei.ru

*Математические заметки СВФУ*
*Январь—март, 2025. Том 32, № 1*

*UDC 517.9*

# ON THE FIRST MIXED PROBLEM FOR DEGENERATE PARABOLIC EQUATIONS IN STELLAR DOMAINS WITH LYAPUNOV BOUNDARY IN BANACH SPACES. II

**T. V. Kapitsyna**

**Abstract:** This work continues the article "On the first mixed problem for degenerate parabolic equations in stellar domains with Lyapunov boundary in Banach spaces" and studies the behavior of a solution to a second-order parabolic equation with Tricomi degeneracy on the lateral boundary of a cylindrical domain $Q^T$, where $Q$ is a stellar domain whose boundary $\partial Q$ is an $(n-1)$-dimensional closed surface without an edge of class $C^{1+\lambda}$, $0 < \lambda < 1$.

We consider two ways to choose the boundary condition: 1) due to the fact that $Q$ is stellar, 2) some direction orthogonal to the boundary is allocated and the continuity of the solution as a function of a special variable with values in $L_p$ in this direction is asserted. To do this, by determining the boundary value, while mapping the boundary $\partial Q$, it is necessary to take a shift not along the normal at each point $x \in \partial Q$, but to take a sufficiently small covering of the boundary and shift each piece of this covering "parallel" along the normal at one fixed point of this piece $x_0$.

We also consider the question of the unambiguous solvability of the first mixed problem for an equation when the boundary and initial functions belong to spaces of type $L_p$, $p > 1$.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-1-15-31

**Keywords:** degenerate parabolic equation, degeneration of Tricomi type, function space, first mixed problem, solvability, boundary and initial values of solutions, a priori estimate.

## *REFERENCES*

**1.** *Kapitsyna T. V., Petrushko I. M., and Petrushko M. I.*, "On the first mixed problem for degenerate parabolic equations in stellar domains with Lyapunov boundary in Banach spaces," Mat. Zamet. SVFU, **30**, No. 1, 21–39 (2023).

**2.** *Gushchin A. K., Mikhailov V. P.*, "On boundary values in $L_p$, $p > 1$, of solutions of elliptic equations," Math. USSR, Sb., **36**, No. 1, 1–19 (1980).

**3.** *Kapitsyna T. V.*, "On the existence of boundary and initial values for the degenerating parabolic equations in the stellar domains, II," Mat. Zamet. SVFU, **27**, No. 2, 21–38 (2020).

**4.** *Petrushko I. M.*, "On the boundary value of solutions of elliptic equations in domains with

Lyapunov boundary," Math. USSR, Sb., **47**, No. 1, 43–72 (1984).

*Submitted July 26, 2024*
*Revised December 6, 2024*
*Accepted February 25, 2025*

Tatyana V. Kapitsyna
National Research University "MPEI",
14 Kracnokazarmennaya, 111250 Moscow, Russia
kapitsynatv@mpei.ru

*Математические заметки СВФУ*
*Январь—март, 2025. Том 32, № 1*

*УДК 517.95*

# ИССЛЕДОВАНИЕ КОРРЕКТНОСТИ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

**А. И. Кожанов, Н. Н. Шадрина**

**Аннотация.** Исследуется разрешимость нелокальных краевых задач с обобщенным условием Самарского — Ионкина для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка с разрывным коэффициентом в старшей части. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений изучаемых задач, т. е. решений, имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-1-32-45

**Ключевые слова:** эллиптические уравнения, разрывный коэффициент, нелокальные условия, регулярные решения, существование, единственность.

## Введение

Работа посвящена исследованию разрешимости в пространствах С. Л. Соболева нелокальных краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка с разрывным коэффициентом в старшей части.

Краевые (локальные) задачи для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами можно трактовать как обобщенные задачи дифракции. Разрешимость подобных задач как в пространствах гладких функций, так и в пространствах суммируемых функций представляется хорошо изученной (см. [1–13]).

Существенно менее исследованными задачами для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами представляются нелокальные краевые задачи. Именно такие задачи и будут рассматриваться в данной работе.

Изучаемые ниже нелокальные задачи можно назвать нелокальными задачами с обобщенными условиями Самарского — Ионкина. Исследование разрешимости подобных задач началось с работы Н. И. Ионкина [14], опубликованной

Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ, тема «Аналитическое и численное исследование обратных задач об определении параметров источников атмосферного или водного загрязнения и(или) параметров среды» (код проекта FENG-2023-0004).

в 1977 г. В дальнейшем изучением разрешимости задачи Ионкина и близких к ней нелокальных задач занимались многие математики (см. [15–20]). Как наиболее близкую к настоящей работе по постановке и применяемой технике выделим работу [19], в которой изучалась обобщенная задача Ионкина (задача Самарского — Ионкина) для эллиптических уравнений второго порядка с непрерывными коэффициентами.

Заметим также следующее. Наличие в дифференциальном уравнении слагаемых с разрывными коэффициентами требует, как правило, присоединения к краевым условиям некоторых дополнительных условий — условий сопряжения.

Уточним, что целью настоящей работы будет определение условий, при выполнении которых изучаемые задачи будут иметь все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

## 1. Постановка задач

Пусть $\Omega$ — интервал $(0,1)$ оси $Ox$, $Q$, $Q_1$, $Q_2$ — прямоугольники $\Omega\times(-a,a)$, $\Omega\times(-a,0)$, $\Omega\times(0,a)$ соответственно ($a>0$ — заданное число), $c(x,y)$, $f(x,y)$, $h(y)$ и $\gamma(y)$ суть заданные функции, определенные при $(x,y)\in\overline{Q}$, $y\in[-a,a]$, $\alpha$, $\beta$, $\alpha_i$, $\beta_i$, $i=1,2$, — заданные действительные числа. Всюду ниже будем считать, что функция $h(y)$ непрерывна на промежутках $[-a,0)$ и $(0,a]$ и имеет конечное значение $h(-0)$ и $h(+0)$. Далее, пусть $L$ — дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x,y)$ определяется равенством

$$Lv=v_{xx}+\frac{\partial}{\partial y}(h(y)v_y)+c(x,y)v.$$

**Нелокальная задача I.** *Найти функцию $u(x,y)$, являющуюся в прямоугольниках $Q_1$ и $Q_2$ решением уравнения*

$$Lu=f(x,y) \tag{1}$$

*и такую, что для нее выполняются краевые условия*

$$u(x,a)=u(x,-a)=0,\quad x\in\Omega, \tag{2}$$

$$u(0,y)=\gamma(y)u(1,y),\quad y\in(-a,0)\cup(0,a), \tag{3}$$

$$u_x(1,y)=0,\quad y\in(-a,0)\cup(0,a), \tag{4}$$

. *а также условия сопряжения*

$$u(x,-0)=\alpha u(x,+0),\quad x\in\Omega, \tag{5}$$

$$u_y(x,+0)=\beta u_y(x,-0),\quad x\in\Omega. \tag{6}$$

**Нелокальная задача II.** *Найти функцию $u(x,y)$, являющуюся в прямоугольниках $Q_1$ и $Q_2$ решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условия сопряжения* (5) *и* (6), *а также краевое условие* (2) *и краевые условия*

$$u_x(0,y)=\gamma(y)u_x(1,y),\quad y\in(-a,0)\cup(0,a), \tag{7}$$

$$u(1,y)=0,\quad y\in(-a,0)\cup(0,a). \tag{8}$$

**Нелокальная задача III.** *Найти функцию $u(x,y)$, являющуюся в прямоугольниках $Q_1$ и $Q_2$ решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются краевые условия* (2)–(4), *а также условия сопряжения*

$$u_y(x,-0) = \alpha_1 u(x,-0) + \alpha_2 u(x,+0), \tag{9}$$

$$u_y(x,+0) = \beta_1 u(x,-0) + \beta_2 u(x,+0). \tag{10}$$

**Нелокальная задача IV.** *Найти функцию $u(x,y)$, являющуюся в прямоугольниках $Q_1$ и $Q_2$ решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются краевые условия* (2), (7) *и* (8), *а также условия сопряжения* (9) *и* (10)

Нелокальные задачи I и II в случае $\gamma(y) \equiv 0$ являются обычными (локальными) краевыми задачами для эллиптических уравнений с дополнительными условиями сопряжения на линии $y = 0$. Если в этих задачах $\gamma(y) \equiv 1$, то условия (3) и (4), (7) и (8) означают, что нелокальные задачи I и II являются нелокальными задачами Н. И. Ионкина [14] с дополнительными условиями сопряжения. В более общем случае произвольной функции $\gamma(y)$ нелокальные задачи I и II являются задачами с нелокальными условиями, предложенными в работе А. А. Самарского [20] и с дополнительными условиями сопряжения.

Обозначим через $V$ множество функций $v(x,y)$, определенных в прямоугольниках $Q_1$ и $Q_2$ и таких, что $v(x,y) \in W_2^2(Q_1)$, $v(x,y) \in W_2^2(Q_2)$. Очевидно, что это множество будет банаховым пространством с нормой

$$\|v\|_V = \left(\|v\|^2_{W_2^2(Q_1)} + \|v\|^2_{W_2^2(Q_2)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Именно это пространство и будет основным в работе, т. е. будут доказаны теоремы существования и единственности решений нелокальных задач I и II, принадлежащих пространству $V$.

Заметим, что вследствие теорем вложения [21] (см. также [9, 22]) для функции $v(x,y)$ из пространства $V$ условия (5) и (6) корректно определены.

## 2. Разрешимость нелокальных задачи I и II

Существование решений нелокальной задачи I будет установлено с помощью метода регуляризации и метода продолжения по параметру. Поскольку для применения метода регуляризации (точнее, для осуществления процедуры предельного перехода) и метода продолжения по параметру необходимы априорные оценки, установим вначале их наличие.

Определим функции $\gamma_+(y)$ и $\gamma_-(y)$:

$$\gamma_+(y) = \max\{1-\gamma^2(y), 0\}, \quad \gamma_-(y) = 1-\gamma^2(y) - \gamma_+(y) \quad (y \in [-a,a]).$$

Положим $\gamma_0 = \max\limits_{[-a,a]} |\gamma_-(y)|$,

$$h_1(y) = \begin{cases} h(y) & \text{при } y \in [-a,0), \\ h(-0) & \text{при } y = 0, \end{cases} \qquad h_2(y) = \begin{cases} h(y) & \text{при } y \in (0,a], \\ h(+0) & \text{при } y = 0. \end{cases}$$

**Лемма 1.** *Пусть выполняются условия*

$$h_1(y) \in C^1([-a,0]), \quad h_2(y) \in C^1([0,a]), \quad c(x,y) \in C(\overline{Q});$$

$$h_1(y) \ge \overline{h}_1 > 0 \text{ при } y \in [-a,0], \quad h_2(y) \ge \overline{h}_2 > 0 \text{ при } y \in [0,a]; \ \gamma(y) \in C([-a,a]);$$

$$c(x,y) \le -c_0 < 0 \quad \text{при } (x,y) \in \overline{Q};$$

$$4c_0 - 4\gamma_0 - \gamma_0^2 > 0, \quad \alpha\beta > 0.$$

*Тогда для решений $u(x,y)$ из пространства $V$ нелокальной задачи* I *справедлива оценка*

$$\int\limits_{Q_1} x\big(u_x^2 + u_y^2 + u^2\big)\,dxdy + \int\limits_{Q_2} x\big(u_x^2 + u_y^2 + u^2\big)\,dxdy + \int\limits_{-a}^{0} u^2(1,y)\,dy + \int\limits_{0}^{a} u^2(1,y)\,dy$$

$$\le M_1\Bigg(\int\limits_{Q_1} f^2\,dxdy + \int\limits_{Q_2} f^2\,dxdy\Bigg) \qquad (11)$$

*с постоянной $M_1$, определяющейся лишь функциями $h(y)$, $c(x,y)$ и $\gamma(y)$.*

Доказательство. Рассмотрим равенство

$$-\int\limits_{Q_1} Lu\cdot xu\,dxdy - A\int\limits_{Q_2} Lu\cdot xu\,dxdy = -\int\limits_{Q_1} xfu\,dxdy - A\int\limits_{Q_2} xfu\,dxdy.$$

Интегрируя по частям, полагая $A = \frac{\alpha h_1(0)}{\beta h_2(0)}$ и используя условия леммы, нетрудно от данного равенства перейти к неравенству

$$\int\limits_{Q_1}\big(xu_x^2+c_0xu^2\big)\,dxdy+A\int\limits_{Q_2}\big(xu_x^2+c_0xu^2\big)\,dxdy+\overline{h}_1\int\limits_{Q_1} xu_y^2\,dxdy+A\overline{h}_2\int\limits_{Q_2} xu_y^2\,dxdy$$

$$\le \frac{\gamma_0}{2}\left[\int\limits_{-a}^{0} u^2(1,y)\,dy + A\int\limits_{0}^{a} u^2(1,y)\,dy\right] + \left|\int\limits_{Q_1} xfu\,dxdy\right| + A\left|\int\limits_{Q_2} xfu\,dxdy)\right|. \qquad (12)$$

Используя неравенство

$$\int\limits_{E} u^2(1,y)dy \le \delta_0^2\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{E} xu_x^2\,dxdy + \left(2+\frac{1}{\delta_0^2}\right)\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{E} xu^2\,dxdy, \qquad (13)$$

в котором $\delta_0$ — произвольное положительное число, $E$ — либо отрезок $[-a,0]$, либо отрезок $[0,a]$ (см., например, [19, 23]), далее используя неравенство Юнга, нетрудно от (12) перейти к оценке

$$\left(1-\frac{\gamma_0\delta_0^2}{2}\right)\int\limits_{Q_1} xu_x^2\,dxdy + \left[c_0 - \left(2+\frac{1}{\delta_0^2}\right)\frac{\gamma_0}{2} - \frac{\delta_1^2}{2}\right]\int\limits_{Q_1} xu^2\,dxdy + \overline{h}_1\int\limits_{Q_1} xu_y^2\,dxdy$$

$$+A\left(1-\frac{\gamma_0\delta_0^2}{2}\right)\int\limits_{Q_2} xu_x^2\,dxdy+A\left[c_0-\left(2+\frac{1}{\delta_0^2}\right)\frac{\gamma_0}{2}-\frac{\delta_1^2}{2}\right]\int\limits_{Q_2} xu^2\,dxdy+A\overline{h}_2\int\limits_{Q_2} xu_y^2\,dxdy$$

$$\le \frac{1}{2\delta_1^2}\int\limits_{Q_1} f^2\,dxdy + \frac{A}{2\delta_1^2}\int\limits_{Q_2} f^2\,dxdy, \qquad (14)$$

в которой $\delta_1$ — произвольное положительное число.

Неравенство $4c_0 - 4\gamma_0 - \gamma_0^2 > 0$ из условия леммы означает, что можно подобрать $\delta_0$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$1 - \frac{\gamma_0\delta_0^2}{2} > 0, \quad c_0 - \left(2 + \frac{1}{\delta_0^2}\right)\frac{\gamma_0}{2} > 0.$$

Фиксируя $\delta_0$ и далее подбирая число $\delta_1$ малым, получим, что следствием (14) будет неравенство

$$\int\limits_{Q_1} x\big(u_x^2 + u_y^2 + u^2\big)\,dxdy + \int\limits_{Q_2} x\big(u_x^2 + u_y^2 + u^2\big)\,dxdy \le M\bigg(\int\limits_{Q_1} f^2\,dxdy + \int\limits_{Q_2} f^2\,dxdy\bigg),$$

в котором $M$ — число, определяющееся функциями $h(y)$, $c(x,y)$ и $\gamma(y)$, а также числами $\alpha$ и $\beta$. Из этого неравенства и неравенств (13) следует требуемая оценка.

Лемма доказана.

**Лемма 2.** *Пусть выполняются все условия леммы* 1 *и дополнительно пусть выполняется включение*

$$\gamma(y) \in C^1([-a,a]).$$

*Тогда для решений* $u(x,y)$ *из пространства* $V$ *нелокальной задачи* I *справедлива оценка*

$$\int\limits_{Q_1} x\big(u_{xy}^2 + u_{yy}^2\big)\,dxdy + \int\limits_{Q_2} x\big(u_{xy}^2 + u_{yy}^2\big)\,dxdy + \int\limits_{-a}^{0} u_y^2(1,y)dy + \int\limits_{0}^{a} u_y^2(1,y)\,dy$$
$$\le M_2\bigg(\int\limits_{Q_1} f^2\,dxdy + \int\limits_{Q_2} f^2\,dxdy\bigg) \qquad (15)$$

*с постоянной* $M_2$*, определяющейся лишь функциями* $h(y)$*,* $c(x,y)$ *и* $\gamma(y)$*, а также числами* $\alpha$ *и* $\beta$*.*

Доказательство. Рассмотрим равенство

$$\int\limits_{Q_1} Lu\cdot xu_{yy}\,dxdy + A\int\limits_{Q_2} Lu\cdot xu_{yy}\,dxdy = \int\limits_{Q_1} xfu_{yy}\,dxdy + A\int\limits_{Q_2} xfu_{yy}\,dxdy.$$

Интегрируя по частям, вновь полагая $A = \frac{\alpha}{\beta}$, используя условия леммы, повторяя выкладки, с помощью которых была доказана оценка (11), и, наконец, используя саму оценку (11), получим требуемое.

Лемма доказана.

В следующей лемме будет получена еще одна априорная оценка для решений $u(x,y)$, но при выполнении некоторых дополнительных граничных условий. Обоснование возможности подобных действий будет дано ниже.

**Лемма 3.** *Пусть выполняются все условия леммы 2 и дополнительно пусть выполняются условия*

$$h_1(y) \in C^2([-a,0)], \quad h_2(y) \in C^2([0,a)],$$

$$\gamma(y) \in C^2([-a,a]), \quad c_y(x,y) \in C(\overline{Q}), \quad f(x,-a) = f(x,a) = 0 \quad \text{при } x \in \Omega.$$

*Тогда для решений $u(x,y)$ нелокальной задачи I таких, что*

$$u(x,y) \in V, \quad u_{yyyy}(x,y) \in L_2(Q_1), \quad u_{yyyy}(x,y) \in L_2(Q_2),$$

$$u_{yy}(x,-a) = u_{yy}(x,a) = 0 \text{ при } x \in \Omega,$$

$$u_{yy}(x,-0) = \alpha u_{yy}(x,+0), \quad u_{yyy}(x,+0) = \beta u_{yyy}(x,-0) \text{ при } x \in \Omega,$$

*справедлива оценка*

$$\int\limits_{Q_1} x\big(u_{xyy}^2 + u_{yyy}^2\big)\,dxdy + \int\limits_{Q_2} x\big(u_{xyy}^2 + u_{yyy}^2\big)\,dxdy + \int\limits_{-a}^{0} u_{xyy}^2(1,y)dy + \int\limits_{0}^{a} u_{xyy}^2(1,y)\,dy$$
$$\le M_3\bigg(\int\limits_{Q_1}\big(f^2 + f_y^2\big)\,dxdy + \int\limits_{Q_2}\big(f^2 + f_y^2\big)\,dxdy\bigg) \quad (16)$$

*с постоянной $M_3$, определяющейся лишь функциями $h(y)$, $c(x,y)$ и $\gamma(y)$, а также числами $\alpha$ и $\beta$.*

Доказательство. Рассмотрим равенство

$$-\int\limits_{Q_1} xLu\cdot u_{yyyy}\,dxdy - A\int\limits_{Q_2} xLu\cdot u_{yyyy}\,dxdy$$
$$= -\int\limits_{Q_1} xfu_{yyyy}\,dxdy - A\int\limits_{Q_2} xfu_{yyyy}\,dxdy. \quad (17)$$

Повторяя в левой части этого равенства выкладки, которые привели к оценке (11), в правой части интегрируя один раз по переменной $y$ и дополнительно используя оценки (11), (15), получим требуемое.

Лемма доказана.

Полученных оценок достаточно для доказательства разрешимости нелокальной задачи I.

**Теорема 1.** *Пусть выполняются условия*

$$h_1(y) \in C^2([-a,0]), \quad h_2(y) \in C^2([0,a]), \quad c(x,y) \in C(\overline{Q}), \quad c_y(x,y) \in C(\overline{Q});$$

$$h_1(y) \ge \overline{h}_1 > 0 \quad \text{при } y \in [-a,0], \quad h_2(y) \ge \overline{h}_2 > 0 \quad \text{при } y \in [0,a];$$

$$\gamma(y) \in C^2([-a,a]);$$

$$c(x,y) \le -c_0 < 0 \quad \text{при } (x,y) \in \overline{Q};$$

$$4c_0 - 4\gamma_0 - \gamma_0^2 > 0, \quad \alpha\beta > 0.$$

*Тогда для любой функции* $f(x, y)$ *такой, что* $f(x, y) \in L_2(Q_i)$, $f_y(x, y) \in L_2(Q_i)$, $i = 1, 2$, $f(x, -a) = f(x, a) = 0$ *при* $x \in \Omega$, *нелокальная задача* I *имеет решение* $u(x, y)$, *принадлежащее пространству* $V$, *причем ровно одно.*

Доказательство. Воспользуемся методом регуляризации.

Пусть $\varepsilon$ — положительное число. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию* $u(x, y)$, *являющуюся в прямоугольниках* $Q_1$ *и* $Q_2$ *решением уравнения*

$$Lu - \varepsilon u_{yyyy} = f(x, y) \tag{18}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2)–(4), а также условия

$$\begin{gathered} u_{yy}(x, -a) = u_{yy}(x, a) = 0, \quad u_{yy}(x, -0) = \alpha u_{yy}(x, +0), \\ u_{yyy}(x, +0) = \beta u_{yyy}(x, -0) \quad x \in \Omega. \end{gathered} \tag{19}$$

Данная краевая задача при фиксированном $\varepsilon$ и при принадлежности функции $f(x, y)$ пространствам $L_2(Q_i)$, $i = 1, 2$, имеет регулярное решение, что доказывается с помощью метода продолжения по параметру, детали см. в [19]. Далее, для семейства $\{u_\varepsilon(x, y)\}$ имеют место равномерные по $\varepsilon$ априорная оценка (16) и равномерная по $\varepsilon$ оценка

$$\begin{multlined} \varepsilon \int\limits_{Q_1} x u_{yyyy}^2 \, dxdy + \varepsilon \int\limits_{Q_2} x u_{yyyy}^2 \, dxdy \\ \leq M_3 \Big( \int\limits_{Q_1} \big(f^2 + f_y^2\big) \, dxdy + \int\limits_{Q_2} \big(f^2 + f_y^2\big) \, dxdy \Big). \end{multlined} \tag{20}$$

Рассмотрим равенство

$$\begin{multlined} \int\limits_{Q_1} Lu \cdot u_{xx} \, dxdy - \varepsilon \int\limits_{Q_1} u_{yyyy} u_{xx} \, dxdy + A \int\limits_{Q_2} Lu \cdot u_{xx} \, dxdy \\ - \varepsilon A \int\limits_{Q_2} u_{yyyy} u_{xx} \, dxdy = \int\limits_{Q_1} f u_{xx} \, dxdy + A \int\limits_{Q_2} f u_{xx} \, dxdy. \end{multlined} \tag{21}$$

Используя дополнительные условия сопряжения, а также условие $u_{yy}(x, -a) = u_{yy}(x, a) = 0$ при $x \in \Omega$, получим, что следствием (21) будет равенство

$$\begin{multlined} \int\limits_{Q_1} u_{xx}^2 \, dxdy + \int\limits_{Q_2} u_{xx}^2 \, dxdy + \int\limits_{Q_1} h(y) u_{xy}^2 \, dxdy + \int\limits_{Q_2} h(y) u_{xy}^2 \, dxdy \\ + \int\limits_{-a}^{0} h(y) u_y(0, y) u_{xy}(0, y) \, dy + \int\limits_{0}^{a} h(y) u_y(0, y) u_{xy}(0, y) \, dy \\ + \varepsilon \int\limits_{Q_1} u_{xyy}^2 \, dxdy + A\varepsilon \int\limits_{Q_2} u_{xyy}^2 \, dxdy \\ + \int\limits_{Q_1} c u u_{xx} \, dxdy + A \int\limits_{Q_2} c u u_{xx} \, dxdy = \int\limits_{Q_1} f u_{xx} \, dxdy + A \int\limits_{Q_2} f u_{xx} \, dxdy. \end{multlined} \tag{22}$$

Пятое и шестое слагаемые в левой части этого равенства нетрудно оценить сверху с помощью оценки (15) и теорем вложения (см. [9, 21, 22]). В результате придем к оценке

$$\int\limits_{Q_1}\left(u_{xx}^2+u_{xy}^2\right)dxdy+\int\limits_{Q_2}\left(u_{xx}^2+u_{xy}^2\right)dxdy+\varepsilon\int\limits_{Q_1}u_{xyy}^2\,dxdy+\varepsilon\int\limits_{Q_2}u_{xyy}^2\,dxdy$$
$$\leq M_4\left(\int\limits_{Q_1}\left(f^2+f_y^2\right)dxdy+\int\limits_{Q_2}\left(f^2+f_y^2\right)dxdy\right). \quad (23)$$

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$-\int\limits_{Q_1}Lu\cdot u_{yyyy}\,dxdy+\varepsilon\int\limits_{Q_1}u_{yyyy}^2\,dxdy-A\int\limits_{Q_2}Lu\cdot u_{yyyy}\,dxdy+A\varepsilon\int\limits_{Q_2}u_{yyyy}^2\,dxdy$$
$$=-\int\limits_{Q_1}fu_{yyyy}\,dxdy-A\int\limits_{Q_2}fu_{yyyy}\,dxdy.$$

Повторяя рассуждения, которые привели к оценке (23), получим, что для решений $u(x,y)$ краевой задачи (18), (2)–(4), (19) будет выполняться оценка

$$\int\limits_{Q_1}\left(u_{xx}^2+u_{xy}^2+\varepsilon u_{yyyy}^2\right)dxdy+\int\limits_{Q_2}\left(u_{xx}^2+u_{xy}^2+\varepsilon u_{yyyy}^2\right)dxdy$$
$$\leq M_5\left(\int\limits_{Q_1}\left(f^2+f_y^2\right)dxdy+\int\limits_{Q_2}\left(f^2+f_y^2\right)dxdy\right). \quad (24)$$

Последняя оценка

$$\int\limits_{Q_1}u_{yy}^2\,dxdy+\int\limits_{Q_2}u_{yy}^2\,dxdy\leq M_6\left(\int\limits_{Q_1}\left(f^2+f_y^2\right)dxdy+\int\limits_{Q_2}\left(f^2+f_y^2\right)dxdy\right) \quad (25)$$

очевидным образом вытекает из самого уравнения (18) и оценки (23).

Оценок (24) и (25) вполне достаточно для доказательства существования решения нелокальной задачи I. Действительно, из этих оценок и свойства рефлексивности гильбертова пространства вытекает существование последовательностей $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$, $\{u_m(x,y)\}_{m=1}^{\infty}$, а также функции $u(x,y)$ таких, что при $m\to\infty$ имеют место сходимости

$$u_m(x,y)\to u(x,y)\quad \text{слабо в } V,$$
$$\varepsilon_m u_{m\,yyyy}(x,y)\to 0\quad \text{слабо в } L_2(Q_1) \text{ и в } L_2(Q_2).$$

Предельная функция $u(x,y)$ принадлежит пространству $V$ и будет искомым решением нелокальной задачи I.

Единственность решений нелокальной задачи I в пространстве $V$ очевидным образом вытекает из оценки (11).

Теорема доказана.

Разрешимость нелокальной задачи II, как и в [19], будет доказана с помощью перехода от уравнения (1) к продифференцированному по переменной $x$ в прямоугольниках $Q_1$ и $Q_2$ уравнению.

**Теорема 2.** *Пусть выполняются условия*

$$h_1(y) \in C^2([-a,0]), \quad h_2(y) \in C^2([0,a]), \quad c(x,y) \in C^1(\overline{Q}), \quad c_{xx}(x,y) \in C(\overline{Q});$$

$$h_1(y) \geq \overline{h}_1 > 0 \quad \text{при } y \in [-a,0], \quad h_2(y) \geq \overline{h}_2 > 0 \quad \text{при } y \in [0,a];$$

$$\gamma(y) \in C^2([-a,a]);$$

$$c(x,y) \leq -c_0 < 0, \quad (xc_x(x,y))_x \geq 0 \quad \text{при } (x,y) \in \overline{Q};$$

$$4c_0 - 4\gamma_0 - \gamma_0^2 > 0, \quad \alpha\beta > 0.$$

*Тогда для любой функции* $f(x,y)$ *такой, что* $f(x,y) \in W_2^1(Q_i)$, $f_{xy}(x,y) \in L_2(Q_i)$, $i=1,2$, $f(x,-a) = f(x,a) = 0$ *при* $x \in \Omega$, *нелокальная задача* II *имеет решение* $u(x,y)$ *такое, что* $u(x,y) \in V$, $u_x(x,y) \in V$, *причем ровно одно.*

Доказательство. Рассмотрим следующую задачу: *найти функцию* $v(x,y)$, *являющуюся в прямоугольниках* $Q_1$ *и* $Q_2$ *решением уравнения*

$$v_{xx} + \frac{\partial}{\partial x}(h(y)v_y) + c(x,y)v - c_x(x,y)\int\limits_x^1 v(\xi,y)d\xi = f_x(x,y) \tag{26}$$

*и такую, что для нее выполняются условия* (2)–(6). Данная задача отличается от нелокальной задачи I лишь последним слагаемым, ее разрешимость в пространстве $V$ очевидна (поскольку для регулярных решений $v(x,y)$ задачи (26), (2)–(6) имеют место оценки (11), (15) и (16)). Определим функцию $u(x,y)$:

$$u(x,y) = v_x(x,y), \quad (x,y) \in Q_1 \cup Q_2.$$

Эта функция и будет искомым решением нелокальной задачи II.

Теорема доказана.

### 3. Разрешимость нелокальных задач III и IV

Доказательство разрешимости нелокальных задач III и IV, как и доказательство разрешимости нелокальных задач I и II, основано на априорных оценках и методе регуляризации. Непосредственная техника доказательств вполне аналогична технике, использованной при доказательстве теорем 1 и 2, поэтому, не вдаваясь в излишние подробности, приведем лишь окончательные результаты.

Определим квадратичную форму

$$F(\xi,\eta) = -\alpha_1 h_1(0)\xi^2 + [\beta_1 h_2(0) - \alpha_2 h_1(0)]\xi\eta + \beta_2 h_2(0)\eta^2.$$

**Теорема 3.** *Пусть выполняются условия*

$$h_1(y) \in C^1([-a,0]), \quad h_2(y) \in C^1([0,a]), \quad c(x,y) \in C(\overline{Q}), \quad c_y(x,y) \in C(\overline{Q});$$

$$h_1(y) \geq \overline{h}_1 > 0 \quad \text{при } y \in [-a,0], \quad h_2(y) \geq \overline{h}_2 > 0 \quad \text{при } y \in [0,a];$$

$$\gamma(y) \in C^2([-a,a]);$$

$$c(x,y) \le -c_0 < 0 \quad \text{при } (x,y) \in \overline{Q};$$
$$4c_0 - 4\gamma_0 - \gamma_0^2 > 0;$$
$$\alpha_1 \le 0, \quad \beta_2 \ge 0, \quad F(\xi,\eta) \ge 0 \quad \text{при } (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2.$$

*Тогда для любой функции $f(x,y)$ такой, что $f(x,y) \in L_2(Q_i)$, $f_y(x,y) \in L_2(Q_i)$, $i = 1, 2$, $f(x,-a) = f(x,a) = 0$ при $x \in \Omega$, нелокальная задача* III *имеет решение $u(x,y)$, принадлежащее пространству $V$, причем ровно одно.*

Доказательство. Как отмечено выше, вновь воспользуемся методом регуляризации.

Пусть $\varepsilon$ — положительное число. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x,y)$, являющуюся в прямоугольниках $Q_1$ и $Q_2$ решением уравнения* (18) *и такую, что для нее выполняются условия* (2)–(4), *а также условия*

$$u_{yy}(x,-a) = u_{yy}(x,a) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{27}$$
$$-\varepsilon u_{yy}(x,-0) + u_y(x,-0) = \alpha_1 u(x,-0) + \alpha_2 u(x,+0), \quad x \in \Omega, \tag{28}$$
$$\varepsilon u_{yy}(x,+0) + u_y(x,+0) = \beta_1 u(x,-0) + \beta_2 u(x,+0), \quad x \in \Omega. \tag{29}$$

Данная краевая задача разрешима в классе регулярных решений, что нетрудно установить с помощью метода продолжения по параметру и априорных оценок. Собственно априорные оценки легко выводятся прежде всего с помощью анализа равенств

$$-\int\limits_{Q_1} (Lu - \varepsilon u_{yyyy}) xu \, dxdy - \int\limits_{Q_2} (Lu - \varepsilon u_{yyyy}) xu \, dxdy = -\int\limits_{Q_1} fxu \, dxdy - \int\limits_{Q_2} fxu \, dxdy,$$

$$\int\limits_{Q_1} (Lu - \varepsilon u_{yyyy}) xu_{yy} \, dxdy + \int\limits_{Q_2} (Lu - \varepsilon u_{yyyy}) xu_{yy} \, dxdy = \int\limits_{Q_1} fxu_{yy} \, dxdy + \int\limits_{Q_2} fxu_{yy} \, dxdy,$$

$$\int\limits_{Q_1} (Lu - \varepsilon u_{yyyy}) xu_{yyyy} \, dxdy + \int\limits_{Q_2} (Lu - \varepsilon u_{yyyy}) xu_{yyyy} \, dxdy = -\int\limits_{Q_1} fxu_{yyyy} \, dxdy - \int\limits_{Q_2} fxu_{yyyy} \, dxdy.$$

Эти равенства и условия теоремы дадут оценки (11), (15) и (16). Дальнейшие априорные оценки выводятся с помощью стандартных для эллиптических уравнений рассуждений и выкладок (см. доказательство оценок (24) и (25)).

Полученные априорные оценки позволят вновь с помощью свойства рефлексивности гильбертова пространства построить последовательность решений задачи (18), (2)–(4), (27)–(29), сходящуюся к искомому решению нелокальной задачи III.

Единственность в пространстве $V$ решений нелокальной задачи III очевидна.

Теорема доказана.

**Теорема 4.** *Пусть выполняются условия*

$$h_1(y) \in C^2([-a,0]), \quad h_2(y) \in C^2([0,a]), \quad c(x,y) \in C^1(\overline{Q}), \quad c_{xx}(x,y) \in C(\overline{Q});$$

$$h_1(y) \geq \overline{h}_1 > 0 \quad \text{при } y \in [-a,0], \quad h_2(y) \geq \overline{h}_2 > 0 \quad \text{при } y \in [0,a];$$

$$\gamma(y) \in C^2([-a,a]);$$

$$c(x,y) \leq -c_0 < 0, \quad (xc_x(x,y))_x \geq 0 \quad \text{при } (x,y) \in \overline{Q};$$

$$4c_0 - 4\gamma_0 - \gamma_0^2 > 0;$$

$$\alpha_1 \leq 0, \quad \beta_2 \geq 0, \quad F(\xi,\eta) \geq 0 \quad \text{при } (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2.$$

*Тогда для любой функции $f(x,y)$ такой, что $f(x,y) \in W_2^1(Q_i)$, $f_{xy}(x,y) \in L_2(Q_i)$, $i = 1,2$, $f(x,-a) = f(x,a) = 0$ при $x \in \Omega$, нелокальная задача* IV *имеет решение $u(x,y)$ такое, что $u(x,y) \in V$, $u_x(x,y) \in V$, причем ровно одно.*

Доказательство этой теоремы, как и доказательство теоремы 2, основано на переходе к продифференцированному по $x$ уравнению (1) и использовании теоремы 3.

## 4. Заключение

В работе получены достаточные условия разрешимости — существования и единственности — в пространствах Соболева нелокальных задач с обобщенным условием Самарского — Ионкина для эллиптических уравнений второго порядка с разрывным коэффициентом. Технически доказательства основаны на методе регуляризации и априорных оценках.

### *ЛИТЕРАТУРА*

1. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения. О решении общей задачи дифракции // Докл. АН СССР. 1954. Т. 96, № 3. С. 433–436.
2. *Олейник О. А.* Решение основных краевых для уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1959. Т. 126, № 6, С. 1219–1222.
3. *Schechter M.* A generalization of the problem of transmission // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e serie. 1960. V. 3. N 3. P. 207–236.
4. *Олейник О. А.* Об одном методе решения общей задачи дифракции // Докл. АН СССР. 1960. Т.135, № 5. С. 1054–1057.
5. *Ильин В. А.* О разрешимости задачи Дирихле и Неймана для линейного эллиптического оператора с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137, № 1. С. 28–30.
6. *Ильин В. А., Шишмарев И. А.* Задача на собственные функции для оператора $Lu = \operatorname{div}[p(x) \operatorname{grad} u] - q(x)u$ с разрывными коэффициентами // Сиб. мат. журн. 1961. Т. 2, № 4. С. 523–536.
7. *Ильин В. А., Шишмарев И. А.* Метод потенциалов для задач Дирихле и Неймана в случае уравнений с разрывными коэффициентами // Сиб. мат. журн. 1961. Т. 2, № 1. С. 46–58.
8. *Ладыженская О. А., Ривкинд В. Я., Уральцева Н. Н.* О классической разрешимости задач дифракции // Тр. МИАН СССР. 1966. Т. 92. С. 116–146.
9. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
10. *Шадрина Н. Н.* О разрешимости некоторых задач сопряжения для уравнений эллиптического типа // Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 1. С. 75–89.

**11.** *Шадрина Н. Н.* О влиянии параметров на разрешимость некоторых задач сопряжения для эллиптических уравнений // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 411–425.

**12.** *Кожанов А. И., Шадрина Н. Н.* Краевые задачи с условиями сопряжения для квазипараболических уравнений третьего порядка с разрывным знакопеременным коэффициентом // Сиб. электрон. мат. изв. 2021. Т. 18, № 1. С. 599–616.

**13.** *Кожанов А. И., Шадрина Н. Н.* Исследование влияния параметров на корректность задачи сопряжения дифференциального уравнения Буссинеска — Лява // Челяб. физ.-мат. журн. 2022. Т. 7, № 1. С. 30–43.

**14.** *Ионкин Н. И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 7. С. 1279–1283.

**15.** *Ионкин Н. И.* Об устойчивости одной задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.

**16.** *Ashyraliev A., Akay N.* A note on the well-posedness of the nonlocal boundary value problem for elliptic difference equations // Appl. Math. Comput. 2006. V. 175, № 1. P. 49–60.

**17.** *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. I // Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 26. С. 3–132.

**18.** *Ashyraliev A., Akay N.* A note on the Bitsadze–Samarskii type nonlocal boundary value problem in a Banach space // Math. Anal. Appl. 2008. V. 344. P. 557–563.

**19.** *Кожанов А. И., Дюжева А. В.* Корректность обобщенной задачи Самарского — Ионкина для эллиптических уравнений в цилиндрической области // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 2. С. 223–233.

**20.** *Самарский А. А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 11. С. 1925–1935.

**21.** *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

**22.** *Triebel H.* Interpolation theory. Functional spaces. Differential operators. Berlin: VEB Deutsch. Verl. Wiss., 1978.

**23.** *Kozhanov A. I.* Initial-boundary value problems with generalized Samarskii–Ionkin condition for parabolic equations with arbitrary evolution direction // J. Math. Sci. 2023. V. 274, N 2. P. 228–240.

*Поступила в редакцию 22 января 2025 г.г.*
*После доработки 12 февраля 2025 г.*
*Принята к публикации 25 февраля 2025г.*

Кожанов Александр Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`kozhanov@math.nsc.ru`

Шадрина Наталья Николаевна
МГТУ им. Баумана, РТУ МИРЭА, Москва
`shadrinann8@yandex.ru`

*Математические заметки СВФУ*
*Январь—март, 2025. Том 32, № 1*

*UDC 517.95*

# INVESTIGATION OF THE CORRECTNESS OF NON–LOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ELLIPTIC TYPE DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENT

**A. I. Kozhanov and N. N. Shadrina**

**Abstract:** The paper investigates the solvability of nonlocal boundary value problems with the generalized Samarsky–Ionkin condition for elliptic second order differential equations with a discontinuous coefficient in the higher part. The existence and uniqueness theorems for regular solutions to the studied problems are proved, i.e. solutions having all required generalized derivatives.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-1-32-45

**Keywords:** elliptic equations, discontinuous coefficient, nonlocal conditions, regular solutions, existence, uniqueness.

## *REFERENCES*

1. *Ladyzhenskaya O. A.*, "On the solution of the general problem of diffraction [in Russian]," Dokl. Akad. Nauk SSSR, **96**, No. 3, 433–436 (1954).
2. *Oleinik O. A.*, "Solution of the main boundary value problems for the second order equation with discontinuous coefficients [in Russian]," Dokl. Akad. Nauk SSSR, **124**, No. 6, 1219–1222 (1959).
3. *Schechter M.* "A generalization of the problem of transmission," Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e serie, 207–236 **3**, No. 3 (1960).
4. *Oleinik O. A.*, "On a method for solving the general problem of diffraction," Dokl. Akad. Nauk SSSR, **135**, No. 5, 1054–1057 (1960).
5. *Il'in V. A.*, "Solvability of the Dirichlet and Neumann problems for a linear elliptic operator with discontinuous coefficients [in Russian]," Dokl. Akad. Nauk SSSR, **137**, No. 1, 28–30 (1961).
6. *Il'in V. A. and Shishmarev I. A.*, "The problem on eigenfunctions for the operator $Lu = \operatorname{div}[p(x)\operatorname{grad} u] - q(x)u$ with discontinuous coefficients [in Russian]," Sib. Math. J., **2**, No. 4, 520–536 (1961).
7. *Il'in V. A. and Shishmarev I. A.*, "Potential method for Dirichlet and Neumann problems in the case of equations with discontinuous coefficients [in Russian]," Sib. Math. J., **2**, No. 1, 46–58 (1961).
8. *Ladyzhenskaya O. A., Rivkind V. Ya., and Ural'tseva N. N.*, "On the classic solvability of diffraction problems [in Russian]," Tr. MIAN SSSR, **92**, 116–146 (1966).
9. *Ladyzhenskaya O. A.*, Linear and Quasilinear Elliptic Equations, Acad. Press, New York (1968). xviii
10. *Shadrina N. N.*, "On the solvability of some conjugation problems for elliptic equations [in Russian]," Mat. Zamet. SVFU, **21**, No. 1, 75–89, (2014).
11. *Shadrina N. N.*, "On the influence of parameters on the solvability of some conjugate problems for elliptical equations [in Russian]," Sib. Elektron. Mat. Izv., **13**, 411–425 (2016).

**12.** *Kozhanov A. I. and Shadrina N. N.*, “Boundary value problems with conjugation conditions for quasi-parabolic equations of the third order with a discontinuous sign-variable coefficient [in Russian],” Sib. Elektron. Mat. Izv., **18**, No. 1, 599–616 (2021).
**13.** *Kozhanov A. I. and Shadrina N. N.*, “Study of the influence of parameters on the correctness of the conjugation problem for the Boussinesq–Love differential equation [in Russian],” Chelyab. Fiz.-Mat. Zhurn., **7**, No. 1, 30–42 (2022).
**14.** *Ionkin N. I.*, “The stability of a problem in the theory of heat conduction with nonclassical boundary conditions [in Russian],” Differ. Uravn., **15**, No. 7, 1279–1283 (1979).
**15.** *Ionkin N. I.*, “The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition [in Russian],” Differ. Uravn., **13**, No. 2, 294–304 (1977).
**16.** *Ashyraliev A. and Akay N.*, “A note on the well-posedness of the nonlocal boundary value problem for elliptic difference equations,” Appl. Math. Comput, **175**, No. 1, 49–60 (2006).
**17.** *Skubachevskii A. L.*, “Nonclassical boundary value problems, I,” J. Math. Sci., **155**, No. 2, 199–334 (2008).
**18.** *Ashyraliev A. and Akay N.*, “A note on the Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problem in a Banach space,” Math. Anal. Appl., **344**, 557–563 (2008).
**19.** *Kozhanov A. I. and Dyuzheva A. V.*, “Well-posedness of the generalized Samarskii–Ionkin problem for elliptic equations in a cylindrical domain [in Russian],” Differ. Uravn., **59**, No. 2, 223–235 (2023).
**20.** *Samarskii A. A.*, “Some problems of the theory of differential equations [in Russian],” Differ. Uravn., **16**, No. 11, 1925–1935 (1980).
**21.** *Sobolev S. L.*, Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics [in Russian], Nauka, Moscow (1988).
**22.** *Triebel H.*, Interpolation Theory, Functional Spaces, Differential Operators, VEB Deutscher Verl. Wiss., Berlin (1978).
**23.** *Kozhanov A. I.*, “Initial-boundary value problems with generalized Samarskii–Ionkin condition for parabolic equations with arbitrary evolution direction,” J. Math. Sci., **274**, No. 2, 228–240 (2023).

*Submitted January 22, 2025*
*Revised February 12, 2025*
*Accepted February 25, 2025*

Alexander I. Kozhanov
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia
kozhanov@math.nsc.ru

Natalia N. Shadrina
Department of Fundamental Sciences at Bauman Moscow State Technical University,
Department of Higher Mathematics at RTU MIREA Moscow, Russia;
shadrinann8@yandex.ru

*Математические заметки СВФУ*
*Январь—март, 2025. Том 32, № 1*

*УДК 517.9*

# ЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ГЕРАСИМОВА

**В. Е. Федоров, Д. В. Мелехина**

**Аннотация.** Исследованы вопросы однозначной разрешимости линейных обратных коэффициентных задач для эволюционных интегро-дифференциальных уравнений типа Герасимова с сингулярным интегральным ядром в банаховых пространствах. Рассмотрены случаи ограниченного и секториального операторов при искомой функции в уравнении. В каждом из случаев получены критерии корректности для линейной обратной задачи с не зависящим от времени неизвестным коэффициентом, а также достаточные условия разрешимости и оценки корректности для линейной задачи идентификации с зависящим от времени неизвестным коэффициентом. Полученные абстрактные результаты проиллюстрированы на примере класса обратных задач для уравнений с частными производными.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-1-46-64

**Ключевые слова:** интегро-дифференциальный оператор типа Герасимова, сингулярное ядро, обратная коэффициентная задача, задача идентификации, секториальный оператор.

Обратные задачи для дифференциальных уравнений с неизвестными коэффициентами являются объектом пристального внимания исследователей [1–4], поскольку представляют интерес как с теоретической точки зрения, так и в плане их использования в прикладных задачах. В последние годы активно исследуются обратные коэффициентные задачи, называемые также задачами идентификации, для уравнений с различными дробными производными [5–11].

Класс интегро-дифференциальных эволюционных уравнений включает в себя многие уравнения с дробными производными. Вопросы однозначной разрешимости начальных, начально-краевых задач для таких уравнений исследованы в работах [12–17]. При этом можно выделить два различных по свойствам класса интегро-дифференциальных операторов: с сингулярным ядром интегрального оператора [14–16] и с регулярным ядром [12, 13, 17]. Каждый из этих классов, в свою очередь, можно разбить на два: операторы типа Римана — Лиувилля, когда сначала действует интегральный оператор, а затем дифференциальный, и операторы типа Герасимова, когда действие интегрального оператора следует за действием дифференциального оператора. Эти же

---

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Правительства Челябинской области № 24–21–20015, https://rscf.ru/project/24-21-20015/.

термины будем использовать для обозначения уравнений с соответствующими интегро-дифференциальными операторами.

В данной работе исследуются вопросы однозначной разрешимости линейных обратных задач (или задач идентификации) для сингулярных интегро-дифференциальных уравнений типа Герасимова в банаховых пространствах. При этом используются полученные ранее результаты об однозначной разрешимости задачи Коши для таких уравнений в случае ограниченного оператора при искомой функции [14] и в случае секториального оператора, т. е. оператора, порождающего аналитическое разрешающее семейство операторов соответствующего линейного однородного уравнения [16]. Для задач идентификации с постоянным по времени неизвестным элементом получены критерии корректности, а для задач с переменным элементом получены достаточные условия однозначной разрешимости. Абстрактные результаты использованы при исследовании одного класса обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных.

## 1. Задача Коши для интегро-дифференциального уравнения с ограниченным оператором

Рассмотрим банахово пространство $\mathscr{Z}$. Обозначим через $\mathscr{L}(\mathscr{Z})$ банахову алгебру всех линейных ограниченных операторов в $\mathscr{Z}$, $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$, $K \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathscr{L}(\mathscr{Z}))$. Определим оператор свертки

$$(J^K z)(t) := \int\limits_0^t K(t-s)z(s)\,ds$$

и интегро-дифференциальный оператор типа Герасимова

$$(D^{K,m} z)(t) := (J^K D^m z)(t) := \int\limits_0^t K(t-s)z^{(m)}(s)\,ds,$$

где $D^m$ — производная целого порядка $m \in \mathbb{N}$.

При $K(t) = \frac{t^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)}I$ интегро-дифференциальный оператор типа Герасимова является производной Герасимова — Капуто порядка $\alpha \in (m-1, m]$, $m \in \mathbb{N}$.

При $A \in \mathscr{L}(\mathscr{Z})$, $f \in C([0,T]; \mathscr{Z})$ для уравнения

$$(D^{K,m} z)(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

рассмотрим задачу Коши

$$z^{(k)}(0) = z_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{2}$$

Решением задачи (1), (2) является функция $z \in AC^m([0,T]; \mathscr{Z}) \cap C^m((0,T]; \mathscr{Z})$ такая, что $D^m z \in L_1(0,T; \mathscr{Z})$, выполняются условия (2) и равенство (1).

Здесь и далее $AC^m([0,T]; \mathscr{Z}) := \{v \in C^{m-1}([0,T]; \mathscr{Z}) : D^{m-1}v$ абсолютно непрерывна на $[0,T]\}$.

Для функции $h : \mathbb{R}_+ \to \mathscr{Z}$ через $\widehat{h}$ обозначим преобразование Лапласа. Сформулируем следующее условие.

($\mathfrak{K}$) *Пусть при некотором* $R_0 > 0$ *существует однозначная аналитическая функция* $\widehat{K} : \Omega_{R_0} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg \mu| < \pi, |\mu| \geq R_0\} \to \mathscr{L}(\mathscr{Z})$ — *преобразование Лапласа функции* $K \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathscr{L}(\mathscr{Z}))$. *При этом для любого* $\lambda \in \Omega_{R_0}$ *существует обратный оператор* $\widehat{K}(\lambda)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Z})$ *и выполняется условие*

$$\exists c > 0 \ \exists \chi > -1 \ \forall \lambda \in \Omega_{R_0} \quad \|\widehat{K}(\lambda)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \geq c|\lambda|^{\chi}.$$

Далее используются обозначения

$$f * g := \int\limits_0^t f(t-s)g(s)\, ds, \quad g_\alpha(t) := \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad \alpha > 0.$$

**Теорема 1** [14]. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $K \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathscr{L}(\mathscr{Z}))$ *удовлетворяет условию* ($\mathfrak{K}$), $A \in \mathscr{L}(\mathscr{Z})$, $f \in C([0,T]; \mathscr{Z})$, $z_k \in \mathscr{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. *Тогда существует решение задачи* (1), (2), *оно имеет вид*

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Y_k(t) z_k + \int\limits_0^t Y(t-s) f(s)\, ds, \tag{3}$$

*где*

$$Y_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \lambda^{m-1-k} (\lambda^k \widehat{K} - A)^{-1} \widehat{K} e^{\lambda t}\, d\lambda, \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

$$Y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma (\lambda^m \widehat{K} - A)^{-1} e^{\lambda t}\, d\lambda,$$

$\gamma = \gamma_R \cup \gamma_{R,-} \cup \gamma_{R,+}$, $\gamma_R := \{Re^{i\varphi} : \varphi \in (-\pi, \pi)\}$, $\gamma_{R,\pm} := \{re^{\pm i\pi} : r \in [R, +\infty)\}$. *Если к тому же существуют операторы*

$$\left( \int\limits_0^t K(s)\, ds \right)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Z}), \quad t > 0, \tag{4}$$

*то решение задачи* (1), (2) *единственно.*

Доказательство. Существование решения доказано в [14, теорема 4], докажем его единственность.

Рассмотрим решение $y$ задачи Коши с начальными значениями $z_0 \in \mathscr{Z}$, $z_1 = z_2 = \dots = z_{m-1} = 0$ для уравнения (1). Так как $y \in AC^m([0,T]; \mathscr{Z}) \cap C^m((0,T]; \mathscr{Z}) \cap C((0,T]; D_A)$, $D^m y \in L_1(0,T; \mathscr{Z})$, то $J^m J^K D^m y = J^K J^m D^m y = J^K(y - z_0) = J^m A y$,

$$z_0 = \left( \int\limits_0^t K(s)\, ds \right)^{-1} (J^K y(t) - J^m A y(t)) = \left( \int\limits_0^t K(s)\, ds \right)^{-1} (K * y(t) - g_m * A y(t)).$$

Учитывая, что $Y_0(t)z_0$ также решение этой задачи Коши, имеем

$$1 * y = 1 * \left(\int\limits_0^t K(s)\,ds\right)^{-1} (K * Y_0 - g_m * AY_0)y$$
$$= \left(\int\limits_0^t K(s)\,ds\right)^{-1} (K * Y_0 - g_m A * Y_0) * y$$
$$= Y_0 * \left(\int\limits_0^t K(s)\,ds\right)^{-1} (K - g_m A) * y = Y_0 * z_0 = 1 * Y_0 z_0.$$

После дифференцирования полученного равенства получим $y(t) = Y_0(t)z_0$.

Пусть теперь $y$ — решение (1), (2) с начальными значениями $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1} \in \mathscr{Z}$. Тогда $y(t) - \sum\limits_{k=1}^{m-1} Y_k z_k$ является решением этой задачи при $z_1 = z_2 = \cdots = z_{m-1} = 0$, а значит,

$$y(t) - \sum_{k=1}^{m-1} Y_k z_k = Y_0(t)z_0$$

по доказанному. $\square$

Замечание 1. В [14] используется также условие $K \in C(\mathbb{R}_+; \mathscr{L}(\mathscr{Z}))$, однако утверждение остается справедливым и без его использования.

Замечание 2. При доказательстве теорем 3 и 4 в работе [14] показано, что при всех $t \in [0, T]$

$$\|Y_k(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \le Ct^k,\ k = 0, 1, \ldots, m-1, \quad \|Y(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \le Ct^{\chi+m-1}.$$

## 2. Линейная обратная задача с постоянным неизвестным параметром и ограниченным оператором

Рассмотрим задачу

$$(D^{K,m}z)(t) = Az(t) + B(t)u + g(t), \quad t \in (0, T], \tag{5}$$

$$z^{(k)}(0) = z_k \in \mathscr{Z}, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{6}$$

$$\int\limits_0^T z(t)d\mu(t) = z_T \in \mathscr{Z}, \tag{7}$$

где $A \in \mathscr{L}(\mathscr{Z})$, $B \in C([0,T]; \mathscr{L}(\mathscr{U}; \mathscr{Z}))$, $g \in C([0,T]; \mathscr{Z})$, $\mathscr{Z}$, $\mathscr{U}$ — банаховы пространства, $\mu \in BV((0,T]; \mathbb{C})$, т. е. $\mu$ — функция ограниченной вариации на $(0, T]$. Неизвестными в задаче являются функция $z$ и параметр $u \in \mathscr{U}$. Такая задача называется *обратной задачей* или *задачей идентификации*. Независимость параметра $u$ от $t$ означает, что в соответствующих приложениях $u$ зависит только от пространственных переменных.

*Решением* будем называть такую пару $(z, u)$, что справедливы включения $z \in AC^m([0,T];\mathscr{Z}) \cap C^m((0,T];\mathscr{Z})$, $D^m z \in L_1(0,T;\mathscr{Z})$, выполняются условия (6), (7) и равенство (5) при соответствующем $u \in \mathscr{U}$.

Задачу (5)–(7) будем называть *корректной*, если для любых $g \in C([0,T];\mathscr{Z})$, $z_0, z_1, \dots, z_{m-1}, z_T \in \mathscr{Z}$ она имеет единственное решение $(z, u)$ и при этом

$$\|u\|_{\mathscr{U}} \le C\left(\sum_{k=0}^{m-1} \|z_k\|_{\mathscr{Z}} + \|z_T\|_{\mathscr{Z}} + \|g\|_{C([0,T];\mathscr{Z})}\right), \tag{8}$$

где константа $C$ не зависит от $z_0, z_1, \dots, z_{m-1}, z_T, g$.

Введем оператор

$$\Theta := \int_0^T \int_0^t Y(t-s)B(s)\,ds d\mu(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{U};\mathscr{Z}).$$

**Теорема 2.** *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $K$ удовлетворяет условию $(\mathfrak{K})$, выполняется условие (4), $A \in \mathscr{L}(\mathscr{Z})$, $g \in C([0,T];\mathscr{Z})$, $B \in C([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{U};\mathscr{Z}))$, $z_k \in \mathscr{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $z_T \in \mathscr{Z}$, $\mu \in BV((0,T];\mathbb{C})$. Тогда задача (5)–(7) корректна в том и только в том случае, когда существует $\Theta^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Z};\mathscr{U})$. В случае корректности задачи решение имеет вид*

$$u = \Theta^{-1}\left(z_T - \int_0^T \sum_{k=0}^{m-1} Y_k(t) z_k\,d\mu(t) - \int_0^T \int_0^t Y(t-s)g(s)\,ds d\mu(t)\right),$$

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Y_k(t) z_k + \int_0^t Y(t-s)(B(s)u + g(s))\,ds.$$

Доказательство. Подставив решение (3) задачи (5), (6) в соотношение (7), получим равенство

$$\int_0^T \int_0^t Y(t-s)B(s)\,ds d\mu(t) u = z_T - \int_0^T \sum_{k=0}^{m-1} Z_k(t) z_k d\mu(t) - \int_0^T \int_0^t Y(t-s)g(s)\,ds d\mu(t),$$

из которого следует, что однозначная разрешимость задачи (5)–(7) эквивалентна непрерывной обратимости оператора $\Theta \in \mathscr{L}(\mathscr{U};\mathscr{Z})$. Отсюда следует вид решения задачи, а из него — неравенство (8). В частности, имеем

$$\left\| \int_0^T \int_0^t Y(t-s)g(s)\,ds d\mu(t) \right\|_{\mathscr{Z}} \le C V_0^T[\mu] \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t (t-s)^{\chi+m-1} \|g(s)\|_{\mathscr{Z}}\,ds$$

$$\le C V_0^T[\mu] \frac{T^{\chi+m}}{\chi+m} \|g\|_{C([0,T];\mathscr{Z})},$$

где $V_0^T[\mu]$ — вариация функции $\mu$ на $(0,T]$. □

Замечание 3. Понятно, что в условиях теоремы 2

$$\|z\|_{C([0,T];\mathscr{Z})} + \|u\|_{\mathscr{U}} \le C\left(\sum_{k=0}^{m-1} \|z_k\|_{\mathscr{Z}} + \|z_T\|_{\mathscr{Z}} + \|g\|_{C([0,T];\mathscr{Z})}\right).$$

### 3. Линейная обратная задача с переменным неизвестным параметром и ограниченным оператором

Рассмотрим теперь задачу идентификации с зависящим от $t$ неизвестным параметром $u$:

$$(D^{K,m}z)(t) = Az(t) + B(t)u(t) + g(t), \quad t \in (0,T], \tag{9}$$

$$z^{(k)}(0) = z_k \in \mathscr{Z}, \quad k = 0,1,\ldots,m-1, \tag{10}$$

$$\Phi z(t) = \Psi(t), \quad t \in (0,T], \tag{11}$$

где $A \in \mathscr{L}(\mathscr{Z})$, $g \in C([0,T];\mathscr{Z})$, $B \in C([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{U};\mathscr{Z}))$, $\mathscr{Z}$, $\mathscr{U}$ — банаховы пространства, $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{U};\mathscr{Z})$, $\Psi \in C([0,T];\mathscr{U})$. Неизвестными в задаче являются функции $z : [0,T] \to \mathscr{Z}$ и $u : [0,T] \to \mathscr{U}$.

*Решением задачи* (9)–(11) является такая пара $(z,u)$, что $z \in AC^m([0,T];\mathscr{Z}) \cap C^m((0,T];\mathscr{Z})$, $D^m z \in L_1(0,T;\mathscr{Z})$, выполняются условия (10), (11) и равенство (9) при соответствующем $u \in C([0,T];\mathscr{U})$.

Определим множество $\widehat{\Delta}_T := \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0,T], s \in [0,t]\}$.

**Теорема 3.** *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $K$ удовлетворяет условию $(\mathfrak{K})$, выполняется условие (4), $A \in \mathscr{L}(\mathscr{Z})$, $g \in C([0,T];\mathscr{Z})$, $B \in C([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{U};\mathscr{Z}))$, $z_k \in \mathscr{Z}$, $k = 0,1,\ldots,m-1$, $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{Z};\mathscr{U})$, при почти всех $t \in (0,T)$ имеет место равенство $\Phi K(t) = M(t)\Phi$ для некоторого $M \in L_1(0,T;\mathscr{L}(\mathscr{U}))$, при всех $t \in [0,T]$ существует обратный оператор $(\Phi B(t))^{-1}$, при этом $(\Phi B(t))^{-1} \in C([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{U}))$, $\Psi, D^{M,m}\Psi \in C([0,T];\mathscr{U})$, $D^{M,k}\Psi(0) = \Phi z_k$, $k = 0,1,\ldots,m-1$. Тогда задача (9)–(11) имеет единственное решение $(z,u) \in C([0,T];\mathscr{Z}) \times C([0,T];\mathscr{U})$, при этом*

$$\|z\|_{C([0,T];\mathscr{Z})} + \|u\|_{C([0,T];\mathscr{U})} \le C\left(\sum_{k=0}^{m-1}\|z_k\|_{\mathscr{Z}} + \|g\|_{C([0,T];\mathscr{Z})} + \|D^{M,m}\Psi\|_{C([0,T];\mathscr{U})}\right),$$

*где $C$ не зависит от $z_k$, $k = 0,1,\ldots,m-1$, $g$, $\Psi$.*

Доказательство. Подействовав оператором $\Phi$ на обе части уравнения (9), в силу непрерывности оператора $\Phi$ получим

$$\Phi(D^{K,m}z)(t) = (D^{M,m}\Phi z)(t) = (D^{M,m}\Psi)(t) = \Phi B(t)u(t) + \Phi g(t) + \Phi A\left(\sum_{k=0}^{m-1} Y_k(t)z_k + \int_0^t Y(t-s)B(s)u(s)\,ds + \int_0^t Y(t-s)g(s)\,ds\right).$$

Отсюда следует уравнение

$$u(t) = \int_0^t N(t,s)u(s)\,ds + h(t), \tag{12}$$

где $N(t,s) := -(\Phi B(t))^{-1}\Phi AY(t-s)B(s)$,

$$h(t) := (\Phi B(t))^{-1}\left[(D^{M,m}\Psi)(t) - \Phi A\left(\sum_{k=0}^{m-1} Y_k(t)z_k + \int\limits_0^t Y(t-s)g(s)\,ds\right) - \Phi g(t)\right].$$

Имеем $h \in C([0,T];\mathscr{Z})$, $N \in C(\widehat{\Delta}_T;\mathscr{L}(\mathscr{Z}))$. Поэтому по теореме Вольтерры существует единственное решение $u \in C([0,T];\mathscr{U})$ уравнения (12), а значит, и обратной задачи, (9)–(11), и выполнены неравенства

$$\|u\|_{C([0,T];\mathscr{U})} \le C\|h\|_{C([0,T];\mathscr{Z})} \le C_1\|D^{M,m}\Psi\|_{C([0,T];\mathscr{U})} + C_1\|g\|_{([0,T];\mathscr{Z})}$$
$$+ C_1\sum_{k=0}^{m-1}\|z_k\|_{\mathscr{Z}} + C_1\sup_{t\in[0,T]}\int\limits_0^t (t-s)^{\chi+m-1}\|g(s)\|_{\mathscr{Z}}\,ds$$
$$\le C_2\left(\|D^{M,m}\Psi\|_{C([0,T];\mathscr{U})} + \|g\|_{C([0,T];\mathscr{Z})} + \sum_{k=0}^{m-1}\|z_k\|_{\mathscr{Z}}\right) + C_2T^{\chi+m}\|g\|_{C([0,T];\mathscr{Z})}.$$

Отсюда следует, что

$$\|z\|_{C([0,T];\mathscr{Z})} \le \sum_{k=0}^{m-1}\sup_{t\in[0,T]}\|Z_k(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})}\|z_k\|_{\mathscr{Z}}$$
$$+ C_3\sup_{t\in[0,T]}\int\limits_0^t (t-s)^{\chi+m-1}\|u(s)\|_{\mathscr{U}}\,ds + C_3\sup_{t\in[0,T]}\int\limits_0^t (t-s)^{\chi+m-1}\|g(s)\|_{\mathscr{Z}}\,ds$$
$$\le C_4\left(\sum_{k=0}^{m-1}\|z_k\|_{\mathscr{Z}} + \|g\|_{C([0,T];\mathscr{Z})} + \|u\|_{C([0,T];\mathscr{U})}\right)$$
$$\le C_5\left(\sum_{k=0}^{m-1}\|z_k\|_{\mathscr{Z}} + \|g\|_{C([0,T];\mathscr{Z})} + \|D^{m,L}\Psi\|_{C([0,T];\mathscr{U})}\right). \quad \square$$

## 4. Задача Коши в секториальном случае

Пусть $\mathscr{C}l(\mathscr{Z})$ — множество всех линейных замкнутых операторов, плотно определенных в $\mathscr{Z}$, $D_A$ — область определения оператора $A \in \mathscr{C}l(\mathscr{Z})$, $\rho(A)$ — резольвентное множество оператора $A$.

При $A \in \mathscr{C}l(\mathscr{Z})$, $K \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathscr{L}(\mathscr{Z}))$, $f \in C([0,T];\mathscr{Z})$ для уравнения

$$(D^{K,1}z)(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in [0,T], \tag{13}$$

рассмотрим задачу Коши

$$z(0) = z_0. \tag{14}$$

Решением задачи (13), (14) является такое $z \in C((0,T];D_A) \cap AC^1([0,T];\mathscr{Z}) \cap C^1((0,T];\mathscr{Z})$, что $D^1z \in L_1(0,T;\mathscr{Z})$, выполняются условие (14) и равенство (13).

($\mathfrak{K}_s$) *Пусть при некоторых $\theta_K \in (\pi/2,\pi)$, $a_K \ge 0$ существует преобразование Лапласа для $K \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathscr{L}(\mathscr{Z}))$ — однозначная аналитическая* *функция* $\widehat{K} : S_{\theta_K, a_K} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - a_K)| < \theta_K,\ \lambda \neq a_K\} \to \mathscr{L}(\mathscr{Z})$. *При этом для всех* $\lambda \in S_{\theta_K, a_K}$ *существует* $\widehat{K}(\lambda)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Z})$ *и*

$$\exists c > 0\ \exists \chi > -1\ \forall \lambda \in S_{\theta_K, a_K} \quad \|\widehat{K}(\lambda)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \geq c|\lambda|^{\chi}.$$

Определение 1. Пусть $K$ удовлетворяет условию $(\mathfrak{K}_s)$, $\theta_0 \in (\pi/2, \theta_K]$, $a_0 \geq a_K \geq 0$. Через $\mathscr{A}_K(\theta_0, a_0)$ обозначим класс операторов $A \in \mathscr{C}l(\mathscr{Z})$, для которых выполняются следующие условия:

(i) для любого $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$ существует оператор $(\lambda \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Z})$;

(ii) для любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ найдется такое $C = C(\theta, a) > 0$, что $\|(\lambda \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} \widehat{K}(\lambda)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \leq C(\theta, a)|\lambda - a|^{-1}$ для всех $\lambda \in S_{\theta, a}$.

Обозначим

$$\mathscr{A}_K := \bigcup_{\theta_0 \in (\pi/2, \pi),\, a_0 \geq 0} \mathscr{A}_K(\theta_0, a_0).$$

Замечание 4. В [16, лемма 2] показано, что $\mathscr{L}(\mathscr{Z}) \subset \mathscr{A}_K$ при $K$, удовлетворяющем условию $(\mathfrak{K}_s)$.

Замечание 5. В [16, замечание 3] показано, что если определить класс операторов, аналогичный $\mathscr{A}_K$, для уравнения $(D^{K,m} z)(t) = Az(t)$ при $m > 1$, то он будет совпадать с $\mathscr{L}(\mathscr{Z})$. При $m = 1$ это, очевидно, не так (см. [16, § 5, 6]). Аналогичный факт известен о дифференциальных уравнениях.

Замечание 6. В [16, теорема 3] доказана теорема о необходимости и достаточности включения $A \in \mathscr{A}_K$ для существования аналитического в секторе разрешающего семейства операторов для уравнения $(D^{K,1} z)(t) = Az(t)$.

Через $C^1_\beta([0, T]; \mathscr{Z})$, $\beta \in \mathbb{R}$, обозначим множество функций $v \in C([0, T]; \mathscr{Z}) \cap C^1((0, T]; \mathscr{Z})$ таких, что $t^\beta D^1 v(t) \in C([0, T]; \mathscr{Z})$.

**Теорема 4** [16]. *Пусть* $K \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathscr{L}(\mathscr{Z}))$ *удовлетворяет условию* $(\mathfrak{K}_s)$, $A \in \mathscr{A}_K(\theta_0, a_0)$ *при некоторых* $\theta_0 \in (\pi/2, \theta_K]$, $a_0 \geq a_K \geq 0$, *для любых* $x \in D_A$ *и почти всех* $t > 0$ *имеют место соотношения* $K(t)x \in D_A$, $K(t)Ax = AK(t)x$, $f \in [C([0, T]; D_A) \cap C^1_\beta([0, T]; \mathscr{Z})] \cup [C^\gamma([0, T]; \mathscr{Z}) \cap C^1_\beta([0, T]; \mathscr{Z})]$, $\gamma \in (0, 1]$, $\beta < 1$, $z_0 \in D_A$. *Тогда существует решение задачи* (13), (14), *которое имеет вид*

$$z(t) = Z_0(t) z_0 + \int_0^t Z(t - s) f(s)\, ds, \tag{15}$$

*где*

$$Z_0(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda \widehat{K} - A)^{-1} \widehat{K} e^{\lambda t}\, d\lambda, \quad Z(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda \widehat{K} - A)^{-1} e^{\lambda t}\, d\lambda,$$

$\Gamma := \Gamma_0 \cup \Gamma_- \cup \Gamma_+$, $\Gamma_0 := \{\delta e^{i\varphi} : \varphi \in (-\theta, \theta)\}$, $\Gamma_\pm := \{r e^{\pm i\theta} : r \in [R, +\infty)\}$ *при некоторых* $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$, $\delta > 0$. *Если к тому же выполняется условие* $(\mathfrak{K})$, *то решение задачи* (13), (14) *единственно.*

Замечание 7. В [16, лемма 3] показано, что для некоторого $C > 0$ при всех $t \in (0, T]$ выполнены неравенства $\|Z_0(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \leq C$, $\|D^1 Z_0(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \leq Ct^{-1}$, $\|Z(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \leq Ct^{\chi}$.

## 5. Задача идентификации с постоянным неизвестным параметром в секториальном случае

Пусть $\mathscr{Z}$, $\mathscr{U}$ — банаховы пространства. Рассмотрим задачу идентификации

$$(D^{K,1}z)(t) = Az(t) + B(t)u + g(t), \quad t \in (0,T], \tag{16}$$

$$z(0) = z_0 \in D_A, \tag{17}$$

$$\int_\varepsilon^T z(t)d\mu(t) = z_T, \tag{18}$$

где $A \in \mathscr{A}_K$, $g \in C([0,T];\mathscr{Z})$, $B \in C([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{U};\mathscr{Z}))$, $\varepsilon \in (0,T)$, $\mu \in BV((\varepsilon,T];\mathbb{C})$.

*Решением задачи* (16)–(18) назовем такую пару $(z,u)$, что $z \in C((0,T];D_A)\cap AC^1([0,T];\mathscr{Z}) \cap C^1((0,T];\mathscr{Z})$, $D^1z \in L_1(0,T;\mathscr{Z})$, выполняются условия (17), (18) и равенство (16) при соответствующем $u \in \mathscr{U}$.

Замечание 8. В силу определения решения $Az \in C([\varepsilon,T];\mathscr{Z})$, а значит, сходится интеграл

$$\int_\varepsilon^T Az(t)d\mu(t)$$

и поэтому в силу замкнутости оператора $A$ должно выполняться включение $z_T \in D_A$. Аналогично с учетом теоремы 4 доказывается, что

$$\int_\varepsilon^T Z_0(t)z_0d\mu(t) \in D_A, \quad \int_\varepsilon^T\int_0^t Z(t-s)f(s)\,dsd\mu(t) \in D_A$$

при $z_0 \in D_A$, $f \in C^\gamma([0,T];\mathscr{Z}) \cap C^1_\beta([0,T];\mathscr{Z})$, $\gamma \in (0,1]$, или $f \in C([0,T];D_A)\cap C^1_\beta([0,T];\mathscr{Z})$, $\beta < 1$.

Задачу (17), (18) будем называть *корректной*, если для любых $z_0, z_T \in \mathscr{Z}$, $g \in [C^\gamma([0,T];\mathscr{Z})\cap C^1_\beta([0,T];\mathscr{Z})]\cup[C([0,T];D_A)\cap C^1_\beta([0,T];\mathscr{Z})]$, $\gamma \in (0,1]$, $\beta < 1$, она имеет единственное решение $(z,u)$ и при этом в случае $g \in C^\gamma([0,T];\mathscr{Z}) \cap C^1_\beta([0,T];\mathscr{Z})$ выполняется неравенство

$$\|u\|_\mathscr{U} \le C(\|z_0\|_{D_A} + \|z_T\|_{D_A} + \|g\|_{C^\gamma([0,T];\mathscr{Z})}), \tag{19}$$

где константа $C$ не зависит от $z_0, z_T, g$, а в случае $g \in C([0,T];D_A)\cap C^1_\beta([0,T];\mathscr{Z})$ — неравенство

$$\|u\|_\mathscr{U} \le C(\|z_0\|_{D_A} + \|z_T\|_{D_A} + \|g\|_{C([0,T];D_A)}). \tag{20}$$

Зададим оператор

$$\Theta := \int_\varepsilon^T\int_0^t Z(t-s)B(s)\,dsd\mu(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{U};D_A).$$

**Теорема 5.** *Пусть $K$ удовлетворяет условию $(\mathfrak{K}_s)$, существуют операторы* (4), $A \in \mathscr{A}_K$, $g \in [C^\gamma([0,T];\mathscr{Z}) \cap C^1_\beta([0,T];\mathscr{Z})] \cup [C([0,T];D_A) \cap C^1_\beta([0,T];\mathscr{Z})]$, $B \in [C^\gamma([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{U};\mathscr{Z})) \cap C^1_\beta([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{U};\mathscr{Z}))] \cup [C([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{U};D_A)) \cap C^1_\beta([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{U};\mathscr{Z}))]$, $\gamma \in (0,1]$, $\beta < 1$, $z_0, z_T \in D_A$, $\mu \in BV((\varepsilon,T];\mathbb{C})$, $\varepsilon \in (0,T)$. *Тогда* задача (16)–(18) *корректна в том и только в том случае, когда существует* $\Theta^{-1} \in \mathscr{L}(D_A;\mathscr{U})$. *В случае корректности задачи ее решение имеет вид*

$$u = \Theta^{-1}\left(z_T - \int\limits_\varepsilon^T Z_0(t)z_0 d\mu(t) - \int\limits_\varepsilon^T \int\limits_0^t Z(t-s)g(s)\,dsd\mu(t)\right),$$

$$z(t) = Z_0(t)z_0 + \int\limits_0^t Z(t-s)(B(s)u + g(s))\,ds.$$

Доказательство. Подставив решение задачи (16), (17) в (18), получим

$$\Theta u = \int\limits_\varepsilon^T \int\limits_0^t Z(t-s)B(s)\,dsd\mu(t)u = z_T - \int\limits_\varepsilon^T Z_0(t)z_0\,d\mu(t) - \int\limits_\varepsilon^T \int\limits_0^t Z(t-s)g(s)\,dsd\mu(t).$$

В силу замечания 8 правая часть этого равенства принадлежит $D_A$, поэтому корректность задачи (16)–(18) эквивалентна непрерывной обратимости оператора $\Theta \in \mathscr{L}(\mathscr{U};D_A)$. В случае, когда это выполняется, с учетом замечания 7 и равенства (4.5) из [16] для $g \in C^\gamma([0,T];\mathscr{Z}) \cap C^1_\beta([0,T];\mathscr{Z})$ имеем

$$\|u\|_{\mathscr{U}} \leq \|\Theta^{-1}\|_{\mathscr{L}(D_A;\mathscr{U})}\left(\left\|z_T + \int\limits_\varepsilon^T Z_0(t)z_0\,d\mu(t) + \int\limits_\varepsilon^T \int\limits_0^t Z(t-s)g(s)\,dsd\mu(t)\right\|_{D_A}\right)$$
$$\leq \|\Theta^{-1}\|_{\mathscr{L}(D_A;\mathscr{U})}\left(\|z_T\|_{D_A} + CV_\varepsilon^T[\mu]\|z_0\|_{D_A} + CV_\varepsilon^T[\mu]\frac{T^{\chi+1}}{\chi+1}\|g\|_{C([0,T];\mathscr{Z})}\right)$$
$$+ \|\Theta^{-1}\|_{\mathscr{L}(D_A;\mathscr{U})}V_\varepsilon^T[\mu]\sup_{t\in[0,T]}\left\|A\int\limits_0^t Z(t-s)g(s)\,ds\right\|_{\mathscr{Z}}$$
$$\leq C_1(\|z_T\|_{D_A} + \|z_0\|_{D_A} + \|g\|_{C([0,T];\mathscr{Z})})$$
$$+ C_1\sup_{t\in[0,T]}\left\|\int\limits_0^t D^1Z_0(t-s)(g(s)-g(t))\,ds + (Z_0(t)-I)g(t)\right\|_{\mathscr{Z}}$$
$$\leq C_1(\|z_T\|_{D_A} + \|z_0\|_{D_A} + \|g\|_{C([0,T];\mathscr{Z})}) + C_2\int\limits_0^T (t-s)^{\gamma-1}\,ds\|g\|_{C^\gamma([0,T];\mathscr{Z})}$$
$$+ C_2\|g\|_{C([0,T];\mathscr{Z})} \leq C_3(\|z_T\|_{D_A} + \|z_0\|_{D_A} + \|g\|_{C([0,T];\mathscr{Z})}) + C_2\frac{T^\gamma}{\gamma}\|g\|_{C^\gamma([0,T];\mathscr{Z})},$$

отсюда следует неравенство (19). Если же $g \in C([0,T];D_A) \cap C^1_\beta([0,T];\mathscr{Z})$, то отличие в рассуждениях при получении неравенства (20) заключается лишь в следующей оценке:

$$\sup_{t\in[0,T]}\left\|A\int_0^t Z(t-s)g(s)\,ds\right\|_{\mathscr{Z}} = \sup_{t\in[0,T]}\left\|\int_0^t Z(t-s)Ag(s)\,ds\right\|_{\mathscr{Z}} \leq \frac{CT^{\chi+1}}{\chi+1}\|g\|_{C([0,T];D_A)}. \quad \square$$

## 6. Задача идентификации с переменным неизвестным параметром в секториальном случае

Рассмотрим задачу идентификации с зависящим от $t$ неизвестным параметром $u$:

$$(D^{K,1}z)(t) = Az(t) + B(t)u(t) + g(t), \quad t \in (0,T], \tag{21}$$

$$z(0) = z_0 \in D_A, \tag{22}$$

$$\Phi z(t) = \Psi(t), \quad t \in (0,T], \tag{23}$$

где $\mathscr{Z}$, $\mathscr{U}$ — банаховы пространства, $A \in \mathscr{A}_K$, $g \in C([0,T];\mathscr{Z})$, $B \in C([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{U};\mathscr{Z}))$, $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{U};\mathscr{Z})$, $\Psi \in C([0,T];\mathscr{U})$.

*Решением* задачи (21)–(23) будем называть такую пару функций $(z,u)$, что $z \in C((0,T];D_A) \cap AC^1([0,T];\mathscr{Z}) \cap C^1((0,T];\mathscr{Z})$, $D^1 z \in L_1(0,T;\mathscr{Z})$, выполняются условия (22), (23) и равенство (21) при соответствующем $u$.

**Лемма 1.** *Пусть $\beta \in (-\chi, 1)$, $h \in C^1_\beta([0,T];\mathscr{U})$, $K$ удовлетворяет условию $(\mathfrak{K}_s)$, $A \in \mathscr{A}_K$, $B \in C^1_\beta([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{U};D_A))$, $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{Z};\mathscr{U})$, при всех $t \in [0,T]$ существует обратный оператор $(\Phi B(t))^{-1}$, при этом $(\Phi B(t))^{-1} \in C^1_\beta([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{U}))$. Тогда уравнение*

$$u(t) = -\int_0^t (\Phi B(t))^{-1}\Phi Z(t-s)AB(s)u(s)\,ds + h(t)$$

*имеет единственное решение $u \in C^1_\beta([0,T];\mathscr{U})$, при этом выполняется неравенство $\|u\|_{C^1_\beta([0,T];\mathscr{U})} \leq C\|h\|_{C^1_\beta([0,T];\mathscr{U})}$, где константа $C = C(A,B,\Phi)$ не зависит от $h$.*

Доказательство. Рассмотрим оператор $F : C^1_\beta([0,T];\mathscr{U}) \to C^1_\beta([0,T];\mathscr{U})$, действующий по правилу

$$(Fu)(t) := -\int_0^t (\Phi B(t))^{-1}\Phi Z(t-s)AB(s)u(s)\,ds + h(t).$$

Заметим, что при всех $t \in (0,T]$

$$\left\|\int_0^t (\Phi B(t))^{-1}\Phi Z(t-s)AB(s)u(s)\,ds\right\|_{\mathscr{U}} \leq C_1 t^{\chi+1}, \quad \chi+1 > 0,$$

$$t^\beta D^1 \int_0^t (\Phi B(t))^{-1}\Phi Z(t-s)AB(s)u(s)\,ds = t^\beta(\Phi B(t))^{-1}\Phi Z(t)AB(0)u(0)$$

$$+ t^\beta \int_0^t [(\Phi B(t))^{-1}]'\Phi Z(s)AB(t-s)u(t-s)\,ds$$

$$+ t^\beta \int_0^t (\Phi B(t))^{-1}\Phi Z(s)A(B'(t-s)u(t-s)\,ds + B(t-s)u'(t-s))\,ds,$$

$$\left\| t^\beta D^1 \int_0^t (\Phi B(t))^{-1}\Phi Z(t-s)AB(s)u(s)\,ds \right\|_{\mathscr{U}}$$

$$\le C_1 t^{\beta+\chi} + C_1 t^{\chi+1} + 2C_1 t^\beta \int_0^t s^\chi (t-s)^{-\beta}\,ds$$

$$\le C_2(t^{\beta+\chi} + t^{\chi+1}), \quad \chi+1>0,\ \beta+\chi>0.$$

Поэтому действительно $Fu \in C^1_\beta([0,T];\mathscr{U})$ для любого $u \in C^1_\beta([0,T];\mathscr{U})$.

Обозначим $K_1 = C\|(\Phi B(t))^{-1}\|_{C([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{U}))}\|\Phi\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z};\mathscr{U})}$, где $C$ — константа из замечания 7. Пусть $T_1 \le \min\{1,T\}$. Для $u,v \in C^1_\beta([0,T_1];\mathscr{U})$ имеем

$$\|F(u)-F(v)\|_{C^1_\beta([0,T_1];\mathscr{U})} \le \sup_{t\in(0,T_1]} \left\| \int_0^t (\Phi B(t))^{-1}\Phi Z(t-s)AB(s)(u(s)-v(s))\,ds \right\|_{\mathscr{U}}$$

$$+ \sup_{t\in(0,T_1]} \|t^\beta(\Phi B(t))^{-1}\Phi Z(t)AB(0)(u(0)-v(0))\|_{\mathscr{U}}$$

$$+ \sup_{t\in(0,T_1]} \left\| t^\beta \int_0^t [(\Phi B(t))^{-1}]'\Phi Z(s)AB(t-s)(u(t-s)-v(t-s))\,ds \right\|_{\mathscr{U}}$$

$$+ \sup_{t\in(0,T_1]} \left\| t^\beta \int_0^t (\Phi B(t))^{-1}\Phi Z(s)AB'(t-s)(u(t-s)-v(t-s))\,ds \right\|_{\mathscr{U}}$$

$$+ \sup_{t\in(0,T_1]} \left\| t^\beta \int_0^t (\Phi B(t))^{-1}\Phi Z(s)AB(t-s)(u'(t-s)-v'(t-s))\,ds \right\|_{\mathscr{U}}$$

$$\le C\frac{T_1^{\chi+1}}{\chi+1}\|(\Phi B(t))^{-1}\|_{C([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{U}))}\|\Phi\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z};\mathscr{U})}\|B\|_{C([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{U};D_A))}\|u-v\|_{C([0,T_1];\mathscr{U})}$$

$$+CT_1^{\chi+\beta}\|(\Phi B(t))^{-1}\|_{C([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{U}))}\|\Phi\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z};\mathscr{U})}\|B\|_{C([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{U};D_A))}\|u-v\|_{C([0,T_1];\mathscr{U})}$$

$$+C\frac{T_1^{\chi+1}}{\chi+1}\|(\Phi B(t))^{-1}\|_{C^1_\beta([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{U}))}\|\Phi\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z};\mathscr{U})}\|B\|_{C([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{U};D_A))}\|u-v\|_{C([0,T_1];\mathscr{U})}$$

$$+ K_1 T_1^{\chi+1}\mathscr{B}(\chi+1,1-\beta)\|B\|_{C^1_\beta([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{U};D_A))}\|u-v\|_{C([0,T_1];\mathscr{U})}$$

$$+K_1T_1^{\chi+1}\mathscr{B}(\chi+1,1-\beta)\|B\|_{C([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{U};D_A))}\|u-v\|_{C^1_\beta([0,T_1];\mathscr{U})}\le\frac{1}{2}\|u-v\|_{C^1_\beta([0,T_1];\mathscr{U})},$$

если взять

$$T_1=\Bigg(2\left(K_1\frac{\chi+2}{\chi+1}+K_1B(\chi+1,1-\beta)\right)\|B\|_{C([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{U};D_A))}$$
$$+\frac{2C}{\chi+1}\|(\Phi B(t))^{-1}\|_{C^1_\beta([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{U}))}\|\Phi\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z};\mathscr{U})}\|B\|_{C([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{U};D_A))}$$
$$+2K_1\mathscr{B}(\chi+1,1-\beta)\|B\|_{C^1_\beta([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{U};D_A))}\Bigg)^{\frac{-1}{\chi+\beta}}.$$

Здесь $\mathscr{B}$ — бета-функция Эйлера. По теореме о сжимающем отображении существует единственная неподвижная точка $u_0$ отображения $F$ в полном метрическом пространстве $C^1_\beta([0,T_1];\mathscr{U})$.

Если $T_1<T$, возьмем $T_2=2^{\frac{1}{\chi+\beta}}T_1$ и рассмотрим оператор $F$ в полном метрическом пространстве $C^1_{\beta,T_1}([0,T_2];\mathscr{U}):=\big\{u\in C^1_\beta([0,T_2];\mathscr{U}):u(t)=u_0(t),\,t\in[0,T_1]\big\}$ с метрикой $d(u,v)=\|u-v\|_{C^1_\beta([0,T_2];\mathscr{U})}$. В силу выбора $T_1$

$$\|F(u)-F(v)\|_{C^1_{\beta,T_1}([0,T_2];\mathscr{U})}\le\frac{1}{2T_1^{\chi+\beta}}\big(T_2^{\chi+\beta}-T_1^{\chi+\beta}\big)\|u-v\|_{C^1_\beta([0,T_2];\mathscr{U})}$$
$$=\frac{1}{2}\|u-v\|_{C^1_\beta([0,T_2];\mathscr{U})}.$$

Поэтому существует единственная неподвижная точка $u_0$ отображения $F$ в пространстве $C^1_\beta([0,T_2];\mathscr{U})$.

На $k$-м шаге возьмем $T_k=\min\{2^{\frac{k}{\chi+\beta}}T_1,T\}$ и повторим рассуждения. За конечное число $n$ шагов мы исчерпаем отрезок $[0,T]$, получив $2^{\frac{n}{\chi+\beta}}T_1\ge T$. $\square$

**Теорема 6.** *Пусть $\beta\in(-\chi,1)$, $K$ удовлетворяет условию $(\mathfrak{K}_s)$, существуют операторы (4), $A\in\mathscr{A}_K$, $g\in C^1_\beta([0,T];D_A)$, $B\in C^1_\beta([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{U};D_A))$, $z_0\in D_{A^2}$, $\Phi\in\mathscr{L}(\mathscr{Z};\mathscr{U})$, при почти всех $t\in(0,T)$ имеет место равенство $\Phi K(t)=M(t)\Phi$ для некоторого $M\in L_1(0,T;\mathscr{L}(\mathscr{U}))$, при всех $t\in[0,T]$ существует обратный оператор $(\Phi B(t))^{-1}$, при этом $(\Phi B(t))^{-1}\in C^1_\beta([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{U}))$, $\Psi\in C([0,T];\mathscr{U})$, $D^{M,1}\Psi\in C^1_\beta([0,T];\mathscr{U})$, $D^{M,0}\Psi(0)=\Phi z_0$. Тогда задача (21)–(23) имеет единственное решение $(z,u)$, при этом*

$$\|u\|_{C^1_\beta([0,T];\mathscr{U})}\le C(\|Az_0\|_{D_A}+\|g\|_{C^1_\beta([0,T];D_A)}+\|D^{M,1}\Psi\|_{C^1_\beta([0,T];\mathscr{U})}),$$

*где $C$ не зависит от $z_0$, $g$, $\Psi$.*

Доказательство. Подействуем оператором $\Phi$ на обе части уравнения (21). В силу непрерывности оператора $\Phi$ получим

$$\Phi(D^{K,1}z)(t)=(D^{M,1}\Phi z)(t)=(D^{M,1}\Psi)(t)=\Phi B(t)u(t)+\Phi g(t)$$
$$+\Phi A\left(Z_0(t)z_0+\int\limits_0^t Z(t-s)B(s)u(s)\,ds+\int\limits_0^t Z(t-s)g(s)\,ds\right).$$

Отсюда следует уравнение

$$u(t) = -\int_0^t (\Phi B(t))^{-1}\Phi Z(t-s)AB(s)u(s)\,ds + h(t), \tag{24}$$

где

$$h(t) := (\Phi B(t))^{-1}\left[(D^{M,1}\Psi)(t) - \Phi\left(Z_0(t)Az_0 + \int_0^t Z(t-s)Ag(s)\,ds\right) - \Phi g(t)\right].$$

Нетрудно показать, что по условиям данной теоремы $h \in C^1_\beta([0,T];\mathscr{U})$, в частности,

$$D^1 Z_0(t)Az_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda\widehat{K} - A)^{-1}\lambda\widehat{K}e^{\lambda t}Az_0\,d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda\widehat{K} - A)^{-1}e^{\lambda t}A^2 z_0\,d\lambda = Z(t)A^2 z_0,$$

$$\|t^\beta(\Phi B(t))^{-1}\Phi D^1 Z_0(t)Az_0\|_{\mathscr{U}} \le K_1 t^{\beta+\chi}\|A^2 z_0\|_{\mathscr{Z}},$$

$$D^1\int_0^t Z(t-s)Ag(s)\,ds = Z(t)Ag(0) + \int_0^t Z(t-s)D^1 Ag(s)\,ds,$$

$$\left\|t^\beta(\Phi B(t))^{-1}\Phi D^1\int_0^t Z(t-s)Ag(s)\,ds\right\|_{\mathscr{U}} \le K_1 t^{\beta+\chi}\|g\|_{C([0,T];D_A)}$$

$$+ K_1 t^{\chi+1}\mathscr{B}(\chi+1, 1-\beta)\|g\|_{C^1_\beta([0,T];D_A)}.$$

По лемме 1 получим существование единственного решения $u \in C^1_\beta([0,T];\mathscr{U})$ уравнения (24).

В таком случае $B(t)u(t) \in C^1_\beta([0,T];D_A)$ и существует единственное решение обратной задачи (21)–(23), при этом

$$\|u\|_{C^1_\beta([0,T];\mathscr{U})} \le C_1\|h\|_{C^1_\beta([0,T];\mathscr{Z})}$$

$$\le C_2(\|D^{M,1}\Psi\|_{C^1_\beta([0,T];\mathscr{U})} + \|g\|_{C^1_\beta([0,T];\mathscr{Z})} + \|Az_0\|_{D_A}) + \|g\|_{C^1_\beta([0,T];D_A)}$$

$$\le C_3(\|D^{M,1}\Psi\|_{C^1_\beta([0,T];\mathscr{U})} + \|g\|_{C^1_\beta([0,T];D_A)} + \|Az_0\|_{D_A}). \quad \square$$

## 7. Приложение к одной обратной задаче

Возьмем $\alpha \in (0,1)$, $K(t) = t^{\alpha-1}E_{1,\alpha}(t)I$,

$$J^K h(t) := \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{1,\alpha}(t-s)h(s)\,ds, \quad D^{K,1}h(t) := J^K D^1 h(t),$$

где используется функция Миттаг-Леффлера

$$E_{1,\alpha}(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(n+\alpha)}.$$

Имеем $\widehat{K}(\lambda) = (\lambda-1)^{-1}\lambda^{1-\alpha}I$, поэтому выполняется условие $(\mathfrak{K}_s)$ с константами $\theta_K \in (\pi/2, \pi)$, $a_K \geq 1$, $\chi = -\alpha \in (-1, 0)$.

Пусть заданы многочлены

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} p_j x^j, \quad Q(x) = \sum_{j=0}^{m} q_j x^j$$

с коэффициентами $p_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $q_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $p_n \neq 0$, $q_m \neq 0$, $n < m$, ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ с гладкой границей $\partial\Omega$, $\xi_0 \in \Omega$. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$v(\xi, 0) = v_0(\xi), \quad \xi \in \Omega, \tag{25}$$

$$\Delta^l v(\xi, t) = 0, \quad (\xi, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \quad l = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{26}$$

$$P(\Delta) D_t^{K,1} v(\xi, t) = Q(\Delta) v(\xi, t) + b(\xi, t) w(t), \quad (\xi, t) \in \Omega \times (0, T], \tag{27}$$

$$v(\xi_0, t) = \psi(t), \quad t \in [0, T]. \tag{28}$$

Здесь нижний индекс $t$ означает действие интегро-дифференциального оператора по переменной $t$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d)$, $\Delta$ — оператор Лапласа по переменным $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d$, $b : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$, $\psi : [0, T] \to \mathbb{C}$ — заданные функции. Определению подлежат $v$ и $w$.

Пусть $\{\lambda_k\}$ — собственные значения оператора Лапласа с условием Дирихле на границе $\partial\Omega$, занумерованные по невозрастанию с учетом их кратности, $\{\varphi_k\}$ — ортонормированная в смысле скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в $L_2(\Omega)$ система соответствующих собственных функций, $P(\lambda_k) \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда задача (25)–(28) редуцируется к (21)–(23), если взять $\mathscr{Z} = H_0^{2n}(\Omega) := \{y \in H^{2n}(\Omega) : \Delta^l y(\xi) = 0, l = 0, 1, \ldots, n-1\}$, $A = P(\Delta)^{-1} Q(\Delta) \in \mathscr{C}l(\mathscr{Z})$, $D_A = H_0^{2m}(\Omega) := \{y \in H^{2m}(\Omega) : \Delta^l y(\xi) = 0, l = 0, 1, \ldots, m-1\}$, $\mathscr{U} = \mathbb{C}$, $B(t) = P(\Delta)^{-1} b(\cdot, t)$ — оператор умножения на функцию $P(\Delta)^{-1} b(\cdot, t)$, $z(t) = v(\cdot, t) \in \mathscr{Z}$, $u(t) = w(t) \in \mathbb{C}$ при $t \in [0, T]$, $g \equiv 0$, $z_0 = v_0(\cdot)$, $\Phi y = y(\xi_0)$, $\Psi(t) = \psi(t)$.

Если выполнено непрерывное вложение $\mathscr{Z} \subset C(\overline{\Omega}; \mathbb{C})$, введем оператор следа $J_{\xi_0} : \mathscr{Z} \to \mathbb{C}$, т. е. $J_{\xi_0} y := y(\xi_0)$ для $y \in \mathscr{Z}$.

**Теорема 7.** *Пусть $p_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $q_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $p_n \neq 0$, $q_m \neq 0$, $q_m/p_n > 0$ при нечетном $m - n$, $q_m/p_n < 0$ при четном $m - n$, $d < 4n$, $P(\lambda_k) \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0, 1)$, $K(t) = t^{\alpha-1} E_{1,\alpha}(t) I$, $b \in C_\beta^1([0, T]; H_0^{2(m-n)}(\Omega))$, $\beta \in (\alpha, 1)$, $\xi_0 \in \Omega$, $J_{\xi_0} P(\Delta)^{-1} b(\cdot, t) \neq 0$ при $t \in [0, T]$, $1/J_{\xi_0} P(\Delta)^{-1} b(\cdot, t) \in C_\beta^1([0, T]; \mathbb{C})$, $v_0 \in H_0^{4m-2n}(\Omega)$, $\psi \in C([0, T]; \mathbb{C})$, $D^{K,1}\psi \in$*

$C^1_\beta([0,T];\mathbb{C})$, $D^{K,0}\psi(0) = v_0(\xi_0)$. *Тогда существует единственное решение* $(v,w)$ *задачи* (25)–(28), *при этом*

$$\|w\|_{C^1_\beta([0,T];\mathbb{C})} \le C(\|v_0\|_{H^{4m-2n}(\Omega)} + \|D^{K,1}\psi\|_{C^1_\beta([0,T];\mathbb{C})}),$$

*где* $C$ *не зависит от* $v_0$, $\psi$.

Доказательство. Для $y \in \mathscr{Z}$

$$\|(\lambda\widehat{K} - A)^{-1}\widehat{K}y\|_{H^{2n}(\Omega)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1+\lambda_k^{2n}\right)|(\lambda-1)^{-1}\lambda^{1-\beta}|^2|\langle y,\varphi_k\rangle|^2}{|(\lambda-1)^{-1}\lambda^{2-\beta} - P(\lambda_k)^{-1}Q(\lambda_k)|^2}$$
$$\le \frac{1}{|\lambda|^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1+\lambda_k^{2n}\right)|\langle y,\varphi_k\rangle|^2}{\left|1-\frac{(\lambda-1)Q(\lambda_k)}{\lambda^{2-\beta}P(\lambda_k)}\right|^2} \le \frac{C^2}{|\lambda|^2}\|y\|_{H^{2n}(\Omega)}$$

при всех $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$ для некоторого $\theta_0 \in (\pi/2,\theta_K]$ и достаточно большого $a_0 \ge a_K \ge 1$. Здесь учитывается тот факт, что в условиях данной теоремы выполняется неравенство $P(\lambda_k)^{-1}Q(\lambda_k) < 0$ при достаточно больших $k \in \mathbb{N}$, а множитель $(\lambda-1)\lambda^{\beta-2}$ ограничен в $S_{\theta_0,a_0}$ при $a_0 > 0$. Таким образом, $A \in \mathscr{A}_K$.

Заметим, что $\int\limits_0^t s^{\beta-1}E_{1,\beta}(s)\,ds = t^\beta E_{1,\beta+1}(t) \ne 0$ при $t > 0$, поэтому при таких $t$ оператор $\int\limits_0^t K(s)\,ds$ обратим. Условие $v_0 \in H_0^{4m-2n}(\Omega)$ означает, что $v_0 \in D_{A^2}$.

Имеем $B(t) = P(\Delta)^{-1}b(\cdot,t) \in \mathscr{L}(\mathbb{C};H_0^{2m}(\Omega))$ при $t \in [0,T]$, так как $b(\cdot,t) \in H_0^{2(m-n)}(\Omega)$ при $t \in [0,T]$, $P(\Delta)^{-1}[H_0^{2(m-n)}(\Omega)] \subset H_0^{2m}(\Omega)$. Для любого $y \in \mathscr{Z}$ имеем $\|\Phi y\|_{\mathscr{U}} = |y(\xi_0)| \le C\|y\|_{\mathscr{Z}}$ в силу теоремы вложения Соболева, так как $d < 4n$. Для любого $y \in \mathscr{Z}$

$$\Phi K(t)y = t^{\beta-1}E_{1,\beta}(t)y(\xi_0) = K(t)\Phi y,$$

поэтому надо взять $M(t) = K(t) = t^{\beta-1}E_{1,\beta}(t)I$ в условиях теоремы 6.

При любом $u \in \mathbb{C}$ будет $\Phi B(t)u = J_{\xi_0}P(\Delta)^{-1}b(\cdot,t)u$, $(\Phi B(t))^{-1}$ — оператор умножения на $1/J_{\xi_0}P(\Delta)^{-1}b(\cdot,t)$, определенный на $[0,T]$ в силу условий на функцию $b$: $b \in C([0,T];H_0^{2(m-n)}(\Omega))$, $J_{\xi_0}P(\Delta)^{-1}b(\cdot,t) \ne 0$ при $t \in [0,T]$.

По теореме 6 получаем требуемое. □

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Kozhanov A. I.* Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
2. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker, 2000.
3. *Kabanikhin S. I.* Inverse and Ill-posed Problems: Theory and Applications. Utrecht: Walter de Gruyter, 2012.
4. *Пятков С. Г., Потапков А. А.* О некоторых классах коэффициентных обратных задач определения теплофизических параметров в слоистых средах // Мат. заметки СВФУ. 2024. Т. 31, № 2. С. 31–45.
5. *Глушак А. В.* Об обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения дробного порядка // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 5. С. 684–693.

**6.** *Орловский Д. Г.* Parameter determination in a differential equation of fractional order with Riemann–Liouville fractional derivative in a Hilbert space // Журн. Сиб. федер. ун-та. Математика и физика. 2015. Т. 8, № 1. С. 55–63.

**7.** *Fedorov V. E., Ivanova N. D.* Identification problem for degenerate evolution equations of fractional order // Fract. Calculus Appl. Anal. 2017. V. 20, N 3. P. 706–721.

**8.** *Fedorov V. E., Nagumanova A. V., Avilovich A. S.* A class of inverse problems for evolution equations with the Riemann–Liouville derivative in the sectorial case // Math. Methods Appl. Sci. 2021. V. 44, N 15. P. 11961–11969.

**9.** *Fedorov V. E., Nagumanova A. V., Kostić M.* A class of inverse problems for fractional order degenerate evolution equations // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2021. V. 29, N 2. P. 173–184.

**10.** *Kostin A. B., Piskarev S. I.* Inverse source problem for the abstract fractional differential equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2021. V. 29, N 2. P. 267–281.

**11.** *Ашуров Р. Р., Файзиев Ю. Э.* Обратная задача по определению порядка дробной производной в волновом уравнении // Мат. заметки. 2021. Т. 110, вып. 6. С. 824–836.

**12.** *Caputo M., Fabrizio M.* A new definition of fractional derivative without singular kernel // Progress Fract. Differentiation Appl. 2015. V. 1, N 2. P. 1–13.

**13.** *Atangana A., Baleanu D.* New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model // Thermal Sci. 2016. V. 20. P. 763–769.

**14.** *Fedorov V. E., Godova A. D., Kien B. T.* Integro-differential equations with bounded operators in Banach spaces // Bull. Karaganda Univ. Math. Ser. 2022. N 2. P. 93–107.

**15.** *Федоров В. Е., Годова А. Д.* Интегро-дифференциальные уравнения в банаховых пространствах и аналитические разрешающие семейства операторов // Современная математика. Фундаментальные направления. 2023. Т. 69, № 1. Р. 166–184.

**16.** *Федоров В. Е., Годова А. Д.* Интегро-дифференциальные уравнения типа Герасимова с секториальными операторами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2024. Т. 30, № 2. Р. 243–258.

**17.** *Нагуманова А. В., Федоров В. Е.* Прямые и обратные задачи для линейных уравнений с производной Капуто — Фабрицио и ограниченным оператором // Челяб. физ.-мат. журн. 2024. Т. 90, вып. 3. Р. 389–406.



*Поступила в редакцию 26 октября 2024 г.*
*После доработки 24 января 2025 г.*
*Принята к публикации 25 февраля 2025 г.*



Федоров Владимир Евгеньевич
Челябинский государственный университет,
ул. Бр. Кашириных, 129, Челябинск 454001
kar@csu.ru

Мелехина Дарья Владимировна
Челябинский государственный университет,
ул. Бр. Кашириных, 129, Челябинск 454001;
Югорский государственный университет,
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012
daryamelekhina0112@gmail.com

*Математические заметки СВФУ*
*Январь—март, 2025. Том 32, № 1*

*UDC 517.9*

# LINEAR IDENTIFICATIONS PROBLEMS FOR SINGULAR INTEGRO–DIFFERENTIAL EQUATIONS OF GERASIMOV TYPE

**V. E. Fedorov and D. V. Melekhina**

**Abstract:** The issues of unique solvability of linear inverse coefficient problems for evolution integro-differential equations of Gerasimov type with a singular integral kernel in Banach spaces are investigated. The cases of bounded and sectorial operators at the unknown function in the equation are considered. In each case, correctness criteria were obtained for the linear inverse problem with a time-independent unknown coefficient, and sufficient conditions for solvability and correctness estimates were found for the linear identification problem with a time-dependent unknown coefficient. The abstract results obtained are illustrated by an example of a class of inverse problems for partial differential equations.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-1-46-64

**Keywords:** integro-differential operator of Gerasimov type, singular kernel, inverse coefficient problem, identification problem, sectorial operator.

## *REFERENCES*

**1.** *Kozhanov A. I.*, Composite Type Equations and Inverse Problems, VSP, Utrecht (1999).

**2.** *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., and Vasin I. A.*, Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics, Marcel Dekker, New York (2000).

**3.** *Kabanikhin S. I.*, Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications, Walter de Gruyter, Utrecht (2012).

**4.** *Pyatkov S. G. and Potapkov A. A.*, "On some classes of coefficirnt inverse problems of recovering thermophysical parameters in stratified media," Mat. Zamet. SVFU, **31**, No. 2, 31–45 (2024).

**5.** *Glushak A. V.*, "On an inverse problem for an abstract differential equation of fractional order," Math. Notes, **87**, No. 5–6, 654–662 (2010).

**6.** *Orlovskiy D. G.*, "Parameter determination in a differential equation of fractional order with Riemann–Liouville fractional derivative in a Hilbert space," J. Sib. Fed. Univ., Math. Phys., **8**, No. 1, 55–63 (2015).

**7.** *Fedorov V. E. and Ivanova N. D.*, "Identification problem for degenerate evolution equations of fractional order," Fract. Calculus Appl. Anal., **20**, No. 3, 706–721 (2017).

**8.** *Fedorov V. E., Nagumanova A. V., and Avilovich A. S.*, "A class of inverse problems for evolution equations with the Riemann–Liouville derivative in the sectorial case," Math. Methods Appl. Sci., **44**, No. 15, 11961–11969 (2021).

**9.** *Fedorov V. E., Nagumanova A. V., and Kostić M.*, "A class of inverse problems for fractional order degenerate evolution equations," J. Inverse Ill-Posed Probl., **29**, No. 2, 173–184 (2021).

**10.** *Kostin A. B. and Piskarev S. I.*, "Inverse source problem for the abstract fractional differential equation," J. Inverse Ill-Posed Probl., **29**, No. 2, 267–281 (2021).

**11.** *Ashurov R. R. and Faiziev Yu. É.*, "Inverse problem for finding the order of the fractional derivative in the wave equation," Math. Notes, **110**, No. 6, 824–836 (2021).

**12.** *Caputo M. and Fabrizio M.*, "A new definition of fractional derivative without singular kernel," Progress Fract. Differentiation Appl., **1**, No. 2, 1–13 (2015).

**13.** *Atangana A. and Baleanu D.*, "New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model," Thermal Sci., **20**, 763–769 (2016).

**14.** *Fedorov V. E., Godova A. D., and Kien B. T.*, "Integro-differential equations with bounded operators in Banach spaces," Bull. Karaganda Univ., Math. Ser., No. 2 (106), 93–107 (2022).

**15.** *Fedorov V. E. and Godova A. D.*, "Integro-differential equations in Banach spaces and analytic resolving families of operators [in Russian]," Contemp. Math., Fundamental Directions, **69**, No. 1, 166–184 (2023).

**16.** *Fedorov V. E. and Godova A. D.*, "Integro-differential equations in Banach spaces and analytic resolving families of operators," Proc. Steklov Inst. Math., **325**, Suppl. 1, S99–S113.

**17.** *Nagumanova A. V. and Fedorov V. E.*, "Direct and inverse problems for linear equations with Caputo–Fabrizio derivative and a bounded operator," Chelyab. Fiz. Mat. Zhurn., **90**, No. 3, 389–406 (2024).

*Submitted October 26, 2024*
*Revised January 24, 2025*
*Accepted February 25, 2025*

Vladimir E. Fedorov
Mathematical Analysis Department, 447,
Chelyabinsk State University,
Kashirin Brothers St., 129, Chelyabinsk 454001, Russia
kar@csu.ru

Darya V. Melekhina
Mathematical Analysis Department, 447,
Chelyabinsk State University,
Kashirin Brothers St., 129, Chelyabinsk 454001, Russia;
Yugra State University,
16 Chekhov Street, Khanty-Mansiysk 628012, Russia
daryamelekhina0112@gmail.com

*Математические заметки СВФУ*
*Январь—март, 2025. Том 32, № 1*

*UDC 517.9*

# TWO–PHASE RADIAL VISCOUS FINGERING PROBLEM IN A HELE–SHAW CELL WITH SURFACE TENSION. II: UNIQUENESS

**A. Tani and H. Tani**

**Abstract:** The existence of classical solutions was established in [(∗)] *Tani A. and Tani H.*, "Two-phase radial viscous fingering problem in a Hele-Shaw cell with surface tension, I: Classical solvavility,' Mat. Zametki SVFU, **31**, No. 4, 82–105 (2024), for the two-phase radial viscous fingering problem in a Hele-Shaw cell under the surface tension (the original two-phase problem) by means of parabolic regularization with a small parameter $\varepsilon$ $(> 0)$ in the time-derivative terms and the non-homogeneous terms (the parabolic regularized two-phase problem), vanishing along some subsequence $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ of $\{\varepsilon > 0\}$. In this paper we prove the uniqueness of classical solutions to the original two-phase problem. This gives the improvement to the convergence result in [(∗)]: the convergence of the full sequence $\{\varepsilon > 0\}$, not the subsequence $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, of classical solutions of the parabolic regularized two-phase problem to those of the original two-phase problem. Similar results for some one-phase problem have been already studied in *Tani H.*, "Classical solvability of the radial viscous fingering problem in a Hele-Shaw cell with surface tension," Sib. J. Pure Appl. Math., **16**, 79–92 (2016) (the existence) and in *Tani A. and Tani H.*, "On the uniqueness of the classical solution of the radial viscous fingering problem in a Hele-Shaw cell with surface tension," J. Appl. Mech. Tech. Phys., **65**, No. 5 (2024) (the uniqueness).

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-1-65-79

**Keywords:** radial viscous fingering, two-phase Hele-Shaw problem, surface tension, unique classical solution.

## 1. Introduction

Viscous fingering may occur in the flow of two immiscible, viscous fluids between the two closely spaced parallel plates in a Hele-Shaw cell [1]. Due to pressure gradients and/or gravity, the initially planar interface separating the two fluids undergoes a so-called Saffman–Taylor instability [2] and develops finger-like structure (see [3–6] and the references therein).

In [7] the existence of solution in the standard Hölder spaces for two-phase Hele-Shaw problem without surface tension effect and the same result on one-phase (liquid/air two phase) case was obtained in [8]. The uniqueness in both cases was studied in [9]. For such a problem the existence and uniqueness of solution in the standard Hölder spaces were proved in [10] and [11], respectively. Recently the classical solvability for two-phase problem are discussed in [12]. Our aim of this paper is to prove the uniqueness of such a solution.

Other mathematical results were found in [13–16]; especially, the solvability was studied in little, not standard, Hölder spaces, in [15, 16]. Moreover, it should be noted that some papers, not only [15, 16], have been discussed in $n$ $(> 2)$-dimensions, which are absurd from applied viewpoint because Hele-Shaw flows are inherently two-dimensional.

This paper consists of three sections. In § 2, we briefly formulate the two-phase problem with surface tension effect and describe the main result. In § 3, we give a proof of the uniqueness of the classical solution to the original two-phase problem mentioned above.

## 2. Formulation of the problem and the main theorem

We consider a slow quasi-stationary displacement of a fluid by another fluid in a Hele-Shaw cell under the assumptions that both fluids are immiscible and both flows are incompressible. The motion of such fluids is described by

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_i = 0, \quad \mathbf{v}_i = -M_i \nabla p_i \quad \text{in} \;\; \Omega_i(t),\; t > 0 \quad (i = 1, 2). \tag{2.1}$$

Here in (2.1) $\mathbf{v}_i$ is the velocity vector field in the fluid and $p_i$ is the pressure ($i = 1$ for the displacing fluid and 2 for the displaced one); $M_i = b^2/(12\mu_i)$ is mobility, $\mu_i$ is the fluid viscosity, $b$ is the width of two plates. For a radial fingering phenomenon it is sufficient to study (2.1) under the following geometric situation:

$$\Omega_1(t) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid R_* < |x| < R(t) + \zeta\left(\frac{x}{|x|}, t\right)\right\} \quad \text{(the displacing region)},$$

$$\Omega_2(t) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid R(t) + \zeta\left(\frac{x}{|x|}, t\right) < |x| < R^*\right\} \quad \text{(the displaced region)},$$

where $R_*$ is the radius of the hole through which the displacing fluid is injected (or driven by suction) at a time-dependent injection (or suction) rate $Q(t)$, $R^*$ is the radius of a Hele-Shaw cell occupied by the displaced fluid, $R(t)$ is the time-dependent unperturbed radius satisfying

$$\pi R(t)^2 = \pi R_0^2 + \int_0^t Q(\tau)\, d\tau, \quad R_0 \equiv R(0) \in (R_*, R^*)$$

and $\zeta$ is the perturbed radius.

In addition, the following boundary and initial conditions are imposed:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} = \frac{Q(t)}{2\pi R_*} \quad \text{on} \;\; \Gamma_* = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = R_*\},\; t > 0, \\ p_2 = p_e \quad \text{on} \;\; \Gamma^* = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = R^*\},\; t > 0, \\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n} = V_n, \quad p_1 = p_2 + \sigma\left(\frac{2}{b} + H\right) \quad \text{on} \;\; \Gamma(t),\; t > 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

where

$$\Gamma(t) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = R(t) + \zeta\left(\frac{x}{|x|}, t\right)\right\},$$

$V_n$ is the normal velocity of the interface $\Gamma(t)$, $\mathbf{n}$ is the unit normal vector on $\Gamma_*$ or $\Gamma(t)$, $p_e$ is the pressure on the outside of a Hele-Shaw cell, $\sigma$ ($>0$) is the surface tension coefficient, $H$ is the surface curvature of $\Gamma(t)$;

$$\begin{cases} \mathbf{v}_i|_{t=0} = \mathbf{v}_i^0, \quad p_i|_{t=0} = p_i^0 \quad \text{on} \;\; \Omega_i(0) \equiv \Omega_i \quad (i=1,2), \\ \zeta|_{t=0} = \zeta^0 \quad \text{on} \;\; \Gamma(0) \equiv \Gamma \quad (\zeta^0 \in (R_* - R_0, R^* - R_0)). \end{cases} \tag{2.3}$$

Problem (2.1)–(2.3) for $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, p_1, p_2, \zeta)$ is equivalently written as the following one for $(p_1, p_2, \zeta)$:

$$\begin{cases} \Delta p_1 = 0 \;\; \text{in} \;\; \Omega_1(t), \; t>0, \quad \Delta p_2 = 0 \;\; \text{in} \;\; \Omega_2(t), \; t>0, \\ -M_1 \nabla p_1 \cdot \mathbf{n} = \frac{Q(t)}{2\pi R_*} \quad \text{on} \;\; \Gamma_*, \; t>0, \quad p_2 = p_e \quad \text{on} \;\; \Gamma^*, \; t>0, \\ -M_1 \nabla p_1 \cdot \mathbf{n} = -M_2 \nabla p_2 \cdot \mathbf{n} = V_n, \\ \qquad\qquad p_1 = p_2 + \sigma\big(\frac{2}{b} + H\big) \quad \text{on} \;\; \Gamma(t), \; t>0, \\ p_1|_{t=0} = p_1^0 \;\; \text{on} \;\; \Omega_1, \quad p_1|_{t=0} = p_2^0 \;\; \text{on} \;\; \Omega_2, \quad \zeta|_{t=0} = \zeta^0 \quad \text{on} \;\; \Gamma. \end{cases} \tag{2.4}$$

The initial data $(p_1^0, p_2^0)$ are assumed to satisfy the compatibility conditions.

In polar coordinates $(r, \theta)$, problem (2.4) and its parabolic regularized problem are written as follows:

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\big(r\frac{\partial p_1}{\partial r}\big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial \theta^2} = 0 \\ \qquad\qquad (r \in (R_*, R(t) + \zeta(\theta,t)), \; \theta \in J \equiv (0, 2\pi), \; t>0), \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\big(r\frac{\partial p_2}{\partial r}\big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p_2}{\partial \theta^2} = 0 \quad (r \in (R(t) + \zeta(\theta,t), R^*), \; \theta \in J, \; t>0), \\ M_1 \frac{\partial p_1}{\partial r} = -\frac{Q(t)}{2\pi R_*} \quad (r = R_*, \; \theta \in J, \; t>0), \\ \qquad\qquad p_2 = p_e \quad (r = R^*, \; \theta \in J, \; t>0), \\ M_1\big(\frac{\partial p_1}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial \zeta}{\partial \theta}\frac{\partial p_1}{\partial \theta}\big) = M_2\big(\frac{\partial p_2}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial \zeta}{\partial \theta}\frac{\partial p_2}{\partial \theta}\big) = -\frac{\partial}{\partial t}(R(t) + \zeta), \\ p_1 = p_2 + \sigma\big(\frac{2}{b} + H\big) \quad (r = R(t) + \zeta(\theta,t), \; \theta \in J, \; t>0), \\ p_1|_{t=0} = p_1^0 \quad (r \in (R_*, R_0 + \zeta^0(\theta)), \; \theta \in J), \\ p_2|_{t=0} = p_2^0 \quad (r \in (R_0 + \zeta^0(\theta), R^*), \; \theta \in J), \quad \zeta|_{t=0} = \zeta^0 \quad (\theta \in J), \end{cases} \tag{2.5}$$

where

$$H = \frac{(R+\zeta)^2 + 2\big(\frac{\partial \zeta}{\partial \theta}\big)^2 - (R+\zeta)\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2}}{\big[(R+\zeta)^2 + \big(\frac{\partial \zeta}{\partial \theta}\big)^2\big]^{3/2}}.$$

Now let us transform problem (2.5) on the time-dependent domains into the one on the time-independent domains. By changing the variables

$$(r, \theta, t) \mapsto \left(r' = \frac{R_0 + \zeta^0 - R_*}{R + \zeta - R_*}(r - R_*) + R_*, \theta', t'\right) : \Omega_1(t) \to \Omega_1 \equiv \Omega_1(0),$$

$$(r, \theta, t) \mapsto \left(r' = \frac{R_0 + \zeta^0 - R^*}{R + \zeta - R^*}(r - R^*) + R^*, \theta', t'\right) : \Omega_2(t) \to \Omega_2 \equiv \Omega_2(0).$$

Moreover, set $p_1(r,\theta,t) = p_1'(r',\theta',t')$, $p_2(r,\theta,t) = p_2'(r',\theta',t')$, $\zeta(\theta,t) = \zeta'(\theta',t')$.

By omitting the *primes* for simplicity, problem (2.5) becomes

$$\begin{cases} \mathscr{L}^1_\zeta p_1 = 0 \ \text{ in } \ \Omega_1, \ t>0, \quad \mathscr{L}^2_\zeta p_2 = 0 \ \text{ in } \ \Omega_2, \ t>0, \\ \frac{\partial p_1}{\partial r} = -\frac{Q(t)}{2\pi R_* M_1}\frac{R+\zeta-R_*}{R_0+\zeta^0-R_*} \ \text{ on } \ \Gamma_* \equiv \{r=R_*, \ \theta\in J\}, \ t>0, \\ p_2 = p_e \ \text{ on } \ \Gamma^* \equiv \{r=R^*, \ \theta\in J\}, \ t>0, \\ \frac{\partial\zeta}{\partial t} + b^1_2(\zeta)\frac{\partial p_1}{\partial r} + b^1_1(\zeta)\frac{\partial p_1}{\partial\theta} + b^2_2(\zeta)\frac{\partial p_2}{\partial r} + b^2_1(\zeta)\frac{\partial p_2}{\partial\theta} = -\frac{Q(t)}{2\pi R}, \\ b^1_2(\zeta)\frac{\partial p_1}{\partial r} + b^1_1(\zeta)\frac{\partial p_1}{\partial\theta} = b^2_2(\zeta)\frac{\partial p_2}{\partial r} + b^2_1(\zeta)\frac{\partial p_2}{\partial\theta}, \quad p_1 = p_2 + \sigma\big(\frac{2}{b}+H\big) \\ \text{on } \ \Gamma \equiv \{r = R_0+\zeta^0(\theta), \theta\in J\}, \ t>0, \\ p_1|_{t=0} = p^0_1 \ \text{ on } \ \Omega_1, \quad p_2|_{t=0} = p^0_2 \ \text{ on } \ \Omega_2, \quad \zeta|_{t=0} = \zeta^0 \ \text{ on } J. \end{cases} \tag{2.6}$$

Here

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^1_\zeta \equiv \mathscr{L}^1_\zeta\big(r,\theta;\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial\theta}\big) &= \frac{1}{\big(R_* + \frac{R+\zeta-R_*}{R_0+\zeta^0-R_*}(r-R_*)\big)^2} \\ &\times\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + 2\left(\frac{1}{R_0+\zeta^0-R_*}\frac{d\zeta^0}{d\theta} - \frac{1}{R+\zeta-R_*}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)(r-R_*)\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\right. \\ &\quad + \left(\left(R_* + \frac{R+\zeta-R_*}{R_0+\zeta^0-R_*}(r-R_*)\right)^2\left(\frac{R_0+\zeta^0-R_*}{R+\zeta-R_*}\right)^2\right. \\ &\quad \left.\left. + \left(\frac{1}{R_0+\zeta^0-R_*}\frac{d\zeta^0}{d\theta} - \frac{1}{R+\zeta-R_*}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)^2 (r-R_*)^2\right)\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right] \\ &\quad + \left\{\frac{1}{R_* + \frac{R+\zeta-R_*}{R_0+\zeta^0-R_*}(r-R_*)}\frac{R_0+\zeta^0-R_*}{R+\zeta-R_*}\right. \\ &\quad + \frac{r-R_*}{\big(R_* + \frac{R+\zeta-R_*}{R_0+\zeta^0-R_*}(r-R_*)\big)^2}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{R_0+\zeta^0-R_*}\frac{d\zeta^0}{d\theta} - \frac{1}{R+\zeta-R_*}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)\right. \\ &\quad \left.\left. + \left(\frac{1}{R_0+\zeta^0-R_*}\frac{d\zeta^0}{d\theta} - \frac{1}{R+\zeta-R_*}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)^2\right]\right\}\frac{\partial}{\partial r}, \end{aligned}$$

$$\mathscr{L}^2_\zeta \equiv \mathscr{L}^2_\zeta\left(r,\theta;\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial\theta}\right) = \mathscr{L}^1_\zeta \text{ with } R_* \text{ replaced by } R^*,$$

$$b^1_2(\zeta) = \frac{M_1}{2}\left[\frac{R_0+\zeta^0-R_*}{R+\zeta-R_*}\left(1+\frac{1}{(R+\zeta)^2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)^2\right) - \frac{1}{(R+\zeta)^2}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\frac{d\zeta^0}{d\theta}\right],$$
$$b^2_2(\zeta) = b^1_2(\zeta) \text{ with } (M_1,R_*) \text{ replaced by } (M_2,R^*),$$
$$b^1_1(\zeta) = -\frac{M_1}{2}\frac{1}{(R+\zeta)^2}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}, \quad b^2_1(\zeta) = b^1_1(\zeta) \text{ with } M_1 \text{ replaced by } M_2.$$

Throughout this paper we use the standard Hölder spaces (see [17, 18]): $C^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$ and $C^{k+\alpha,(k+\alpha)/2}_{x,t}(\overline{Q}_T)$ ($\overline{Q}_T \equiv \overline{\Omega}\times[0,T]$) ($k = 0,1,2,\ldots,\ \alpha\in(0,1)$) equipped with the norms

$$\|u\|^{(k+\alpha)}_\Omega = \|u\|^{(k)}_\Omega + \langle \mathrm{D}^k_x u\rangle^{(\alpha)}_\Omega,$$

$$\|u\|^{(k)}_\Omega = \sum_{l=0}^k \big|\mathrm{D}^l_x u\big|^{(0)}_\Omega \ \Big(\mathrm{D}^l_x = \sum_{|j|=l}\mathrm{D}^j_x \ (j \text{ is a multi-index})\Big),$$

$$\|u\|^{(k+\alpha)}_{\overline{Q}_T} = \|u\|^{(k)}_{\overline{Q}_T} + \sum_{l+2l'=k} \left\langle \frac{\partial^2 l'}{\partial t^{l'}} \mathrm{D}^l_x u \right\rangle^{(\alpha)}_{x,\overline{Q}_T} + \sum_{l+2l'=\max\{k-1,0\}}^{k} \left\langle \frac{\partial^2 l'}{\partial t^{l'}} \mathrm{D}^l_x u \right\rangle^{((k-l-2l'+\alpha)/2)}_{t,\overline{Q}_T},$$

$$\|u\|^{(k)}_{\overline{Q}_T} = \sum_{l+2l'=0}^{k} \left| \frac{\partial^2 l'}{\partial t^{l'}} \mathrm{D}^l_x u \right|^{(0)}_{\overline{Q}_T},$$

respectively. Here

$$|u|^{(0)}_{\overline{\Omega}} = \sup_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|, \quad \langle u\rangle^{(\alpha)}_{\overline{\Omega}} = \sup_{\substack{x,x'\in\overline{\Omega}\\ x\neq x'}} \frac{|u(x)-u(x')|}{|x-x'|^\alpha}, \quad |u|^{(0)}_{\overline{Q}_T} = \sup_{(x,t)\in\overline{Q}_T} |u(x,t)|,$$

$$\langle u\rangle^{(\alpha)}_{x,\overline{Q}_T} \equiv \sup_{\substack{x,x'\in\overline{\Omega},\, t\in[0,T]\\ x\neq x'}} \frac{|u(x,t)-u(x',t)|}{|x-x'|^\alpha}, \quad \langle u\rangle^{(\alpha)}_{t,\overline{Q}_T} \equiv \sup_{\substack{x\in\overline{\Omega},\, t,t'\in[0,T]\\ t\neq t'}} \frac{|u(x,t)-u(x,t')|}{|t-t'|^\alpha},$$

$$\langle u\rangle^{(\alpha)}_{\overline{Q}_T} = \langle u\rangle^{(\alpha)}_{x,\overline{Q}_T} + \langle u\rangle^{(\alpha/2)}_{t,\overline{Q}_T}.$$

The spaces of vector fields are denoted by the same notation as their components belong to and their norms are supposed to be equal to the sum of norms of all its components (see [17]). We also introduce the semi-norm

$$[u]^{(\alpha,\beta)}_{\overline{Q}_T} \equiv \sup_{\substack{x,x'\in\overline{\Omega},\, t,t'\in[0,T]\\ x\neq x',\, t\neq t'}} \frac{|u(x,t)-u(x',t)-u(x,t')+u(x',t')|}{|x-x'|^\alpha|t-t'|^\beta}, \quad \alpha,\ \beta\in(0,1),$$

and define the Banach spaces $E^{k+\alpha}(\overline{Q}_T)$ $(k=0,1,2)$ that are defined by the completion of infinitely differentiable functions in respective norms

$$\|u\|_{E^\alpha(\overline{Q}_T)} = \|u\|^{(\alpha)}_{\overline{Q}_T} + [u]^{(\alpha,\alpha/2)}_{\overline{Q}_T}, \quad \|u\|_{E^{1+\alpha}(\overline{Q}_T)} = \left\|\mathrm{D}^1_x u\right\|_{\alpha,\overline{Q}_T} + D^{\alpha,\alpha}_{\overline{Q}_T}[u],$$

$$\|u\|_{E^{2+\alpha}(\overline{Q}_T)} = \|\mathrm{D}^2_x u\|_{\alpha,\overline{Q}_T} + \sum_{k=0}^{1} D^{\alpha,\alpha}_{\overline{Q}_T}[\mathrm{D}^k_x u],$$

$$D^{\alpha,\alpha}_{\overline{Q}_T}[u] = |u|^{(0)}_{\overline{Q}_T} + \langle u\rangle^{(\alpha)}_{x,\overline{Q}_T} + \langle u\rangle^{(\alpha)}_{t,\overline{Q}_T}, + [u]^{(\alpha,\alpha)}_{\overline{Q}_T}.$$

Moreover, let us introduce the spaces

$$\widehat{E}^{2+\alpha}(\overline{Q}_T) = \left\{ u\in E^{2+\alpha}(\overline{Q}_T) \mid \frac{\partial u}{\partial t} \in E^{1+\alpha}(\overline{Q}_T),\ \|u\|_{\widehat{E}^{2+\alpha}(\overline{Q}_T)} < \infty \right\},$$

$$\widehat{E}^{4+\alpha}(\overline{Q}_T) = \left\{ u\in \widehat{E}^{2+\alpha}(\overline{Q}_T) \bigm| \mathrm{D}^2_x u \in E^{2+\alpha}(\overline{Q}_T),\ \|u\|_{\widehat{E}^{4+\alpha}(\overline{Q}_T)} < \infty \right\},$$

$$\|u\|_{\widehat{E}^{2+\alpha}(\overline{Q}_T)} \equiv \|u\|_{2+\alpha,\overline{Q}_T} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{1+\alpha,\overline{Q}_T},$$

$$\|u\|_{\widehat{E}^{4+\alpha}(\overline{Q}_T)} \equiv \|u\|_{\widehat{E}^{2+\alpha}(\overline{Q}_T)} + \|\mathrm{D}^2_x u\|_{2+\alpha,\overline{Q}_T}.$$

Denote by $\underset{0}{E}^{k+\alpha}(\overline{Q}_T)$, $\underset{0}{\widehat{E}}^{2+\alpha}(\overline{Q}_T)$ and $\underset{0}{\widehat{E}}^{4+\alpha}(\overline{Q}_T)$ the spaces of the corresponding spaces whose elements are equal to zero at $t=0$ together with their admissible derivatives with respect to $t$. The function spaces on a smooth manifold are defined with the help of partition of unity and of local maps.

The following is our main result.

**Theorem 2.1.** *Let $T > 0$ and $\alpha \in (0,1)$. Assume that*

$$\big(p_1^0, p_2^0, \zeta^0\big) \in C^{3+\alpha}(\overline{\Omega}_1) \times C^{3+\alpha}(\overline{\Omega}_2) \times C^{4+\alpha}(\overline{J})$$

*satisfy the compatibility conditions* (2.5), $\partial p_2^0/\partial r - \partial p_1^0/\partial r > 0$ *on* $\Gamma$, $Q \in C^{\alpha/2}([0,T])$ *and* $p_e \in C^{3+\alpha,(3+\alpha)/2}_{\theta,t}(\overline{J}_T)$. *Moreover, let*

$$(p_1, p_2, \zeta) \in E^{2+\alpha}(\overline{Q}_{1,T}) \times E^{2+\alpha}(\overline{Q}_{2,T}) \times \widehat{E}^{4+\alpha}(\overline{J}_T)$$

*be a solution of problem* (2.6). *Then there exists $T_* > 0$ depending on the data of the problem such that it is unique on* $[0, T_*]$.

In the same way as in [12] we seek a solution $(p_1, p_2, \zeta)$ to problem (2.6) in the form

$$\begin{cases} p_1 = p_1^* + p_1^0 + \frac{r-R_*}{R+\overline{\zeta}-R_*}\frac{\partial p_1^0}{\partial r}\,\zeta^*, \;\; p_2 = p_2^* + p_2^0 + \frac{r-R^*}{R+\overline{\zeta}-R^*}\frac{\partial p_2^0}{\partial r}\zeta^*, \\ \zeta = \zeta^* + \overline{\zeta}, \end{cases} \tag{2.7}$$

where $\overline{\zeta} \in \widehat{E}^{4+\alpha}(\overline{J}_T)$ is an extension of $\zeta^0$ such that

$$\left(\overline{\zeta}, \frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \overline{\zeta}}{\partial t^2}\right)\bigg|_{t=0} = \left(\zeta^0, \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\right)\bigg|_{t=0}.$$

Here, the values $\partial\zeta/\partial t|_{t=0}$ and $\partial^2\zeta/\partial t^2|_{t=0}$ are determined by the first boundary condition on $\Gamma$ in (2.6) and its derivative with respect to $t$ at $t=0$, respectively.

Then problem (2.6) leads to the following one for $(p_1^*, p_2^*, \zeta^*)$ by virtue of (2.7) (see (3.2) with $\varepsilon = 0$ in [12]):

$$\begin{cases} \mathscr{L}_*^1 p_1^* = -\Phi_1^0(p_1^*, \zeta^*) \;\text{ in } \Omega_1,\; t>0, \quad \mathscr{L}_*^2 p_2^* = -\Phi_2^0(p_2^*, \zeta^*) \;\text{ in } \Omega_2,\; t>0, \\ \frac{\partial p_1^*}{\partial r} = \Psi_*(\zeta^*) \;\text{ on } \Gamma_*,\; t>0, \quad p_2^* = \Psi^*(\zeta^*) \;\text{ on } \Gamma^*,\; t>0, \\ \frac{\partial \zeta^*}{\partial t} + b_2^1(\overline{\zeta})\frac{\partial p_1^*}{\partial r} + b_1^1(\overline{\zeta})\frac{\partial p_1^*}{\partial \theta} + b_2^2(\overline{\zeta})\frac{\partial p_2^*}{\partial r} + b_1^2(\overline{\zeta})\frac{\partial p_2^*}{\partial \theta} \\ \qquad\qquad = \Psi_1(p_1^*, p_2^*, \zeta^*) + \Psi_2(p_1^*, p_2^*, \zeta^*), \\ b_2^2(\overline{\zeta})\frac{\partial p_2^*}{\partial r} + b_1^2(\overline{\zeta})\frac{\partial p_2^*}{\partial \theta} - b_2^1(\overline{\zeta})\frac{\partial p_1^*}{\partial r} - b_1^1(\overline{\zeta})\frac{\partial p_1^*}{\partial \theta} \\ \qquad\qquad = -\Psi_1(p_1^*, p_2^*, \zeta^*) + \Psi_2(p_1^*, p_2^*, \zeta^*), \\ p_2^* - p_1^* + d_1(\overline{\zeta})\zeta^* - \sigma d_2(\overline{\zeta})\frac{\partial^2 \zeta^*}{\partial \theta^2} = \Psi_3(\zeta^*) \;\text{ on } \Gamma, t>0, \\ p_1^*|_{t=0} = 0 \;\text{ on }\; \Omega_1, \quad p_2^*|_{t=0} = 0 \;\text{ on }\; \Omega_2, \quad \zeta^*|_{t=0} = 0 \;\text{ on } J. \end{cases} \tag{2.8}$$

All symbols in (2.8) were seen in [12], especially, $\mathscr{L}_*^i$ be principal part of $\mathscr{L}_\zeta^i$ $(i = 1,2)$ and

$$\big(\Phi_1^0(p_1^*, \zeta^*), \Phi_2^0(p_2^*, \zeta^*)\big) = \big(\Phi_1^\varepsilon, \Phi_2^\varepsilon\big)|_{\varepsilon=0}.$$

Since

$$d_1(\overline{\zeta}) = \frac{R_0 + \zeta^0 - R^*}{R + \overline{\zeta} - R^*}\frac{\partial p_2^0}{\partial r} - \frac{R_0 + \zeta^0 - R_*}{R + \overline{\zeta} - R_*}\frac{\partial p_1^0}{\partial r}\Bigg|_{r=R_0+\zeta^0},$$

$$d_2(\overline{\zeta}) = \frac{R + \overline{\zeta}}{[(R+\overline{\zeta})^2 + (\partial\overline{\zeta}/\partial\theta)^2]^{3/2}},$$

as already noted that the assumption $\partial p_2^0/\partial r - \partial p_1^0/\partial r > 0$ on $\Gamma$ implies $d_1(\overline{\zeta}) > 0$ at $t = 0$, and clearly $b_2^j(\overline{\zeta}) > 0$ at $t=0$ $(j = 1,2)$.

## 3. Proof of Theorem 2.1

In what follows, we shall prove that the solution of problem (2.8) is identical with zero on some time interval $[0, T_*]$ $(0 < T_* \le T)$ in the same way as in [9, 11]. Once the uniqueness of the solution to problem (2.6) is verified on $[0, T_*]$, and the convergence result holds on $(0, T^*]$ (Theorem 2.1 in [12]), then on $(0, \min\{T_*, T^*\}]$ the solution of the parabolic regularized problem converges to the solution of the original problem along the full sequence, not the subsequence, that means, the existence result in [12] is really improved.

In the rest, we prove the uniqueness of a solution to problem (2.8) by retracing the arguments in [12], §4. Let $(p_1^*, p_2^*, \zeta^*)$ be the solution of problem (2.8) on $[0, T]$ satisfying

$$\|p_1^*\|_{E^{2+\alpha}(\overline{Q}_{1,T})} + \|p_2^*\|_{E^{2+\alpha}(\overline{Q}_{1,T})} + \|\zeta^*\|_{\widehat{E}^{4+\alpha}(\overline{J}_T)} \le C_1. \tag{3.1}$$

Then, we have

**Lemma 3.1.** *The following inequalities hold:*

$$\begin{aligned}
&\|p_1^*\|_{E^{2+\alpha}(\overline{Q}_{1,t})} + \|p_2^*\|_{E^{2+\alpha}(\overline{Q}_{2,t})} + \|\zeta^*\|_{\widehat{E}^{4+\alpha}(\Gamma_t)} \\
&\quad \le C_2\big(\|\Phi_1^0(p_1^*, \zeta^*)\|_{E^{\alpha}(\overline{Q}_{1,t})} + \big\|\Phi_2^0(p_2^*, \zeta^*)\big\|_{E^{\alpha}(\overline{Q}_{2,t})} + \|\Psi_*(\zeta^*)\|_{E^{1+\alpha}(\Gamma_{*,t})} \\
&\qquad + \|\Psi^*\|_{E^{2+\alpha}(\Gamma_t^*)} + \|\Psi_1(p_1^*, p_2^*, \zeta^*)\|_{E^{1+\alpha}(\Gamma_t)} \\
&\qquad + \|\Psi_2(p_1^*, p_2^*, \zeta^*)\|_{E^{1+\alpha}(\Gamma_t)} + \|\Psi_3(\zeta^*)\|_{E^{2+\alpha}(\Gamma_t)}\big) \quad \textit{for } \ t \in [0, T].
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Before proving inequality (3.2), we begin with demonstrating the uniqueness of the solution. Applying (3.2) to the difference of two solutions $(p_1^*, p_2^*, \zeta^*)$ and $(p_1^{**}, p_2^{**}, \zeta^{**})$ to problem (2.8) satisfying (3.2) on $[0, T]$, we have the following inequality for $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned}
&\|p_1^* - p_1^{**}\|_{E^{2+\alpha}(\overline{Q}_{1,t})} + \|p_2^* - p_2^{**}\|_{E^{2+\alpha}(\overline{Q}_{2,t})} + \|\zeta^* - \zeta^{**}\|_{\widehat{E}^{4+\alpha}(\Gamma_t)} \\
&\le C_2\big(\big\|\Phi_1^0(p_1^*, \zeta^*) - \Phi_1^0(p_1^{**}, \zeta^{**})\big\|_{E^{\alpha}(\overline{Q}_{1,t})} + \big\|\Phi_2^0(p_2^*, \zeta^*) - \Phi_2^0(p_2^{**}, \zeta^{**})\big\|_{E^{\alpha}(\overline{Q}_{2,t})} \\
&\quad + \|\Psi_*(\zeta^*) - \Psi_*(\zeta^{**})\|_{E^{1+\alpha}(\Gamma_{*,t})} + \|\Psi_1(p_1^*, p_2^*, \zeta^*) - \Psi_1(p_1^{**}, p_2^{**}, \zeta^{**})\|_{E^{1+\alpha}(\Gamma_t)} \\
&+ \|\Psi_2(p_1^*, p_2^*, \zeta^*) - \Psi_2(p_1^{**}, p_2^{**}, \zeta^{**})\|_{E^{1+\alpha}(\Gamma_t)} + \|\Psi_3(\zeta^*) - \Psi_3(\zeta^{**})\|_{E^{2+\alpha}(\Gamma_t)}\big).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

In the same way as the last part in § 5, [12], with the help of the interpolation inequalities, the term in the parenthesis of the right hand side of (3.3) is found to be bounded from above by

$$(\beta + C_\beta t^\chi F(4C_1M))(\|p_1^* - p_1^{**}\|_{E^{2+\alpha}(\overline{Q}_{1,t})} + \|p_2^* - p_2^{**}\|_{E^{2+\alpha}(\overline{Q}_{2,t})} + \|\zeta^* - \zeta^{**}\|_{\widehat{E}^{4+\alpha}(\Gamma_t)})$$

on $[0, T]$ with any $\beta > 0$; $C_\beta > 0$ is a constant depending on $\beta$ non-increasingly; $\chi > 0$ is a constant depending on $\alpha$; $F(\cdot)$ is a polynomial in its argument; $M$ is a constant satisfying

$$\big\|\big(\Phi_1^0(0,0), \Phi_2^0, \Psi_*(0), \Psi^*, \Psi_1(0,0,0), \Psi_2(0,0,0), \Psi_3(0)\big)\big\|_{\mathscr{H}_T} \le M,$$

where

$$\mathscr{H}_T = \underset{0}{E}^{\alpha}(\overline{Q}_{1,T}) \times \underset{0}{E}^{\alpha}(\overline{Q}_{2,T}) \times \underset{0}{E}^{1+\alpha}(\Gamma_{*,T}) \times \underset{0}{E}^{2+\alpha}(\Gamma_T^*) \\ \times \underset{0}{E}^{1+\alpha}(\Gamma_T) \times \underset{0}{E}^{1+\alpha}(\Gamma_T) \times \underset{0}{E}^{2+\alpha}(\Gamma_T).$$

Substituting this for the right hand side of (3.3), we get the inequality for any $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} &\|p_1^* - p_1^{**}\|_{E^{2+\alpha}(\overline{Q}_{1,t})} + \|p_2^* - p_2^{**}\|_{E^{2+\alpha}(\overline{Q}_{2,t})} + \|\zeta^* - \zeta^{**}\|_{\widehat{E}^{4+\alpha}(\Gamma_t)} \\ &\qquad \le C_2\left(\beta + C_\beta t^{\chi} F\left(4C_1 M\right)\right) \\ &\qquad \times \left(\|p_1^* - p_1^{**}\|_{E^{2+\alpha}(\overline{Q}_{1,t})} + \|p_2^* - p_2^{**}\|_{E^{2+\alpha}(\overline{Q}_{2,t})} + \|\zeta^* - \zeta^{**}\|_{\widehat{E}^{4+\alpha}(\Gamma_t)}\right). \end{aligned}$$

Now, choose first $\beta = 1/(4C_2)$, and then

$$T_* = (4C_2 C_\beta F(4C_1 M))^{-1/\chi} (\le T).$$

Therefore, we have

$$\begin{aligned} &\|p_1^* - p_1^{**}\|_{E^{2+\alpha}(\overline{Q}_{1,t})} + \|p_2^* - p_2^{**}\|_{E^{2+\alpha}(\overline{Q}_{2,t})} + \|\zeta^* - \zeta^{**}\|_{\widehat{E}^{4+\alpha}(\Gamma_t)} \\ &\qquad \le \frac{1}{2}(\|p_1^* - p_1^{**}\|_{E^{2+\alpha}(\overline{Q}_{1,t})} + \|p_2^* - p_2^{**}\|_{E^{2+\alpha}(\overline{Q}_{2,t})} + \|\zeta^* - \zeta^{**}\|_{\widehat{E}^{4+\alpha}(\Gamma_t)}) \end{aligned}$$

for any $t \in [0, T_*]$, which means $(p_1^*, p_2^*, \zeta^*) = (p_1^{**}, p_2^{**}, \zeta^{**})$ in $E^{2+\alpha}(\overline{Q}_{1,T_*}) \times E^{2+\alpha}(\overline{Q}_{2,T_*}) \times \widehat{E}^{4+\alpha}(\Gamma_{T_*})$. Consequently, the solution $(p_1, p_2, \zeta)$ to problem (2.6) is clearly unique on $[0, T_*]$.

**3.1. Auxiliary Problems.** We begin with studying the following auxiliary linear problem:

$$\begin{cases} \mathscr{L}_*^1 u_1 = \phi_1 \ \text{ in } \ \Omega_1,\ t > 0, \quad \mathscr{L}_*^2 u_2 = \phi_1 \ \text{ in } \ \Omega_2,\ t > 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial r} = \psi_* \ \text{ on } \ \Gamma_*,\ t > 0, \quad u_2 = \psi^* \ \text{ on } \ \Gamma^*,\ t > 0, \\ \frac{\partial \varrho}{\partial t} + b_2^1(\overline{\zeta})\frac{\partial u_1}{\partial r} + b_2^2(\overline{\zeta})\frac{\partial u_2}{\partial \theta} = \psi_1 + \psi_2, \quad b_2^2(\overline{\zeta})\frac{\partial u_2}{\partial \theta} - b_2^1(\overline{\zeta})\frac{\partial u_1}{\partial r} = -\psi_1 + \psi_2, \\ u_2 - u_1 + d_1(\overline{\zeta})\varrho - \sigma d_2(\overline{\zeta})\frac{\partial^2 \varrho}{\partial \theta^2} = \psi_3 \ \text{ on } \ \Gamma,\ t > 0, \\ u_1|_{t=0} = 0 \ \text{ on } \Omega_1, \quad u_2|_{t=0} = 0 \ \text{ on } \Omega_2, \quad \varrho|_{t=0} = 0 \ \text{ on } \ J \end{cases} \tag{3.4}$$

for given $\phi_1$, $\phi_2$, $\psi_*$, $\psi^*$, $\psi_1$, $\psi_2$, $\psi_3$ under the conditions $b_2^1 > 0$, $b_2^2 > 0$, $d_1 > 0$, $d_2 > 0$ and satisfying the compatibility conditions. First, in place of problems (4.2)–(4.5) in [12], we study four model problems corresponding to the case $\varepsilon = 0$ in [12] in the whole- and half-spaces:

$$\mathscr{L}\overline{u} = \overline{f}(x,t)\ (x \in \mathbb{R}^2,\ t > 0), \quad \overline{u}|_{t=0} = 0; \tag{3.5}$$

$$\mathscr{L}\overline{u} = \overline{f}(x,t)\ \left(x \in \mathbb{R}^2_+,\ t > 0\right), \quad \overline{u}|_{x_2=0} = \overline{g}^*, \quad \overline{u}\,\Big|_{t=0} = 0; \tag{3.6}$$

$$\mathscr{L}\overline{u} = \overline{f}(x,t)\ \left(x \in \mathbb{R}^2_+,\ t > 0\right), \quad \left.\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = \overline{g}_*, \quad \overline{u}|_{t=0} = 0; \tag{3.7}$$

$$\begin{cases} \mathscr{L}^+\overline{u}^+ = 0 \quad \left(x \in \mathbb{R}^2_+,\ t>0\right), \quad \mathscr{L}^-\overline{u}^- = 0 \ \ (x \in \mathbb{R}^2_-,\ t>0), \\ \frac{\partial \overline{\varrho}}{\partial t} + \overline{b}^+ \frac{\partial \overline{u}^+}{\partial x_2} + \overline{b}^- \frac{\partial \overline{u}^-}{\partial x_2}\big|_{x_2=0} = \overline{g}_1(x_1,t),\ \overline{b}^+ \frac{\partial \overline{u}^+}{\partial x_2} - \overline{b}^- \frac{\partial \overline{u}^-}{\partial x_2}\big|_{x_2=0} = \overline{g}_2(x_1,t), \\ \overline{u}^+ - \overline{u}^- + \overline{d}_1 \overline{\varrho} - \sigma \overline{d}_2 \frac{\partial^2 \overline{\varrho}}{\partial x_1^2}\big|_{x_2=0} = \overline{g}_3(x_1,t), \quad (\overline{u}^+, \overline{u}^-, \overline{\varrho})|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

In (3.5)–(3.8) alike (4.2)–(4.5) in [12], we can assume, without loss of generality, that $\mathscr{L} = \mathscr{L}^\pm = \Delta$ by changing the independent variables (cf. [17]), and $\overline{b}^\pm$, $\overline{d}_1$ and $\overline{d}_2$ are positive constants. Then, the solutions to problems (3.5)–(3.7) for $\mathscr{L} = \Delta$ are given by

$$\overline{u}(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \Gamma_0(x-y)\overline{f}(y,t)\,dy;$$

$$\overline{u}(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} G_0(x-y)\overline{f}(y,t)\,dy + \int\limits_{\mathbb{R}} G_0(x_1-y_1,x_2)\overline{g}^*(y_1,t)\,dy_1;$$

$$\overline{u}(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} N_0(x-y)\overline{f}(y,t)\,dy + \int\limits_{\mathbb{R}} N_0(x_1-y_1,x_2)\overline{g}_*(y_1,t)\,dy_1,$$

respectively, where

$$\Gamma_0(x) = \frac{1}{2\pi}\log|x|, \quad G_0(x_1,x_2) = \Gamma_0(x_1,x_2) - \Gamma_0(x_1,-x_2),$$
$$N_0(x_1,x_2) = \Gamma_0(x_1,x_2) + \Gamma_0(x_1,-x_2).$$

The well-known estimates of the volume potential (cf. [18]) yield the estimates for the solutions of problems (3.5)–(3.7)

$$\begin{cases} \|\overline{u}\|_{E^{2+\alpha}(\mathbb{R}^2_t)} \le C_3\|\overline{f}\|_{E^\alpha(\mathbb{R}^2_t)}, \\ \|\overline{u}\|_{E^{2+\alpha}(\mathbb{R}^2_{+,t})} \le C_3(\|\overline{f}\|_{E^\alpha(\mathbb{R}^2_{+,t})} + \|\overline{g}^*\|_{E^{2+\alpha}(\mathbb{R}_t)}), \\ \|\overline{u}\|_{E^{2+\alpha}(\mathbb{R}^2_{+,t})} \le C_3(\|\overline{f}\|_{E^\alpha(\mathbb{R}^2_{+,t})} + \|\overline{g}_*\|_{E^{1+\alpha}(\mathbb{R}_t)}). \end{cases} \tag{3.9}$$

Concerning problem (3.8), let us consider the equations for $\overline{u}^+$ and $\overline{u}^-$ with a given $\partial\overline{\varrho}/\partial t$. Since boundary conditions $(3.8)_3$ and $(3.8)_4$ are written as

$$\frac{\partial \overline{u}^+}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=0} = \frac{1}{2b^+}\left(\overline{g}_1 + \overline{g}_2 - \frac{\partial \overline{\varrho}}{\partial t}\right), \quad \frac{\partial \overline{u}^-}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=0} = \frac{1}{2b^-}\left(\overline{g}_1 - \overline{g}_2 - \frac{\partial \overline{\varrho}}{\partial t}\right), \tag{3.10}$$

$\overline{u}^+$ and $\overline{u}^-$ are the solutions of problems $(3.8)_1$, $(3.10)_1$ and $(3.8)_2$, $(3.10)_2$, respectively. Hence, estimate $(3.9)_3$ gives the following one:

$$\|\overline{u}^+\|_{E^{2+\alpha}(\mathbb{R}^2_{+,T})} + \|\overline{u}^-\|_{E^{2+\alpha}(\mathbb{R}^2_{-,T})} \le C_4\left(\|(\overline{g}_1,\overline{g}_2)\|_{E^{1+\alpha}(\mathbb{R}_T)} + \left\|\frac{\partial \overline{\varrho}}{\partial t}\right\|_{E^{1+\alpha}(\mathbb{R}_T)}\right). \tag{3.11}$$

Next, the solution $\overline{\varrho}$ in problem (3.8) is given by the inverse Fourier–Laplace transformation as follows:

$$\overline{\varrho}(x_1,t) = (\mathscr{F}\mathscr{L})^{-1}\left[\frac{1}{s+\overline{\Phi}_0}\right] * \left(\overline{g}_1 - \frac{\overline{b}^+ - \overline{b}^-}{\overline{b}^+ + \overline{b}^-}\,\overline{g}_2 + \frac{2\overline{b}^+\overline{b}^-}{\overline{b}^+ + \overline{b}^-}\,(\mathscr{F}\mathscr{L})^{-1}[|\xi|\widetilde{\overline{g}}_3]\right), \tag{3.12}$$

$$\overline{\Phi}_0 = \frac{2\overline{b}^+\overline{b}^-}{\overline{b}^+ + \overline{b}^-}\,|\xi|(\overline{d}_1 + \sigma\overline{d}_2|\xi|^2).$$

Here $*$ means a convolution with respect to $(x_1, t)$. Retracing the arguments in [11, 19] and assuming as aforesaid $2\overline{b}^+\overline{b}^-\overline{d}_1/(\overline{b}^+ + \overline{b}^-) = 1$ and $2\overline{b}^+\overline{b}^-\sigma\overline{d}_2/(\overline{b}^+ + \overline{b}^-) = \overline{d}'$, we have for $t > 0$

$$Z_0^\sigma(x_1, t) \equiv (\mathscr{F}\mathscr{L})^{-1}\left[\frac{1}{s + \overline{\Phi}_0(s, \xi)}\right] = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \widehat{Z}_0^\sigma(\xi, t)\cos(x_1\xi)\,d\xi, \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}\widehat{Z}_0^\sigma(\xi, t) &= \int_0^\infty \mathscr{L}^{-1}[e^{-\tau(s+|\xi|(1+\xi^2))}]\,d\tau \\ &= \int_0^\infty \delta(t-\tau) \underset{t}{*} e^{-\tau|\xi|\,(1+d'\xi^2)}\,\delta(t)\,d\tau = e^{-t|\xi|(1+d'\xi^2)},\end{aligned}$$

where $\underset{t}{*}$ means a convolution with respect to $t$. Here we used the same calculations in [12], §4 with $\varepsilon = 0$. For the estimate of $Z_0^\sigma(x_1, t)$ in (3.13) we can assume $x_1 > 0$ without loss of generality. Letting $\xi_0 = 0$ and $\xi_n$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ be the points of zeros of $\cos(\xi x_1) = 0$ $(\xi_n < \xi_{n+1})$, we have

$$\begin{aligned}|Z_0^\sigma(x_1, t)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \widehat{Z}_0^\sigma(\xi, t)\cos(\xi x_1)\,d\xi\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^\infty\left\{\int_{\xi_{2n}}^{\xi_{2n+1}} e^{-t|\xi|(1+d'\xi^2)}\cos(\xi x_1)\,d\xi - \int_{\xi_{2n+1}}^{\xi_{2n+2}} e^{-t|\xi|(1+d'\xi^2)}\cos(\xi x_1)\,d\xi\right\} \\ &\le \frac{1}{2\pi}\left(\frac{t}{x_1^2 + t^2} + \frac{4x_1}{x_1^2 + t^2}\,\frac{1}{\sinh(\pi t/(2x_1))}\right).\end{aligned} \tag{3.14}$$

The derivatives of $Z_0^\sigma(x_1, t)$ are analogously estimated, so that we get

**Lemma 3.2.** *The following inequalities hold:*

$$\begin{aligned}&|Z_0^\sigma(x_1, t)| \le C_5\,\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + t^2}}, \quad \left|\frac{\partial}{\partial t}Z_0^\sigma(x_1, t)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial x_1}Z_0^\sigma(x_1, t)\right| \le C_5\,\frac{1}{x_1^2 + t^2}, \\ &\left|\frac{\partial^2}{\partial t\partial x_1}Z_0^\sigma(x_1, t)\right| + \left|\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}Z_0^\sigma(x_1, t)\right| \le C_5\,\frac{1}{(x_1^2 + t^2)^{3/2}}.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Lemma 3.2 implies the estimates on $\overline{\varrho}$.

**Lemma 3.3.** *The following inequalities hold:*

$$\begin{aligned}&\|\overline{\varrho}\|_{E^{2+\alpha}(\mathbb{R}_T)} + \left\|\frac{\partial^2\overline{\varrho}}{\partial x_1^2}\right\|_{E^{2+\alpha}(\mathbb{R}_T)} \le C_6\,\left(\|(\overline{g}_1, \overline{g}_2)\|_{E^{1+\alpha}(\mathbb{R}_T)} + \|\overline{g}_3\|_{E^{2+\alpha}(\mathbb{R}_T)}\right), \\ &\left\langle\frac{\partial^2\overline{\varrho}}{\partial x_1^2}\right\rangle_{t,\mathbb{R}_T}^{(\alpha)} \le C_6\left(\left\langle\frac{\partial\overline{g}_1}{\partial x_1}\right\rangle_{x,\mathbb{R}_T}^{(\alpha)} + \left\langle\frac{\partial\overline{g}_2}{\partial x_1}\right\rangle_{x,\mathbb{R}_T}^{(\alpha)} + \left[\frac{\partial\overline{g}_3}{\partial x_1}\right]_{\mathbb{R}_T}^{(1+\alpha,(1+\alpha)/2)}\right).\end{aligned} \tag{3.16}$$

PROOF. Each estimate in (3.16) by virtue of Lemma 3.2 is deduced from the same way as in [12], § 4, so that we draw in outline only. First, from Lemma 3.2 it follows

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} Z_0^\sigma(x_1-\xi,t)\overline{f}(\xi)\,d\xi=\overline{f}(x_1) \tag{3.17}$$

for any bounded continuous function $\overline{f}(x_1)$. Introduce the notation

$$\overline{w}(x_1,t)=(Z_0^\sigma*\overline{g})(x_1,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{\infty} Z_0^\sigma(x_1-y,t-\tau)\overline{g}(y,\tau)\,dy,$$

$$\overline{w}_h(x_1,t)=\int\limits_0^{t-h} d\tau\int\limits_{-\infty}^{\infty} Z_0^\sigma(x_1-y,t-\tau)\overline{g}(y,\tau)\,dy \quad (h>0).$$

For $\overline{w}_h$ it is clear to hold

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\overline{w}_h(x_1,t)&=\int\limits_0^{t-h} d\tau\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}Z_0^\sigma(x_1-y,t-\tau)(\overline{g}(y,\tau)-\overline{g}(x_1,\tau))\,dy\\ &+\int\limits_0^{t-h}\overline{g}(x_1,\tau)\,d\tau\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}Z_0^\sigma(x_1-y,t-\tau)\,dy+\int\limits_{-\infty}^{\infty}Z_0^\sigma(x_1-y,h)\overline{g}(y,t-h)\,dy.\end{aligned}$$

Making use of (3.17), the explicit formula derived from $\widehat{Z}_0^\sigma$ and the estimates in Lemma 3.2, we obtain, after passing to the limit $h\to 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\overline{w}(x_1,t)&=\int\limits_0^{t} d\tau\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}Z_0^\sigma(x_1-y,t-\tau)(\overline{g}(y,\tau)-\overline{g}(x_1,\tau))\,dy\\ &+\int\limits_0^{t}\overline{g}(x_1,\tau)\,d\tau\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}Z_0^\sigma(x_1-y,t-\tau)\,dy+\overline{g}(x_1,t).\end{aligned} \tag{3.18}$$

Analogously, $\partial^2\overline{w}_h/\partial x_1^2$ as $h\to 0$ yields

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\overline{w}(x_1,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x_1}Z_0^\sigma(x_1-y,t-\tau)\left(\frac{\partial}{\partial y}\overline{g}(y,\tau)-\frac{\partial}{\partial x_1}\overline{g}(x_1,\tau)\right)dy. \tag{3.19}$$

Since each term in (3.18) can be estimated as the respective term of $\partial w/\partial t$ in [12], §4 by tracing the arguments in [17], we get

$$\left\langle\frac{\partial\overline{w}}{\partial t}\right\rangle_{x,\mathbb{R}_T}^{(\alpha)}\le C_7\langle\overline{g}\rangle_{x,\mathbb{R}_T}^{(\alpha)},\quad \left\langle\frac{\partial\overline{w}}{\partial t}\right\rangle_{t,\mathbb{R}_T}^{(\alpha)}\le C_7\big(\langle\overline{g}\rangle_{x,\mathbb{R}_T}^{(\alpha)}+\langle\overline{g}\rangle_{t,\mathbb{R}_T}^{(\alpha)}\big). \tag{3.20}$$

From (3.18) we can derive

$$\frac{\partial^2}{\partial t\partial x_1}\overline{w}(x_1,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}Z_0^\sigma(x_1-y,t-\tau)\left(\frac{\partial}{\partial y}\overline{g}(y,\tau)-\frac{\partial}{\partial x_1}\overline{g}(x_1,\tau)\right)dy$$
$$+\int\limits_0^t\frac{\partial}{\partial x_1}\overline{g}(x_1,\tau)\,d\tau\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}Z_0^\sigma(x_1-y,t-\tau)\,dy+\frac{\partial}{\partial x_1}\overline{g}(x_1,t),$$

which leads to the estimates

$$\begin{gathered}\left\langle\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial t\partial x_1}\right\rangle_{x,\mathbb{R}_T}^{(\alpha)}\le C_8\left\langle\frac{\partial\overline{g}}{\partial x_1}\right\rangle_{x,\mathbb{R}_T}^{(\alpha)},\quad\left\langle\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial t\partial x_1}\right\rangle_{t,\mathbb{R}_T}^{(\alpha/2)}\le C_8\left\langle\frac{\partial\overline{g}}{\partial x_1}\right\rangle_{\mathbb{R}_T}^{(\alpha)},\\ \left[\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial t\partial x_1}\right]_{\mathbb{R}_T}^{(\alpha,\alpha/2)}\le C_8\left[\frac{\partial\overline{g}}{\partial x_1}\right]_{\mathbb{R}_T}^{(\alpha,\alpha/2)}.\end{gathered}\tag{3.21}$$

In order to estimate $\overline{\varrho}$ in (3.12), the following representation of $(\mathscr{F}\mathscr{L})^{-1}[|\xi|\widetilde{\overline{g}}_3]$ is used:

$$(\mathscr{F}\mathscr{L})^{-1}[|\xi|\widetilde{\overline{g}}_3](x_1,t)=2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Gamma_0(x_1-y,x_2)\,\overline{g}_3(y,\tau)\,dy\Big|_{x_2=0}.$$

This formula gives the estimate

$$\langle(\mathscr{F}\mathscr{L})^{-1}[|\xi|\widetilde{\overline{g}}_3](\cdot,t)\rangle_{\mathbb{R}}^{(\alpha)}\le C_9\left\langle\frac{\partial\overline{g}_3}{\partial x_1}(\cdot,t)\right\rangle_{\mathbb{R}}^{(\alpha)}$$

(see [7, 20]). Equation (3.12) and estimates (3.20), (3.21) lead to

$$\left\|\frac{\partial\overline{\varrho}}{\partial t}\right\|_{E^{1+\alpha}(\mathbb{R}_T)}\le C_{10}\left(\|(\overline{g}_1,\overline{g}_2)\|_{E^{1+\alpha}(\mathbb{R}_T)}+\|\overline{g}_3\|_{E^{2+\alpha}(\mathbb{R}_T)}\right).\tag{3.22}$$

The same arguments can be applied to (3.19) with the help of Lemma 3.2 and the similar estimates to (3.20), (3.21), so that we have

$$\left\|\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial x_1^2}\right\|_{E^\alpha(\mathbb{R}_T)}\le C_{11}\left\|\frac{\partial\overline{g}}{\partial x_1}\right\|_{E^\alpha(\mathbb{R}_T)},\quad\left\langle\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial x_1^2}\right\rangle_{t,\mathbb{R}_T}^{(\alpha)}\le C_{11}\left\langle\frac{\partial\overline{g}}{\partial x_1}\right\rangle_{x,\mathbb{R}_T}^{(\alpha)}.\tag{3.23}$$

Since the lower order derivatives of $\overline{w}$ are easily estimated, we deduce from (3.12) that

$$\begin{gathered}\|\overline{\varrho}\|_{E^{2+\alpha}(\mathbb{R}_T)}\le C_{12}\left(\|(\overline{g}_1,\overline{g}_2)\|_{E^{1+\alpha}(\mathbb{R}_T)}+\|\overline{g}_3\|_{E^{2+\alpha}(\mathbb{R}_T)}\right),\\ \left\langle\frac{\partial^2\overline{\varrho}}{\partial x_1^2}\right\rangle_{t,\mathbb{R}_T}^{(\alpha)}\le C_{12}\Bigg(\left\langle\frac{\partial\overline{g}_1}{\partial x_1}\right\rangle_{x,\mathbb{R}_T}^{(\alpha)}+\left\langle\frac{\partial\overline{g}_2}{\partial x_1}\right\rangle_{x,\mathbb{R}_T}^{(\alpha)}+\left[\frac{\partial\overline{g}_3}{\partial x_1}\right]_{\mathbb{R}_T}^{(1+\alpha,(1+\alpha)/2)}\Bigg).\end{gathered}\tag{3.24}$$

For the further regularity of $\overline{\varrho}$ we make use of the representation derived from (3.12)

$$\frac{\partial^2\overline{\varrho}}{\partial x_1^2}=-\frac{1}{\sigma\overline{d}_2}\frac{\overline{b}^++\overline{b}^-}{2\overline{b}^+\overline{b}^-}\Bigg((\mathscr{F}\mathscr{L})^{-1}\left[\frac{1}{|\xi|}\right]*\overline{g}_1-\frac{\overline{b}^+-\overline{b}^-}{\overline{b}^+\overline{b}^-}(\mathscr{F}\mathscr{L})^{-1}\left[\frac{1}{|\xi|}\right]*\overline{g}_2$$
$$+\frac{2\overline{b}^+\overline{b}^-}{\overline{b}^++\overline{b}^-}\overline{g}_3-(\mathscr{F}\mathscr{L})^{-1}\left[\frac{1}{|\xi|}\right]*\frac{\partial\overline{\varrho}}{\partial t}\Bigg)+\frac{\overline{d}_1}{\sigma\overline{d}_2}\overline{\varrho},$$

from which it follows

$$\left\|\frac{\partial^2\overline{\varrho}}{\partial x_1^2}\right\|_{E^{2+\alpha}(\mathbb{R}_T)}$$
$$\leq C_{13}\left(\|(\overline{g}_1,\overline{g}_2)\|_{E^{1+\alpha}(\mathbb{R}_T)}+\|(\overline{g}_3,\overline{\varrho})\|_{E^{2+\alpha}(\mathbb{R}_T)}+\left\|\frac{\partial\overline{\varrho}}{\partial t}\right\|_{E^{1+\alpha}(\mathbb{R}_T)}\right) \quad (3.25)$$

by applying the arguments in [7] again and the estimate of

$$(\mathscr{F}\mathscr{L})^{-1}\left[\frac{1}{|\xi|}\right]*\overline{g}(x_1,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Gamma_0(x_1-y,0)\overline{g}(y,\tau)\,dy.$$

Estimates (3.22), (3.24) and (3.25) imply (3.16). □

In conclusion, estimate (3.11) and Lemma 3.3 lead to

**Lemma 3.4.** *Let* $\overline{b}^{\pm}$, $\overline{d}_1$ *and* $\overline{d}_2$ *be positive constants. Assume that* $\overline{g}_1,\overline{g}_2\in \underset{0}{E}^{1+\alpha}(\mathbb{R}_T)$, *and* $\overline{g}_3\in \underset{0}{E}^{2+\alpha}(\mathbb{R}_T)$ *with* $\alpha\in(0,1)$ *and any* $T>0$. *Then the unique solution*

$$(\overline{u}^+,\overline{u}^-,\overline{\varrho})\in \underset{0}{E}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^2_{+,T})\times \underset{0}{E}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^2_{-,T})\times \underset{0}{\widehat{E}}^{4+\alpha}(\mathbb{R}_T)$$

*to problem* (3.8) *satisfies the inequality*

$$\|\overline{u}^+\|_{E^{2+\alpha}(\mathbb{R}^2_{+,T})}+\|\overline{u}^-\|_{E^{2+\alpha}(\mathbb{R}^2_{-,T})}+\|\overline{\varrho}\|_{\widehat{E}^{4+\alpha,\alpha/2}(\mathbb{R}_T)}$$
$$\leq C_{14}(\|(\overline{g}_1,\overline{g}_2)\|_{E^{1+\alpha}(\mathbb{R}_T)}+\|\overline{g}_3\|_{E^{2+\alpha}(\mathbb{R}_T)}) \quad (3.26)$$

*with a positive constant* $C_{14}$.

The solvability of problem (3.4) is proved by constructing the regularizer by analogy with the case of free boundary problem for hydrodynamic equations in [21] (cf. [20, 22]) on the basis of Lemma 3.4 and estimate (3.9). Thus, we have

**Lemma 3.5.** *For* $\alpha\in(0,1)$ *and any* $T>0$. *Then the unique solution to problem* (3.4)

$$(u_1,u_2,\varrho)\in \underset{0}{E}^{2+\alpha}(\overline{Q}_{1,T})\times \underset{0}{E}^{2+\alpha}(\overline{Q}_{2,T})\times \underset{0}{\widehat{E}}^{4+\alpha}(\Gamma_T)$$

*satisfies inequality*

$$\|u_1\|_{E^{2+\alpha}(\overline{Q}_{1,T})}+\|u_2\|_{E^{2+\alpha}(\overline{Q}_{2,T})}+\|\varrho\|_{\widehat{E}^{4+\alpha}(\Gamma_T)}$$
$$\leq C_{15}\|(\phi_1,\phi_2,\psi_*,\psi^*,\psi_1,\psi_2,\psi_3)\|_{\mathscr{H}_T} \quad (3.27)$$

*with some positive constant* $C_{15}$.

**Proof of Lemma 3.1.** In the remaining part we prove Lemma 3.1. For this purpose it is effective to use the similar arguments to those for the case $\varepsilon>0$.

Obviously problem (2.8) for $(p_1^*,p_2^*,\zeta^*)$ is transformed into the form (3.4) for $(u_1,u_2,\varrho)$ by putting $(p_1^*,p_2^*,\zeta^*)=(u_1,u_2,\varrho)$ and

$$\Phi_1^0(p_1^*,\zeta^*)=\phi_1,\quad \Phi_2^0(p_2^*,\zeta^*)=\phi_2,\quad \Psi_*(\zeta^*)=\psi_*,\quad \Psi^*=\psi^*,$$

$$\Psi_1(p_1^*, p_2^*, \zeta^*) = \psi_1, \quad \Psi_2(p_1^*, p_2^*, \zeta^*) = \psi_2, \quad \Psi_3(\zeta^*) = \psi_3$$

with given

$$(p_1^*, p_2^*, \zeta^*) \in \underset{0}{E}^{2+\alpha}(\overline{Q}_{1,T}) \times \underset{0}{E}^{2+\alpha}(\overline{Q}_{2,T}) \times \underset{0}{\widehat{E}}^{4+\alpha}(\Gamma_T).$$

By noting the fact

$$(\Phi_1^0(p_1^*, \zeta^*), \Phi_2^0(p_2^*, \zeta^*), \Psi_*(\zeta^*), \Psi^*, \Psi_1(p_1^*, p_2^*, \zeta^*), \Psi_2(p_1^*, p_2^*, \zeta^*), \Psi_3(\zeta^*))|_{t=0} = (0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

Lemma 3.5 leads to the assertion in Lemma 3.1.

In conclusion, Theorem 2.1 is confirmed.

*REFERENCES*


**1.** *Hele-Shaw H. S.*, “The flow of water,” Nature, **58**, 33–36 (1898).

**2.** *Saffman P. G. and Taylor G. I.*, “The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid,” Proc. R. Soc. Lond., Ser. A, **245**, 312–329 (1958).

**3.** *Bensimon D., Kadanoff L. P., Liang S., Shraiman B. I., and Tang C.*, “Viscous flow in two dimensions,” Rev. Mod. Phys., **58**, 977–999 (1986).

**4.** *Homsy G.*, “Viscous fingering in porous media,” Annu. Rev. Fluid Mech., **19**, 271–311 (1987).

**5.** *Kessler D. A., Koplik J., and Levine H.*, “Pattern selection in fingering growth phenomena,” Adv. Phys., **37**, 255–339 (1988).

**6.** *McCloud K. V. and Mahrer J. V.*, “Experimental perturbations to Saffman–Taylor flow,” Phys. Rep., **260**, 139–185 (1995).

**7.** *Tani A. and Tani H.*, “Classical solvability of the two-phase radial viscous fingering problem in a Hele-Shaw cell,” in: Mathematical Fluid Dynamics, Present and Future (Y. Shibata and Y. Suzuki, eds.), pp. 317–348, Springer (2016) (Springer Proc. Math. Stat.; vol. 183).

**8.** *Tani A. and Tani H.*, “Classical solvability of the radial viscous fingering problem in a Hele-Shaw cell,” Mat. Zametki SVFU, **25**, No. 3, 92–114 (2018).

**9.** *Tani A. and Tani H.*, “On the uniqueness of the classical solutions of the radial viscous fingering problems in a Hele-Shaw cell,” J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., **14**, No. 4, 475–482 (2021).

**10.** *Tani H.*, “Classical solvability of the radial viscous fingering problem in a Hele-Shaw cell with surface tension,” Sib. J. Pure Appl. Math., **16**, 79–92 (2016).

**11.** *Tani A. and Tani H.*, “On the uniqueness of the classical solution of the radial viscous fingering problem in a Hele-Shaw cell with surface tension,” J. Appl. Mech. Tech. Phys., **65**, No. 5 (2024) (to appear).

**12.** *Tani A. and Tani H.*, “Two-phase radial viscous fingering problem in a Hele-Shaw cell with surface tension, I: Classical solvavility” Mat. Zametki SVFU, **31**, No. 4, 82–105 (2024).

**13.** *Antontsev S. N., Gonçalves C. R., and Meirmanov A. M.*, “Local existence of classical solutions to the well-posed Hele-Shaw problem,” Port. Math., **59**, 435–452 (2002).

**14.** *Antontsev S. N., Gonçalves C. R. and Meirmanov A. M.*, “Exact estimates for the classical solutions to the free boundary problem in the Hele-Shaw cell,” Adv. Differ. Equ., **8**, 1259–1284 (2003).

**15.** *Escher J. and Simonett G.*, “Classical solutions of multidimensional Hele-Shaw model,” SIAM J. Math. Anal., **28**, 1028–1047 (1997).

**16.** *Escher J. and Simonett G.*, “Classical solutions for Hele-Shaw models with surface tension,” Adv. Differ. Equ., **2**, 619–642 (1997).

**17.** *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., and Ural'tseva N. N.*, Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type [in Russian], Nauka, Moscow (1967).

**18.** *Ladyzhenskaya O. A. and Ural'tseva N. N.*, Linear and Quasi-Linear Equations of Elliptic Type [in Russian], Nauka, Moscow (1973).

**19.** *Bazaliĭ B. V.*, “On estimates for the solution of a model conjugation problem in the theory of problems with a free boundary [in Russian],” Differents. Uravn., **33**, 1374–1381 (1997).

**20.** *Solonnikov V. A.*, "On boundary value problems for linear parabolic systems of differential equations of general form [in Russian]," Tr. Mat. Inst. Steklov, **83**, 3–163 (1965).

**21.** *Tani A.*, "Two-phase free boundary problem for compressible viscous fluid motion," J. Math. Kyoto Univ., **24**, 243–267 (1984).

**22.** *Solonnikov V. A.*, "General boundary value problems for systems elliptic in the sense of A. Douglis and L. Nirenberg [in Russian]," I: Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., **28**, 665–706 (1964); II: Tr. Mat. Inst. Steklov, **92**, 233–297 (1966).

*Submitted October 7, 2024*
*Revised November 7, 2024*
*Accepted December 6, 2024*

Atusi Tani
Department of Mathematics,
Keio University,
Yokohama 223-8522, Japan
`tani@math.keio.ac.jp`

Hisasi Tani
JANUS,
Yokohama, 220-6001, Japan
`hisasitani@gmail.com`

*Математические заметки СВФУ*
*Январь—март, 2025. Том 32, № 1*

*УДК 519.6*

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ УГЛЕРОДА БОЛОТНЫХ ЭКОСИСТЕМ С УЧЕТОМ КЛИМАТИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ

**С. П. Семёнов,**
**Е. Ю. Дюкарев, А. О. Ташкин**

**Аннотация.** Предложена математическая модель, описывающая углеродный цикл в болотных экосистемах северных регионов. Модель описывает концентрацию углерода в двух ключевых резервуарах: *Live* (живые растения-биомасса) и $Mort$ (отмершие органические материалы). Основные процессы, учтенные в модели, включают фотосинтез, автотрофное и гетеротрофное дыхание, отмирание биомассы и вынос углерода грунтовыми водами. Процессы формализованы с учетом температуры и уровня грунтовых вод. Включение в модель уровня грунтовых вод позволяет учитывать различия между аэробным и анаэробным процессами разложения органики. Проведены численные расчеты на модельных данных. При низких температурах и высоком уровне грунтовых вод гетеротрофное дыхание замедляется, создаются анаэробные условия, что способствует накоплению углерода в почве. В условиях пониженного уровня воды доступ кислорода к органическому материалу увеличивается, что стимулирует аэробное разложение и увеличивает выбросы $CO_2$. В отличие от моделей, ориентированных на глобальные процессы, данная работа учитывает специфику климатических, гидрологических и биохимических условий северных болот, что особенно важно для моделирования углеродного баланса в холодных регионах.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-1-80-89

**Ключевые слова:** математические модели, динамика углерода, болотные экосистемы, водно- болотистые угодия, углерод, численные эксперименты, окружающая среда, климат, север, парниковые газы, Западная Сибирь, фитомасса, мортомасса, Ханты-Мансийск, Мухрино.

## Введение

Стабильность содержания парниковых газов в атмосфере и глобального климата существенно зависит от состояния болотных экосистем, играющих ключевую роль в поглощении углекислого газа из атмосферы и накоплении его в виде торфа. Значимую роль в углеродном обмене болотных экосистем играют температура и уровень грунтовых вод. Исследования в северных болотах Западной Сибири и других холодных регионах, таких как канадская тундра, демонстрируют значительные накопления углерода благодаря низким температурам и высоким уровням вод, что замедляет процессы разложения. Тем не

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда и правительства Ханты-Мансийского автономного округа-ЮГРЫ (грант № 22-11-20031).

менее в условиях глобального потепления экосистемы холодных регионов сталкиваются с риском изменения водного режима, что вызывает вопросы о долгосрочном углеродном балансе. Понижение уровня грунтовых вод в болотных экосистемах, характерное для ряда регионов, приводит к тому, что процессы разложения органического вещества ускоряются за счет увеличения аэрируемого слоя почвы. Это увеличивает выбросы углекислого газа, что может в значительной мере повлиять на климатические изменения. Снижение уровня грунтовых вод стимулирует процессы, приводящие к увеличению выбросов $CO_2$, превращая болота из «углеродных поглотителей» в «углеродные источники». Болотные экосистемы, являясь важной частью глобального углеродного баланса, могут значительно влиять на концентрацию $CO_2$ в атмосфере. Можно выделить ряд работ, посвященных моделированию углеродного обмена в болотах с учетом уровня грунтовых вод. Например, в работе [1] описываются пространственно-временные модели для анализа связи между уровнем грунтовых вод (WTD) и углеродными потоками, демонстрируя, что высокий уровень воды способствует накоплению органического углерода (SOC) за счет замедленного разложения. В исследовании [2] показано, что глубина торфа и уровень грунтовых вод определяют углеродный баланс, и небольшие изменения в осадках или температуре могут превратить торфяник из накопителя в источник углерода. В [3] представлена модель McGill Wetland Model (MWM) для исследования углеродного обмена в торфяниках с учетом биогеохимической структуры, которая была протестирована на данных болота Mer Bleue в Онтарио. В исследовании [4] применяется модель смешанных эффектов для изучения углеродных потоков в альпийских торфяниках, показывающая, что повышение уровня грунтовых вод усиливает анаэробные процессы и выбросы метана, а понижение усиливает аэробное разложение и выбросы $CO_2$. В [5] представлена реакционно-диффузионная модель, анализирующая устойчивость углеродного баланса торфяников Западной Сибири при различных сценариях климатических изменений (RCP-2.6 и RCP-8.5). В [6] разработана модификация модели ORCHIDEE для северных торфяников, где деление на кислородную и бескислородную зоны позволяет учитывать метаногенные процессы и углеродный баланс в зависимости от уровня воды. В [7] представлена глобальная модель углеродного цикла ISBA-CTRIP, учитывающая перемещение органического углерода в речных системах, а также лесные пожары и изменение землепользования. В работе [8] изучается влияние уровня грунтовых вод на углеродный и парниковый балансы восстановленных торфяных экосистем. В [9] моделируется утечка $CO_2$ из водоносных горизонтов, анализируется удержание $CO_2$ в подземных солевых слоях. В исследовании [10] описывается влияние уровня грунтовых вод и осадков на валовую первичную продукцию (GPP) и углеродный баланс в засушливых зонах. Динамическое моделирование углеродного цикла в болотных экосистемах — критически важный инструмент, позволяющий оценить влияние различных климатических и гидрологических факторов на обмен углерода и прогнозировать потенциальные изменения в этих экосистемах. Компьютерные модели позволяют с высокой точностью анализировать влияние факторов внешней среды на процессы фотосинтеза, дыхания и разложения органического углерода. Это особенно актуально для северных болотных экосистем, где холодный климат способствует накоплению углерода, замедляя процессы разложения органического вещества торфа. В таких условиях потепление может значительно изменить баланс, превращая болота из углеродных поглотителей в источники углекислого газа. Предлагаемая работа продолжает исследование углеродного цикла в болотных экосистемах северных регионов, начатое авторами в [11, 12], построена математическая модель, которая отражает процессы, происходящие в углеродном цикле, с учетом динамики уровня грунтовых вод и температуры. В среде Matlab разработана компьютерная модель, спланированы и проведены на модельных данных численные эксперименты, которые показывают хорошую чувствительность модели к изменению уровня грунтовых вод.

## 1. Моделирование динамики углерода с учетом уровня грунтовых вод

В работах [11, 12] предполагалось, что углерод в локальных болотных экосистемах сосредоточен в двух резервуарах: *Live* и $Mort$. *Live* объединяет углерод, находящийся в листве, стволах, корнях и других живых частях растений, тогда как Mort представляет собой отмершие частицы, включая опад, подстилку, гумус и т. п. Модель охватывает несколько взаимосвязанных процессов, влияющих на обмен углерода с атмосферой, включая фотосинтез (валовая первичная продукция, GPP), дыхание растений (автотрофное дыхание, Ra), а также процессы отмирания биомассы (PM) и гетеротрофное дыхание почвенных организмов (Rh), возвращающих углерод обратно в атмосферу в виде $CO_2$. Кроме того, учитывается вынос углерода (Wtl) с грунтовыми водами в ручьи, реки и далее в океан. Одним из наиболее значимых факторов в модели является температура, функции $f(T)$, $g(T)$, $h(T)$ определяют процессы фотосинтеза, автотрофное и гетеротрофное дыхания. Выбор этих функций обоснован в [12]. Для моделирования зависимости углеродного обмена от уровня грунтовых вод часто используется функция насыщения, которая отражает влияние грунтовых вод на процессы разложения органического вещества и объемов гетеротрофного дыхания. Далее обозначено: $wtl(t)$ — текущий уровень грунтовых вод, соответственно, $W(wtl)$ — функция насыщения. Обычно уровень грунтовых вод измеряют в см или м относительно фиксированных референсных точек на поверхности болота, причем уровни, расположенные ниже точки отсчета, берутся со знаком минус, соответственно выше — со знаком плюс. Для моделирования функции насыщения предлагается использовать логистическую функцию вида

$$W(wtl) = \frac{1}{1 + e^{-\alpha(wtl - w_{mean})}}. \tag{1}$$

График функции изменяется на промежутке 0 до 1. При малых значениях $wtl$ функция $W(wtl)$ близка к 0, что соответствует аэробным условиям с высокими объемами гетеротрофного дыхания, при больших значениях $wtl$ функция насыщения близка к 1, что соответствует анаэробным условиям, где гетеротрофное дыхание замедляется, уменьшается выделение $CO_2$ и увеличивается накопление углерода в мортомассе. Параметр $w_{mean}$ соответствует среднему уровню грунтовых вод для наблюдаемой экосистемы. Использование функций насыщения вида (1), описывающих зависимость процессов разложения органики от уровня грунтовых вод, является распространенным подходом в моделировании углеродного цикла болотных экосистем (см., например, работы [2, 13]). Эта же функция используется для моделирования выноса органического углерода из почвы гидрологическим потоком: при высоком уровне грунтовых вод увеличивается вынос углерода, а при понижении $wtl$ вынос углерода уменьшается. В данной работе гетеротрофное дыхание $Rh$ выражается с учетом функции насыщения следующим образом:

$$R_h = d \cdot h(T) \cdot (1 - W(wtl)) \cdot y.$$

Система дифференциальных уравнений, предлагаемая в данной работе, которая далее будет называться базовой математической моделью динамики углерода с учетом климатических факторов для локальных болотных экосистем, принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = a \cdot f(T) \cdot x - b \cdot g(T) \cdot x^2 - \frac{c \cdot x}{x + Mp} \cdot y, \tag{2}$$

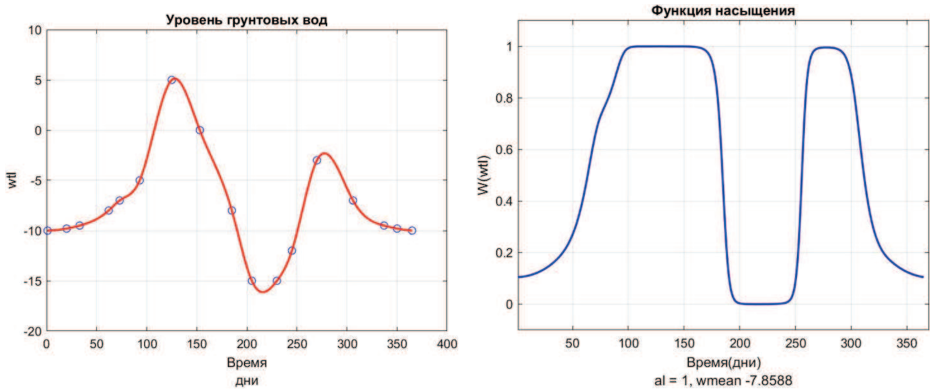
$$\frac{dy}{dt} = \frac{s \cdot x}{j} \cdot y - d \cdot h(T) \cdot y^2 - W_{tl} \cdot y, \tag{3}$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \tag{4}$$

где $t$ — время (дни), $T = T(t)$ — температура, $x(t), y(t)$ — искомое количество углерода в момент времени $t$ соответственно в резервуарах $Live$ и $Mort$. Температурные функции $f(T)$, $g(T)$, $h(T)$ определяют процессы фотосинтеза, автотрофное и гетеротрофное дыхание. Переменные и параметры модели ранее описаны авторами в работе [12]. Следуя [12], искомыми величинами являются безразмерные относительные запасы углерода $x(t)$, $y(t)$, при этом считается, что согласование остальных размерностей обеспечивается неотрицательными параметрами модели $a$, $b$, $c$, $d$, $s$, $j$, $Mp$.

## 2. Компьютерная модель и результаты численных экспериментов

Компьютерная реализация математической модели и ее дальнейшие исследования были выполнены в вычислительной среде MatLab. Единицей модельного времени выбран день, а базовым наблюдаемым периодом — год (365 дней). В описываемых экспериментах использовался массив суточных температур, смоделированный в работе [12]. В той же работе приведено обоснование на основе модели О′Нейла выбора температурных зависимостей $f(T)$, $g(T)$, $h(T)$




(а) (б)

Рис 1. (а) Модельная динамика годового уровня грунтовых вод. (б) Функция насыщения, $w_{mean} = -7.8588$.

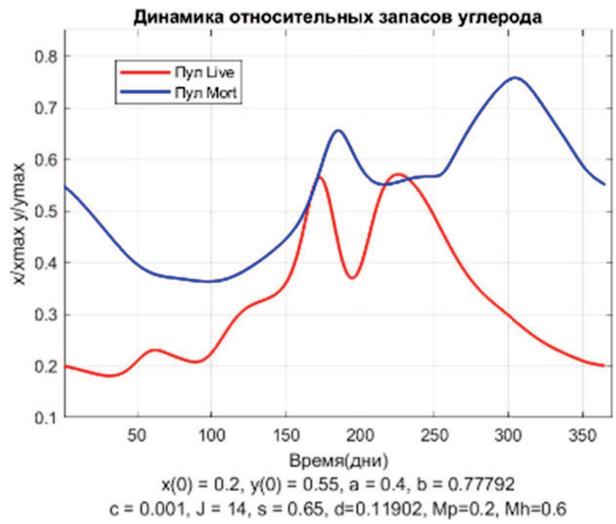



Рис. 2. Динамика относительных запасов углерода.

для процессов фотосинтеза и дыхания. Аналогично тому, как это было сделано для модельной температуры в [12], была сгенерирована динамика годового уровня грунтовых вод ($wtl$) с максимумом весной (+5 на 125 день), минимумом осенью (−15 на 230 день) и средним значением $w_{mean} = -7.8588$. Массив грунтовых вод учитывает сезонные факторы, такие как таяние снега весной, испарение летом и осадки в осенний период. На рис. 1 приведен сгенерированный массив $wtl$ и соответствующая функция насыщения.

Для численных экспериментов была использована библиотека функций Matlab, которая включает универсальный решатель ODE45 для приближенного решения системы дифференциальных уравнений. ODE45 реализует метод Рунге-Кутта 4-го и 5-го порядков точности и отличается тем, что автоматически адап-


Рис. 3. Динамика относительных запасов углерода в зависимости от годичных колебаний уровней грунтовых вод. Отметка 0 соответствует $w_{mean} = -7.8588$.

тирует шаг интеграции в процессе вычислений. Однако в описываемых экспериментах шаг задавался принудительно, равный восьмой части суток. Параметры модели были откалиброваны так, чтобы на модельной динамике годового уровня грунтовых вод прирост углерода в мортомассе составил 0.02% в год. Количественные значения параметров приведены в подписях к рисункам. Температурные функции в точности такие же, как в [12].

На рис. 2 приведены результаты расчетов динамики углерода для одного года. Динамика углерода в живой биомассе определяется в основном температурным режимом фотосинтеза: при высоких летних температурах фотосинтез замедляется, а при низких температурах прекращается. Соответственно уменьшается количество углерода в пуле $Live$, это хорошо видно на графике для июльских дней и для зимних месяцев. Изменение углерода в мортомассе в основном определяется уровнем грунтовых вод. Локальные максимумы на рис. 2 для графика пула $Mort$ соответствуют в первом случае повышению грунтовых вод, вызванных весенним подтоплением, и во втором случае — периодом дождей осенью. Интересным представляется исследование процесса накопления углерода при различных режимах грунтовых вод, в том числе при затоплении и при засухе. На рис. 3 приведен график зависимости относительного годового прироста углерода в процентах, на горизонтальной оси отложены приросты уровня грунтовых вод относительно базового ($w_{mean} = -7.8588$), а по вертикальной откладываются величины относительного прироста углерода. Зависимости носят качественный характер.

## Заключение и выводы

Проведенное исследование динамики углерода в болотных экосистемах на основе модели, учитывающей уровень грунтовых вод и температуру, существенно расширяет возможности прогнозирования углеродного баланса в подобных экосистемах, играющих важнейшую роль в глобальном балансе углерода. Болотные экосистемы, благодаря способности накапливать углерод в виде органического вещества, в первую очередь торфа, играют ключевую роль в удержании значительных объемов углерода. Исследование показало, что уровень грунтовых вод является критическим фактором, определяющим углеродный баланс в болотных экосистемах. Использование функции насыщения грунта водой позволило смоделировать переход между аэробными и анаэробными условиями, что дало возможность предсказать, при каких условиях болота могут переходить от состояния накопления углерода к состоянию его интенсивного выделения в виде $CO_2$ (см. рис. 3). Данная модель демонстрирует высокую чувствительность болотных экосистем к гидрологическим изменениям и подтверждает, что они могут выступать как значимыми углеродными стоками, так и значимыми источниками выбросов при изменении условий. Дальнейшее развитие модели с учетом потоков метана позволит оценить полный баланс парниковых газов в болотных экосистемах и прогнозировать их радиационное воздействие на климат. В практическом аспекте данная работа подчеркивает важность сохранения болотных экосистем и предлагает рекомендации по их устойчивому управлению. Результаты моделирования могут использоваться для разработки природоохранных мер, таких как регулирование уровня грунтовых вод, минимизация антропогенного воздействия и защита углеродных запасов болот. Включение интерактивных интерфейсов и визуализаций для анализа динамики углерода также имеет значительный потенциал для образовательных и исследовательских программ, предоставляя интуитивный доступ к результатам моделирования для ученых и природоохранных специалистов. Разработанная модель углубляет понимание углеродного цикла в болотных экосистемах и является важным инструментом для анализа и прогнозирования их реакции на изменения климата.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Huang B., Zipper S., Peng S., Qiu J.* Groundwater effects on net primary productivity and soil organic carbon: a global analysis // Environ. Res. Lett. 2023. V. 18, N 8. 084024.
2. *Hilbert D., Roulet N., Moore T.* Modelling and analysis of peatlands as dynamical systems // J. Ecol. 2001. V. 88. P. 230–242.
3. *St-Hilaire F., Wu J., Roulet N., Frolking S., Lafleur P., Humphreys E., Arora V.* McGill Wetland Model: Evaluation of a peatland carbon simulator developed for global assessments // Biogeosci. 2010. V. 7, N 11. 3517–3530.
4. *Yan L., Li Y., Zhang X., Wu H., Kang E., Zhongqing Y., Zhang K., Li M., Yang A., Niu Y., Wang X., Yu X., Kang X.* Carbon fluxes of alpine peatlands were jointly affected by water table level changes and the duration // J. Soils Sediments. 2023. V. 23. P. 1–11.
5. *Zavalishin N.* Coupled modeling of peatlands carbon cycle and carbon dioxide emission from their peat deposits // IOP Conf. Ser., Earth Environ. Sci. 2022. V. 1093. 012009.
6. *Qiu C., Zhu D., Ciais P., Guenet B., Krinner G., Peng S., Aurela M., Bernhofer C., Bruemmer C., Bret-Harte S., Chu H., Chen J., Desai A. R., Dusek J., Euskirchen E. S., Fortuniak K., Flanagan L. B., Friborg T., Grygoruk M., . . . , Ziemblinska K.* ORCHIDEE-PEAT (revision 4596), a model for northern peatland $CO_2$, water, and energy fluxes on daily to annual scales // Geosci. Model Development. 2018. V. 11, N 2. P. 497–519.

**7.** *Delire C., Sfrian R., Decharme B., Alkama R., Calvet J.-C., Carrer D., et al.* The global land carbon cycle simulated with ISBA-CTRIP: Improvements over the last decade // J. Adv. Model. Earth Syst. 2020. V. 12, N 9. e2019MS001886.

**8.** *Jrveoja J., Peichl M., Maddison M., Soosaar K., Vellak K., Karofeld E., Teemusk A., Mander Ü.*, Impact of water table level on annual carbon and greenhouse gas balances of a restored peat extraction area // Biogeosci. Discussions. 2015. V. 12. P. 17177–17218.

**9.** *Heidari P., Hassanzadeh H.* Modeling of carbon dioxide leakage from storage aquifers // Fluids. 2018. V. 3, N 4. 80.

**10.** *Zhang Y., Xiao X., Guanter L., Zhou S., Ciais P., Joanna J., Sitch S., Wu X., et al.* Precipitation and carbon-water coupling jointly control the interannual variability of global land gross primary production // Sci. Rep. 2016. V. 6. 39748.

**11.** *Semenov S. P., Dyukarev E. A., Tashkin A. O.* Biogeochemical carbon cycles numerical modeling in wetland ecosystems // Lobachevskii J. Math. 2023. V. 44, N 3. P. 1223–1228.

**12.** *Семенов С. П., Дюкарев Е. А., Ташкин А. О.* Математическая модель для расчета динамики углерода в болотных экосистемах холодных регионов Западной Сибири // Мат. заметки СВФУ. 2024. Т. 31, № 1. С. 102–112.

**13.** *Worrall F., Moody C. S., Clay G. D., Burt T. P., Rose R.* The flux of organic matter through a peatland ecosystem: The role of cellulose, lignin, and their control of the ecosystem oxidation state // J. Geophys. Res. Biogeosci. 2017. V. 122. P. 1655–1671.

*Поступила в редакцию 25 ноября 2024 г.*
*После доработки 3 декабря 2024 г.*
*Принята к публикации 25 февраля 2025 г.*

Семёнов Сергей Петрович
Югорский государственный университет,
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012
ssp@ugrasu.ru

Дюкарев Егор Анатольевич
Югорский государственный университет,
НОЦ-кафедра ЮНЕСКО «Динамика окружающей среды
и глобальные изменения климата»
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012;
Институт мониторинга климатических и экологических систем СО РАН
Лаборатория физики климатических систем
пр. Академический 10/3, Томск 634021
dekot@mail.ru

Ташкин Артём Олегович
Югорский государственный университет,
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012
anozer_sky@mail.ru

*Математические заметки СВФУ*
*Январь—март, 2025. Том 32, № 1*

*UDC 519.6*

# A MATHEMATICAL MODEL OF CARBON DYNAMICS IN WETLAND ECOSYSTEMS WITH CONSIDERATION OF CLIMATIC FACTORS

**S. P. Semenov, E. A. Dyukarev, and A. O. Tashkin**

**Abstract:** This study presents a mathematical model describing the carbon cycle in wetland ecosystems of northern regions. The model characterizes carbon concentration in two key reservoirs: Live (living plants and biomass) and Mort (dead organic matter). The primary processes incorporated in the model include photosynthesis, autotrophic and heterotrophic respiration, biomass decay, and carbon transport via groundwater. These processes are formalized with respect to temperature and groundwater level. The inclusion of groundwater level allows us to consider of differences between aerobic and anaerobic organic matter decomposition processes. Numerical simulations were performed using model data. Under conditions of low temperatures and high groundwater levels, heterotrophic respiration is slowed, leading to the formation of anaerobic conditions that favor the accumulation of carbon in the soil. In contrast, under reduced water levels, increased oxygen availability to organic material stimulates aerobic decomposition, resulting in higher $CO_2$ emissions. Unlike models focused on global processes, this work emphasizes the specific climatic, hydrological, and biochemical conditions of northern wetlands, which is crucial for accurately modeling the carbon balance in cold regions.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-1-80-89

**Keywords:** mathematical models, carbon dynamics, wetland ecosystems, wetlands, carbon, numerical experiments, environment, climate, north, greenhouse gases, Western Siberia, phytomass, mortmass, Khanty-Mansiysk, Mukhrino.

## *REFERENCES*

1. *Huang B., Zipper S., Peng S., and Qiu J.*, “Groundwater effects on net primary productivity and soil organic carbon: a global analysis,” Environ. Res. Lett., **18**, No. 8, 084024 (2023).
2. *Hilbert D., Roulet N., and Moore T.*, “Modelling and analysis of peatlands as dynamical systems,” J. Ecol., **88**, 230–242 (2001).
3. *St-Hilaire F., Wu J., Roulet N., Frolking S., Lafleur P., Humphreys E., and Arora V.*, “McGill Wetland Model: Evaluation of a peatland carbon simulator developed for global assessments,” Biogeosci., **7**, No. 11, 3517–3530 (2010).
4. *Yan L., Li Y., Zhang X., Wu H., Kang E., Zhongqing Y., Zhang K., Li M., Yang A., Niu Y., Wang X., Yu X., and Kang X.*, “Carbon fluxes of alpine peatlands were jointly affected by water table level changes and the duration,” J. Soils Sediments, **23**, 1–11 (2023).
5. *Zavalishin N.*, “Coupled modeling of peatlands carbon cycle and carbon dioxide emission from their peat deposits,” IOP Conf. Ser., Earth Environ. Sci., **1093**, 012009 (2022).
6. *Qiu C., Zhu D., Ciais P., Guenet B., Krinner G., Peng S., Aurela M., Bernhofer C., Bruemmer C., Bret-Harte S., Chu H., Chen J., Desai A. R., Dusek J., Euskirchen E. S., Fortuniak K., Flanagan L. B., Friborg T., Grygoruk M., . . . , and Ziemblinska K.*, “ORCHIDEE-PEAT

(revision 4596), a model for northern peatland $CO_2$, water, and energy fluxes on daily to annual scales," Geosci. Model Development, **11**, 497–519 (2018).

**7.** *Delire C., Sfrian R., Decharme B., Alkama R., Calvet J.-C., Carrer D., et al.*, "The global land carbon cycle simulated with ISBA-CTRIP: Improvements over the last decade," J. Adv. Model. Earth Syst., **12**, No. 9, e2019MS001886 (2020).

**8.** *Jrveoja J., Peichl M., Maddison M., Soosaar K., Vellak K., Karofeld E., Teemusk A., and Mander Ü.*, "Impact of water table level on annual carbon and greenhouse gas balances of a restored peat extraction area," Biogeosci. Discussions, **12**, 17177–17218 (2015).

**9.** *Heidari P. and Hassanzadeh H.*, "Modeling of carbon dioxide leakage from storage aquifers," Fluids, **3**, No. 4, 80 (2018).

**10.** *Zhang Y., Xiao X., Guanter L., Zhou S., Ciais P., Joanna J., Sitch S., Wu X. et al.*, "Precipitation and carbon-water coupling jointly control the interannual variability of global land gross primary production," Sci. Rep., **6**, 39748 (2016).

**11.** *Semenov S. P., Dyukarev E. A., and Tashkin A. O.* "Biogeochemical carbon cycles numerical modeling in wetland ecosystems," Lobachevskii J. Math., **44**, No. 3, 1223–1228 (2023).

**12.** *Semenov S. P., Dyukarev E. A., and Tashkin A. O.*, "A mathematical model for calculating the dynamics of carbon in wetland ecosystems of the cold regions of Western Siberia," Math. Zamet. SVFU, **31**, No. 1, 102–112 (2024).

**13.** *Worrall F., Moody C. S., Clay G. D., Burt T. P., and Rose R.*, "The flux of organic matter through a peatland ecosystem: The role of cellulose, lignin, and their control of the ecosystem oxidation state," J. Geophys. Res. Biogeosci., **122**, 1655–1671 (2017).

*Submitted November 25, 2025*
*Revised December 3, 2024*
*Accepted February 25, 2025*

Sergey P. Semenov
Yugra State University,
16 Chekhov Street, Khanty-Mansiysk 628012, Russia
ssp@ugrasu.ru

Egor A. Dyukarev
Yugra State University,
UNESCO Chair "Dynamics of the Environment and Global Climate Change,"
16 Chekhov Street, Khanty-Mansiysk 628012, Russia;
Institute of Monitoring of Climatic and Ecological Systems SB RAS,
Laboratory of Physics of Climatic Systems,
10/3 Akademichesky Avenue, Tomsk 634021, Russia
dekot@mail.ru

Artem O. Tashkin
Yugra State University,
16 Chekhov Street, Khanty-Mansiysk 628012, Russia
anozer_sky@mail.ru

*Математические заметки СВФУ*
*Январь—март, 2025. Том 32, № 1*

*УДК 517.956.6*

# ВИДОИЗМЕНЕННАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

**А. М. Абдрахманов, Р. П. Абдрахманова**

**Аннотация.** Рассматривается задача Дирихле, для которой доказано, что она разрешима в классе ограниченных функций, получены регулярные решения в рассматриваемой постановке.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-1-90-91

**Ключевые слова:** задача Дирихле, вырождающаяся эллиптическая система, регулярное в рассматриваемой области решение.

В 1948 г. А. В. Бицадзе построил пример эллиптической системы двух уравнений второго порядка, для которой нарушается единственность решения задачи Дирихле. Аналогично ведет себя и система

$$
\begin{aligned}
-\Delta u_1 + 2\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) = 0,\\
-\Delta u_2 + 2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Будем рассматривать некоторое обобщение системы (1)

$$
\begin{aligned}
-x_3\Delta u_1 + \lambda\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) = 0,\\
-x_3\Delta u_2 + \lambda\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) = 0,\\
-x_3\Delta u_3 + \lambda\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Система (2) эллиптична везде, кроме $x_3 = 0$ и $x_3 = \lambda$, где она вырождается.

Систему (2) будем рассматривать в полупространстве $E_{3+} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 > 0\}$.

Задачу Дирихле будем рассматривать в следующей постановке: найти регулярное в области $E_{3+}$ решение системы (2), удовлетворяющее условиям

$$
\begin{aligned}
u_1|_{x_3=0} = f_1(x_1, x_2),\\
u_2|_{x_3=0} = f_2(x_1, x_2),\\
u_3|_{x_3=0} = f_3(x_1, x_2),
\end{aligned} \tag{3}
$$

где $f_1(x_1, x_2)$, $f_2(x_1, x_2)$, $f_3(x_1, x_2)$ достаточно гладкие функции.

Доказано, что задача Дирихле (2), (3) разрешима в классе ограниченных функций, причем $u_1$, $u_2$ определяются единственным образом, а $u_3$ — с точностью до константы.

Абдрахманов Айдар Максутович, Абдрахманова Римма Петровна
Уфимский университет науки и технологий,
Институт информатики, математики и робототехники,
К. Маркса, 12, Уфа 450077
abdrai@mail.ru, vmk_rimma@mail.ru

## MODIFIED PROBLEM FOR A DEGENERATE ELLIPTIC SYSTEM

**A. M. Abdrakhmanov, R. P. Abdrakhmanova**

**Abstract:** The Dirichlet problem is considered, for which it is proved that it is solvable in the class of bounded functions, and regular solutions in the formulation under consideration are obtained.

**Keywords:** Dirichlet problem, degenerate elliptic system, solution regular in the domain under consideration.

Aidar A. Abdrakhmanov, Rimma P. Abdrakhmanova
Ufa University of Science and Technology,
Institute of Informatics, Mathematics and Robotics,
12, K. Marksa St., Ufa 450000, Russian Federation

*Математические заметки СВФУ*
*Январь—март, 2025. Том 32, № 1*

*УДК 517.956.6*

# КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДРОБНО–ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ЭВОЛЮЦИИ

**А. Н. Артюшин**

**Аннотация.** Рассматривается дробно-волновое уравнение с меняющимся направлением эволюции. По аналогии с обычной производной ставится краевая задача в цилиндрической области. Доказано существование обобщенного решения. При некоторых дополнительных предположениях на коэффициенты доказана теорема единственности такого решения.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-1-92-93
**Ключевые слова:** дробно-волновое уравнение, меняющееся направление эволюции.

**Постановка задачи.** Пусть $T > 0$, $\Omega \subset R^m$ — ограниченная область с гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$, $Q = (0,T) \times \Omega$, $S = (0,T) \times \Gamma$, $0 < \nu < 1$. В цилиндре $Q$ рассматривается смешанная задача для модельного уравнения с дробной производной Герасимова — Капуто

$$\partial_t^\nu (k(t,x)u_t(t,x)) - \Delta u(t,x) + \gamma u_t(t,x) = f(t,x) \tag{1}$$

с коэффициентом $k(t,x) \in C^1(\overline{Q})$ произвольного знака.

Случай уравнения дробной диффузии ранее был рассмотрен в работе [1]. В ней была указана некоторая постановка краевой задачи, дано определение обобщенного решения и доказано его существование. При этом использовался метод априорных оценок, использующий неравенства вида

$$\int\limits_0^T \psi(v) D^\nu (kv)\, dt \geqslant C(\|v\|_B).$$

Неравенства такого вида и их приложение может быть найдено в [2, с. 574, 576, 581, 639] (см. также библиографию в [1]).

Такая же техника используется при изучении дробно-волнового уравнения. Как известно, при определенных условиях корректна следующая краевая задача для уравнения смешанного типа:

$$(k(t,x)u_t(t,x))_t - \Delta u(t,x) + \gamma u_t(t,x) = f(t,x),$$

$$u(t,x)|_S = 0, \quad u(0,x) = u_0(x),$$

$$u_t(0,x) = u_0(x), \quad x \in \Omega_0^+ = \{x \mid k(0,x) > 0\},$$
$$u_t(T,x) = u_1(x), \quad x \in \Omega_T^- = \{x \mid k(T,x) < 0\}.$$

Оказывается, что аналогичная краевая задача корректна и для уравнения (1). При умеренных требованиях на коэффициент $k(t,x)$ доказывается существование обобщенного решения этой задачи. Если функции $k(0,x)$, $k(T,x)$ не меняют знак, то такое решение единственно.

### *ЛИТЕРАТУРА*

1. *Artyuhsin A., Dzhamalov S.* Differential equations with fractional derivatives and changing direction of evolution // J. Math. Sci. 2023. V. 277, N 3. P. 366–374.
2. *Gripenberg G., Londen S-O. Staffans O.* Volterra integral and functional equations. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1990 (Cambridge Ocean Technology Series; V. 701).

Артюшин Александр Николаевич
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
alexsp3@yandex.ru

## RFACTIONAL WAVE EQUATION WITH CHANGING DIRECTION OF EVOLUTION

**A. N. Artyushin**

**Abstract:** We study the fractional wave equation with changing direction of evolution. Existence and uniqueness theorems of a generalized solution are proven.

**Keywords:** fractional wave equation, changing direction of evolution.

Aleksandr N. Artyuhsin
Novosibirsk State University,
1 Pirogova St., Novosibirsk 630090, Russia

*Математические заметки СВФУ*
*Январь—март, 2025. Том 32, № 1*

*УДК 517.957*

# РЕДУКЦИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

**А. А. Арчибасов**

**Аннотация.** Рассматривается эволюционная модель ВИЧ, которая отражает динамику популяций здоровых и зараженных клеток. Эта модель после введения безразмерных переменных и параметров описывается сингулярно возмущенной системой интегро-дифференциальных уравнений с частными производными. Размерность полученной системы может быть понижена.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-1-94-95

**Ключевые слова:** сингулярные возмущения, асимптотические разложения, пограничный слой.

**Понижение размерности.** Рассмотрим начально-краевую задачу для сингулярно возмущенной системы ($0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр):

$$\begin{gathered}\varepsilon u_t = 1 - u\int\limits_0^\ell \beta v\,ds - u,\\ v_t = -mv + p\beta uv + v_{ss},\end{gathered} \tag{1}$$

$$u(0) = u^0, \quad v(0,s) = v^0(s), \quad v_s(t,0) = 0, \quad v_s(t,\ell) = 0, \tag{2}$$

к которой может быть приведена модель эволюции ВИЧ [1] после введения безразмерных переменных и параметров [2]. Положив $\varepsilon = 0$, получим так называемую укороченную задачу

$$v_t = v_{ss} - mv + p\beta v/\left(1 + \int\limits_0^\ell \beta v\,ds\right), \quad u = 1/\left(1 + \int\limits_0^\ell \beta v\,ds\right), \tag{3}$$

$$v(0,s) = v^0(s), \quad v_s(t,0) = 0, \quad v_s(t,\ell) = 0. \tag{4}$$

Заметим, что решение укороченной задачи, вообще говоря, не удовлетворяет начальному условию (2) для переменной $u$, в результате чего в окрестности точки $t = 0$ возникает пограничный слой. В [3] обоснована допустимость предельного перехода при $\varepsilon \to +0$ решения (1), (2) к решению (3), (4).

**Заключение.** Можно найти решение полной задачи в виде асимптотических разложений в ряд по степеням малого параметра [2], пользуясь методом пограничных функций Тихонова — Васильевой. Полученное таким образом решение укороченной задачи с любой степенью точности аппроксимирует решение полной задачи.

## *ЛИТЕРАТУРА*

**1.** *Korobeinikov A., Dempsey C.* A continuous phenotype space model of RNA virus evolution within a host // Math. Biosci. Eng. 2014. V. 11, N 4. P. 919–927.

**2.** *Арчибасов А. А., Коробейников А., Соболев В. А.* Асимптотические разложения решений в сингулярно возмущенной модели вирусной эволюции // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2015. Т. 55, № 2. С. 242–252.

**3.** *Archibasov A.* Multi-scale problem for a model of viral evolution with random mutations // Extended Abstracts Spring 2018. V. 11. Birkhäuser, Cham: Springer International Publishing, 2019. P. 13–17.

Арчибасов Алексей Алексеевич
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С. П. Королева,
Московское шоссе, 34, Самара 443086
`archibasov@ssau.ru`

## SINGULARLY PERTURBED PARTIAL INTEGRO-DIFFERENTIAL SYSTEM REDUCTION

**A. A. Archibasov**

**Abstract:** An evolutionary model of HIV is considered. This model describes the dynamics of populations of healthy and infected cells. After introducing dimensionless variables and parameters a singularly perturbed partial integro-differential system arises. The order of the resulting system can be reduced.

**Keywords:** singular perturbations, asymptotic expansions, boundary layer.

Aleksey A. Archibasov
Samara National Research University,
34 Moskovskoye highway, Samara 443086, Russia

*Математические заметки СВФУ*
*Январь—март, 2025. Том 32, № 1*

*УДК 539.376:519.651*

# МЕТОДИКА ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПОЛЗУЧЕСТИ

**Е. А. Афанасьева**

**Аннотация.** Разработана методика параметрической идентификации системы дифференциальных уравнений математической модели неполной обратимости деформации ползучести. С использованием методов нелинейного регрессионного анализа найдены оценки случайных параметров системы на основе разностных уравнений. Получены соотношения, связывающие оценки параметров и коэффициенты разностных уравнений, разработаны итерационные процедуры уточнения параметров. Проведена апробация метода на большом объеме экспериментальных данных.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-1-96-97

**Ключевые слова:** ползучесть, нелинейная регрессионная модель, идентификация, разностные уравнения.

При продолжительной эксплуатации в условиях высоких температур и внешних нагрузок определяющими параметрами поведения материалов и элементов конструкций являются характеристики ползучести и длительной прочности. Одним из вариантов теорий ползучести в пределах первых двух стадий, описывающих обратимую компоненту реологического деформирования, является математическая модель Ю. П. Самарина [1] в виде системы дифференциальных уравнений. Предложенный метод идентификации параметров имеет ряд недостатков, главным из которых является детерминированный подход к решению задачи идентификации [2].

В настоящей работе разработан численный метод, позволяющий перейти от системы дифференциальных уравнений к математической модели в форме разностных уравнений, описывающей результаты эксперимента. Получены соотношения, связывающие коэффициенты математической модели и параметры исходной модели. Разработано программное обеспечение для реализации предложенной методики.

Выполнена проверка адекватности разработанной методики экспериментальными данными для сплавов ВЖ98 при температуре 900°C, ЭИ437А при температуре 700°C, ЭП693 при температуре 700°C, и стали ЭИ736 при температуре 500°C, которая показала адекватность и эффективность метода.

---

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FSSE-2023-0003) в рамках государственного задания Самарского государственного технического университета.

**Заключение.** Таким образом, в настоящей работе разработан новый метод идентификации параметром системы диффернциальных уравнений математической модели ползучести, проведена его апробация на большом массиве экспериментальных данных данных и разработано программное обеспечение для его реализации.

## *ЛИТЕРАТУРА*

1. *Самарин Ю. П.* Уравнения состояния материалов со сложными реологическими свойствами. Куйбышев: КГУ, 1979.
2. *Самарин Ю. П.* Построение экспоненциальных аппроксимаций для кривых ползучести методом последовательного выделения экспоненциальных слагаемых // Проблемы прочности. 1974. № 9. С. 24–27.

Афанасьева Елена Андреевна
Самарский государственный технический университет,
ул. Молодогвардейская, 244, Самара 443100
afanasieva.ea@samgtu.ru

## METHODOLOGY FOR IDENTIFYING PARAMETERS FOR A SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF A MATHEMATICAL MODEL OF CREEP

**E. A. Afanaseva**

**Abstract:** A method for parametric identification of a system of differential equations for a mathematical model of incomplete reversibility of creep deformation has been developed. Using methods of nonlinear regression analysis, estimates of the random parameters of the system are found based on difference equations. Relationships connecting parameter estimates and coefficients of difference equations were obtained, and iterative procedures for refining parameters were developed. The method was tested on a large amount of experimental data.

**Keywords:** creep, nonlinear regression model, identification, difference equations.

Elena A. Afanaseva
Samara State Technical University,
244 Molodogvardeyskaya St., Samara 443100, Russia

*Математические заметки СВФУ*
*Январь—март, 2025. Том 32, № 1*

*УДК 517.9*

# О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ГЛОБАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ГЕРАСИМОВА — КАПУТО

**К. В. Бойко**

**Аннотация.** Исследуются вопросы глобальной однозначной разрешимости задачи Коши для класса квазилинейных уравнений в банаховых пространствах. Уравнения содержат несколько дробных производных Герасимова — Капуто в линейных и нелинейной частях. Используется условие секториальности пучка операторов при производных в линейной части.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-1-98-99

**Ключевые слова:** дифференциальное уравнение дробного порядка, дробная производная Герасимова — Капуто, квазилинейное уравнение.

**Введение.** В работе получена однозначная разрешимость задачи Коши для квазилинейного уравнения с дробными производными Герасимова — Капуто при условии секториальности пучка операторов при производных в линейной части и липшицевости нелинейного оператора.

**Глобальная разрешимость квазилинейного уравнения.** Будем рассматривать дробные интегралы Римана — Лиувилля $J^\beta$ и дробные производные Герасимова — Капуто $D^\alpha$ с началом в точке $t_0 \in \mathbb{R}$.

Пусть $\mathscr{Z}$ — банахово пространство, $A_1, \dots, A_n$ — линейные замкнутые операторы с областями определения $D_{A_1}, \dots, D_{A_n}$ соответственно, $r, n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\gamma_1 < \dots < \gamma_r < \alpha$, $B : [t_0, T] \times \mathscr{Z}^r \to \mathscr{Z}$. Обозначим

$$\mathscr{D} := \bigcap_{k=1}^{n} D_{A_k}, \quad R_\lambda := \left(\lambda^\alpha I - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{\alpha_k} A_k\right)^{-1} : \mathscr{Z} \to \mathscr{D}.$$

Рассмотрим задачу Коши

$$z^{(l)}(t_0) = z_l, \quad l = 0, 1, \dots, m-1, \tag{1}$$

$$D_t^\alpha z(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k D_t^{\alpha_k} z(t) + B(t, D_t^{\gamma_1} z(t), D_t^{\gamma_2} z(t), \dots, D_t^{\gamma_r} z(t)). \tag{2}$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Правительства Челябинской области № 24-11-20002.

*Решением задачи* (1), (2) на отрезке $[t_0, T]$ назовем такую $z \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathscr{Z})$, для которой $D_t^\alpha z \in C((t_0, T]; \mathscr{Z}) \cap L_1(t_0, T; \mathscr{Z})$, $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k D_t^{\alpha_k} z \in C((t_0, T]; \mathscr{Z})$, $D_t^{\gamma_i} z \in C([t_0, T]; \mathscr{Z})$, $i = 1, 2, \ldots, r$, выполняются равенство (2) для всех $t \in (t_0, T]$ и условия (1).

Определение. Набор операторов $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ *принадлежит классу* $\mathscr{A}^n_{\alpha,G}(\theta_0, a_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, если

(i) при всех $\lambda \in S_{\theta_0,a_0} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a_0)| < \theta_0, \mu \neq a_0\}$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$ существуют операторы $R_\lambda \cdot \left(I - \sum\limits_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k - \alpha} A_k\right) \in \mathscr{L}(\mathscr{Z})$;

(ii) при любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такое $K(\theta, a) > 0$, что для всех $\lambda \in S_{\theta,a}$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$

$$\left\| R_\lambda \left(I - \sum_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k - \alpha} A_k\right) \right\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \leq \frac{K(\theta, a)}{|\lambda - a||\lambda|^{\alpha-1}}.$$

**Теорема** [1]. *Пусть* $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n \leq m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $n, r \in \mathbb{N}$, $\gamma_1 < \cdots < \gamma_r < \alpha$, $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in \mathscr{A}^n_{\alpha,G}(\theta_0, a_0)$, $z_l \in \mathscr{D}$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$, *отображение* $B \in C([t_0, T] \times \mathscr{Z}^r; \mathscr{Z})$ *липшицево по* $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$. *Тогда задача* (1), (2) *имеет единственное решение на отрезке* $[t_0, T]$.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Бойко К. В.* Линейные и квазилинейные уравнения с несколькими производными Герасимова — Капуто // Челяб. физ.-мат. журн. 2024. Т. 9, № 1. С. 5–22.



Бойко Ксения Владимировна
Челябинский государственный университет,
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск 454000
kvboyko@mail.ru


## ON EXISTENCE AND UNIQUENESS OF A GLOBAL SOLUTION TO A QUASILINEAR EQUATION WITH GERASIMOV–CAPUTO FRACTIONAL DERIVATIVES


**K. V. Boyko**



**Abstract:** Issues of the unique global solvability of the Cauchy problem for a class of quasilinear equations in Banach spaces are studied. The equations contain several fractional derivatives of Gerasimov — Caputo in the linear and nonlinear part. The sectoriality condition for a pencil of operators at derivatives in the linear part is used.



**Keywords:** fractional differential equation, Gerasimov–Caputo derivative, quasilinear equation.



Kseniya V. Boyko
Chelyabinsk State University,
129 Brat'ev Kashirinyh St., Chelyabinsk 454000, Russia

*Математические заметки СВФУ*
*Январь—март, 2025. Том 32, № 1*

*УДК 517.955*

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В МОДЕЛЯХ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ВОЛАТИЛЬНОСТИ

**К. В. Буслова**

**Аннотация.** Проведено обобщение на случай многомерной модели Хестона асимптотической оценки функции плотности на бесконечности, доказанной ранее для случая однофакторной модели. Доказательство основано на аффинности модели Хестона, преобразовании Меллина и оценки полученных интегралов при помощи метода перевала.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-1-100-101
**Ключевые слова:** асимптотическая формула для стоимости опциона, многомерная модель Хестона, преобразование Меллина.

Рассматриваем следующую многофакторную модель Хестона:

$$dX_t = X_t Tr[\sqrt{\Sigma_t} dZ_t],$$
$$d\Sigma_t = (AA^T + B\Sigma_t + \Sigma_t B^T)dt + \sqrt{\Sigma_t} dW_t C + C^T (dW_t)^T \sqrt{\Sigma_t},$$

где $X_t$ — цена актива, $Tr$ — след оператора, $Z_t, W_t \in M_n$ (множество квадратных матриц размера $n \times n$) — матрицы броуновского движения при нейтральной к риску мере. Волатильность $\Sigma_t$ принадлежит множеству симметричных $n \times n$ положительно определенных матриц, $A, B, C \in M_n$ — диагонализируемые коммутирующие матрицы, матрица $A$ обратима. Предполагаем, что матрицы броуновского движения $W_t$ и $Z_t$ имеют диагональную матрицу корреляции $R = (\rho_j)_{j=1,\cdots,n} \in M_n$. В [1] получена формула, характеризующая асимптотику цен акций в однофакторной модели Хестона. В настоящей работе представлена теорема, которая характеризует асимптотическое поведение плотности распределения стоимости акции в многофакторной модели Хестона.

**Теорема.** *Для каждого $T > 0$ существуют положительные константы $A_1$, $A_2$, $A_3$ такие, что для плотности распределения $D_T$ цены акций $X_T$ в многомерной модели Хестона справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$D_T(x) = A_1 x^{-A_3} e^{A_2\sqrt{\ln x}} (\ln x)^{-\frac{3}{4} + \sum_{j=1}^n \frac{a_j^2}{4c_j^2}} (1 + O((\ln x)^{-\frac{1}{2}})), \quad x \to \infty,$$

*где $a_j, c_j$ — элементы соответствующих диагональных матриц коэффициентов $A'$ и $C'$ (результаты диагонализации соответствующих матриц коэффициентов $A$ и $C$).*

Используя те же идеи, что и в случае $x \to \infty$, можно получить аналогичные асимптотические формулы при $x \to 0$.

## *ЛИТЕРАТУРА*

**1.** *Gulisashvili A.* Analytically tractable stochastic stock price models // Springer Finance. 2012. P. 167–184.

Буслова Кристина Владимировна
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, 1, Москва 119991
`buslova.kristina@mail.ru`

## ASYMPTOTIC REPRESENTATION IN STOCHASTIC VOLATILITY MODELS

**K. V. Buslova**

**Abstract:** The asymptotic estimation of the density function at infinity, proved earlier for the case of the one-factor model, is generalized to the case of the multidimentional Heston model. The proof is based on the affinity of the Heston model, the Mellin transform, and the evaluation of the obtained integrals using the pass method.

**Keywords:** asymptotic formula for the stock of an option, multidimensional Heston model, Mellin transform.

Kristina V. Buslova
Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskie gory, Moscow 119191, Russia

*Математические заметки СВФУ*
*Январь—март, 2025. Том 32, № 1*

*УДК 517.956*

# ГЛОБАЛЬНОЕ СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ НЕЛОКАЛЬНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

**А. Л. Гладков**

**Аннотация.** Рассматривается начально-краевая задача для нелокального параболического уравнения с нелокальным граничным условием и неотрицательной начальной функцией. Найдены условия, гарантирующие глобальное существование решений, а также обращение решений в бесконечность за конечное время.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-1-102-103
**Ключевые слова:** нелокальное параболическое уравнение, нелокальное граничное условие, глобальное существование.

Рассматривается начально-краевая задача для нелокального параболического уравнения

$$u_t = \Delta u + au^p \int\limits_{\Omega} u^q(y,t)\,dy - bu^m, \quad x \in \Omega,\ t > 0, \tag{1}$$

с нелокальным граничным условием

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} = \int\limits_{\Omega} k(x,y,t)u^l(y,t)\,dy, \quad x \in \partial\Omega,\ t > 0, \tag{2}$$

и начальной функцией

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

где $a$, $b$, $p$, $q$, $m$, $l$ — положительные числа, $\Omega$ — ограниченная область в $R^N$ при $N \geq 1$ с гладкой границей $\partial\Omega$, $\nu$ — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Относительно функций $k(x,y,t)$ и $u_0(x)$ предполагается следующее:

$$k(x,y,t) \in C(\partial\Omega \times \overline{\Omega} \times [0,+\infty)), \quad k(x,y,t) \geq 0;$$

$$u_0(x) \in C^1(\overline{\Omega}),\ u_0(x) \geq 0 \text{ в } \Omega,\ \frac{\partial u_0(x)}{\partial \nu} = \int\limits_{\Omega} k(x,y,0)u_0^l(y)\,dy \text{ на } \partial\Omega.$$

---

Работа поддержана государственной программой фундаментальных исследований Беларуси (грант 1.2.03.1).

Начально-краевая задача для уравнения (1) с нелокальным граничным условием

$$u(x,t) = \int\limits_{\Omega} k(x,y,t)u^l(y,t)\,dy, \quad x \in \partial\Omega,\ t > 0,$$

изучалась в [1, 2].

Для задачи (1)–(3) получены следующие результаты о глобальном существовании решений и об обращении их в бесконечность за конечное время.

**Теорема 1.** *Пусть* $\max(p+q,l) \le 1$ *или* $1 < \max(p+q,l) < m$. *Тогда любое решение задачи* (1)–(3) *существует глобально.*

**Теорема 2.** *Пусть* $p+q > \max(m,1)$ *или* $l > \max(m,1)$ *и*

$$\inf_{\Omega} \int\limits_{\partial\Omega} k(x,y,0)\,dS_x > 0.$$

*Тогда решения задачи* (1)–(3) *обращаются в бесконечность за конечное время при достаточно больших начальных данных.*

Результаты доклада опубликованы в статье [3].

### *ЛИТЕРАТУРА*

1. *Gladkov A., Kavitova T.* Global existence of solutions of initial-boundary value problem for nonlocal parabolic equation with nonlocal boundary condition // Math. Methods Appl. Sci. 2020. V. 43, N 1. P. 5464–5479.
2. *Гладков А., Кавитова Т.* О начально-краевой задаче для нелокального параболического уравнения с нелокальным граничным условием // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2018. № 1. С. 29–38.
3. *Gladkov A.* Global existence and blow-up of solutions of nonlinear nonlocal parabolic equation with absorption under nonlinear nonlocal boundary condition // Monatshefte für Mathematik. 2024. V. 203, N 2. P. 357–372.

Гладков Александр Львович
Белорусский государственный университет,
пр. Независимости, 4, Минск 220030, Беларусь
gladkoval@bsu.by

## GLOBAL EXISTENCE OF SOLUTIONS FOR A NONLOCAL PARABOLIC EQUATION WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS

**A. L. Gladkov**

**Abstract:** We consider initial boundary value problem for nonlocal parabolic equation with nonlocal boundary conditionы and nonnegative initial datum. We find conditions which guarantee global existence of solutions as well blow-up of solutions in finite time.

**Keywords:** nonlocal parabolic equation, nonlocal boundary condition, global existence.

Alexander L. Gladkov
Belarusian State University,
4 Nezavisimosti Avenue, 220030 Minsk, Belarus

*Математические заметки СВФУ*
*Январь—март, 2025. Том 32, № 1*

*УДК 517.928*

# ПРИМЕНЕНИЕ НЕУСТОЙЧИВЫХ ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ В МОДЕЛИРОВАНИИ КРИТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

**Е. С. Долгова**

**Аннотация.** Данная работа посвящена решению задачи о критических условиях для модели автокаталитического горения с учетом расхода реагента и окислителя. Для моделирования критических явлений используются асимптотические методы и техника склевания инвариантных многообразий.

DOI:10.25587/2411-9326-2025-1-104-105
**Ключевые слова:** сингулярные возмущения, инвариантные многообразия, устойчивость, асимптотические методы, горение, критические явления.

**Введение.** Критические явления представляют большой интерес при исследовании различных прикладных задач. В горении существует так называемый критический режим, разделяющий медленное горение и тепловой взрыв [1, 2]. Его важной особенностью является то, что температура в реакторе достигает высоких значений с контролируемой скоростью.

**1. Динамическая модель горения.** Рассмотрена безразмерная модель горения газовой смеси с учетом расхода реагента и окислителя [3]:

$$\gamma\frac{d\theta}{d\tau} = \eta^2\left(1+\eta_0-\eta\right)^2\left(\xi_0-\eta+1\right)\exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right) - \alpha(\theta-\theta_{\mathrm{r}}),$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = -\eta^2\left(1+\eta_0-\eta\right)^2\left(\xi_0-\eta+1\right)\exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right),$$

с начальными условиями $\theta(0)=0$, $\eta(0)=1$.

Здесь $\eta$ и $\xi$ — безразмерные концентрации реагента и топлива соответственно, $\theta$ — безразмерная температура реагента, $\theta_{\mathrm{r}}$ — безразмерная температура окружающей среды, $\alpha$ — параметр, характеризующий теплоотвод из реакционной фазы, $\gamma$ и $\beta$ — малые параметры.

**2. Моделирование критических явлений.** В зависимости от значений параметров решение данной системы будет отвечать либо случаю медленного горения, либо случаю теплового взрыва. С математической точки зрения первый случай наблюдается, когда фазовая точка дифференциальной системы движется по устойчивому медленному инвариантному многообразию, не доходя до границы смены устойчивости. Во втором случае фазовая точка, дойдя до этой границы, срывается с медленного инвариантного многообразия. Центральное внимание в работе уделено критическому случаю, являющемуся переходным между этими двумя. Показано, что критическому случаю отвечает движение фазовой точки и по неустойчивому медленному инвариантному многообразию.

Критический режим моделируется за счет выбора значения управляющего параметра, в качестве которого рассмотрен параметр, характеризующий теплоотвод из реакционной фазы. Критическое значение параметра определяется так, чтобы обеспечить склеивание устойчивого и неустойчивого инвариантных многообразий.

### *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Соболев В. А., Щепакина Е. А.* Траектории-утки в одной задаче теории горения // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 9. С. 1175–1184.
2. *Соболев В. А., Щепакина Е. А.* Редукция моделей и критические явления в макрокинетике. М.: Физматлит, 2010.
3. *Sobolev V. A., Shchepakina E. A.* Critical conditions of a thermal explosion in the case of autocatalytic combustion with account reagent and oxidant consumption // 2023 16th International Conference Management of large-scale system development (MLSD). Moscow: IEEE, 2023. P. 1–4.



Долгова Елизавета Сергеевна
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С. П. Королева,
Московское шоссе, 34, Самара 443086
dolgova.es@ssau.ru


## APPLICATION OF UNSTABLE INVARIANT MANIFOLDS FOR THE MODELING OF CRITICAL PHENOMENA


**E. S. Dolgova**



**Abstract:** This work is devoted to the critical conditions problem for an autocatalytic combustion model, taking into account the consumption of the reagent and oxidizer. To model critical phenomena, the asymptotic methods and technique for gluing of invariant manifolds are used.



**Keywords:** singular perturbations, invariant manifolds, stability, asymptotic methods, combustion, critical phenomena.



Elizaveta S. Dolgova
Samara National Research University,
34 Moskovskoye highway, 443086 Samara, Russia

*Математические заметки СВФУ*
*Январь—март, 2025. Том 32, № 1*

*УДК 517.958*

# ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА АКТИВАЦИИ ГЕТЕРОПЕРЕХОДНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ

**М. В. Долгополов, А. С. Чипура**

**Аннотация.** Представлена математическая модель и проведена оптимизация бетавольтаического элемента с пленкой из карбида кремния, активируемой радионуклидом $^{14}$C. Особое внимание уделено дифференциальным уравнениям, описывающим неравновесные процессы инжекции и динамику плотностей тока в гетеропереходе SiC/Si. Решая систему уравнений, возможно определить зависимости параметров от удельной активности и распределения источника активности, поставив обратную задачу.

DOI 10.25587/2411-9326-2025-1-106-108

**Ключевые слова:** неоднородное уравнение Пуассона, уравнение непрерывности, обратная задача, активность, бетавольтаика, гетеропереход.

В гетеропереходных бетавольтаических элементах, активированных радионуклидом $^{14}$C, основным уравнением для описания распределения заряда является уравнение Пуассона
$$\nabla \cdot \mathscr{D} = \rho(x). \tag{1}$$
Данное уравнение описывает распределение электрического поля в полупроводнике в зависимости от плотности заряда. Динамика носителей заряда в полупроводнике описывается уравнениями непрерывности для концентраций электронов ($n$) и дырок ($p$):
$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{q}\nabla \cdot J_n + G_n - R_n, \qquad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{q}\nabla \cdot J_p + G_p - R_p, \tag{2}$$
где $q$ — элементарный заряд, $J_n$ и $J_p$ — плотности токов электронов и дырок соответственно, $G_n$ и $G_p$ — скорости генерации электронов и дырок, $R_n$ и $R_p$ — скорости рекомбинации электронов и дырок [1]. Эти уравнения учитывают генерацию и рекомбинацию носителей заряда, а также их токи. В нашем случае граничные условия между материалами гетероперехода записываются следующим образом:
$$\mathscr{E}_1(0^-)\varepsilon_1 = \mathscr{E}_2(0^+)\varepsilon_2 - Q, \tag{3}$$
где $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ — электрические поля в разных материалах на границе, $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ — диэлектрические проницаемости материалов, $Q$ — поверхностная плотность заряда на границе. Плотности токов электронов и дырок:
$$J_n = q\mu_n\mathscr{E} + qD_n\nabla n, \quad J_p = q\mu_p p\mathscr{E} - qD_p\nabla p, \tag{4}$$

где $\mu_n$ и $\mu_p$ — подвижности электронов и дырок соответственно, $D_n$ и $D_p$ — коэффициенты диффузии электронов и дырок. Данные уравнения показывают, что плотность тока включает в себя дрейфовую и диффузионную составляющие. Для зависимости плотностей тока от квазиуровней Ферми удобна форма записи, показывающая связь плотности тока с градиентом квазиуровня Ферми [2]. Это позволяет учитывать динамику носителей заряда и влияние различных физических процессов, таких как диффузия, дрейф и рекомбинация:

$$J_n = q\mu_n n\mathscr{E} + qD_n\frac{dn}{dx} = q\mu_n\left(n\mathscr{E} + \frac{kT}{q}\frac{dn}{dx}\right) = \mu_n n\frac{dE_{F_n}}{dx}, \tag{5}$$

$$J_p = q\mu_p p\mathscr{E} - qD_p\frac{dp}{dx} = q\mu_p\left(p\mathscr{E} - \frac{kT}{q}\frac{dp}{dx}\right) = \mu_p p\frac{dE_{F_p}}{dx}, \tag{6}$$

где $k$ — постоянная Больцмана, $T$ — температура, $E_{F_n}$ и $E_{F_p}$ — уровни Ферми для электронов и дырок соответственно.

Обратная задача заключается в определении распределения активности изотопа $^{14}$C на основе измеренных значений электрохимической разности потенциалов или плотности тока [3]. Это возможно выразить через уравнение Пуассона:

$$AN = -\frac{\varepsilon}{q}\nabla^2\phi, \tag{7}$$

где $A$ — активность изотопа, $N$ — концентрация изотопа, $\phi$ — электрический потенциал. В выходных электрических характеристиках батареи напряжение холостого хода и ток короткого замыкания являются двумя наиболее важными параметрами, определяющими является ли батарея эффективной или нет [4]. В обобщенном случае ток короткого замыкания выражается следующим уравнением:

$$I_\beta = I_P + I_D + I_N = e\cdot\frac{1}{3E_g}\cdot\left[\int\limits_0^{L_p} E_\beta(x) f_e(L_p - x)\,dx + \int\limits_{L_p}^{L_p+W} E_\beta(x)\,dx + \int\limits_{L_p+W}^{L_p+W+L_n} E_\beta(x) f_h(x - L_p - W)\,dx\right]. \tag{8}$$

Определение основных свободных и управляющих параметров моделирования, таких как температура, концентрация примесей легирования, толщина пленки SiC и другие факторы, которые могут влиять на концентрацию и квазиуровни Ферми, является начальной задачей оптимизации. Требуется учет рекомбинации и диффузии, которые могут влиять на концентрацию носителей заряда и квазиуровни Ферми в гетеропереходе. В данной работе описана постановка задачи определения зависимости параметров от удельной активности и распределения источника активности. В докладе представляется решение задачи, систематизация и выбор оптимальных сценариев.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Долгополов М. В., Пузырная Г. В., Чепурнов В. И. и др.* Исследование решений уравнений твердофазной диффузии с бета-источником // Математическое моделирование и краевые задачи : Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием: в 2-х томах, 27–30 мая 2019 года. Самара: Самарский государственный технический университет. 2019. Т. 1. С. 208–212.
2. *Chipura A. S., Dolgopolov M. V.* Heterojunction betavoltaic Si14C-Si energy converter // J. Power Sources. 2024. V. 613. 234896.
3. *Долгополов М. В., Чипура А. С., Шишкин И. А.* Идентификация и экстракция параметров фотобетаэлементов экспериментальными данными // Comp. Nanotechnol. 2023. V. 10, N 3. P. 144–160.
4. *Shanxue Xi, Linxiang Li, Chunzhi Zhou et al.* Researches on the performance of GaN-PIN betavoltaic nuclear battery // Radiation Effects and Defects in Solids. 2022. V. 177, N 3–4. P. 213–229.

Долгополов Михаил Вячеславович, Чипура Александр Сергеевич
Самарский государственный технический университет,
ул. Молодогвардейская, 244, Самара 443100
mikhaildolgopolov68@gmail.com, al_five@mail.ru

## THE INVERSE PROBLEM OF ACTIVATING A HETEROJUNCTION CONVERTER

**M. V. Dolgpolov, A. S. Chipura**

**Abstract:** A mathematical model is presented and optimization of a betavoltaic element with a silicon carbide film activated by the carbon-14 isotope is carried out. Special attention is paid to differential equations describing non-equilibrium injection processes and the dynamics of current densities in the SiC/Si heterojunction. By solving a system of equations, it was possible to determine the dependences of the parameters on the specific activity and distribution of isotopes. Optimization has led to an increase in the efficiency and specific power of the element.

**Keywords:** inhomogeneous Poisson equation, continuity equation, inverse problem, activity, betavoltaics, heterojunctionю

Mikhail V. Dolgopolov, Alexander S. Chipura
Samara State Technical University,
244 Molodogvardeyskaya St., Samara 443100, Russia

*Математические заметки СВФУ*
*Январь—март, 2025. Том 32, № 1*

*УДК 517.956.6*

# О СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ С УСЛОВИЕМ ИОНКИНА — САМАРСКОГО ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

**А. В. Дюжева**

**Аннотация.** Изучается вопрос разрешимости спектральной нелокальной задачи Ионкина — Самарского для эллиптического уравнения второго порядка. Приведены некоторые свойства собственных чисел для эллиптических задач с нелокальными условиями Ионкина — Самарского. Для исследования использовался классический метод разделения переменных.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-1-109-110

**Ключевые слова:** эллиптическое уравнение, нелокальная задача, условие Ионкина — Самарского, спектральная задача, собственные числа, метод разделения переменных.

Одной из отправных работ изучения нелокальных задач для эллиптических уравнений является работа А. В. Бицадзе и А. А. Самарского [1], опубликованная в 1969 г. Также следует отметить работу Н. И. Ионкина [2], в которой был предложен метод, основанный на разложении решения по специальной биортогональной системе функций. Позже была опубликована работа А. А. Самарского [3], в которой были предложены условия, обобщающие условия по пространственной переменной условия, включающие в себя и классическую постановку начально-краевых задач, и задачу Н. И. Ионкина.

В настоящей работе изучался аналог спектральной задачи Ионкина — Самарского для модельного эллиптического уравнения второго порядка.

Пусть $x$ — точка интервала $(0,1)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$ — точка ограниченной области $\Omega$ пространства $\mathbb{R}^n$, $Q$ — цилиндр $(0,1)\times\Omega$, $S=(0,1)\times\partial\Gamma$ — боковая граница $Q$. Далее, пусть $c(x,y)$, $f(x,y)$ и $\gamma(y)$ — заданные функции, определенные при $x\in[0,1]$, $y\in\overline{\Omega}$, ($\Delta_y$ — оператор Лапласа по переменным $y_1,\dots,y_n$).

**Нелокальная задача.** *Найти числа $\lambda$ и $\gamma$, для которых задача*

$$u_{xx}+\Delta_y u=\lambda u,\quad (x,y)\in Q, \tag{1}$$

$$u|_S=0, \tag{2}$$

$$u(0,y)=\gamma u(1,y),\quad u_x(1,y)=0,\quad y\in\Omega, \tag{3}$$

*имеет нетривиальное решение $u(x,y)$, принадлежащее пространству $W_2^2(Q)$.*

**Теорема.** *Действительное число $\lambda$ будет собственным числом спектральной задачи, если выполняется одно из условий*

1) $\lambda \le \beta_1$, $\gamma = \cos\sqrt{\beta_k - \lambda}$ *для некоторого натурального числа $k$ такого, что $1 \le k \le k_0(\lambda)$;*

2) $\lambda \le \beta_1$, $\gamma = \frac{1}{2}(e^{\sqrt{\lambda-\beta_k}} + e^{-\sqrt{\lambda-\beta_k}})$ *для некоторого натурального числа $k$ такого, что $k \ge k_0(\lambda) + 1$;*

3) $\lambda > \beta_1$, $\gamma = \frac{1}{2}(e^{\sqrt{\lambda-\beta_k}} - e^{-\sqrt{\lambda-\beta_k}})$ *для некоторого натурального числа $k$.*

Исследование разрешимости спектральной задачи проведено с помощью классического метода разделения переменных.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических задач // Докл. АН СССР. 1969. Т. 4, № 185. С. 739–740.
2. *Ионкин Н. И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 2, № 3. С. 294–304.
3. *Самарский А. А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 11, № 16. С. 1925–1935.



Дюжева Александра Владимировна
Самарский государственный технический университет,
ул. Молодогвардейская, 244, Самара 443100
aduzheva@rambler.ru


# ON THE SPECTRAL PROBLEM WITH THE IONKIN–SAMARSKY CONDITION FOR AN ELLIPTIC EQUATION IN A CYLINDRICAL DOMAIN

**A. V. Dyujeva**


**Abstract:** The paper studies the solvability of the spectral nonlocal Ionkin-Samarsky problem for an elliptic equation of the second order. Some properties of eigenvalues are given for elliptic problems with non-local Samarsky-Ionkin conditions. The classical method of separating variables was used for the study.



**Keywords:** elliptic equation, non-local problem, Ionkin-Samarsky condition, spectral problem, eigenvalues, method of separation of variables.



Aleksandra V. Dyujeva
Samara State Technical University,
244 Molodogvardeyskaya St., Samara 443100, Russia

*Математические заметки СВФУ*
*Январь—март, 2025. Том 32, № 1*

*УДК 517.95*

# РЕГУЛЯРНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО–КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ПРИБЛИЖЕНИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

**Ф. А. Евсеев**

**Аннотация.** Рассматривается разрешимость аналога первой начальной краевой задачи для квазигидродинамической системы уравнений в приближении мелкой воды. При определенных условиях на данные показано, что существует единственное регулярное решение задачи локально по времени.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-1-111-112
**Ключевые слова:** начально-краевая задача, квазигидродинамическая система, регулярное решение, уравнение мелкой воды.

Рассмотрим систему квазигидродинамических уравнений в приближении мелкой воды:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(h\vec{u}) = \operatorname{div}(h\vec{w}), \quad \vec{w} = \tau((\vec{u},\nabla)\vec{u} + g\nabla h),\\
\frac{\partial(h\vec{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(h\vec{u}\otimes\vec{u}) + g\nabla\left(\frac{h^2}{2}\right) = 2\operatorname{div}(\nu h\widehat{\sigma}(\vec{u})) + \operatorname{div}(h\vec{w}\otimes\vec{u} + h\vec{u}\otimes\vec{w}),\\
(t,x)\in Q = (0,T)\times G, \quad G\subset\mathbb{R}^2,
\end{gathered} \tag{1}
$$

где тензор скоростей деформации $\widehat{\sigma}$ имеет вид

$$
\widehat{\sigma}(\vec{u}) = \widehat{\sigma} = \frac{1}{2}[(\nabla\otimes\vec{u}) + (\nabla\otimes\vec{u})^T], \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{2}(u_{ix_j} + u_{jx_i}),
$$

$G$ — ограниченная область с границей $\Gamma\in C^2$, коэффициент кинематической вязкости жидкости $\nu$, характерное время релаксации $\tau$ считаются заданными положительными константам. Пусть $S = (0,T)\times\Gamma$. Вектор $\vec{u} = (u_1(t,x_1,x_2), u_2(t,x_1,x_2))$ — усредненная по высоте скорость течения. Величина $h = h(t,x_1,x_2)$ интерпретируется как расстояние по вертикали от ровного дна водоема, расположенного в плоскости $x_1Ox_2$, до свободной поверхности жидкости. Система включает константу Галилея $g = 9.8\,(m/c^2)$, равную модулю ускорения свободного падения в гравитационном поле Земли.

Система (1) дополняется начально-краевыми условиями:

$$
\vec{u}|_S = 0, \quad (\vec{w}\cdot\vec{n})|_S = 0, \quad \vec{u}|_{t=0} = \vec{u}_0(x_1,x_2), \quad h|_{t=0} = h_0(x_1,x_2), \tag{2}
$$

где $\vec{n}$ — вектор внешней единичной нормали к $\Gamma$.

Система (1) представляет собой регуляризованную систему Сен-Венана, аналогом которой в газовой динамике является квазигазодинамическая система уравнений, выведенная в [1]. Детальный анализ свойств регуляризованных уравнений Сен-Венана представлен в [2]. Ранее вопросы регулярной разрешимости задачи (1), (2) не рассматривались.

В настоящей работе показано, что в каждом из случаев при определенных условиях на данные задача (1), (2) локально по времени имеет единственное решение, принадлежащее классу $W_p^{1,2}(Q)$.

## *ЛИТЕРАТУРА*

1. *Четверушкин Б. Н.* Кинетически согласованные схемы в газовой динамике. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999.
2. *Шеретов Ю. В.* Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2009.

Евсеев Федор Александрович
Югорский государственный университет,
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012;
Научно-аналитический центр рационального недропользования им. В. И. Шпильмана,
ул. Студенческая, 2, Ханты-Мансийск 628007
fedor_evseev@rambler.ru

# REGULAR SOLVABILITY OF THE FIRST INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE QUASIHYDRODYNAMIC SYSTEM OF EQUATIONS IN THE SHALLOW WATER APPROXIMATION

**F. A. Evseev**

**Abstract:** In this paper we consider the solvability of the analog of the first initial boundary value problem for the quasihydrodynamic system of equations in the shallow water approximation. Under certain conditions on the data, it is shown that there exists a single regular solution of the problem locally in time.

**Keywords:** initial-boundary value problem, quasi-hydrodynamic system, regular solution, shallow water equation.

Fedor A. Evseev
Yugra State University,
16 Chekhov St., Khanty-Mansiysk 628012, Russia;
V.I. Shpilman research and analytical centre
for the rational use of the subsoil,
2 Studencheskaya St., Khanty-Mansiysk 628007, Russia

*Математические заметки СВФУ*
*Январь—март, 2025. Том 32, № 1*

*УДК 517.9*

# НЕПОЛНАЯ ЗАДАЧА ТИПА КОШИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ДРОБНОГО УРАВНЕНИЯ

**Т. А. Захарова, В. Е. Федоров**

**Аннотация.** С использованием теории дробных степеней секториального оператора доказано существование единственного решения неполной задачи типа Коши для квазилинейного дифференциального уравнения в банаховом пространстве, разрешенного относительно старшей производной Римана — Лиувилля.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-1-113-114

**Ключевые слова:** квазилинейное уравнение, задача типа Коши, дефект задачи типа Коши, комплексная степень оператора.

**Введение.** Рассматривается квазилинейное уравнение в банаховом пространстве

$$D^{\alpha}z(t) + Az(t) = B(D^{\alpha_1}z(t), \dots, D^{\alpha_n}z(t), D^{\alpha-m-r}z(t), \dots, D^{\alpha-1}z(t)) \qquad (1)$$

с дробными производными Римана — Лиувилля $D^{\beta}z$ при $\beta > 0$ и дробными интегралами Римана — Лиувилля $D^{\beta}z$ при $\beta \leq 0$. Здесь $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $r, n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha - 1$, $m_l - 1 < \alpha_l \leq m_l \in \mathbb{Z}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1, 2, \dots, n$. Обозначим $\underline{\alpha} := \max\{\alpha_k : \alpha_k - m_k < \alpha - m,\ k = 1, 2, \dots, n\}$, $\underline{m} := \lceil \underline{\alpha} \rceil$, $\overline{\alpha} := \max\{\alpha_k : \alpha_k - m_k > \alpha - m,\ k = 1, 2, \dots, n\}$, $\overline{m} := \lceil \overline{\alpha} \rceil$, $m^* := \max\{\underline{m}, \overline{m} + 1, 0\}$. Рассмотрим задачу

$$D^{\alpha-m+k}z(t_0) = 0,\ k = 0, 1, \dots, m^*-1, \quad D^{\alpha-m+k}z(t_0) = z_k,\ k = m^*, \dots, m-1; \qquad (2)$$

Пусть $\mathscr{Z}$ — банахово пространство, $\gamma \in (0,1)$, $\mathscr{Z}_{\gamma} := D_{A^{\gamma}}$ — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_{\gamma} := \|A^{\gamma}\cdot\|_{\mathscr{Z}}$ [1]. Пусть $U$ — открытое подмножество $\mathbb{R} \times \mathscr{Z}_{\gamma}^{n+m+r}$, задано $B : U \to \mathscr{Z}$, для каждого $(t, x_1, x_2, \dots, x_{n+m+r}) \in U$ существуют окрестность $V \subset U$, $C > 0$, $\delta \in (0,1]$ такие, что для всех $(t, y_1, y_2, \dots, y_{n+m+r}), (s, v_1, v_2, \dots, v_{n+m+r}) \in V$

$$\|B(t, y_1, \dots, y_{n+m+r}) - B(s, v_1, \dots, v_{n+m+r})\|_{\mathscr{Z}} \leq C|t-s|^{\delta} + C\sum_{k=1}^{n+m+r}\|y_k - v_k\|_{\gamma}. \qquad (3)$$

Работа поддержана грантом Российского научного фонда и Правительства Челябинской области № 24-21-20015.

**Теорема.** *Пусть* $\alpha > 0$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha - 1$, $-A \in \mathscr{A}_\alpha(\theta_0, 0)$, $0 \in \rho(A)$, *отображение* $B : U \to \mathscr{X}$ *удовлетворяет условию* (3), $\gamma > 1 - 1/\alpha$, $(t_0, 0, \ldots, 0, z_{m^*}, z_{m^*+1}, \ldots, z_{m-1}) \in U$, $z_k \in \mathscr{X}_{1+\gamma}$, $k = m^*, m^* + 1, \ldots, m - 1$. *Тогда для некоторого* $t_1 > t_0$ *существует единственное решение задачи* (1), (2) *на* $[t_0, t_1]$.

Абстрактный результат применяется к исследованию начально-краевых задач с нелинейной частью, содержащей частные производные по пространственным переменным.

### *ЛИТЕРАТУРА*

**1.** *Fedorov V. E., Avilovich A. S., Zakharova T. A.* Complex powers of fractional sectorial operators and quasilinear equations with Riemann–Liouville derivatives // Lobachevskii J. Math. 2023. V. 44, N 2. P. 580–593.

Захарова Татьяна Анатольевна, Федоров Владимир Евгеньевич
Челябинский государственный университет,
математический факультет, кафедра математического анализа,
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск 454001
tanya_1997_smirnova@mail.ru, kar@csu.ru

## INCOMPLECT CAUCHY TYPE PROBLEM FOR QUASILINEAR FRACTIONAL EQUATIONS

**T. A. Zakharova, V. E. Fedorov**

**Abstract:** Using the theory of fractional powers of the sectorial operator, the existence of a unique solution to an incomplete Cauchy-type problem for a quasi-linear differential equation in Banach space resolved with respect to the highest Riemann–Liouville derivative is proved.

**Keywords:** quasilinear equation, Cauchy type problem, defect of Cauchy type problem, complex power of operator.

Tatyana A. Zakharova, Vladimir E. Fedorov
Chelyabinsk State University,
Mathematics Faculty, Mathematical Analysis Department,
129 Brat'ev Kashirinyh St., Chelaybinsk 454001, Russia

*Математические заметки СВФУ*
*Январь—март, 2025. Том 32, № 1*

*УДК 517.928*

# СМЕНА УСТОЙЧИВОСТИ В ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЛАЗЕРА

**О. С. Кипкаева**

**Аннотация.** Работа посвящена исследованию модели лазерного диода с оптоэлектронной обратной связью, представляющей собой сингулярно возмущенную систему. Установлена смена устойчивости инвариантного многообразия системы, которая может протекать по разным сценариям.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-1-115-116
**Ключевые слова:** сингулярные возмущения, инвариантные многообразия, затягивание потери устойчивости, траектории-утки, модель лазера.

**Введение.** Рассматривается модель лазерного диода с оптоэлектронной обратной связью, представляющей собой сингулярно возмущенную систему. Показано, что в системе могут наблюдаться различные сценарии смены устойчивости медленного инвариантного многообразия. Один из таких сценариев связан с возникновением траекторий-уток [1, 2], т. е. одномерных медленных инвариантных многообразий со сменой устойчивости. Обычно траектории-утки возникают, когда одно из собственных значений матрицы линеаризации быстрой подсистемы меняет знак и становится положительным. Второй сценарий смены устойчивости является сравнительно новым и связан с одновременным обнулением коэффициентов мнимых и вещественных частей собственных значений матрицы линеаризации быстрой подсистемы [3].

**Модель лазерного диода.** Модель лазерного диода с оптоэлектронной обратной связью в безразмерном виде описывается системой [4]

$$\varepsilon\dot{x} = x(y-1), \quad \varepsilon\dot{y} = \gamma\left[\delta_0 - y + \alpha\frac{w+x}{1+s(w+x)} - xy\right], \quad \dot{w} = -(w+x), \tag{1}$$

где $x, y$ — нормированные плотности фотонов и плотности инверсии населенностей, $\gamma$ — соотношение между временами жизни фотонов и носителя.

В зависимости от значений малых параметров $\varepsilon$ и $\gamma$ в системе (1) происходят различные сценарии смены устойчивости медленного инвариантного многообразия. В случае, когда малые параметры одного порядка малости, система имеет точное инвариантное многообразие $x \equiv 0$, которое делится линией $y = 1$ на устойчивую и неустойчивую части. Наличие точного инвариантного многообразия играет роль организующего начала для траекторий системы, которые являются тректориями-утками.

Для случая $\varepsilon \ll \gamma$ в системе могут наблюдаться два разных сценария смены устойчивости. Дополнительно к уже рассмотренному сценарию, связанному с траекториями-утками, появляется сценарий смены устойчивости, при котором у пары комплексно-сопряженных собственных значений матрицы Якоби быстрой подсистемы с отрицательной вещественной частью при критическом значении параметра обнуляются и вещественные части, и коэффициенты при мнимых частях, после чего собственные значения становятся вещественными разных знаков.

**Заключение.** В работе рассмотрены сценарии смены устойчивости инвариантных многообразий сингулярно возмущенных систем на примере модели лазерного диода с оптоэлектронной обратной связью.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П.* Теория бифуркаций. М.: ВИНИТИ, 1986. Т. 5.
2. *Benoit E., Callot J.L., Diener F. Diener M.* Chasse au canard // Collect. Math. 1981. V. 31–32, N 1–3. P. 37–119.
3. *Кипкаева О. С.* Об одном сценарии смены устойчивости инвариантных многообразий сингулярно возмущенных систем // Вестн. Самарск. ун-та. Естественнонаучная серия. 2024. Т. 30, № 2. С. 20–29.
4. *Marino F. et al.Arecchi F. T.* Mixed-mode oscillations via canard explosions in light-emitting diodes with optoelectronic feedback // Physical Review E. 2011. V. 84, N 4. 047201.



Кипкаева Ольга Сергеевна
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С. П. Королева,
Московское шоссе, 34, Самара 443086
`kipkaeva.os@ssau.ru`


## STABILITY CHANGE IN A DYNAMICAL LASER MODEL


**O. S. Kipkaeva**



**Abstract:** The paper is devoted to the study of a laser diode model with optoelectronic feedback, described by a singularly perturbed system. The change of stability of the invariant manifold of the system, which can proceed according to different scenarios, is established.



**Keywords:** differential equations, delayed stability loss, singular perturbations, invariant manifolds, laser model.



Olga S. Kipkaeva
Samara National Research University,
34 Moskovskoye highway, Samara 443086, Russia

*Математические заметки СВФУ*
*Январь—март, 2025. Том 32, № 1*

*УДК 517.956*

# НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С ЧАСТИЧНО ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

**А. И. Кожанов**

**Аннотация.** Излагаются результаты о разрешимости нелокальных задач с интегральными по выделенной переменной $t$ условиями для дифференциальных уравнений

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + a(t)\right)\Delta u + b(t)u = f(x,t) \tag{$*$}$$

($\Delta$ — оператор Лапласа по пространственным переменным $x_1, \dots, x_n$). Суть результатов — в нахождении достаточных условий существования и единствености регулярных решений (т. е. решений, имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение $(*)$).

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-1-117-118

**Ключевые слова:** дифференциальное уравнение соболевского типа, нелокальная задача.

Пусть $\Omega$ — ограниченная область из пространства $\mathbb{R}^n$ переменных $x_1, \dots, x_n$ с гладкой границей $\Gamma$, $Q$ — цилиндр $\Omega \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$, $S = \Gamma \times (0,T)$ — боковая граница $Q$. Далее, пусть $f(x,t)$, $a(t)$, $b(t)$ и $N(t)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$, $\Delta$ есть оператор Лапласа по переменным $x_1, \dots, x_n$.

**Нелокальная задача I.** *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре $Q$ решением уравнения*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + a(t)\right)\Delta u + b(t)u = f(x,t) \tag{1}$$

*и такую, что для нее выполняются условия*

$$u(x,t)|_S = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$\int\limits_0^T N(t)u(x,t)\,dt = 0, \quad x \in \Omega. \tag{4}$$

Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (тема «Аналитическое и численное исследование обратных задач об определении параметров источников атмосферного или водного загрязнения и (или) параметров среды», код темы FENG-2023-0004.)

**Нелокальная задача II.** *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре $Q$ решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условия* (2) *и* (4), *а также условие*

$$u_t(x,0) = 0.$$

Уравнения вида (1) в мировой математике в последнее время называют *уравнениями соболевского типа.*

Определим пространство $V$:

$$V = \left\{ v(x,t) : \frac{\partial^m v(x,t)}{\partial t^m} \in L_2\big(0,T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\big),\ m = 0,1,2 \right\}.$$

Для изучаемых нелокальных задач I и II доказываются теоремы разрешимости в пространстве $V$. Указываются также некоторые возможные обобщения полученных результатов.

Кожанов Александр Иванович
Интститут математики им. С. Л. Соболева
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
kozhanov@math.nsc.ru

## NONLOCAL PROBLEMS WITH PARTIALLY INTEGRAL CONDITIONS FOR DIFFERENT EQUATIONS OF THE FOURTH ORDER SOBOLEV TYPES

**A. I. Kozhanov**

**Abstract:** The report presents results on the solvability of non-local problems with integral conditions with respect to the selected variable $t$ for differential equations

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + a(t)\right)\Delta u + b(t)u = f(x,t) \qquad (*)$$

($\Delta$ is the Laplace operator in spatial variables $x_1, \dots, x_n$). The essence of the results is to find sufficient conditions for the existence and uniqueness of regular solutions (i.e. solutions that have all derivatives generalized according to S. L. Sobolev, included in the equation $(*)$).

**Keywords:** Sobolev type equations, nonlocal problem.

Aleksandr I. Kozhanov
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia

*Математические заметки СВФУ*
*Январь—март, 2025. Том 32, № 1*

*УДК 517.9*

# МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ АСИМПТОТИК РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ГОЛОМОРФНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ОКРЕСТНОСТИ ИРРЕГУЛЯРНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК

**М. В. Коровина**

**Аннотация.** Работа посвящена проблеме Пуанкаре в аналитической теории дифференциальных уравнений, а именно построению асимптотик решений обыкновенных дифференциальных уравнений с голоморфными или мероморфными коэффициентами в окрестности иррегулярных особых точек в пространствах функций k-экспоненциального роста. В работе получен общий вид асимптотик решений дифференциальных уравнений с мероморфными коэффициентами в окрестности их иррегулярных особых точек.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-1-119-121
**Ключевые слова:** иррегулярные особые точки.

Проблема построения равномерных асимптотик решений дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами в окрестности иррегулярных особых точек, в том числе бесконечности, является классической задачей аналитической теории дифференциальных уравнений и в общем виде была сформулирована Пуанкаре в [1, 2]. В этих работах Пуанкаре сформулировал вопрос об общем виде асимптотических разложений в окрестности иррегулярной особой точки. Ответ на этот вопрос дается в настоящей работе. В данной работе построим общий вид этих асимптотик в пространстве функций $k$-экспоненциального роста.

Без ограничения общности будем считать, что особой точкой уравнения является нуль. Рассмотрим уравнение

$$a_n(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^n u(x) + a_{n-1}(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} u(x) + \dots + a_i(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^i u(x) + \dots + a_0(x)u(x) = 0. \quad (1)$$

Здесь $a_n(x)$ — функции, голоморфные в некоторой окрестности нуля.

Целью нашего исследования является построение асимптотик решений уравнения (1) при $x \to 0$ в предположении, что $x = 0$ является иррегулярной особой точкой. Общий вид асимптотик в окрестности регулярных особых точек хорошо известен, это конормальные асимптотики.

Как показано в работе [3], уравнение (1) с иррегулярной особенностью в нуле может быть записано в виде

$$\widehat{H}u(x) = \left(-\frac{1}{k}x^{k+1}\frac{d}{dx}\right)^n u(x) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i^0(x)\left(-\frac{1}{k}x^{k+1}\frac{d}{dx}\right)^i u(x) = 0, \qquad (2)$$

где $k \in N$, $a_i^0(x)$ — функции, голоморфные в окрестности нуля. В [3] найдено минимальное натуральное $k$. Заметим, что тот же результат будет и в случае, когда коэффициенты $a_i(x)$ будут иметь мероморфную особенность в нуле.

Определение. *Символом дифференциального оператора* $\widehat{H}$ называется функция

$$H(r,p) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i^0(r)p^i.$$

*Основным символом оператора* $\widehat{H}$ называется полином

$$H_0(p) = H(0,p) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i^0(0)p^i.$$

Вопрос о виде равномерной асимптотики в окрестности иррегулярной особой точки проще всего решается в случае, когда корни основного символа $H_0(p)$ являются простыми. В [4, 5] доказано, что асимптотики в этом случае имеют вид

$$\sum_{i=1}^{n} e^{P_i(\frac{1}{x})}x^{\sigma_i}\sum_{k=0}^{\infty} A_i^k x^k,$$

где $P_i(y) = \lambda_i y^k + \alpha_i^{k-1}y^{k-1} + \cdots + \alpha_i^1 y$, $\sigma_i$ — некоторые комплексные числа, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_i^k x^k$ — асимптотический ряд. Простому $j$-му корню полинома $H_0(p)$ будет соответствовать асимптотический член вида $e^{P_j(\frac{1}{x})}x^{\sigma_j}\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_j^k x^k$, $j = 1,\dots,n$. В случае кратных корней задача построения асимптотик значительно сложнее. В работах [6, 7] построены асимптотики решений в окрестности бесконечности в пространствах функций экспоненциального роста для уравнения (1) в случае, когда $a_n(x) = 1$. Заметим, что бесконечность, вообще говоря, является иррегулярной особой точкой. В общем случае на вопрос о виде асимптотик в окрестности произвольной иррегулярной особой точки отвечает

**Теорема.** *Любая асимптотика, соответствующая нулевому корню основного символа уравнения* (2) *в пространстве функций* $k$*-экспоненциального роста, представима в виде суммы асимптотических членов вида*

$$u_i(x) \approx \exp(P_i(x^{-\frac{1}{l_i}}))x^{\sigma_i}\sum_{k=0}^{\infty} a_k^i x^{\frac{k}{l_i}}, \quad i = 1,\dots,n,$$

*где $l_i \in N$, $\sigma_i$ — комплексные числа, $P_i(x)$ является полиномом, степень которого не превышает $(k-1)l_i$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^i x^i$ — асимптотический ряд.*

Заметим, что корень основного символа $p_i \neq 0$ сдвигается в нуль с помощью экспоненциальной подстановки $u(x) = \exp \frac{p_i}{x^k} u_i(x)$.

Теорема доказана с помощью применения методов ресургентного анализа и метода повторного квантования, основой которого является интегральное представление Лапласа — Бореля [8].

## *ЛИТЕРАТУРА*

1. *Poincaré H.* Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires // Acta Math. 1886. V. 8. P. 295–344.
2. *Poincaré H.* Analysis of the mathematical and natural works of Henri Poincaré. Selected Works in Three Volumes. Moscow: Nauka, 1974. V. 3.
3. *Kats D. S.* Computation of the asymptotics of solutions for equations with polynomial degeneration of the coefficients // Differ. Equ. 2015. V. 51. P. 1589–1594.
4. *Korovina M. V., Shatalov V. E.* Differential equations with degeneration and resurgent analysis // Differ. Equ. 2010. V. 46, N 9. P. 1267–1286.
5. *Korovina M. V.* Asymptotics of solutions of equations with higher degenerations // Differ. Equ. 2012. V. 48, N 5. P. 717—729.
6. *Korovina M. V.* Asymptotics of solutions of linear differential equations with holomorphic coefficients in the neighborhood of an infinitely distant point // Mathematics. 2020. V. 8. 2249.
7. *Korovina M. V.* Uniform asymptotics of solutions to linear differential equations with holomorphic coefficients in the neighborhood of an infinitely // Lobachevskii J. Math. 2023. V. 44, N 7. P. 2765–2780.
8. *Sternin B. Yu., Shatalov V. E.* Borel–Laplace transform and asymptotic theory. Introduction to resurgent analysis. FL USA: Boca Raton, 1996.

Коровина Мария Викторовна
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
факультет ВМК,
Ленинские горы, д. 1, стр. 52, Москва 119991
`betelgeuser@yandex.ru`

# A METHOD FOR CONSTRUCTING ASYMPTOTICS TO SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH HOLOMORPHIC COEFFICIENTS IN THE NEIGHTBORHOOD OF IRREGULAR SINGULAR POINTS

**M. V. Korovina**

**Abstract:** The work is devoted to the Poincare problem in the analytical theory of differential equations. Namely the constructions of asymptotic of solutions of ordinary differential equations with holomorphic or meromorphic coefficients in the vicinity of irregular points.The paper provides the general view of the asymptotic of solutions of differential equations with meromorphic coefficients in the neighborhood of irregular points.

**Keywords:** irregular singular points.

Maria V. Korovina
Lomonosov Moscow State University,
Faculty of the VMC,
1, p. 52, Leninskie gory, Moscow 119192, Russia

## Математическая жизнь

## Межгородской научно-исследовательский семинар «Неклассические задачи математической физики»

**21 декабря 2024 г.**

«Об однозначной разрешимости нелокальных задач с интегральным условием для уравнения третьего порядка».

Докладчики: О. Зикиров, М. Сагдуллаева (Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан).

Разрешимость смешанных задач с интегральными условиями для уравнений в частных производных третьего порядка представляет собой важную область исследования в теории дифференциальных уравнений и их приложениях. Такие задачи возникают в различных областях физики, механики сплошных сред, теории колебаний и других дисциплинах. В докладе рассматривается нелокальная задача с интегральным условием для уравнения в частных производных третьего порядка с оператором теплопроводности в главной части. Доказаны теоремы существования и единственности решения изучаемой нелокальной задачи. При доказательстве разрешимости задачи применяются методы теории дифференциальных уравнений, функции Грина и теории интегральных уравнений. Изучаемая задача сводится к эквивалентному интегральному уравнению Вольтерра второго рода, которое безусловно разрешимо.

**1 февраля 2025 г.**

«Краевые задачи с условиями третьего рода для уравнений диффузии дробного порядка».

Докладчик: Ф. Г. Хуштова (Институт прикладной математики и автоматизации — филиал Федерального научного центра «Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук», г. Нальчик, Россия).

В докладе рассмотрены краевые задачи в ограниченной и неограниченной областях с условиями третьего рода для уравнения диффузии дробного порядка и уравнения диффузии с оператором Бесселя. Доказаны теоремы существования и единственности. Исследованы некоторые свойства функций Грина рассматриваемых задач. Показано, что в случае, когда в рассматриваемых задачах условие третьего рода вырождается в условие второго рода, полученные результаты согласуются с известными результатами для задач с краевыми условиями второго рода.

**15 февраля 2025 г.**

«Единственность решения линейной обратной задачи для эволюционного дифференциального уравнения произвольного натурального порядка».

Докладчики: И. В. Тихонов (Московский государственный университет, Москва, Россия), А. Муатаз (МТУСИ, Москва, Россия).

В банаховом пространстве исследуется линейная обратная задача для эволюционного дифференциального уравнения произвольного натурального порядка $n$. Стационарное неоднородное слагаемое в уравнении предполагается неизвестным. В начальный момент времени заданы условия Коши, к которым добавлено дополнительное финальное переопределение вида $u^{(q)}(T) = 0$. Для поставленной задачи найден критерий единственности решения. Он выражен в спектральных терминах — через нули специальной целой функции типа Миттаг-Леффлера. Выбор последней зависит от взятых параметров $n$, $q$. Результат носит универсальный характер и не требует ограничений на тип дифференциального уравнения. Отдельно обсуждаются возможные следствия.

Доклад раскрывает общий подход, возможный при изучении неклассических задач математической физики. Особый интерес, на наш взгляд, представляет связь этого подхода с известными результатами из теории целых функций.

**1 марта 2025 г.**

«Линейные и квазилинейные эволюционные уравнения с распределенной производной Герасимова — Капуто».

Докладчик: Н. В. Филин (Челябинский государственный университет, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Челябинск, Россия).

В докладе рассматриваются вопросы однозначной разрешимости задачи Коши для некоторых классов эволюционных уравнений в банаховых пространствах, разрешенных относительно распределенной дробной производной Герасимова — Капуто. Распределенная производная задается интегралом Римана — Стилтьеса и включает в себя, в частности, непрерывно распределенный и дискретно распределенный случаи. Найдены необходимые и достаточные условия существования сильно непрерывных разрешающих семейств операторов, а также аналитических в секторе разрешающих семейств операторов для линейных уравнений в банаховых пространствах с распределенной дробной производной Герасимова — Капуто. Для соответствующих неоднородных уравнений получены условия разрешимости задачи Коши. Исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи Коши для квазилинейных уравнений, линейная часть которых порождает аналитическое разрешающее семейство. Нелинейный оператор в таком уравнении зависит от конечного набора распределенных производных «младшего» порядка. Полученные абстрактные результаты применены к изучению начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных с распределенной производной Герасимова — Капуто по времени.

**15 марта 2025 г.**

«Метод линеаризации и пороговые явления для радиально-симметричных многомерных уравнений Эйлера — Пуассона».

Докладчик: О. С. Розанова (Московский государственный университет, Москва, Россия).

Исследуется вопрос о строгом выделении класса радиально-симметричных гладких начальных данных задачи Коши, соответствующих глобально гладкому решению, для достаточно широкого класса уравнений, связанных с уравнениями Эйлера — Пуассона без давления в случае многих пространственных переменных. При выходе из этого класса у соответствующего решения в течение конечного времени образуется особенность. Для случая одной пространственной переменной задача решена в статье S. Engelberg, H. Liu, E. Tadmor, Critical thresholds in Euler–Poisson equations, Indiana Univ. Math. J., 2001, для радиально симметричного случая окончательного решения нет, несмотря на многочисленные попытки. Рассказано о самом недавнем прогрессе в этой задаче. А именно показано, что вопрос о критерии образования особенности может быть сведен к исследованию свойств решений некоторого линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения для вспомогательной функции. В некоторых случаях такой критерий может быть получен в терминах начальных данных. В остальных случаях можно построить простую численную процедуру, на основе которой может быть решен вопрос о сохранении гладкости для любого набора начальных данных.

# *ВНИМАНИЮ АВТОРОВ*

1. К публикации в журнале «Математические заметки СВФУ» принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики, механики и информатики. Статьи, опубликованные ранее, а также направленные в другие издания, редакцией не рассматриваются. Редакционный совет вправе воздержаться от принятия статьи к рассмотрению, если она не соответствует профилю журнала.

2. Направляя статью в редакцию журнала, автор (соавторы) на безвозмездной основе передает(ют) издателю на срок действия авторского права по действующему законодательству РФ исключительное право на использование статьи или отдельной ее части (в случае принятия статьи к опубликованию) на территории всех государств, где авторские права в силу международных договоров Российской Федерации являются охраняемыми, в том числе следующие права: на воспроизведение, на распространение, на публичный показ, на доведение до всеобщего сведения, на перевод на иностранные языки (и исключительное право на использование переведенного произведения вышеуказанными способами), на предоставление всех вышеперечисленных прав другим лицам. Одновременно со статьей автор (соавторы) направляет в редакцию подписанный лицензионный договор на право использования научного произведения в журнале. Образец договора высылается авторам по электронной почте вместе с сообщением о принятии статьи к печати.

3. Для рассмотрения статьи на предмет ее публикации в журнале в редакцию представляются текст статьи объемом не более 1,5 авторских листов (18 страниц журнального текста), написанной на русском или, по согласованию с редакцией, на английском языке, а также сопроводительное письмо, в котором сообщается, что статья направляется именно в журнал «Математические заметки СВФУ», и информация об авторе (коллективе авторов) с указанием фамилии, имени и отчества, полного почтового адреса для переписки, места работы, подробного служебного адреса, адреса электронной почты и номера телефона. Статьи объемом более 1,5 авторских листов, как правило, не рассматриваются и могут быть приняты к рассмотрению и опубликованы лишь по специальному решению редакционного совета.

4. Статья должна быть подготовлена с использованием текстового редактора LaTeX и представлена в виде файлов форматов pdf и tex.

5. В начале статьи указывается индекс УДК и/или MSC. Статья сопровождается аннотацией объемом не менее 100 слов, желательно без формул, и списком ключевых слов. Аннотация и список должны быть представлены на русском и английском языках.

6. Список литературы печатается в конце текста. Ссылки на литературу в тексте нумеруются в порядке их появления и даются в квадратных скобках. Ссылки на неопубликованные работы нежелательны. Оформление литературы должно соответствовать требованиям стандартов (примеры библиографических описаний см. в последних номерах журнала).

7. Издание осуществляет рецензирование всех поступающих в редакцию материалов, соответствующих ее тематике, с целью их экспертной оценки. Все рецензенты являются признанными специалистами по тематике рецензируемых материалов и имеют в течение последних 3 лет публикации по тематике рецензируемой статьи. Рецензии хранятся в редакции издания в течение 5 лет.

8. Принятая к рассмотрению статья направляется на анонимное рецензирование. На основании рецензии редсовет принимает решение о возможности публикации статьи, которое сообщается автору. Автор вправе сообщить свои замечания и возражения к рецензии. Повторное решение редсовета по статье является окончательным.

9. Редакция издания направляет авторам представленных материалов копии рецензий или мотивированный отказ, а также обязуется направлять копии рецензий в Министерство науки и высшего образования Российской Федерации при поступлении в редакцию издания соответствующего запроса.

10. После редакционной подготовки непосредственно перед публикацией автору высылается корректура. По возможности в наиболее короткие сроки необходимо ее прочесть, внести исправления (правка против авторского оригинала нежелательна) и направить в редакцию. Статья выходит в свет только после получения от автора (коллектива авторов) авторской корректуры, подписанной автором (всеми соавторами) в печать.

11. В соответствии с международными законами об авторском праве Редакция уведомляет авторов журнала об их ответственности за получение ими в случае необходимости письменного разрешения на использование охраняемых авторским правом материалов, таких, как цитаты, воспроизведение данных, иллюстраций и любых иных материалов, которые могут быть использованы в их публикациях, а также о том, что вытекающая отсюда ответственность за нарушение таких авторских прав лежит на авторах. Плата за опубликование с авторов или учреждений, где работают авторы, не взимается, и опубликованные статьи не оплачиваются.

12. Права авторов на использование материалов статей и переводов статей из журнала «Математические заметки СВФУ» в иных публикациях определяются общими международными и российскими законами об авторских правах.

16+

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций
Свидетельство о регистрации № ПИ № ФС 77–59001 от 11.08.2014 г.

Учредитель: ФГАОУ ВО «Северо-Восточный
федеральный университет имени М. К. Аммосова»
ул. Белинского, 58, Якутск 677000

Подписано в печать 02.04.2025. Формат 70 × 108/16.
Печать офсетная. Печ. л. 10,32. Уч.-изд. л. 8,72. Тираж 50 экз. Заказ № 54.

Издательский дом Северо-Восточного федерального университета,
677891, г. Якутск, ул. Петровского, 5.
Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии ИД СВФУ.
Свободная цена.