



СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. К. АММОСОВА

ISSN 2411-9326

# Математические заметки СВФУ

**Том 32**  
№ 3. 2025

### **Редакционный совет**

**Главный редактор: Егоров И. Е.**, д.ф.-м.н., профессор, СВФУ

**Зам. главного редактора: Кожанов А. И.**, д.ф.-м.н., профессор, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

**Зам. главного редактора: Попов С. В.**, д.ф.-м.н., профессор, СВФУ

**Ответственный секретарь: Евсеев З. И.**, СВФУ

### **Члены редакционного совета:**

**Бородин О. В.**, д.ф.-м.н., профессор, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

**Вабищевич П. Н.**, д.ф.-м.н., профессор, Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН

**Васильев В. И.**, д.ф.-м.н., профессор, СВФУ

**Зикиров О. С.**, д.ф.-м.н., профессор, Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Узбекистан

**Морозов А. С.**, д.ф.-м.н., профессор, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

**Пятков С. Г.**, д.ф.-м.н., профессор, Югорский государственный университет

**Хлуднев А. М.**, д.ф.-м.н., профессор, Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

**Itou H.**, Ph.D., Professor, Tokyo University of Science, Japan

**Ruzhansky M.**, Professor, Ghent University, Belgium

**Tani A.**, Professor, Keio University, Japan

СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени М. К. АММОСОВА

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ СВФУ

ОСНОВАН В 1994 ГОДУ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ВЫХОДИТ 4 РАЗА В ГОД

Том 32, № 3 (127)

Июль—сентябрь, 2025

### СОДЕРЖАНИЕ

#### Математика

Кожанов А. И., Спиридонова Н. Р. Вырождающиеся дифференциальные уравнения с кратными характеристиками . . . .	3
A. I. Kozhanov, N. R. Spiridonova A degenerate differential equations with multiple characteristics . . . . .	13
Лазарев Н. П., Никифоров Д. Я., Сафонов С. В. Задачи о контакте пластины, содержащей включение, с объемными и точечными неподвижными препятствиями . . . . .	15
N. P. Lazarev, D. Ya. Nikiforov, S. V. Safonov Problems for plates with rigid inclusions contacting with flat and pointwise obstacles on the front surfaces . . . . .	25
Мелихова Е. В. О числе граней мечено-порядковых многогранников . . . . .	28
E. V. Melikhova On the number of faces of marked order polytopes . . .	51
Мингнарлов С. Б. Разрешимость задачи Коши для одной псевдогиперболической системы четвертого порядка . . . . .	53
S. B. Mingnarov Solvability of the Cauchy problem for one fourth-order pseudohyperbolic system . . . . .	60
Подгаев А. Г., Кулеш Т. Д. Исследование разрешимости задачи Стефана для случая сложной структуры вещества . . . . .	61
A. G. Podgaev, T. D. Kulesh Investigation of solvability of the Stefan problem for the case of complex structure of matter . . . . .	80
Солдатов О. А. Идентификация коэффициента теплообмена по граничным интегральным данными . . . . .	82

<b>О. А. Soldatov</b> <i>Identification of heat transfer coefficient from boundary integral measurement</i> .....	<b>93</b>
<b>Федоров В. Е., Нагуманова А. В., Сагимбаева А. О.</b> <i>Задача типа Коши и обратные задачи для уравнений с регулярным интегро-дифференциальным оператором типа Римана — Лиувилля и замкнутым оператором</i> .....	<b>95</b>
<b>V. E. Fedorov, A. V. Nagumanova, A. O. Sagimbaeva</b> <i>A Cauchy type problem and inverse problems for equations with a Riemann–Liouville type regular integro-differential operator and a closed operator</i> .....	<b>110</b>
<b>Математическое моделирование</b>	
<b>Пчелинцев А. Н.</b> <i>О высокоточном численном методе исследования скрытых аттракторов в кусочно-гладкой системе Чуа</i> .....	<b>113</b>
<b>A. N. Pchelintsev</b> <i>On a highly accurate numerical method for studying of the hidden attractors in the piecewise smooth Chua system</i> .....	<b>132</b>
<b>Математическая жизнь — конференция</b> .....	<b>135</b>

АДРЕС ИЗДАТЕЛЯ:

СВФУ, ул. Белинского, 58, Якутск, 677000

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

СВФУ, ул. Кулаковского, 48, каб. 543, Якутск, 677000

Телефон: 8(4112)32-14-99, Факс: 8(4112)36-43-47;

<http://mzsvfu.ru>

e-mail: [prokopevav85@gmail.com](mailto:prokopevav85@gmail.com); [yktmatzam@gmail.com](mailto:yktmatzam@gmail.com);

[ivanegorov51@mail.ru](mailto:ivanegorov51@mail.ru)

© Северо-Восточный федеральный университет  
имени М. К. Аммосова, 2025

## ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

А. И. Кожанов, Н. Р. Спиридонова

**Аннотация.** Изучается разрешимость в анизотропных пространствах Соболева различных краевых задач для некоторых классов дифференциальных уравнений с кратными характеристиками. Целью работы является доказательство теорем существования и единственности регулярных решений – решений, имеющих все обобщенные по Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-3-3-14

**Ключевые слова:** дифференциальные уравнения с кратными характеристиками, вырождение, краевые задачи, регулярные решения, существование, единственность.

### Введение

Краевые задачи для дифференциальных уравнений с кратными характеристиками (к которым принадлежит, например, линеаризованное уравнение Кортевега — де Фриза [1]) представляются достаточно хорошо изученными (см. [2–8]). Менее изучены краевые задачи для вырождающихся дифференциальных уравнений с кратными характеристиками [9, 10].

В настоящей работе будут изучаться краевые задачи для дифференциального уравнения

$$h(t)u_{xxt} + \alpha u_{xxx} + a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u = f(x, t), \quad (*)$$

в котором  $h(t)$ ,  $a(x, t)$ ,  $b(x, t)$ ,  $c(x, t)$  и  $f(x, t)$  — заданные функции,  $\alpha$  — действительное число, функция  $h(t)$  может обращаться в нуль на своей области определения. Данное уравнение можно отнести к классу уравнений составного типа, но наличие в них слагаемого  $\alpha u_{xxx}$  позволяет отнести такие уравнения и к классу уравнений с кратными характеристиками. Именно второе соображение и позволило авторам считать статью связанной с теорией уравнений с кратными характеристиками.

Целью работы будет доказательство существования и единственности регулярных решений изучаемых ниже задач — решений, имеющих все обобщенные по Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

---

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, соглашение от 11.03.2025 № 075-02-2025-1792.

Все построения и рассуждения будут основаны на свойствах функций из пространств Лебега  $L_p$  и Соболева  $W_p^l$ . Необходимые определения и описание свойств функций из этих пространств можно найти в [11–13].

### 1. Постановки задач

Пусть  $Q$  — прямоугольник  $(0, 1) \times (0, T)$ ,  $0 < T < +\infty$ , переменных  $x$  и  $t$ ,  $h(t)$ ,  $a(x, t)$ ,  $b(x, t)$ ,  $c(x, t)$  и  $f(x, t)$  — заданные функции, определенные при  $x \in [0, 1]$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $\alpha$  — заданное действительное число. Далее будем обозначать через  $L$  дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции  $v(x, t)$  определяется равенством

$$Lv = h(t)v_{xxt} + \alpha v_{xxx} + a(x, t)v_{xx} + b(x, t)v_x + c(x, t)v.$$

**Краевая задача I.** Найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения

$$Lu = f(x, t) \quad (1)$$

и такую, что для нее выполняется условие

$$u(0, t) = u_x(0, t) = u_{xx}(0, t) = 0, \quad t \in (0, T). \quad (2)$$

**Краевая задача II.** Найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условие (2), а также условие

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in (0, 1). \quad (3)$$

**Краевая задача III.** Найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2) и (3), а также условие

$$u(x, T) = 0, \quad x \in (0, 1). \quad (4)$$

**Краевая задача IV.** Найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия

$$u(0, t) = u_x(0, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (5)$$

$$u_{xx}(1, t) = 0, \quad t \in (0, T). \quad (6)$$

**Краевая задача V.** Найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (3), (5) и (6).

**Краевая задача VI.** Найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (3)–(6).

В задачах I и IV отсутствуют какие-либо условия по переменной  $t$ , в задачах II и V имеется одно условие (начальное) по переменной  $t$ , в задачах III

и VI — два условия (начальное и финальное) по переменной  $t$ . Объясняется наличие или отсутствие условия по  $t$  свойствами функции  $h(t)$ .

Определим линейное пространство

$$V_0 = \{v(x, t) : v(x, t) \in L_2(Q), v_{xx}(x, t) \in W_2^1(Q)\},$$

и норму в нем:

$$\|v\|_{V_0} = \left( \int_Q (v^2 + v_{xx}^2 + v_{xxx}^2 + v_{xxt}^2) dx dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пространство  $V_0$  с этой нормой будет основным пространством в настоящей работе. Очевидно, оно банахово.

## 2. Разрешимость краевых задач I–III

Доказательство существования решений краевых задач I–III будет проведено с помощью метода регуляризации и метода продолжения по параметру.

Пусть  $\varepsilon$  — положительное число,  $L_\varepsilon$  — дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции  $v(x, t)$  определяется равенством

$$L_\varepsilon v = -\varepsilon(v_{xxtt} + v_{xxxx}) + Lv.$$

Для уравнения

$$L_\varepsilon v = f(x, t)$$

ниже будут предложены постановки краевых задач в зависимости от функции  $h(t)$ , и для решений этих задач будут получены априорные оценки. С помощью этих оценок будет обоснована возможность применения метода регуляризации и метода продолжения по параметру, и в конечном итоге будет установлена разрешимость задач I–III в пространстве  $V_0$ .

Определим линейное пространство  $V$  и норму в нем:

$$V = \{v(x, t) : v(x, t) \in V_0, v_{xx} \in W_2^2(Q)\},$$

$$\|v\|_V = (\|v\|_{V_0}^2 + \|v_{xx}\|_{W_2^2(Q)}^2)^{1/2}.$$

**Лемма 1.** Пусть выполняются условия

$$a(x, t) \in C^1(\overline{Q}), \quad b(x, t) \in C^1(\overline{Q}), \quad h(t) \in C^1([0, T]); \quad (7)$$

$$\alpha > 0, \quad h(0) \leq 0, \quad h(T) \geq 0; \quad (8)$$

$$a(x, t) - \frac{1}{2}h'(t) \geq a_0 > 0, \quad a(x, t) + \frac{1}{2}h'(t) \geq a_1 > 0 \quad \text{при } (x, t) \in (\overline{Q}); \quad (9)$$

$$c_{xx}(x, t) \geq 0, \quad c(x, t) + \frac{1}{2}b_x(x, t) \leq 0 \quad \text{при } (x, t) \in (\overline{Q}); \quad (10)$$

$$b(1, t)\xi^2 + 2c(1, t)\xi\eta - c_x(1, t)\eta^2 \geq 0 \quad \text{при } t \in [0, T], \quad (\xi, \eta) \in R^2. \quad (11)$$

Тогда если  $f(x, t) \in L_2(Q)$ , то при фиксированном  $\varepsilon$  для решений  $u(x, t)$  из пространства  $V$  краевой задачи

$$L_\varepsilon u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (12)$$

$$u(0, t) = u_x(0, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xxx}(1, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (13)$$

$$u_t(x, 0) = u_t(x, T) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (14)$$

имеет место оценка

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_Q (u_{xxtt}^2 + u_{xxxx}^2) dxdt + \int_Q (u_{xxx}^2 + u_{xxt}^2 + u_{xx}^2 + u_{xt}^2 + u_x^2 + u_t^2 + u^2) dxdt \\ \leq M_1 \int_Q f^2 dxdt \end{aligned} \quad (15)$$

с постоянной  $M_1$ , определяемой функциями  $a(x, t)$ ,  $b(x, t)$ ,  $c(x, t)$  и  $h(t)$ , а также числом  $\varepsilon$ .

Если дополнительно выполняется  $f(x, t) \in W_2^1(Q)$ ,  $f(0, t) = 0$  при  $t \in [0, T]$ , то для решений  $u(x, t)$  из пространства  $V$  краевой задачи (12)–(14) имеет место оценка

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_Q (u_{xxtt}^2 + u_{xxxx}^2) dxdt + \int_Q (u_{xxx}^2 + u_{xxt}^2 + u_{xx}^2 + u_x^2 + u_t^2 + u^2) dxdt \\ \leq M_2 \int_Q (f^2 + f_x^2 + f_t^2) dxdt \end{aligned} \quad (16)$$

с постоянной  $M_2$ , определяемой лишь функциями  $a(x, t)$ ,  $b(x, t)$ ,  $c(x, t)$  и  $h(t)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим равенство

$$\int_Q L_\varepsilon u(x, t) \cdot u_{xx}(x, t) dxdt = \int_Q f(x, t) \cdot u_{xx}(x, t) dxdt.$$

Выполнив интегрирование по частям и используя краевые условия (13) и (14), получим, что данное равенство преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_Q u_{xxt}^2(x, t) dxdt + \varepsilon \int_Q u_{xxx}^2(x, t) dxdt + \int_Q \left[ a(x, t) - \frac{1}{2} h'(t) \right] u_{xx}^2(x, t) dxdt \\ - \int_Q \left[ c(x, t) + \frac{1}{2} b_x(x, t) \right] u_x^2(x, t) dxdt + \frac{1}{2} \int_Q c_{xx}(x, t) u^2(x, t) dxdt \\ + \frac{1}{2} \int_0^1 h(T) u_{xx}^2(x, T) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 h(0) u_{xx}^2(x, 0) dx + \frac{\alpha}{2} \int_0^T u_{xx}^2(1, t) dt \\ + \frac{1}{2} \int_0^T b(1, t) u_x^2(1, t) dt - \frac{1}{2} \int_0^T c_x(1, t) u^2(1, t) dt + \int_0^T c(1, t) u(1, t) u_x(1, t) dt \end{aligned}$$



$$= \int_Q f(x, t) u_{xx}(x, t) dx dt.$$

Учитывая условия (7)–(11), получим, что следствием данного равенства будет оценка

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_Q [u_{xxt}^2(x, t) + u_{xxx}^2(x, t)] dx dt \\ + \int_Q [u_{xx}^2(x, t) + u_x^2(x, t) + u^2(x, t)] dx dt \leq K_1 \int_Q f^2(x, t) dx dt \end{aligned} \quad (17)$$

с постоянной  $K_1$ , определяемой лишь функциями  $a(x, t)$ ,  $b(x, t)$  и  $c(x, t)$ .

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$- \int_Q L_\varepsilon u(x, t) \cdot u_{xxxx}(x, t) dx dt = - \int_Q f(x, t) \cdot u_{xxxx}(x, t) dx dt. \quad (18)$$

Интегрируя по частям, вновь учитывая условия леммы и используя неравенство Гёльдера и оценку (17), получим, что для решений  $u(x, t)$  краевой задачи (12)–(14) выполняется вторая априорная оценка

$$\varepsilon \int_Q [u_{xxtt}^2(x, t) + u_{xxxx}^2(x, t)] dx dt + \int_Q u_{xxx}^2(x, t) dx dt \leq K_2 \int_Q f^2(x, t) dx dt, \quad (10)$$

постоянная  $K_2$  в которой определяется функциями  $a(x, t)$ ,  $b(x, t)$ ,  $c(x, t)$  и  $h(t)$ , а также числом  $\varepsilon$ .

Еще одна априорная оценка

$$\varepsilon \int_Q u_{xxtt}^2(x, t) dx dt \leq K_3 \int_Q f^2(x, t) dx dt \quad (20)$$

очевидным образом вытекает из оценок (17) и (19); постоянная  $K_3$  в этой оценке вновь зависит лишь от функций  $a(x, t)$ ,  $b(x, t)$ ,  $c(x, t)$  и  $h(x, t)$ , а также числа  $\varepsilon$ .

Оценки (17), (19) и (20) означают, что для решений  $u(x, t)$  краевой задачи (12)–(14) из пространства  $V$  выполняется оценка (15).

Вернемся к равенству (18). Если в интеграле с функцией  $f(x, t)$  выполнить однократное интегрирование по частям, то с использованием условий леммы и оценки (17) нетрудно получить априорную оценку

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_Q [u_{xxtt}^2(x, t) + u_{xxxx}^2(x, t)] dx dt \\ + \int_Q u_{xxx}^2(x, t) dx dt \leq K'_2 \int_Q [f^2(x, t) + f_x^2(x, t)] dx dt \end{aligned} \quad (21)$$

с постоянной  $K'_2$ , не зависящей от числа  $\varepsilon$ .

Аналогично если в равенстве

$$-\int_Q L_\varepsilon u(x, t) \cdot u_{xxtt}(x, t) dxdt = -\int_Q f(x, t) \cdot u_{xxtt}(x, t) dxdt \quad (22)$$

в интеграле с функцией  $f(x, t)$  выполнить интегрирование по частям по переменной  $t$ , то нетрудно получить еще одну равномерную по  $\varepsilon$  априорную оценку, и в сумме — требуемую оценку (16).

Лемма доказана.

**Лемма 2.** Пусть выполняются условия (7), (9)–(11), а также условие

$$\alpha > 0, \quad h(0) > 0, \quad h(T) \geq 0. \quad (23)$$

Тогда если  $f(x, t) \in L_2(Q)$ , то при фиксированном  $\varepsilon$  для решений из пространства  $V$  краевой задачи для уравнения (12) с условиями (3) и (13), а также условием

$$u_t(x, T) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (24)$$

выполняется оценка (15). Если дополнительно выполняется  $f(x, t) \in W_2^1(Q)$ ,  $f(0, t) = 0$  при  $t \in (0, T)$ ,  $f(x, 0) = 0$  при  $x \in (0, 1)$ , то для решений  $u(x, t)$  краевой задачи (12), (3), (13), (23) из пространства  $V$  имеет место равномерная по  $\varepsilon$  оценка (16).

**Лемма 3.** Пусть выполняются условия (7), (9)–(11), а также условие

$$\alpha > 0, \quad h(0) > 0, \quad h(T) < 0. \quad (25)$$

Тогда если  $f(x, t) \in L_2(Q)$ , то при фиксированном  $\varepsilon$  для решений из пространства  $V$  краевой задачи для уравнения (12) с условиями (3), (4) и (13) выполняется оценка (15).

Если дополнительно выполняется  $f(x, t) \in W_2^1(Q)$ ,  $f(0, t) = 0$  при  $t \in (0, T)$ ,  $f(x, 0) = f(x, T) = 0$  при  $x \in (0, 1)$ , то для решений  $u(x, t)$  краевой задачи (12), (3), (4), (13) из пространства  $V$  имеет место равномерная по  $\varepsilon$  оценка (16).

Доказательство лемм 2 и 3 проводится вполне аналогично доказательству леммы 1.

**Теорема 1.** Если выполняются условия (7)–(11), то для любой функции  $f(x, t)$  такой, что  $f(x, t) \in W_2^1(Q)$ ,  $f(0, t) = 0$  при  $t \in (0, T)$ , краевая задача I имеет решение  $u(x, t)$ , принадлежащее пространству  $V_0$ , причем ровно одно.

Если выполняются условия (7), (9)–(11) и (22), то для любой функции  $f(x, t)$  такой, что  $f(x, t) \in W_2^1(Q)$ ,  $f(0, t) = 0$  при  $t \in (0, T)$ ,  $f(x, 0) = 0$  при  $x \in (0, 1)$ , краевая задача II имеет решение  $u(x, t)$ , принадлежащее пространству  $V_0$ , причем ровно одно.

Если выполняются условия (7), (9)–(11) и (24), то для любой функции  $f(x, t)$  такой, что  $f(x, t) \in W_2^1(Q)$ ,  $f(0, t) = 0$  при  $t \in (0, T)$ ,  $f(x, 0) = f(x, T) = 0$

при  $x \in (0, 1)$ , краевая задача III имеет решение  $u(x, t)$ , принадлежащее пространству  $V_0$ , причем ровно одно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим вначале разрешимость краевой задачи I (при выполнении условий леммы 1).

Пусть  $\lambda$  — число из отрезка  $[0, 1]$ . Рассмотрим семейство краевых задач: найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения

$$-\varepsilon(u_{xxxx} + u_{xxtt}) + h(t)u_{xxx} + a(x, t)u_{xx} + \lambda[b(x, t)u_x + c(x, t)u] = f(x, t) \quad (26)$$

и такую, что для нее выполняются условия (13) и (14). При  $\lambda = 0$  эта задача является смешанной краевой задачей для эллиптического относительно функции  $v(x, t) = u_{xx}(x, t)$  уравнения, причем вследствие условий теоремы для этой задачи имеет место единственность решения в пространстве  $V$ . Следовательно, при  $\lambda = 0$  краевая задача (26), (13), (14) разрешима в пространстве  $V$ , причем единственным образом. Далее, для решений  $u(x, t)$  краевой задачи (21), (13), (14) при всех  $\lambda$  из отрезка  $[0, 1]$  и при фиксированном  $\varepsilon$  имеет место априорная оценка (15), т. е. оценка

$$\|u\|_V \leq M'_1 \|f\|_{L_2(Q)}. \quad (27)$$

Согласно теореме о методе продолжения по параметру [14 гл. III, § 14] из разрешимости в пространстве  $V$  краевой задачи (26), (13), (14) при  $\lambda = 0$ , а также из оценки (27) следует, что данная задача будет разрешима в пространстве  $V$  при всех  $\lambda$  из отрезка  $[0, 1]$ , т. е. и при  $\lambda = 1$ .

Пусть  $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^\infty$  — последовательность положительных чисел такая, что  $\varepsilon \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ . Согласно проведенным выше рассуждениям краевая задача (12)–(14) при  $\varepsilon = \varepsilon_m$  имеет решение  $u_m(x, t)$ , принадлежащее пространству  $V$ . Для семейства  $\{u_m(x, t)\}_{m=1}^\infty$  имеет место равномерная по  $m$  априорная оценка (16). Из этой оценки и из свойства рефлексивности гильбертова пространства следует, что существует последовательность  $\{u_{m_k}(x, t)\}_{k=1}^\infty$  (соответствующая случаю  $\varepsilon = \varepsilon_{m_k}$  в задаче (12)–(14)) такая, что при  $k \rightarrow \infty$

$$\varepsilon_{m_k} (u_{m_kxxxx}(x, t) + u_{m_kxxtt}(x, t)) \rightarrow 0$$

слабо в пространстве  $L_2(Q)$  и для некоторой функции  $u(x, t)$

$$u_{m_k}(x, t) \rightarrow u(x, t)$$

слабо в пространстве  $V_0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Очевидно, что функция  $u(x, t)$  принадлежит пространству  $V_0$  и что она является искомым решением краевой задачи I.

Единственность в пространстве  $V_0$  решений краевой задачи I очевидна.

Первая часть теоремы доказана.

Справедливость второй и третьей частей теоремы при выполнении соответствующих условий леммы 2 и 3 доказывается аналогично доказательству первой части (меняется лишь постановка вспомогательной регуляризованной задачи).

Теорема полностью доказана.

## 2. Разрешимость краевых задач IV–VI

Идея доказательства разрешимости краевых задач IV–VI вполне соответствует идее доказательства разрешимости краевых задач I–III. Это позволяет не выделяя промежуточных этапов сразу сформулировать и доказать основной результат.

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия (7), а также условия

$$\alpha > 0, \quad h(0) \geq 0, \quad h(T) \leq 0; \quad (28)$$

$$a(x, t) - \frac{1}{2}h'(t) \leq -a_0 < 0, \quad a(x, t) + \frac{1}{2}h'(t) \leq -a_0 < 0 \quad \text{при } (x, t) \in \overline{Q}; \quad (29)$$

$$c_{xx}(x, t) \leq 0, \quad c(x, t) + \frac{1}{2}b_x(x, t) \geq 0 \quad \text{при } (x, t) \in \overline{Q}; \quad (30)$$

$$b(1, t) = c(1, t) = 0, \quad c_x(1, t) \geq 0 \quad \text{при } t \in (0, T), \quad (31)$$

то для любой функции  $f(x, t)$  такой, что  $f(x, t) \in W_2^1(Q)$ ,  $f(1, t) = 0$  при  $t \in (0, T)$ , краевая задача IV имеет решение  $u(x, t)$ , принадлежащее пространству  $V_0$ , причем ровно одно.

Если выполняются условия (7), (29)–(31), а также условие

$$\alpha > 0, \quad h(0) < 0, \quad h(T) \leq 0, \quad (32)$$

то для любой функции  $f(x, t)$  такой, что  $f(x, t) \in W_2^1(Q)$ ,  $f(1, t) = 0$  при  $t \in (0, T)$ ,  $f(x, 0) = 0$  при  $x \in (0, 1)$ , краевая задача V имеет решение  $u(x, t)$ , принадлежащее пространству  $V_0$ , причем ровно одно.

Если выполняются условия (7), (29)–(31), а также условие

$$\alpha > 0, \quad h(0) < 0, \quad h(T) > 0, \quad (33)$$

то для любой функции  $f(x, t)$  такой, что  $f(x, t) \in W_2^1(Q)$ ,  $f(1, t) = 0$  при  $t \in (0, T)$ ,  $f(x, 0) = f(x, T) = 0$  при  $x \in (0, 1)$ , краевая задача VI имеет решение  $u(x, t)$ , принадлежащее пространству  $V_0$ , причем ровно одно.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Вновь воспользуемся методом регуляризации.

Пусть  $\varepsilon$  — положительное число. Рассмотрим задачу нахождения функции  $u(x, t)$ , являющейся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения

$$\varepsilon(u_{xxxx} + u_{xxtt}) + Lu = f(x, t) \quad (34)$$

и такой, что для нее выполняются условия

$$u(0, t) = u_x(0, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(1, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (35)$$

а также условие (14) при выполнении неравенств (28), либо условия (3) и (24) при выполнении неравенств (32), либо условия (3) и (4) при выполнении неравенств (33). Повторяя для каждой из этих задач рассуждения и выкладки лемм 1–3, нетрудно показать, что для функции  $u(x, t)$  выполняются оценки (15) и (16) (при выполнении соответствующих условий на функцию  $f(x, t)$ ).

Из этих оценок следует существование решения  $u(x, t)$  при фиксированном  $\varepsilon$  каждой из задач (34), (35), (14), или (34), (35), (3), (24), или (34), (35), (3), (4), принадлежащее пространству  $V$ , а также возможность выбора из семейства  $\{u_\varepsilon(x, t)\}_{\varepsilon>0}$  последовательности, сходящейся к искомому решению соответствующих задач IV, V или VI.

Единственность решений во всех случаях очевидна.

Теорема доказана.

### 3. Замечания

Сделаем несколько заключительных замечаний по поводу полученных выше результатов.

1. Наряду с краевыми задачами I–III и IV–VI нетрудно изучить разрешимость задач с одним условием при  $t = T$ . Но такая задача легко сводится к задачам II или V заменой  $\tau = T - t$ .

2. Случай  $\alpha < 0$  также легко сводится к изученному случаю  $\alpha > 0$  заменой  $y = 1 - x$ .

3. Зависимость коэффициента  $\alpha$  от переменных  $x$  и  $t$ , зависимость функции  $h$  от тех же переменных не меняют существенным образом идеи доказательства теорем существования и единственности. Соответствующие условия и выкладки лишь станут более громоздкими.

4. В краевых задачах IV–VI условие (6) вполне можно заменить более общим условием

$$u_{xx}(1, t) = \varphi_1(t)u_x(1, t) + \varphi_2(t)u(1, t), \quad t \in (0, T),$$

с заданными функциями  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$ . Соответствующие условия также изменятся лишь в сторону громоздкости.

5. Условие (10) теорем 1 и 2 можно заменить условиями малости, используя неравенства

$$\int_{\Omega} u^2(x, t) dx \leq \int_{\Omega} u_x^2(x, t) dx \leq \int_{\Omega} u_{xx}^2(x, t) dx.$$

Нетрудно также заменить (10) условием, представляющим собой комбинацию условий вида (10) и условий малости.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Джураев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1979.
2. Абдиназаров С. Общие краевые задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 1. С. 3–12.
3. Kozhanov A. I. Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
4. Хашимов А. Р., Якубов С. О некоторых свойствах решений задачи Коши для нестационарного уравнения третьего порядка составного типа // Уфимск. мат. журн. 2014. Т. 6, № 4. С. 139–148.
5. Лукина Г. А. Краевые задачи с интегральными граничными условиями для линейаризованного уравнения Кортевега — де Фриза // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2011. № 8. С. 52–61.

6. Кожанов А. И., Потапова С. В. Краевые задачи для двумерных по временным переменным дифференциальных уравнений нечетного порядка с меняющимся направлением эволюции // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 5. С. 1098–1115.
7. Фаминский А. В. Прямые и обратные задачи для квазилинейных эволюционных уравнений нечетного порядка на ограниченном интервале // Науч. семинар по дифференц. и функц.-дифференц. уравнениям. М., 2024.  
URL: <https://www.youtube.com/watch?v=dTKHDZGWfO4> (дата обращения 08.08.2024).
8. Kozhanov A. I., Abylkayrov U. U., Ashurova G. R. Inverse problems of parameter recovery in differential equations with multiple characteristics // J. Math. Mech. Comput. Sci. 2022. V. 113, N 1. P. 3–16.
9. Кожанов А. И., Зикиров О. С. Краевые задачи для дважды вырождающегося дифференциального уравнения с кратными характеристиками // Мат. заметки СВФУ. 2018. Т. 25, № 4. С. 34–44.
10. Кожанов А. И., Лукина Г. А. Вырождение в дифференциальных уравнениях с кратными характеристиками // Мат. заметки СВФУ. 2021. Т. 28, № 3. С. 19–30.
11. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
12. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
13. Triebel H. Interpolation theory. Functional spaces. Differential operators. Berlin: VEB Deutscher Verl. Wiss., 1978.
14. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

*Поступила в редакцию 1 августа 2025 г.*

*После доработки 1 августа 2025 г.*

*Принята к публикации 29 августа 2025 г.*

Кожанов Александр Иванович  
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090  
[kozhanov@math.nsc.ru](mailto:kozhanov@math.nsc.ru)

Спиридонова Нарыйа Руслановна  
Институт математики и информатики,  
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,  
ул. Кулаковского, 48, Якутск, 677000  
[nariya@yandex.ru](mailto:nariya@yandex.ru)

## A DEGENERATE DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS

A. I. Kozhanov and N. R. Spiridonova

**Abstract:** For some classes of differential equations with multiple characteristics, we study the solvability of various boundary value problems in anisotropic Sobolev spaces. The aim of the paper is to prove theorems of existence and uniqueness of regular solutions, i.e. solutions that have all generalized derivatives entering the equation.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-3-3-14

**Keywords:** differential equations with multiple characteristics, degeneration, boundary problems, regular solutions, existence, uniqueness.

### REFERENCES

1. Dzhuraev T. D., Boundary Value Problems for Equations of Mixed and Mixed-Composite Types [in Russian], Fan, Tashkent (1979).
2. Abdinazarov S., General boundary value problems for an equation of third order with multiple characteristics [in Russian], Differ. Uravn., **17**, No. 1, 3–12 (1981).
3. Kozhanov A. I., Composite Type Equations and Inverse Problems, VSP, Utrecht (1999).
4. Khashimov A. R. and Yakubov S., “On some properties of Cauchy problem for non-stationary third order composite type equation,” Ufim. Mat. Zhurn., **6**, No. 4, 135–144 (2014).
5. Lukina G. A., “Boundary value problems with integral conditions for the linearized Korteweg–de Vries equation [in Russian],” Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Univ., Ser. Mat. Model. Program., No. 8, 53–62 (2011).
6. Kozhanov A. I. and Potapova S. V., “Boundary value problems for odd order forward-backward-type differential equations with two time variables,” Sib. Math. J., **59**, No. 5, 870–884 (2018).
7. Faminskii A. V., “Direct and inverse problems for odd-order quasilinear evolution equations on a bounded interval,” RUDN Seminar on Differential and Functional-Differential Equations. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=dTKHDZGWfO4> (date of access 08.08.2024).
8. Kozhanov A. I., Abylkayrov U. U., and Ashurova G. R., “Inverse problems of parameter recovery in differential equations with multiple characteristics,” J. Math. Mech. Comput. Sci., **113**, No. 1, 3–16 (2022).
9. Kozhanov A. I. and Zikirov O. S., “Boundary value problems for twicedegenerate differential equations with multiple characteristics [in Russian],” Math. Zamet. SVFU, **25**, No. 4, 63–68 (2018).
10. Kozhanov A. I. and Lukina G. A., Degeneration in differential equations with multiple characteristics [in Russian], Mat. Zamet. SVFU, **28**, No. 3, 19–30 (2021).
11. Sobolev S. L., Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1991) (Transl. Math. Monogr.; vol. 90).
12. Ladyzhenskaya O. A. and Ural'tseva N. N., Linear and Quasilinear Elliptic Type Equations [in Russian], Nauka, Moscow (1973).
13. Triebel H., Interpolation Theory, Functional Spaces, Differential Operators, VEB Deutsch. Verl. Wiss., Berlin (1978).

- 14.** *Trenogin V. A.*, Functional Analysis [in Russian], Nauka, Moscow (1980).

*Submitted August 1, 2025*

*Revised August 1, 2025*

*Accepted August 29, 2025*

Alexandr I. Kozhanov  
Sobolev Institute of Mathematics,  
4 Koptug Avenue, Novosibirsk 630090, Russia  
`kozhanov@math.nsc.ru`

Naryia R. Spiridonova  
Ammosov North-Eastern Federal University,  
Institute of Mathematics and Informatics,  
48 Kulakovsky Street, Yakutsk 677000, Russia  
`nariya@yandex.ru`



УДК 517.97

## ЗАДАЧИ О КОНТАКТЕ ПЛАСТИНЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ ВКЛЮЧЕНИЕ, С ОБЪЕМНЫМИ И ТОЧЕЧНЫМИ НЕПОДВИЖНЫМИ ПРЕПЯТСТВИЯМИ

Н. П. Лазарев,  
Д. Я. Никифоров, С. В. Сафонов

**Аннотация.** Исследованы две нелинейные математические модели о равновесии пластин, контактирующих с препятствиями двух видов. Предполагается, что пластина содержит объемное жесткое включение, соприкасающееся с препятствием в исходном состоянии. Первый вид препятствий ограничивает перемещения пластин на лицевой поверхности на участке квадратной формы. Другой вид препятствия также задается на лицевой поверхности, но имеет точечный характер, т. е. условия типа Синьорини задаются в одной заданной точке. Доказана сходимости решений семейства вариационных задач при стремлении к нулю параметра, задающего площадь контактной поверхности к нулю. При этом показано, что предельной функцией является решение задачи, описывающей точечный контакт пластины.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-3-15-27

**Ключевые слова:** вариационная задача, препятствие, пластина, контактная задача, предельный переход.

**Введение.** Контактные задачи механики упругих тел с односторонними ограничениями в рамках известного подхода Синьорини представляют собой класс нелинейных задач с граничными условиями в виде неравенств рассмотрены в [1–5]. Отметим работу [6], где исследована динамическая задача для упругого тела с учетом сил трения и с условием типа Синьорини на трещине, а также приведен обзор по динамическим задачам в рамках соответствующей тематики. Контактные задачи для пластин, учитывающие механическое взаимодействие с другими твердыми телами на лицевой поверхности, изучены в широком круге работ, например, в статьях [7–10] изучены модели о контакте с тонкими упругими балками, в [11–13] исследовано контактное взаимодействие двух упругих пластин. В недавних работах были предложены математические модели для пластин, где описывается контакт с наклонными препятствиями [14], контакт на боковой грани изучен в [15, 16]. Наличие жесткого включения в

---

Раздел 1 выполнен при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания проект № FSRG–2023–0025. Раздел 2 выполнен при поддержке Минобрнауки РФ (Соглашение от 11.03.2025 г., проект 075–02–2025–1792).

© 2025 Лазарев Н. П., Никифоров Д. Я., Сафонов С. В.

упругом теле предполагает аффинную структуру перемещений на соответствующем множестве [17–19]. Это свойство делает возможным исследование контактного взаимодействия точечного характера для моделей неоднородных тел с жесткими включениями [20, 21]. Численная реализация для моделей упругих тел с односторонними ограничениями предложена, например, в [22–24].

В [25] исследована задача оптимального управления для вариационного неравенства относительно бигармонического оператора, в которой препятствие принимается за управление. При этом наряду с доказательством разрешимости задачи управления была установлена непрерывная зависимость решений от функций из класса  $H^2$ , задающих препятствие. Кроме того, в [25] можно найти краткий обзор по задачам оптимального управления с управлением, задаваемым препятствиями. Асимптотический анализ для контактных задач представляет собой весьма актуальное направление (см., например, [26–30]). Поскольку для ряда прикладных задач зоны контакта (в которых искомые перемещения соответствуют соприкосновению контактирующих поверхностей или кривых) заранее неизвестны, оценки ее положения и размеров представляют интерес при изучении свойств решений, см., например, работы, посвященные выявлению свойств зоны контакта относительно задачи Синьорини для уравнения Пуассона [31, 32], в частности, в [32] нахождение зон контакта было сведено к решению нелинейной алгебраической задачи.

В работе изучены две нелинейные математические модели о равновесии упругих пластин Кирхгофа — Лява, контактирующих с препятствиями двух видов. Предполагается, что пластина содержит жесткое включение, посредством которого происходит контакт с препятствием. Для первого вида препятствий прогибы пластины ограничиваются сверху нулем на заданном множестве в форме квадрата со стороной  $\delta \in (0, 1]$ . Для второго вида препятствия также задаются условия неположительности прогибов в одной точке  $(0, 0)$ . Доказана сильная сходимость в энергетической норме решений семейства вариационных задач при  $\delta \rightarrow 0$ . При этом показано, что предельной функцией является решение задачи, описывающей точечный контакт пластины.

**1. Вариационная постановка.** Пусть  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  — ограниченная область с достаточно гладкой границей  $\Gamma$ , которая состоит из двух кривых  $\Gamma = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\gamma}$ ,  $\Gamma_0 \cap \gamma = \emptyset$ ,  $\text{meas}(\Gamma_0) > 0$ . Обозначим через  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$  внешнюю нормаль к границе  $\Gamma$  области  $\Omega$ . Для простоты предположим, что пластина имеет равномерную толщину  $2h$ . Зададим трехмерное декартово пространство  $\{x_1, x_2, z\}$  так, чтобы пластина соответствовала множеству  $\Omega \times [-h, h] \subset \mathbf{R}^3$ . Пусть односвязная подобласть  $\omega \subset \Omega$  и  $\Omega$  таковы, что  $[-1, 1] \times [-1, 1] \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ , граница  $\partial\omega$  области  $\omega$  принадлежит классу  $C^{1,1}$ . При этом лицевые поверхности пластины в исходном состоянии задаются множествами  $\Omega \times \{-h\}$ ,  $\Omega \times \{h\}$ , для определенности будем изучать задачу о возможном контакте с верхней лицевой поверхностью, т. е. заданной множеством  $\Omega \times \{h\}$ .

Обозначим через  $\chi = \chi(x) = (W(x), w(x))$  вектор перемещений точек срединной поверхности ( $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ ), через  $W = (w_1, w_2)$  — перемещения в

плоскости  $\{x_1, x_2\}$ , а через  $w$  — перемещения вдоль оси  $z$  (прогибы). Тензоры деформаций и усилий обозначаются через  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(W)$ ,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(W)$  соответственно [33, 34]:

$$\varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_j}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right), \quad \sigma_{ij}(W) = a_{ijrl} \varepsilon_{rl}(W), \quad i, j = 1, 2,$$

где  $\{a_{ijrl}\}$  — заданный тензор упругости, который предполагается симметричным и положительно определенным:

$$a_{ijrl} = a_{rlji} = a_{jir l}, \quad i, j, r, l = 1, 2, \quad a_{ijrl} \in L^\infty(\Omega), \\ a_{ijrl} \xi_{ij} \xi_{rl} \geq c_0 |\xi|^2 \quad \forall \xi, \quad \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \quad c_0 = \text{const} > 0.$$

Здесь и далее используется соглашение о суммировании по повторяющимся индексам. Введем изгибающие моменты следующими формулами [33]:

$$m_{ij}(w) = -d_{ijrl} w_{,rl}, \quad i, j = 1, 2 \quad \left( w_{,rl} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_r \partial x_l} \right),$$

где тензор  $\{d_{ijrl}\}$  имеет те же характеристики симметрии, ограниченности и положительной определенности, что и тензор  $\{a_{ijrl}\}$ . Пусть  $B(\cdot, \cdot)$  — билинейная форма, определенная равенством

$$B(\chi, \bar{\chi}) = \int_{\Omega} \{ \sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(\bar{W}) - m_{ij}(w) \bar{w}_{,ij} \} dx,$$

где  $\chi = (W, w)$ ,  $\bar{\chi} = (\bar{W}, \bar{w})$ .

Введем следующие пространства Соболева:

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ на } \Gamma_0\},$$

$$H_{\Gamma_0}^2(\Omega) = \left\{ v \in H^2(\Omega) \mid v = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Gamma_0 \right\},$$

$$H(\Omega) = H_{\Gamma_0}^1(\Omega)^2 \times H_{\Gamma_0}^2(\Omega), \quad \|\chi\| = \|\chi\|_{H(\Omega)} = (\|W\|_{H^1(\Omega)^2}^2 + \|w\|_{H^2(\Omega)}^2)^{1/2}.$$

Функционал потенциальной энергии пластинки Кирхгофа — Лява имеет следующий вид:

$$\Pi(\chi) = \frac{1}{2} B(\chi, \chi) - \int_{\Omega} F \chi dx, \quad \chi = (W, w),$$

где вектор  $F = (f_1, f_2, f_3) \in L_2(\Omega)^3$  описывает внешние силы [33]. Заметим, что в силу условий на  $\Gamma_0$  имеет место следующее неравенство, обеспечивающее коэрцитивность функционала  $\Pi$ :

$$B(\chi, \chi) \geq c \|\chi\|^2 \quad \forall \chi \in H(\Omega), \quad (1)$$

с константой  $c > 0$ , не зависящей от  $\chi$  [33].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Неравенство (1) означает, что норма в пространстве  $H(\Omega)$  эквивалентна норме, определенной с помощью билинейной формы  $B(\cdot, \cdot)$ .

В исходном состоянии пластины жесткое включение соответствует множеству  $\omega \times [-h, h]$ , перемещения точек которого принадлежат следующему пространству инфинитезимальных жестких перемещений:

$$R(\omega) = \{\zeta \mid \zeta(x) = (bx_2 + c_1, -bx_1 + c_2, a_0 + a_1x_1 + a_2x_2); x = (x_1, x_2) \in \omega\},$$

где  $b, c_1, c_2, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ , [34–37].

Перейдем к описанию недеформируемого препятствия и ограничений на перемещения для точек пластины, которые соприкасаются с контактной поверхностью препятствия в исходном состоянии. Сначала отметим, что для пластины Кирхгофа — Лява прогибы или вертикальные перемещения по всей толщине пластины совпадают с прогибами точек срединной плоскости (см. [34]), т. е.

$$w^z(x) = w(x), \quad z \in [-h, h],$$

где  $w^z(x)$  — вертикальные перемещения точек пластины, имеющих координаты  $(x, z)$  в исходном состоянии. Для фиксированного  $\delta \in (0, 1]$  рассмотрим модель с недеформируемым препятствием, задаваемым множеством

$$(-\delta, \delta) \times (-\delta, \delta) \times \{h\},$$

которое ограничивает перемещения пластины со стороны верхней лицевой поверхности. Предположим, что для точек множества  $O_\delta = (-\delta, \delta) \times (-\delta, \delta)$  имеет место неравенство

$$w(x) \leq 0, \quad x \in O_\delta,$$

или в силу линейной структуры в области  $O_\delta$

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 \leq 0, \quad x = (x_1, x_2) \in O_\delta. \quad (2)$$

Таким образом, для фиксированного значения  $\delta \in (0, 1]$  с учетом ограничений на перемещения множество допустимых перемещений запишем в виде

$$K_\delta = \{\chi = (W, w) \in H(\Omega) \mid \chi \text{ удовлетворяет (2), } \chi|_\omega = \zeta, \zeta \in R(\omega)\}.$$

Сформулируем вариационную постановку задачи равновесия. Требуется найти функцию  $\xi^\delta = (U^\delta, u^\delta) \in K_\delta$  такую, что

$$\Pi(\xi^\delta) = \inf_{\chi \in K_\delta} \Pi(\chi). \quad (3)$$

**Теорема 1.** Для каждого фиксированного  $\delta \in (0, 1]$  задача (3) имеет единственное решение  $\xi^\delta$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 1 не требует каких-либо новых по-существу рассуждений. Для этого достаточно заметить, что множество  $K_\delta$  является выпуклым и замкнутым, а также применить с незначительными видоизменениями рассуждения, приведенные в [36]. Функционал выпуклый и дифференцируемый, поэтому задача (3) эквивалентна следующему вариационному неравенству:

$$\xi^\delta \in K_\delta, \quad B(\xi^\delta, \chi - \xi^\delta) \geq \int_{\Omega} F(\chi - \xi^\delta) dx \quad \forall \chi \in K_\delta. \quad (4)$$

Стандартным способом, от противного (см. [36]), можно доказать, что существуют единственное решение задачи (3).

Наряду с семейством вариационных задач, зависящих от  $\delta \in (0, 1]$ , рассмотрим предельный случай, соответствующий  $\delta = 0$ . При этом контакт может происходить только в одной точке  $(0, 0)$ . Поскольку  $x_1 = x_2 = 0$ , для функции прогибов  $w(x_1, x_2) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$  в области  $\omega$  имеем

$$a_0 \leq 0. \quad (5)$$

Соответствующее множество допустимых перемещений примет вид

$$K_0 = \{\chi = (W, w) \in H(\Omega) \mid \chi \text{ удовлетворяет (5), } \chi|_\omega = \zeta, \zeta \in R(\omega)\}.$$

Задача о точечном контакте пластины запишется в следующем виде. Требуется найти функцию  $\xi^0 = (U^0, u^0) \in K_0$  такую, что

$$\Pi(\xi^0) = \inf_{\chi \in K_0} \Pi(\chi). \quad (6)$$

**Теорема 2.** *Задача (6) имеет единственное решение  $\xi^0$ .*

Несмотря на относительную новизну постановки задачи, доказательство теоремы 2 также не представляет значительных трудностей. Заинтересованный читатель может найти доказательства аналогичных результатов в [36]. Как и выше, задача (6) эквивалентна следующему вариационному неравенству:

$$\xi^0 \in K_0, \quad B(\xi^0, \chi - \xi^0) \geq \int_{\Omega} F(\chi - \xi^0) dx \quad \forall \chi \in K_0. \quad (7)$$

Методом от противного (см. [36]), можно установить, что решение задачи (6) будет единственным.

**2. Предельный переход при  $\delta \rightarrow 0$ .** Установим, что задача (6) является предельной для семейства задач (3) при  $\delta \rightarrow 0$ . А именно имеет место следующее утверждение.

**Теорема 3.** *Семейство решений  $\{\xi^\delta\}_{\delta \in (0, 1]}$  задач (3) сходится сильно к решению задачи (6)  $\xi^0$  в пространстве  $H(\Omega)$  при  $\delta \rightarrow 0$ .*

**Доказательство.** Подставляя последовательно тестовые функции  $\chi = (0, 0, 0)$ ,  $\chi = 2\xi^\delta$  в (4), нетрудно убедиться в справедливости равенств

$$B(\xi^\delta, \xi^\delta) = \int_{\Omega} F\xi^\delta dx \quad \forall \delta \in (0, 1]. \quad (8)$$

Отсюда следует равномерная оценка

$$\|\xi^\delta\| \leq C \quad (9)$$

для всех  $\delta \in (0, 1]$ . Рефлексивность пространства Соболева и неравенство (9) позволяют утверждать, что при  $\delta \rightarrow 0$  найдутся некоторая функция  $\tilde{\xi} \in H(\Omega)$  и последовательность (обозначенная прежним образом)  $\{\xi^\delta\}$  такие, что  $\xi^\delta \rightarrow \tilde{\xi}$

слабо в  $H(\Omega)$ . Покажем, что  $\tilde{\xi} \in K_0$ . В самом деле, ограниченность норм (9) влечет, в свою очередь, ограниченность числовых последовательностей  $\{a_0^\delta\}$ ,  $\{a_1^\delta\}$ ,  $\{a_2^\delta\}$ , определяющих структуру соответствующих функций последовательности  $\{\xi^\delta\}$ ,  $\xi^\delta = (U^\delta, u^\delta)$ , в области  $\omega$ :

$$u^\delta(x_1, x_2)|_\omega = a_0^\delta + a_1^\delta x_1 + a_2^\delta x_2, \quad (x_1, x_2) \in \omega.$$

Ограниченность каждой последовательности  $\{a_0^\delta\}$ ,  $\{a_1^\delta\}$ ,  $\{a_2^\delta\}$  означает, что можно выделить подпоследовательности (сохранив обозначения), сходящиеся соответственно к числам  $a_0^0$ ,  $a_1^0$ ,  $a_2^0$ . Рассмотрим выражения

$$a_0^\delta + a_1^\delta x_1 + a_2^\delta x_2 \leq 0, \quad x \in O_\delta,$$

для выбранных указанным образом последовательностей чисел. Поскольку имеют место неравенства

$$a_0^\delta - |a_1^\delta|\delta - |a_2^\delta|\delta \leq 0$$

для сходящихся числовых последовательностей  $\{a_0^\delta\}$ ,  $\{a_1^\delta\}$ ,  $\{a_2^\delta\}$ , получим, что при  $\delta \rightarrow 0$

$$a_0^0 \leq 0.$$

Таким образом,  $\tilde{\xi} \in K_0$ .

Пусть  $\chi_0 \in K_0$  — произвольная тестовая функция. Построим последовательность  $\{\chi^\delta\}$ , сходящуюся сильно к  $\chi_0$  в пространстве  $H(\Omega)$  при  $\delta \rightarrow 0$ . По условию

$$\chi_0|_\omega = \zeta_0(x_1, x_2) = (bx_2 + c_1, -bx_1 + c_2, a_0 + a_1x_1 + a_2x_2), \quad (x_1, x_2) \in \omega,$$

$a_0 \leq 0$ , для некоторых постоянных  $b$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ . Возьмем функцию, построенную следующим образом:

$$j_\delta(x) = a_0 - |a_1|\delta - |a_2|\delta + a_1x_1 + a_2x_2, \quad x = (x_1, x_2) \in \omega,$$

для фиксированного  $\delta \in (0, 1]$ . Очевидно, что она удовлетворяет

$$j_\delta(x) \leq 0 \quad \text{для всех } x = (x_1, x_2) \in O_\delta.$$

Для каждого фиксированного  $\delta \in (0, 1]$  с помощью оператора поднятия  $L : H^{3/2}(\partial\omega \cup \Gamma) \times H^{1/2}(\partial\omega \cup \Gamma) \rightarrow H^2(\Omega \setminus \overline{\omega})$  (граница области  $\Omega \setminus \overline{\omega}$  принадлежит классу  $C^{1,1}$ ) построим следующую функцию  $g_\delta$ , определенную в  $H^2(\Omega \setminus \overline{\omega})$ , такую, что  $g_\delta = L(q_\delta^1, q_\delta^2)$ , где

$$q_\delta^1(x_1, x_2) = |a_1|\delta + |a_2|\delta, \quad (x_1, x_2) \in \partial\omega,$$

$$q_\delta^1(x_1, x_2) = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma,$$

$$q_\delta^2(x_1, x_2) = 0, \quad (x_1, x_2) \in \partial\omega \cup \Gamma.$$

Отметим, что функции  $\{\tilde{\chi}_\delta\}$ ,  $\delta \in (0, 1]$ , определенные с помощью равенств

$$\tilde{\chi}_\delta = \begin{cases} (0, 0, |a_1|\delta + |a_2|\delta), & (x_1, x_2) \in \overline{\omega}, \\ (0, 0, g_\delta), & (x_1, x_2) \in \Omega \setminus \overline{\omega}, \end{cases}$$

в силу непрерывности оператора  $L$  сходятся к нулю в пространстве  $H(\Omega)$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Остается положить

$$\chi_\delta = \chi_0 - \tilde{\chi}_\delta$$

для каждого  $\delta \in (0, 1]$ . Поскольку для любого  $\delta \in (0, 1]$  построенная функция  $\chi_\delta$  принадлежит  $K_\delta$ , ее можно подставить в вариационное неравенство (4) и получить

$$B(\xi^\delta, \chi_\delta - \xi^\delta) \geq \int_{\Omega} F(\chi_\delta - \xi^\delta) dx. \quad (10)$$

На основании сильной сходимости  $\chi_\delta \rightarrow \chi_0$  в пространстве  $H(\Omega)$  при  $\delta \rightarrow 0$  и слабой сходимости  $\xi^\delta \rightarrow \tilde{\xi}$  можно перейти к пределу в неравенстве (10) при  $\delta \rightarrow 0$ . В результате имеем неравенство

$$B(\tilde{\xi}, \chi_0 - \tilde{\xi}) \geq \int_{\Omega} F(\chi_0 - \tilde{\xi}) dx, \quad (11)$$

выполненное для произвольной функции  $\chi_0 \in K_0$ . Последнее вместе с тем фактом, что  $\tilde{\xi}$  принадлежит  $K_0$ , означает, что (11) является вариационным неравенством. Следовательно, ввиду единственности решения заключаем, что  $\tilde{\xi} = \xi^0$ .

Итак,  $\xi^\delta \rightarrow \xi^0$  слабо в  $H(\Omega)$  для некоторой числовой последовательности  $\{\delta\} \subset (0, 1]$ ,  $\delta \rightarrow 0$ . Установим, что для этой же последовательности имеет место сильная сходимость. Для этого вспомним равенства (8) и аналогичное равенство, справедливое при  $\delta = 0$ :

$$B(\xi^0, \xi^0) = \int_{\Omega} F\xi^0 dx.$$

Слабая сходимость гарантирует выполнение равенства

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega} F\xi^\delta dx = \int_{\Omega} F\xi^0 dx,$$

откуда следует, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} B(\xi^\delta, \xi^\delta) = B(\xi^0, \xi^0).$$

Последнее согласно замечанию 1 влечет, что  $\|\xi^\delta\| \rightarrow \|\xi^0\|$  при  $\delta \rightarrow 0$ . На основании сходимости норм и слабой сходимости  $\xi^\delta \rightarrow \xi^0$  в пространстве Соболева  $H(\Omega)$  при  $\delta \rightarrow 0$  делаем вывод о наличии сильной сходимости  $\xi^\delta \rightarrow \xi^0$  в пространстве  $H(\Omega)$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Очевидно, что в случае препятствия, расположенного со стороны нижней лицевой поверхности, можно рассматривать условия вида

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 \geq 0, \quad x = (x_1, x_2) \in O_\delta,$$

аналогичные неравенствам (2). При этом в соответствующем точечном неравенстве знак также поменяется на обратный. В этом случае результаты, аналогичные полученным, также могут быть установлены с некоторыми несущественными изменениями. Кроме того, выбрав подходящую систему координат,

также нетрудно обосновать выполнение аналогичного результата для препятствий, расположенных с нижней стороны, при  $z = -h$ .

Исходя из рассуждений доказательств, схожие утверждения можно получить и для других семейств областей, задающих множества точек возможного контакта, например, для семейства кругов радиуса  $\delta$  и т. д.

**Заключение.** В работе изучена связь двух математических моделей о равновесии пластин, контактирующих с препятствиями специальной формы. Препятствия обуславливают ограничения на прогибы в виде неравенств (2), заданных на квадратных множествах  $O_\delta = (-\delta, \delta) \times (-\delta, \delta)$ , а также неравенства (5), заданного в одной точке  $(0, 0)$ . Доказано, что вариационные задачи для упругих пластин с жесткими включениями (3) и (6) имеют единственные решения. Доказана сильная сходимость в  $H(\Omega)$  решений  $\xi^\delta$  семейства вариационных задач (3) при  $\delta \rightarrow 0$ . При этом показано, что предельной функцией является решение задачи  $\xi^0$ , описывающей точечный контакт пластины.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Fichera G. Boundary value problems of elasticity with unilateral constraints. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1972. (Handb. Phys.; Band 6a/2).
2. Dal Maso G., Paderni G. Variational inequalities for the biharmonic operator with variable obstacles // Ann. Mat. Pura Appl. 1988. V. 153. P. 203–227.
3. Kovtunen V. A., Itou H., Khludnev A. M., Rudoy E. M. Non-smooth variational problems and applications // Philos. Trans. A. 2022. V. 380. 20210364.
4. Байокки К., Капело А. Вариационные и квазивариационные неравенства. М.: Наука, 1988.
5. Kovtunen V. A. Poroelastic medium with non-penetrating crack driven by hydraulic fracture: Variational inequality and its semidiscretization // J. Comput. Appl. Math. 2022. V. 405. 113953.
6. Kashiwabara T., Itou H. Unique solvability of a crack problem with Signorini-type and Tresca friction conditions in a linearized elastodynamic body // Philos. Trans. R. Soc. A. 2022. V. 380. 20220225.
7. Рудой Е. М., Хлуднев А. М. Односторонний контакт пластины с тонким упругим препятствием // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12, № 2. С. 120–130.
8. Фурцев А. И. Задача об одностороннем контакте пластины Тимошенко и тонкого упругого препятствия // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 364–379.
9. Фурцев А. И. О контакте тонкого препятствия и пластины, содержащей тонкое включение // Сиб. журн. чистой и прикл. математики. 2017. Т. 17, № 4. С. 94–111.
10. Попова Т. С. Задача о контакте вязкоупругой пластины с упругой балкой // Сиб. журн. индустр. математики. 2016. Т. 19, № 3. С. 41–54.
11. Pyatkina E. V. A contact of two elastic plates connected along a thin rigid inclusion // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 1797–1815.
12. Хлуднев А. М. О контакте двух пластин, одна из которых содержит трещину // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, № 5. С. 882–894.
13. Хлуднев А. М. Об одностороннем контакте двух пластин, расположенных под углом друг к другу // Прикл. механика техн. физика. 2008. Т. 49, № 4. С. 42–58.
14. Lazarev N. P., Semenova G. M., Fedotov E. D. An equilibrium problem for a Kirchhoff–Love plate, contacting an obstacle by top and bottom edges // Lobachevskii J. Math. 2023. V. 44, N 2. P. 614–619.
15. Lazarev N. P., Rudoy E. M., Nikiforov D. Ya. Equilibrium problem for a Kirchhoff–Love plate contacting by the side edge and the bottom boundary // Журн. СФУ. Сер. Математика и физика. 2024. Т. 17, № 3. С. 355–364.



16. Лазарев Н. П., Никифоров Д. Я., Романова Н. А. Задача о равновесии для пластины Тимошенко, контактирующей боковой и лицевой поверхностями // Челяб. физ.-мат. журн. 2023. Т. 8, № 4. С. 528–541.
17. Фурцев А. И. Задача о равновесии гиперупругого тела с жестким включением и трещиной с условиями непроникания // Сиб. электрон. мат. изв. 2024. Т. 21, № 1. С. 17–40.
18. Попова Т. С. Задача о Т-образном сопряжении тонкого жесткого включения и включения Тимошенко в двумерном упругом теле // Сиб. электрон. мат. изв. 2024. Т. 21, № 2, С. 1578–1593.
19. Khludnev A., Fankina I. Equilibrium problem for elastic plate with thin rigid inclusion crossing an external boundary // Z. Angew. Math. Phys. 2021. V. 72. 121.
20. Lazarev N. P., Kovtunen V. A. Signorini-type problems over non-convex sets for composite bodies contacting by sharp edges of rigid inclusions // Math. 2022. V. 10, N 2. 250.
21. Lazarev N., Singh A. Contact problem for an inhomogeneous Timoshenko plate interacting with an inclined obstacle // Z. Angew. Math. Mech. 2025. V. 105. e70097.
22. Kovtunen V. A., Renard Y. Convergence analysis of semi-smooth Newton method for mixed FEM approximations of dynamic two-body contact and crack problems // J. Comput. Appl. Math. 2026. V. 471. 116722.
23. Казаринов Н. А., Рудой Е. М., Слесаренко В. Ю., Щербаков В. В. Математическое и численное моделирование равновесия упругого тела, армированного тонким упругим включением // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2018. Т. 58, № 5. С. 790–805.
24. Попова Т. С. Численное решение задачи о Т-образном сопряжении двух тонких включений Тимошенко в двумерном упругом теле // Мат. заметки СВФУ. 2024. Т. 31, № 3. С. 93–120.
25. Adams D. R., Hryniv V., Lenhart S. Optimal control of a biharmonic obstacle problem. Around the Research of Vladimir Maz'ya, III (A. Laptev, ed.). New York, NY: Springer, 2010. (Int. Math. Ser.; vol. 13).
26. Ciarlet P. G., Mardare C., Piersanti P. An obstacle problem for elliptic membrane shells // Math. Mech. Solids. 2018. V. 24, N 5. P. 1503–1529.
27. Аргатов И. И., Назаров С. А. Асимптотическое решение задачи Синьорини с препятствием на тонком продолговатом множестве // Мат. сб. 1996. Т. 187, № 10. С. 3–32.
28. Caffarelli L., Friedman A. The obstacle problem for the biharmonic operator // Ann. Sco. Norm. Sup. Pisa 1979. V. 6, N 1. P. 151–184.
29. Хлуднев А. М. Асимптотика анизотропных слабо искривленных включений в упругом теле // Сиб. журн. индустр. математики. 2017. Т. 20, № 1. С. 93–104.
30. Лазарев Н. П., Ковтуненко В. А. Асимптотический анализ задачи о равновесии неоднородного тела с шарнирно соединенными жесткими включениями различной ширины // Прикл. механика и техн. физика. 2023. Т. 64, № 5. С. 205–215.
31. De Benito Delgado M., Diaz J. I. Some remarks on the coincidence set for the Signorini problem // Opusc. Math. 2019. V. 39. P. 145–157.
32. Аргатов И. И., Назаров С. А. Асимптотическое решение задачи Синьорини с малыми участками свободной границы // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 2. С. 258–277.
33. Khludnev A. M., Kovtunen V. A. Analysis of cracks in solids. Southampton: WIT-Press, 2000.
34. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.
35. Khludnev A. M. Problem of a crack on the boundary of a rigid inclusion in an elastic plate // Mech. Solids. 2010. V. 45, N 5. P. 733–742.
36. Хлуднев А. М. Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
37. Намм Р. В., Цой Г. И. Решение контактной задачи теории упругости с жестким включе-

нием // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2019. Т. 59, № 4. С. 699–706.

*Поступила в редакцию 3 июня 2025 г.*

*После доработки 21 июля 2025 г.*

*Принята к публикации 29 августа 2025 г.*

Лазарев Нюргун Петрович  
Северо-Восточный федеральный университет,  
Научно-исследовательский институт математики,  
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000  
`nyurgunlazarev@yandex.ru`

Никифоров Дьулустан Яковлевич  
Северо-Восточный федеральный университет,  
Институт математики и информатики,  
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000  
`dju92@mail.ru`

Сафонов Степан Васильевич  
Республиканский лицей-интернат,  
ул. Ойунского, 37, Якутск 677000  
`rl_ssv@mail.ru`

PROBLEMS FOR PLATES WITH RIGID INCLUSIONS  
CONTACTING WITH FLAT AND POINTWISE  
OBSTACLES ON THE FRONT SURFACES

N. P. Lazarev, D. Ya. Nikiforov,  
and S. V. Safonov

**Abstract:** Two nonlinear mathematical models on equilibrium of plates in contact with obstacles of two types are studied. It is assumed that the plate contains a bulk rigid inclusion that touches the obstacle in the initial state. The first type of obstacle limits displacements of the plates to a square-shaped section lying on the front surface. The second type of obstacle also restricts displacements on the front surface, but has a pointwise character, i.e. Signorini-type conditions are specified at one given point. The convergence of solutions of a family of variational problems is proved as the parameter that determines the area of the contact zone tends to zero. It is shown that a limit function is the solution to the problem describing the pointwise contact of the plate.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-3-15-27

**Keywords:** variational problem, obstacle, plate, contact problem, limit passage.

REFERENCES

1. Fichera G., Boundary Value Problems of Elasticity with Unilateral Constraints, in: Handbook der Physik, Band 6a/2, Springer, Berlin; Heidelberg; New York (1972).
2. Dal Maso G. and Paderni G., “Variational inequalities for the biharmonic operator with variable obstacles,” *Ann. Mat. Pura Appl.*, **153**, 203–227 (1988).
3. Kovtunen V. A., Itou H., Khudnev A. M., and Rudoy E. M., “Non-smooth variational problems and applications,” *Philos. Trans. R. Soc. A*, **380**, article ID 20210364 (2022).
4. Baiocchi C. and Capello A., *Variational and Quasivariational Inequalities: Application to Free Boundary Problems*, Wiley, New York (1984).
5. Kovtunen V. A., “Poroelastic medium with non-penetrating crack driven by hydraulic fracture: Variational inequality and its semidiscretization,” *J. Comput. Appl. Math.*, **405**, article ID 113953 (2022).
6. Kashiwabara T. and Itou H., “Unique solvability of a crack problem with Signorini-type and Tresca friction conditions in a linearized elastodynamic body,” *Philos. Trans. R. Soc. A*, **380**, article ID 20220225 (2022).
7. Rudoi E. M. and Khudnev A. M., “Unilateral contact of a plate with a thin elastic obstacle,” *J. Appl. Ind. Math.*, **4**, 389–398 (2010).
8. Furtsev A. I., “The unilateral contact problem for a Timoshenko plate and a thin elastic obstacle,” *Sib. Electron. Math. Rep.*, **17**, 364–379 (2020).
9. Furtsev A. I., “On contact between a thin obstacle and a plate containing a thin inclusion,” *J. Math. Sci.*, **237**, No. 4, 530–545 (2019).
10. Popova T. S., “A contact problem for a viscoelastic plate and an elastic beam,” *J. Appl. Ind. Math.*, **10**, No. 3, 404–416 (2016).
11. Pyatkina E. V., “A contact of two elastic plates connected along a thin rigid inclusion,” *Sib. Electron. Math. Rep.*, **17**, 1797–1815 (2020).

12. Khludnev A. M., "The contact between two plates, one of which contains a crack," *J. Appl. Math. Mech.*, **61**, No. 5, 851–862 (1997).
13. Khludnev A. M., "On unilateral contact of two plates aligned at an angle to each other," *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **49**, 553–567 (2008).
14. Lazarev N. P., Semenova G. M., and Fedotov E. D., "An equilibrium problem for a Kirchhoff–Love plate, contacting an obstacle by top and bottom edges," *Lobachevskii J. Math.*, **44**, No. 2, 614–619 (2023).
15. Lazarev N. P., Rudoy E. M., and Nikiforov D. Ya., "Equilibrium problem for a Kirchhoff–Love plate contacting by the side edge and the bottom boundary," *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, **17**, No. 3, 355–364 (2024).
16. Lazarev N. P., Nikiforov D. Y., and Romanova N. A., "Equilibrium problem for a Timoshenko plate contacting by the side and face surfaces," *Chelyab. Fiz.-Mat. Zh.*, **8**, No. 4, 528–541 (2023).
17. Furtsev A. I., "Problem of equilibrium for hyperelastic body with rigid inclusion and non-penetrating crack," *Sib. Electron. Math. Rep.*, **21**, No. 1, 17–40 (2024).
18. Popova T. S., "The problem on  $T$ -shape junction of thin inclusion," *Sib. Electron. Math. Rep.*, **21**, No. 2, 1578–1593 (2024).
19. Khludnev A. and Fankina I., "Equilibrium problem for elastic plate with thin rigid inclusion crossing an external boundary," *Z. Angew. Math. Phys.*, **72**, article ID 121 (2021).
20. Lazarev N. P. and Kovtunenkov V. A., "Signorini-type problems over non-convex sets for composite bodies contacting by sharp edges of rigid inclusions," *Math.*, **10**, No. 2, article ID 250 (2022).
21. Lazarev N. and Singh A., "Contact problem for an inhomogeneous Timoshenko plate interacting with an inclined obstacle," *Z. Angew. Math. Mech.*, **105**, article ID e70097 (2025).
22. Kovtunenkov V. A. and Renard Y., "Convergence analysis of semi-smooth Newton method for mixed FEM approximations of dynamic two-body contact and crack problems," *J. Comput. Appl. Math.*, **471**, article ID 116722 (2026).
23. Kazarinov N. A., Rudoy E. M., Slesarenko V. Y., and Shcherbakov V. V., "Mathematical and numerical simulation of equilibrium of an elastic body reinforced by a thin elastic inclusion," *Comput. Math. Math. Phys.*, **58**, 761–774 (2018).
24. Popova T., "Numerical solution of the problem of  $T$ -shaped junction of two thin Timoshenko inclusions in a two-dimensional elastic body," *Mat. Zamet. SVFU*, **31**, No. 3, 93–120 (2024).
25. Adams D. R., Hryniv V., and Lenhart S., "Optimal Control of a Biharmonic Obstacle Problem, in: Around the Research of Vladimir Maz'ya, III (A. Laptev, ed.), Springer, New York (2010) (Int. Math. Ser.; vol. 13).
26. Ciarlet P. G., Mardare C., and Piersanti P., "An obstacle problem for elliptic membrane shells," *Math. Mech. Solids*, **24**, No. 5, 1503–1529 (2018).
27. Argatov I. I. and Nazarov S. A., "Asymptotic solution of the Signorini problem with an obstacle on a thin elongated set," *Sb. Math.*, **187**, No. 10, 1411–1442 (1996).
28. Caffarelli L. and Friedman A., "The obstacle problem for the biharmonic operator," *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, **6**, No. 1, 151–184 (1979).
29. Khludnev A. M., "Asymptotics of anisotropic weakly curved inclusions in an elastic body," *J. Appl. Ind. Math.*, **11**, 88–98 (2017).
30. Lazarev N. P. and Kovtunenkov V. A., "Asymptotic analysis of the problem of equilibrium of an inhomogeneous body with hinged rigid inclusions of various widths," *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **64**, No. 5, 911–920 (2024).
31. De Benito Delgado M. and Diaz J. I., "Some remarks on the coincidence set for the Signorini problem," *Opusc. Math.*, **39**, 145–157 (2019).
32. Argatov I. I. and Nazarov S. A., "Asymptotic solution to the Signorini problem with small parts of the free boundary," *Sib. Math. J.*, **35**, 231–249 (1994).
33. Khludnev A. M. and Kovtunenkov V. A., *Analysis of Cracks in Solids*, WIT-Press, Southampton (2000).
34. Volmir A. S., *Nonlinear Dynamics of Plates and Shells* [in Russian], Nauka, Moscow (1972).
35. Khludnev A. M., "Problem of a crack on the boundary of a rigid inclusion in an elastic plate," *Mech. Solids*, **45**, No. 5, 733–742 (2010).

- 
- 36.** *Khudnev A. M.*, Elasticity Problems in Nonsmooth Domains [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2010).
- 37.** *Namm R. V. and Tsoy G. I.*, “Solution of a contact elasticity problem with a rigid inclusion,” *Comput. Math. Math. Phys.*, **59**, 659–666 (2019).

*Submitted June 3, 2025*

*Revised July 21, 2025*

*Accepted August 29, 2025*

Nyurgun P. Lazarev  
North-Eastern Federal University (NEFU),  
Scientific Research Institute of Mathematics,  
58 Belinsky Street, Yakutsk 677891, Russia  
[nyurgunlazarev@yandex.ru](mailto:nyurgunlazarev@yandex.ru)

Djulustan Ya. Nikiforov  
Institute of Mathematics and Information Science,  
North-Eastern Federal University  
58 Belinsky Street, Yakutsk 677000, Russia  
[dju92@mail.ru](mailto:dju92@mail.ru)

Stepan V. Safonov  
Republican Lyceum Boarding School,  
37 Oyunsky Street, Yakutsk 677891, Russia  
[rl\\_ssv@mail.ru](mailto:rl_ssv@mail.ru)

## О ЧИСЛЕ ГРАНЕЙ МЕЧЕНО–ПОРЯДКОВЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Е. В. Мелихова

**Аннотация.** Предложен новый способ вычисления  $f$ -вектора мечено-порядкового многогранника. А именно, для произвольного (политопального) подразбиения произвольного выпуклого многогранника строится коцепной комплекс (над полем вычетов  $\mathbb{Z}_2$ ), для которого размерности его когомологий совпадают с компонентами  $f$ -вектора исходного многогранника. Для мечено-порядкового многогранника и его известного кубо-симплициального подразбиения этот коцепной комплекс удастся описать чисто комбинаторно, что и дает вычисление  $f$ -вектора. Независимый интерес может представлять предложенное в работе комбинаторное описание вышеупомянутого кубо-симплициального подразбиения (которое исходно было построено геометрически).

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-3-28-52

**Ключевые слова:** мечено-порядковый многогранник,  $f$ -вектор, политопальный комплекс.

### Введение

Если  $\mathcal{P} = (P, \preceq)$  — конечное частично-упорядоченное множество с наименьшим и наибольшим элементами  $\hat{0}$  и  $\hat{1}$ , то его *порядковый многогранник*  $O(\mathcal{P})$  лежит в конечномерном векторном пространстве  $\mathbb{R}^P$  всех отображений  $x$  из  $P$  в прямую. В этом пространстве он задается неравенствами  $x(p) \leq x(q)$  для всех  $p, q$  из  $P$  таких, что  $p \preceq q$ , а также равенствами  $x(\hat{0}) = 0$ ,  $x(\hat{1}) = 1$ . В работе [1] Стенли кроме прочего описал решетку граней многогранника  $O(\mathcal{P})$ , а также «каноническую» триангуляцию этого многогранника.

Ардила, Блим и Салазар в работе [2] рассмотрели обобщение многогранника  $O(\mathcal{P})$ , построенное по конечному частично-упорядоченному множеству  $\mathcal{P}$  с отмеченными элементами (включающими все экстремальные элементы  $\mathcal{P}$ ), на которых задана сохраняющая порядок функция  $\lambda$ . Таким образом появилось понятие *мечено-порядкового многогранника*  $O(\mathcal{P}, \lambda)$  (см. определение 2.1). Одним из важных примеров мечено-порядковых многогранников являются многогранники Гельфанда — Цетлина.

Мы изучаем комбинаторику мечено-порядковых многогранников. В частности, хотим описать  $f$ -вектор такого многогранника (т. е. конечную последовательность  $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ , где  $f_i$  — число  $i$ -мерных граней,  $n$  — размерность

---

В данной научной работе использованы результаты проекта «Симметрия. Информация. Хаос», выполненного в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2025 г.

многогранника). Для решения этой задачи иногда удобнее работать с соответствующей  $f$ -вектору производящей функцией  $f(t) = f_0 + f_1 \cdot t + \dots + f_n \cdot t^n$ , получившей название  $f$ -многочлена. В случае многогранников Гельфанда — Цетлина корейскими математиками [3], а также независимо автором настоящей работы [4] было найдено рекуррентное соотношение на  $f$ -многочлен. Случай вершин был рассмотрен уже в работе [5] (см. также [6]).

В случае произвольных мечено-порядковых многогранников для вычисления  $f$ -вектора возможен «лобовой» подход, основанный на описании решетки граней  $O(\mathcal{P}, \lambda)$ , которое дал Пегель [7]. В настоящей работе предлагается другой, менее очевидный подход. В разд. 1 для произвольного (политопального) подразбиения  $\mathcal{K}$  произвольного выпуклого многогранника  $M$  мы строим коцепной комплекс  $C_{\mathcal{K}}^*$  (над  $\mathbb{Z}_2$ ) такой, что размерности его когомологий совпадают с компонентами  $f$ -вектора многогранника  $M$  (см. лемму 1.7). В случае мечено-порядковых многогранников эту конструкцию удастся довести до вычисления  $f$ -вектора. А именно, у мечено-порядкового многогранника  $O(\mathcal{P}, \lambda)$  имеется кубо-симплициальное подразбиение  $\mathcal{K}_{\mathcal{P}, \lambda}$  (каждый элемент этого подразбиения является произведением симплексов), которое обобщает «каноническую» триангуляцию Стенли порядкового многогранника  $O(\mathcal{P})$ . Для многогранника Гельфанда — Цетлина это кубо-симплициальное подразбиение построил А. Постников [8, доказательство теоремы 15.1], а в общем случае — Лиу, Месарош и Сен-Дизье [9, доказательство теоремы 3.4] (см. также п. 5.2). Из этих работ можно извлечь и комбинаторное описание граней старшей размерности подразбиения  $\mathcal{K}_{\mathcal{P}, \lambda}$ . В разд. 2 описаны грани всех размерностей подразбиения  $\mathcal{K}_{\mathcal{P}, \lambda}$  в чисто комбинаторных терминах: они соответствуют некоторым цепям вложенных идеалов  $\mathcal{P}$  (см. предложение 2.12 и следствие 2.18). С использованием этого описания  $\mathcal{K}_{\mathcal{P}, \lambda}$  в разд. 3 дано комбинаторное описание коцепного комплекса  $C_{\mathcal{K}_{\mathcal{P}, \lambda}}^*$ . Полученное комбинаторное описание  $C_{\mathcal{K}_{\mathcal{P}, \lambda}}^*$  позволяет вычислить когомологии этого коцепного комплекса, размерности которых согласно лемме 1.7 совпадают с компонентами  $f$ -вектора многогранника  $O(\mathcal{P}, \lambda)$ . Таким образом, мы получаем некоторый новый способ вычисления  $f$ -вектора мечено-порядкового многогранника  $O(\mathcal{P}, \lambda)$  (см. теорему 3.8).

### 1. Многогранник и коцепной комплекс, который вычисляет его $f$ -вектор

Относительную границу многогранника  $Q$ , т. е. его границу в собственной аффинной оболочке, будем обозначать через  $\partial Q$ , а его относительную внутренность — через  $\overset{\circ}{Q}$ .

В основном следуя [10], дадим несколько определений.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.** Политопальным комплексом  $\mathcal{K}$  называется конечное семейство непустых многогранников, лежащих в некотором евклидовом пространстве и удовлетворяющих следующим условиям:

- (1) любая грань<sup>1)</sup> многогранника из  $\mathcal{K}$  снова принадлежит  $\mathcal{K}$ ;
- (2) пересечение любых двух многогранников  $M_1, M_2 \in \mathcal{K}$  либо пусто, либо является гранью каждого из них.

Множество  $|\mathcal{K}| = \bigcup_{M \in \mathcal{K}} M$  называется *телом* политопального комплекса  $\mathcal{K}$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Комплексом  $\mathcal{K}(M)$  многогранника  $M$  называется политопальный комплекс его граней.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Политопальный комплекс  $\mathcal{K}'$  называется *подразбиением* политопального комплекса  $\mathcal{K}$ , если  $|\mathcal{K}'| = |\mathcal{K}|$  и каждый многогранник комплекса  $\mathcal{K}'$  содержится в некотором многограннике комплекса  $\mathcal{K}$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. *Подразбиением* выпуклого многогранника  $M$  называется политопальный комплекс  $\mathcal{K}$ , тело которого совпадает с многогранником  $M$  (условие, что каждый многогранник комплекса  $\mathcal{K}$  содержится в некоторой грани многогранника  $M$ , в данном случае выполняются автоматически).

Нам также понадобится понятие *подкомплекса*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Подмножество политопального комплекса называется *подкомплексом*, если оно само является политопальным комплексом.

Пусть  $M$  — произвольный выпуклый многогранник,  $\mathcal{K}'$  — некоторое подразбиение комплекса  $\mathcal{K}(M)$ . Заметим, что  $\mathcal{K}'$  естественным образом наделяет многогранник  $M$  структурой *CW*-комплекса. Открытыми клетками будут относительные внутренности многогранников из  $\mathcal{K}'$ . Далее построим некоторый коцепный комплекс  $C_{\mathcal{K}'}^*$  с коэффициентами в поле  $\mathbb{Z}_2$  такой, что размерность  $H^n(C_{\mathcal{K}'}^*)$  совпадает с  $n$ -й компонентой  $f$ -вектора многогранника  $M$ . (Заметим, что все коцепные комплексы в данной работе рассматриваются над  $\mathbb{Z}_2$ .)

Пусть  $A$  — произвольная грань многогранника  $M$ . Рассмотрим подкомплекс  $\mathcal{A}'$  комплекса  $\mathcal{K}'$ , состоящий из всех многогранников  $S \in \mathcal{K}'$ , целиком лежащих в  $A$ . Другими словами,  $\mathcal{A}' = \{S \in \mathcal{K}' \mid \overset{\circ}{S} \cap A \neq \emptyset\}$ . А также рассмотрим подкомплекс  $\partial\mathcal{A}'$  комплекса  $\mathcal{A}'$ , состоящий из всех многогранников  $T \in \mathcal{A}'$ , целиком лежащих в  $\partial A$ .

Пусть  $C^*(\mathcal{A}', \partial\mathcal{A}'; \mathbb{Z}_2)$  — комплекс относительных клеточных коцепей пары *CW*-комплексов, заданной парой политопальных комплексов  $(\mathcal{A}', \partial\mathcal{A}')$ , с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$ . Возьмем прямую сумму таких комплексов коцепей по всем граням многогранника  $M$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Положим

$$C_{\mathcal{K}'}^* := \bigoplus_{A \in \mathcal{K}(M)} C^*(\mathcal{A}', \partial\mathcal{A}'; \mathbb{Z}_2). \quad (1)$$

Заметим, что группы коцепей комплекса  $C_{\mathcal{K}'}^*$  такие же, как у  $C^*(\mathcal{K}'; \mathbb{Z}_2)$ , но кограничные гомоморфизмы у них разные.

<sup>1)</sup>Пустое множество мы не считаем гранью.



**Лемма 1.7.**  $\dim H^n(C_{\mathcal{K}'}^*) = f_n(M)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что в силу определения 1.6 справедлива формула

$$H^n(C_{\mathcal{K}'}^*) = \bigoplus_{A \in \mathcal{K}(M)} H^n(\mathcal{A}', \partial \mathcal{A}'; \mathbb{Z}_2). \quad (2)$$

Так как  $(\mathcal{A}', \partial \mathcal{A}')$  — конечная  $CW$ -пара, то

$$H^*(\mathcal{A}', \partial \mathcal{A}'; \mathbb{Z}_2) \simeq \tilde{H}^*(\mathcal{A}'/\partial \mathcal{A}'; \mathbb{Z}_2), \quad (3)$$

где  $\mathcal{A}'/\partial \mathcal{A}'$  —  $CW$ -комплекс, полученный из  $\mathcal{A}'$  стягиванием в точку  $|\partial \mathcal{A}'|$ . Заметим, что

$$\tilde{H}^n(\mathcal{A}'/\partial \mathcal{A}'; \mathbb{Z}_2) \simeq \tilde{H}^n(S^{\dim A}; \mathbb{Z}_2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{если } n = \dim A, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4)$$

Из (3) и (4) следует, что

$$\dim \tilde{H}^n(\mathcal{A}', \partial \mathcal{A}'; \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = \dim A, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (5)$$

Из (2), (5) следует, что

$$\dim H^n(C_{\mathcal{K}'}^*) = \#\{A \mid A \in \mathcal{K}(M), \dim A = n\} = f_n(M). \quad \square$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.9. Ничто не мешает рассмотреть и двойственный подход, с группами цепей вместо групп коцепей. В этом случае

$$C_{\mathcal{K}'}^* = \bigoplus_{A \in \mathcal{K}(M)} C_*(\mathcal{A}', \partial \mathcal{A}'; \mathbb{Z}_2), \quad \dim H_n(C_{\mathcal{K}'}^*) = f_n(M).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.10. Как заметил М. Э. Казарян, предложенный подход к вычислению  $f$ -вектора многогранника тесно связан с начальными членами спектральной последовательности, ассоциированной с фильтрацией  $M$  его остовами. В самом деле, легко видеть, что

$$C_{\mathcal{K}'}^* \simeq \bigoplus_{i=0}^m C^*(\mathcal{K}'_i, \mathcal{K}'_{i-1}),$$

где  $\mathcal{K}'_i$  — подкомплекс комплекса  $\mathcal{K}'$ , являющийся подразбиением  $i$ -мерного остова многогранника  $M$ , а  $m$  — размерность  $M$ . С другой стороны, с фильтрацией  $\emptyset = \mathcal{K}'_{-1} \subset \mathcal{K}'_0 \subset \dots \subset \mathcal{K}'_m = \mathcal{K}'$  комплекса  $\mathcal{K}'$  ассоциирована когомологическая спектральная последовательность с  $E_0^{p,q} = C^{p+q}(\mathcal{K}'_p, \mathcal{K}'_{p-1})$  и  $E_1^{p,q} = H^{p+q}(\mathcal{K}'_p, \mathcal{K}'_{p-1})$  (см., например, [11]). Таким образом,

$$C_{\mathcal{K}'}^n \simeq \bigoplus_{i=0}^m E_0^{i, n-i}$$

и, следовательно,

$$H^n(C_{\mathcal{K}'}^*) \simeq \bigoplus_{i=0}^m E_1^{i, n-i}.$$

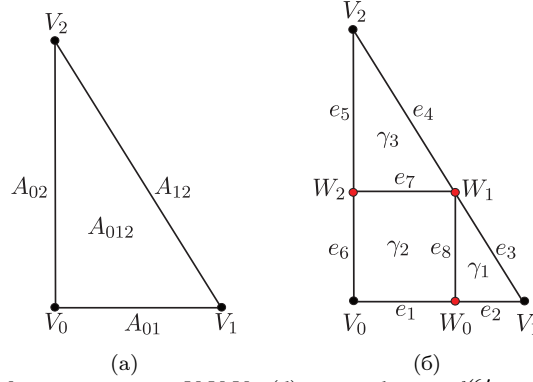


Рис. 1. (а)  $M$  — треугольник  $V_0V_1V_2$ , (б) подразбиение  $\mathcal{H}'$  комплекса  $\mathcal{H}(M)$ .

Другими словами, компоненты  $f$ -вектора многогранника  $M$  можно найти, суммируя размерности групп на  $n$ -й диагонали страницы  $E_1$  указанной спектральной последовательности.

**ПРИМЕР 1.10.** Пусть  $M$  — треугольник  $V_0V_1V_2$  (рис. 1(а)). В качестве  $\mathcal{H}'$  возьмем подразбиение (см. рис. 1(б)). Построим в этом случае коцепной комплекс  $C_{\mathcal{H}'}^*$ , и вычислим вручную его когомологии.

На рис. 1 для ребер и двумерной грани треугольника  $V_0V_1V_2$ , а также для относительных внутренностей многогранников подразбиения  $\mathcal{H}'$  введены специальные обозначения, которые мы далее будем использовать.

Действуя по определению 1.6, для каждой грани треугольника  $V_0V_1V_2$  построим комплекс относительных клеточных коцепей соответствующей пары, т. е. выпишем группы коцепей, а также кограничные гомоморфизмы. Внеся эти данные построчно в табл. 1, чтобы потом взять нужную прямую сумму. Далее для клетки  $\omega$  через  $\omega^*$  обозначена базисная коцепь, принимающая на  $\omega$  значение 1 и нуль на остальных клетках. Прочерки в ячейках табл. 1 соответствуют нулевым кограничным гомоморфизмам.

Таблица 1

грань	$C^0(\mathcal{A}', \partial\mathcal{A}')$	$C^1(\mathcal{A}', \partial\mathcal{A}')$	$C^2(\mathcal{A}', \partial\mathcal{A}')$	$\delta^0$	$\delta^1$
$V_0$	$\langle V_0^* \rangle$	0	0	—	—
$V_1$	$\langle V_1^* \rangle$	0	0	—	—
$V_2$	$\langle V_2^* \rangle$	0	0	—	—
$A_{01}$	$\langle W_0^* \rangle$	$\langle e_1^*, e_2^* \rangle$	0	$\delta^0(W_0^*) = e_1^* + e_2^*$	—
$A_{12}$	$\langle W_1^* \rangle$	$\langle e_3^*, e_4^* \rangle$	0	$\delta^0(W_1^*) = e_3^* + e_4^*$	—
$A_{02}$	$\langle W_2^* \rangle$	$\langle e_5^*, e_6^* \rangle$	0	$\delta^0(W_2^*) = e_5^* + e_6^*$	—
$A_{012}$	0	$\langle e_7^*, e_8^* \rangle$	$\langle \gamma_1^*, \gamma_2^*, \gamma_3^* \rangle$	—	$\delta^1(e_7^*) = \gamma_2^* + \gamma_3^*$ $\delta^1(e_8^*) = \gamma_1^* + \gamma_2^*$

Осталось взять прямую сумму комплексов  $C^*(\mathcal{A}', \partial\mathcal{A}')$  по всем граням треугольника  $V_0V_1V_2$  и увидеть, что  $C_{\mathcal{H}'}^0 \simeq \langle V_0^*, V_1^*, V_2^*, W_0^*, W_1^*, W_2^* \rangle \simeq C^0(\mathcal{H}'; \mathbb{Z}_2)$ ,  $C_{\mathcal{H}'}^1 \simeq \langle e_1^*, \dots, e_8^* \rangle \simeq C^1(\mathcal{H}'; \mathbb{Z}_2)$  и  $C_{\mathcal{H}'}^2 \simeq \langle \gamma_1^*, \gamma_2^*, \gamma_3^* \rangle \simeq C^2(\mathcal{H}'; \mathbb{Z}_2)$  (как и следовало из определения 1.6), но кограничные гомоморфизмы ненулевые только на

базисных коцепях, двойственных тем клеткам, которые лежат в относительной внутренности некоторой грани треугольника размерности строго большей, чем размерность самой клетки:

$$H^0(C_{\mathcal{K}'}^*) \simeq \ker \delta^0 \simeq \langle V_0^*, V_1^*, V_2^* \rangle \simeq \mathbb{Z}_2^3,$$

$$H^1(C_{\mathcal{K}'}^*) \simeq \langle e_1^*, \dots, e_6^* \rangle / \langle e_1^* + e_2^*, e_3^* + e_4^*, e_5^* + e_6^* \rangle \simeq \mathbb{Z}_2^3,$$

$$H^2(C_{\mathcal{K}'}^*) \simeq \langle \gamma_1^*, \gamma_2^*, \gamma_3^* \rangle / \langle \gamma_1^* + \gamma_2^*, \gamma_2^* + \gamma_3^* \rangle \simeq \mathbb{Z}_2.$$

Таким образом, размерности групп когомологий коцепного комплекса  $C_{\mathcal{K}'}^*$  совпадают с количеством граней соответствующих размерностей треугольника  $M$ .

## 2. Мечено-порядковый многогранник и его кубо-симплициальное подразбиение

Пусть  $\mathcal{P} = (P, \preceq)$  — конечное частично упорядоченное множество (далее — чум),  $P^*$  — подмножество  $P$ , содержащее все экстремальные элементы и  $\mathcal{P}^* = (P^*, \preceq)$  — заданный им подчум  $\mathcal{P}$  (далее — подчум отмеченных элементов),  $\lambda$  — сохраняющая порядок функция  $\mathcal{P}^* \rightarrow \mathbb{R}$ . Векторное пространство  $\mathbb{R}^P$  функций  $P \rightarrow \mathbb{R}$  изоморфно координатному пространству  $\mathbb{R}^{\#P}$ ; значение функции  $x \in \mathbb{R}^P$  на элементе  $p \in P$  отождествляется с  $p$ -й координатой  $x_p$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.** Мечено-порядковым многогранником  $O(\mathcal{P}, \lambda)$  называется множество точек  $x \in \mathbb{R}^P$  таких, что  $x_p \leq x_q$ , если  $p \preceq q$ , и  $x_a = \lambda(a)$ , если  $a \in P^*$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.2.** Для корректности определения мечено-порядкового многогранника чум  $\mathcal{P}$  не обязан иметь наименьший и наибольший элемент. Ограниченность  $O(\mathcal{P}, \lambda)$  достигается за счет того, что  $P^*$  содержит все экстремальные элементы чума  $\mathcal{P}$ .

**ПРИМЕР 2.3.** Пусть  $P = \{r, p, q, s, t\}$ . Отношение частичного порядка  $\preceq$  зададим накрывающими соотношениями:  $r \prec p \prec q \prec s$  и  $p \prec t$  (рис. 2(а)). В качестве  $P^*$  выберем трехэлементное подмножество  $\{r, s, t\}$ . Сохраняющую порядок функцию  $\lambda : \mathcal{P}^* \rightarrow \mathbb{R}$  определим равенствами:  $\lambda(r) = 0$ ,  $\lambda(s) = 2$  и  $\lambda(t) = 1$  (рис. 2(б)). Выпишем систему неравенств, определяющую многогранник  $O(\mathcal{P}, \lambda)$ , и построим его проекцию на плоскость  $Ox_p x_q$  (рис. 2(в)).

Согласно определению 2.1

$$O(\mathcal{P}, \lambda) = \begin{cases} 0 = x_r \leq x_p \leq x_q \leq x_s = 2, \\ x_p \leq x_t = 1. \end{cases}$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4.** Политопальный комплекс, в котором каждый многогранник является произведением симплексов, назовем *кубо-симплициальным комплексом*.

В этом разделе мы увидим, что мечено-порядковый многогранник  $O(\mathcal{P}, \lambda)$  (см. определение 2.1) обладает некоторым каноническим подразбиением  $\mathcal{K}_{\mathcal{P}, \lambda}$ ,

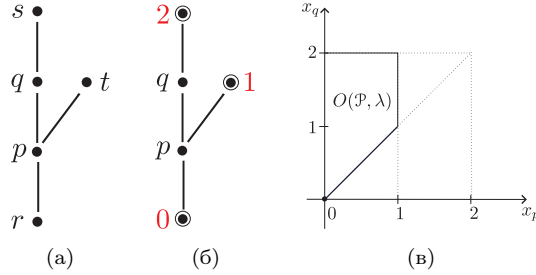


Рис. 2. (а) Диаграмма Хассе чума  $\mathcal{P}$  из примера 2.3; (б) диаграмма Хассе чума  $\mathcal{P}$  из примера 2.3, в которой выделены элементы  $P^*$  и указаны значения функции  $\lambda$  на них; (в) проекция  $O(\mathcal{P}, \lambda)$  на координатную плоскость  $Ox_p x_q$ .

приходящим из структуры чума  $\mathcal{P}$ . Геометрическое описание подразбиения  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}, \lambda}$  было дано в [9, доказательство теоремы 3.4]. Мы дадим комбинаторное описание подразбиения  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}, \lambda}$ , а также убедимся в том, что  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}, \lambda}$  является *кубосимплициальным комплексом*.

Для построения подразбиения  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}, \lambda}$  многогранника  $O(\mathcal{P}, \lambda)$  понадобится следующее стандартное

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5.** *Порядковым идеалом* чума  $\mathcal{P} = (P, \preceq)$  называется подмножество  $I \subset P$ , удовлетворяющее следующему условию: если  $x \in I$  и  $y \preceq x$ , то  $y \in I$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.6.** Порядковые идеалы чума  $\mathcal{P}$  также образуют чум по включению.

Пусть  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{P}^*$  и  $\lambda$  — это участвующие в определении  $O(\mathcal{P}, \lambda)$  чум, подчум отмеченных элементов и сохраняющая порядок функция из  $\mathcal{P}^*$  в  $\mathbb{R}$  соответственно.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7.** Цепь  $L$  в чуме порядковых идеалов чума  $\mathcal{P}$  будем называть  $\lambda$ -допустимой или просто *допустимой* (когда  $\lambda$  ясна из контекста), если она имеет вид  $\emptyset = I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq \dots \subsetneq I_m \subsetneq I_{m+1} = P$  и удовлетворяет условию

$$\text{каждое } \lambda((I_i \setminus I_{i-1}) \cap P^*) \text{ пусто или равно } \{t_i\} \text{ для некоторого } t_i \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

причем  $t_i < t_j$  при условии, что  $i < j$  и как  $t_i$ , так и  $t_j$  определены.

Неформально условие (6) означает следующее. Представим, что мы строим пирамиду из кубиков — элементов  $P$ , в которой этажи — это разности между соседними идеалами  $I_i$ . Каждый этаж состоит по крайней мере из одного кубика. Некоторые из наших кубиков являются отмеченными (это элементы  $P^*$ ), на них стоит метка-число (значение функции  $\lambda$ ). Тогда условие (6) означает, что отмеченные кубики с одинаковыми метками должны попадать в один и тот же этаж, а также метки добавляемых кубиков должны возрастать от этажа к этажу.

Пусть теперь  $L$  — цепь вида  $\emptyset = I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq \dots \subsetneq I_m \subsetneq I_{m+1} = P$  в чуме порядковых идеалов чума  $\mathcal{P}$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.8. Будем обозначать через  $F_L = F_L(\lambda)$  множество точек  $x \in \mathbb{R}^P$ , для которых выполнены три условия:

$$x|_{P^*} = \lambda,$$

$$\text{функция } x : P \rightarrow \mathbb{R} \text{ постоянна на множествах } I_1 \setminus I_0, \dots, I_{m+1} \setminus I_m, \quad (7)$$

$$x(I_1) \leq x(I_2 \setminus I_1) \leq \dots \leq x(I_m \setminus I_{m-1}) \leq x(P \setminus I_m).$$

**Лемма 2.9.** Соответствие  $L \mapsto F_L$  между допустимыми цепями чума порядковых идеалов чума  $\mathcal{P}$  и непустыми множествами вида  $F_L$  взаимно однозначно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сюръективность очевидна. Докажем инъективность. Предположим, что различным допустимым цепям  $L$  и  $L'$  соответствуют одинаковые множества  $F_L = F_{L'}$ . Это может случиться только в случае, если хотя бы в одной из рассматриваемых цепей (например в  $L$ ) найдутся разности соседних идеалов  $I_k \setminus I_{k-1}$  и  $I_{k+1} \setminus I_k$ , на которых функции  $x \in F_L$  принимают одно и то же постоянное значение, т. е.  $x(I_k \setminus I_{k-1}) = x(I_{k+1} \setminus I_k) = r$ . Последнее возможно лишь в случае, когда существуют отмеченные элементы  $a, b \in P^*$ , удовлетворяющие условиям  $a \in I_k \setminus I_{k-1}$ ,  $b \in I_{k+1} \setminus I_k$  и  $\lambda(a) = \lambda(b) = r$ . Но это противоречит допустимости цепи  $L$  (условие (6) нарушено). Поэтому инъективность доказана.  $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.10. Если функция  $x$  содержится в  $F_L(\lambda)$  для некоторой  $\lambda$ -допустимой цепи  $L$  чума порядковых идеалов чума  $\mathcal{P}$ , то  $x$  — сохраняющая порядок функция  $\mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ , продолжающая  $\lambda$ , в частности,  $x \in O(\mathcal{P}, \lambda)$ .

ПРИМЕР 2.11. Пусть  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{P}^*$  и  $\lambda$  — как в примере 2.3.

Рассмотрим цепь  $L_1 = (\emptyset \neq \{r\} \subsetneq \{r, p\} \subsetneq \{r, p, t\} \subsetneq \{r, p, t, q\} \subsetneq P)$  в чуме порядковых идеалов чума  $\mathcal{P}$ . Из табл. 2 видно, что она удовлетворяет условию (6).

Таблица 2

$S$	$\{r\}$	$\{p\}$	$\{t\}$	$\{q\}$	$\{s\}$
$\lambda(S \cap P^*)$	$\{0\}$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\emptyset$	$\{2\}$

Соответствующее подмножество  $F_{L_1} \subset \mathbb{R}^5$  состоит из таких точек  $x$ , что  $0 = x_r \leq x_p \leq x_t = 1 \leq x_q \leq x_s = 2$ . Проекция  $F_{L_1}$  на плоскость  $Ox_p x_q$  является квадратом  $0 \leq x_p \leq 1 \leq x_q \leq 2$ .

Покажем, что цепь  $L = (\emptyset \neq \{r\} \subsetneq \{r, p\} \subsetneq \{r, p, q\})$  не является допустимой. В самом деле,  $\lambda((P \setminus \{r, p, q\}) \cap P^*) = \lambda(\{s, t\} \cap P^*) = \{1, 2\}$ , что противоречит условию (6).

Соответствующее подмножество  $F_L \subset \mathbb{R}^5$  окажется пустым, так как по определению должно состоять из таких точек  $x$ , что  $0 = x_r \leq x_p \leq x_q \leq x_t = 1 = 2 = x_s$ .

**Предложение 2.12.** *Совокупность*

$$\mathcal{H}_{\mathcal{P}, \lambda} := \{F_L \mid L - \lambda\text{-допустимая цепь в чуме порядковых идеалов } \mathcal{P}\}$$

является политопальным комплексом.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Покажем, что для  $\lambda$ -допустимой цепи  $L$  в чуме порядковых идеалов чума  $\mathcal{P}$  условия (7) задают систему непротиворечивых линейных неравенств и равенств в пространстве  $\mathbb{R}^P$  и тем самым определяют непустой выпуклый полиэдр.

Пусть  $P$  состоит из элементов  $p_1, \dots, p_l$ . Всякой сохраняющей порядок биекции  $\sigma : \mathcal{P} \rightarrow \{1, 2, \dots, l\}$  соответствует линейное расширение  $\mathcal{P}_\sigma = (P, \preceq_\sigma)$  чума  $\mathcal{P}$ , а именно,  $s \preceq_\sigma t$ , если  $\sigma(s) \leq \sigma(t)$ . Легко видеть, что это соответствие взаимно однозначно. Биекция  $\sigma$  задает перестановку  $q_1, \dots, q_l$  элементов  $p_1, \dots, p_l$ , где  $q_i = \sigma^{-1}(i)$ .

**Лемма 2.13.** *Между множеством линейных расширений чума  $\mathcal{P}$  и множеством цепей максимальной длины (т. е. длины  $l + 1$ ) в чуме порядковых идеалов чума  $\mathcal{P}$  существует взаимно однозначное соответствие.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Действительно, пусть  $\mathcal{P}_\sigma$  — линейное расширение чума  $\mathcal{P}$ . Поставим ему в соответствие цепь  $L_\sigma = (I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq \dots \subsetneq I_l)$ , где  $I_i = \sigma^{-1}(\{1, 2, \dots, i\})$ . Обратно, пусть дана цепь максимальной длины  $L = (\emptyset = I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq \dots \subsetneq I_l = P)$ . Тогда каждая разность  $I_{k+1} \setminus I_k$  есть одноэлементное множество  $\{u\}$  и поскольку  $I_k$  — порядковый идеал, для любого элемента  $v \in I_k$  либо  $v \prec u$ , либо  $u$  и  $v$  несравнимы. Поставим в соответствие цепи  $L$  линейное расширение  $\mathcal{P}_\tau$  чума  $\mathcal{P}$  такое, что каждое  $\tau(I_i \setminus I_{i-1}) = \{i\}$ .  $\square$

Доказательство следующей леммы не представляет сложности.

**Лемма 2.14.** *Цепь  $L_\sigma$  не является  $\lambda$ -допустимой в точности в следующих двух случаях. Случай 1: функция  $\lambda$  не сохраняет линейный порядок  $\preceq_\sigma$ , т. е. существует пара  $\preceq$ -несравнимых элементов  $a, b \in P^*$  таких, что  $a \preceq_\sigma b$ , но  $\lambda(a) > \lambda(b)$ . Случай 2:  $\lambda$  сохраняет  $\preceq_\sigma$ , но существуют различные элементы из  $P^*$ , на которых  $\lambda$  принимает одинаковые значения.*

Заметим, что в случае 2 цепь  $L_\sigma$  можно проредить, не меняя множества  $F_{L_\sigma}$ , так, чтобы она стала  $\lambda$ -допустимой. Действительно, предположим, что  $q_k$  и  $q_{k+n}$  из  $P^*$  таковы, что  $\lambda(q_k) = \lambda(q_{k+n})$ ; тогда удалим из цепи  $L_\sigma$  идеалы с  $I_k$  по  $I_{k+n-1}$ . Повторим эту процедуру для каждой пары различных элементов из  $P^*$ , на которых  $\lambda$  принимает одинаковые значения. В результате получим  $\lambda$ -допустимую цепь  $\tilde{L}_\sigma$ .

Если цепь  $L_\sigma$  является  $\lambda$ -допустимой, положим  $\tilde{L}_\sigma = L_\sigma$ . Таким образом, цепь  $\tilde{L}_\sigma$  определена для всех  $\lambda$ -согласованных линейных расширений  $\mathcal{P}_\sigma$  чума  $\mathcal{P}$ , т. е. таких, что  $\lambda$  сохраняет  $\preceq_\sigma$ .

Пусть  $\mathcal{P}_\sigma$  —  $\lambda$ -согласованное линейное расширение  $\mathcal{P}$  и  $q_i = \sigma^{-1}(i)$ . Тогда множество точек  $F_{\tilde{L}_\sigma}$  является многогранником в  $\mathbb{R}^P$ , заданным системой

равенств и неравенств, получающейся из системы  $x_{q_1} \leq x_{q_2} \leq \dots \leq x_{q_l}$  заменой некоторых знаков неравенства знаками равенства и всех координат  $x_{q_i}$  при  $q_i \in P^*$  числами  $\lambda(q_i)$  в соответствии с условиями (7). Ограниченность  $F_{\tilde{L}_\sigma}$  следует из условия, что  $P^*$  содержит все экстремальные элементы чума  $\mathcal{P}$ .

Итак, по каждому  $\lambda$ -согласованному линейному расширению  $\mathcal{P}_\sigma$  чума  $\mathcal{P}$  построена  $\lambda$ -допустимая цепь  $\tilde{L}_\sigma$ , определяющая многогранник  $F_{\tilde{L}_\sigma} \in \mathcal{H}_{\mathcal{P},\lambda}$ . Любая другая  $\lambda$ -допустимая цепь  $L$  в чуме порядковых идеалов чума  $\mathcal{P}$  будет состоять из меньшего числа звеньев и может быть получена из  $\tilde{L}_\sigma$  для некоторого (возможно, не единственного) линейного расширения  $\mathcal{P}_\sigma$  чума  $\mathcal{P}$  удалением некоторого набора идеалов. Поэтому соответствующее ей множество точек  $F_L$  является многогранником, заданным системой неравенств и равенств, получающихся из системы, определяющей многогранник  $F_{\tilde{L}_\sigma}$ , заменой некоторых знаков неравенства знаками равенства в соответствии с условиями (7). Соблюдение условия (6) гарантирует непротиворечивость полученной системы. А это, в частности, означает, что  $F_L$  является непустой гранью многогранника  $F_{\tilde{L}_\sigma}$ . Таким образом, элементы  $\mathcal{H}_{\mathcal{P},\lambda}$  максимальной размерности всегда имеют вид  $F_{\tilde{L}_\sigma}$  для некоторого линейного расширения  $\mathcal{P}_\sigma$  чума  $\mathcal{P}$  (ср. пример 2.17).

Покажем, что все грани многогранника  $F_{\tilde{L}_\sigma}$  принадлежат  $\mathcal{H}_{\mathcal{P},\lambda}$ . Пусть  $G$  — непустая грань многогранника  $F_{\tilde{L}_\sigma}$ . Тогда определяющая система неравенств и равенств для  $G$  — назовем ее  $S_G$  — получается из системы, определяющей многогранник  $F_{\tilde{L}_\sigma}$ , не приводящей к противоречию заменой некоторых знаков неравенства знаками равенства. Заметим, что, как и раньше, система  $S_G$  получается из системы  $x_{q_1} \leq x_{q_2} \leq \dots \leq x_{q_l}$  заменой некоторых знаков неравенства знаками равенства и всех координат  $x_{q_i}$  при  $q_i \in P^*$  числами  $\lambda(q_i)$ . Выпишем цепь  $L$ , такую, что  $F_L = G$ , следующим очевидным образом: в  $I_1$  помещаем все элементы  $P$ , на которых функции  $x$  из  $G$  принимают значения, стоящие в системе  $S_G$  до первого знака неравенства (движемся слева направо); в  $I_2$  помещаем все элементы  $P$ , на которых функции  $x$  из  $G$  принимают значения, стоящие до второго знака неравенства, и т. д. Построенная цепь будет удовлетворять условию (6), иначе соответствующая система была бы противоречивой.

Для завершения доказательства остается доказать следующую лемму.

**Лемма 2.15.** *Если пересечение  $\lambda$ -допустимых цепей  $L$  и  $L'$  в чуме порядковых идеалов чума  $\mathcal{P}$  является  $\lambda$ -допустимой цепью, то  $F_L \cap F_{L'} \in \mathcal{H}_{\mathcal{P},\lambda}$ , а именно,  $F_L \cap F_{L'} = F_{L \cap L'}$ , причем  $F_{L \cap L'}$  — грань каждого из многогранников  $F_L$  и  $F_{L'}$ ; если пересечение  $L \cap L'$  не является  $\lambda$ -допустимой цепью, то пересечение  $F_L$  и  $F_{L'}$  пусто.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть пересечение  $L \cap L' = (\emptyset = J_0 \subsetneq J_1 \subsetneq \dots \subsetneq J_k \subsetneq J_{k+1} = P)$  —  $\lambda$ -допустимая цепь. Заметим, что в каждой из цепей  $L$  и  $L'$  разность  $J_r \setminus J_{r-1}$  (где  $1 \leq r \leq k+1$ ) подразбита своей цепочкой вложенных

идеалов (рис. 3).

$$\begin{array}{ccccccc} L \cap L' = & (\cdots \subsetneq & J_{r-1} & & \subsetneq & & J_r \subsetneq \cdots) \\ & & \parallel & & & & \parallel \\ L = & (\cdots \subsetneq & I_{i-l_1} & \subsetneq & I_{i-l_1+1} & \cdots \subsetneq & I_i \subsetneq \cdots) \\ & & \parallel & & & & \parallel \\ L' = & (\cdots \subsetneq & I'_{j-l_2} & \subsetneq & I'_{j-l_2+1} & \cdots \subsetneq & I'_j \subsetneq \cdots) \end{array}$$

Рис. 3. Связь между цепями вложенных идеалов и их пересечением.

По определению 2.9 справедливы включения  $F_{L \cap L'} \subset F_L$  и  $F_{L \cap L'} \subset F_{L'}$ , значит,  $F_{L \cap L'} \subset F_L \cap F_{L'}$  (это включение, в частности, гарантирует непустоту  $F_L \cap F_{L'}$ ). Докажем, что  $F_L \cap F_{L'} \subset F_{L \cap L'}$ . Пусть  $x \in F_L \cap F_{L'}$ . Покажем, что  $x \in F_{L \cap L'}$ . Согласно (7) последнее равносильно условиям (а)  $x|_{P^*} = \lambda$ , (б)  $x$  постоянна на множествах  $J_1 \setminus J_0, \dots, J_{k+1} \setminus J_k$  и (в)  $x(J_1) \leq x(J_2 \setminus J_1) \leq \dots \leq x(J_k \setminus I_{k-1}) \leq x(P \setminus J_k)$ . Заметим, что условия (а) и (в) выполнены очевидным образом, так что остается проверить справедливость условия (б). Предположим, что  $x$  не постоянна на множествах  $J_1 \setminus J_0, \dots, J_{k+1} \setminus J_k$ , т. е. найдется разность соседних идеалов  $J_r \setminus J_{r-1}$  цепи  $L \cap L'$  такая, что функция  $x$  принимает на ней по крайней мере два различных значения. Допустим, значения функции  $x$  различны на элементах  $p, q \in J_r \setminus J_{r-1}$ , т. е.  $x_p = r_1 \neq r_2 = x_q$ . Без потери общности можно предположить, что  $r_1 < r_2$ . Так как  $x \in F_L \cap F_{L'}$ , то согласно замечанию 2.10  $x$  — сохраняющая порядок функция  $\mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ . Заметим, что порядковые идеалы чума  $\mathbb{R}$  — это лучи  $(-\infty, r)$ , где  $r$  — некоторое действительное число. Рассмотрим порядковый идеал  $(-\infty; r_1)$  чума  $\mathbb{R}$ , назовем его  $I$ . Полный прообраз этого идеала  $x^{-1}(I)$  является идеалом чума  $\mathcal{P}$ , назовем его  $J$  (полный прообраз порядкового идеала при монотонном отображении чумов является порядковым идеалом). По определению 2.9 идеал  $J$  содержится как в цепи  $L$ , так и в цепи  $L'$ , а значит, принадлежит их пересечению. Заметим, что  $J_{r-1} \subsetneq J \subsetneq J_r$ . Однако мы предполагали, что идеалы  $J_{r-1}$  и  $J_r$  в цепи  $L \cap L'$  — соседние. Это противоречие доказывает, что функция  $x$  из  $F_L \cap F_{L'}$  постоянна на множествах  $J_1 \setminus J_0, \dots, J_{k+1} \setminus J_k$ . Мы показали, что любая функция  $x$  из  $F_L \cap F_{L'}$  принадлежит также и  $F_{L \cap L'}$ , т. е.  $F_L \cap F_{L'} \subset F_{L \cap L'}$ . Таким образом, если  $L \cap L'$  —  $\lambda$ -допустимая цепь, то справедливо равенство  $F_L \cap F_{L'} = F_{L \cap L'}$ . Несложно понять, что  $F_{L \cap L'}$  является гранью каждого из многогранников  $F_L$  и  $F_{L'}$ .

Теперь пусть пересечение  $L \cap L' = (\emptyset = J_0 \subsetneq J_1 \subsetneq \dots \subsetneq J_k \subsetneq J_{k+1} = P)$  не является  $\lambda$ -допустимой цепью. Цепи  $L$  и  $L'$   $\lambda$ -допустимые, поэтому достаточно очевидно, что  $L \cap L'$  может не быть  $\lambda$ -допустимой только в том случае, если некоторая разность соседних идеалов  $J_r \setminus J_{r-1}$  цепи  $L \cap L'$  содержит элементы  $a, b \in P^*$  такие, что  $\lambda(a) < \lambda(b)$ . Предположим, что  $F_L \cap F_{L'}$  непусто, т. е. найдется функция  $x$ , которая принадлежит как  $F_L$ , так и  $F_{L'}$ . Вновь согласно замечанию 2.10  $x$  — сохраняющая порядок функция из  $\mathcal{P}$  в  $\mathbb{R}$ , продолжающая  $\lambda$ . Поэтому  $x_a = \lambda(a)$  и  $x_b = \lambda(b)$ . В чуме  $\mathbb{R}$  рассмотрим порядковый идеал  $(-\infty; \lambda(a))$ , назовем его  $I'$ . Как мы уже знаем, полный прообраз этого идеала  $x^{-1}(I')$  является идеалом чума  $\mathcal{P}$ , общим для цепей  $L$  и  $L'$  (т. е.  $x^{-1}(I') \in L \cap L'$ ).



Назовем его  $J'$ . Идеал  $J'$  по построению содержит идеал  $J_{r-1}$ , содержится в идеале  $J_r$  и не совпадает ни с одним из них. Однако мы предполагали, что идеалы  $J_r$  и  $J_{r-1}$  в цепи  $L \cap L'$  соседние. Получили противоречие. Поэтому если цепь  $L \cap L'$  не является  $\lambda$ -допустимой цепью, то пересечение  $F_L \cap F_{L'}$  пусто.  $\square$

На этом доказательство предложения завершено.  $\square$

**ПРИМЕР 2.16.** Рассмотрим чум из примера 2.11. Найдем многогранники максимальной размерности комплекса  $\mathcal{K}_{\mathcal{P},\lambda}$ . Из доказательства предложения 2.12 мы знаем, что они всегда имеют вид  $F_{L_\sigma}$  для некоторого линейного расширения  $\mathcal{P}_\sigma$  чума  $\mathcal{P}$ . Так как в нашем случае в чуме  $\mathcal{P}$  всего два несравнимых элемента, то и линейных расширений будет в точности два:  $\mathcal{P}_{\sigma_1}$  и  $\mathcal{P}_{\sigma_2}$  (рис. 4(а),(б)). Многогранник  $F_{L_{\sigma_1}} = F_{L_1}$  из примера 2.11. Многогранник  $F_{L_{\sigma_2}} \subset \mathbb{R}^5$  состоит из таких точек  $x$ , что  $0 = x_r \leq x_p \leq x_q \leq x_t = 1 \leq x_s = 2$ . Проекция  $F_{L_{\sigma_2}}$  на  $Ox_p x_q$  является треугольником (рис. 4(в)).

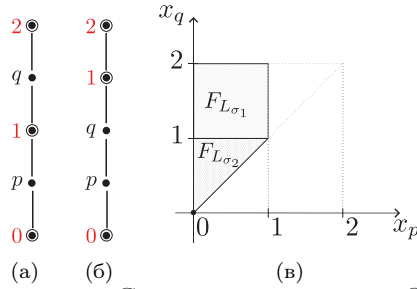


Рис. 4. (а) Диаграмма Хассе  $\mathcal{P}_{\sigma_1}$ ; (б) диаграмма Хассе  $\mathcal{P}_{\sigma_2}$ ; (в) проекция под-разбиения  $\mathcal{K}_{\mathcal{P},\lambda}$  многогранника  $O(\mathcal{P},\lambda)$  на плоскость  $Ox_p x_q$ .

**Следствие 2.17.** Многогранник  $F_L$  является гранью  $F_{L'}$ , если и только если  $\lambda$ -допустимая цепь  $L$  содержится в  $\lambda$ -допустимой цепи  $L'$  (т. е. цепь  $L$  получается из  $L'$  удалением некоторого набора идеалов).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $F_L$  является гранью  $F_{L'}$ . Тогда  $F_L \cap F_{L'} = F_L$ . Таким образом, пересечение  $F_L \cap F_{L'}$  непусто. Из леммы 2.15 следует, что  $L \cap L'$  является  $\lambda$ -допустимой цепью. Применяя снова лемму 2.15, получаем, что  $F_L \cap F_{L'} = F_{L \cap L'}$ . Стало быть,  $F_L = F_{L \cap L'}$ . Но соответствие  $L \mapsto F_L$  инъективно (см. лемму 2.9), поэтому  $L = L \cap L'$ , т. е.  $L$  содержится в  $L'$ .

Теперь пусть  $L \subset L'$ , тогда  $L \cap L' = L$ . Так как каждая из цепей  $L$  и  $L'$  по условию является  $\lambda$ -допустимой, то и  $L \cap L'$  является  $\lambda$ -допустимой цепью. В лемме 2.15 показано, что в этом случае  $F_L \cap F_{L'} = F_{L \cap L'}$ . Так как  $L \cap L' = L$ , имеем  $F_L \cap F_{L'} = F_L$ . Поэтому  $F_L$  является гранью  $F_{L'}$ .  $\square$

**Следствие 2.18.** Политопальный комплекс  $\mathcal{K}_{\mathcal{P},\lambda}$  является подразбиением многогранника  $O(\mathcal{P},\lambda)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Нужно показать, что  $|\mathcal{K}_{\mathcal{P},\lambda}| = O(\mathcal{P},\lambda)$ .

Пусть  $\mathcal{P}_\sigma$  —  $\lambda$ -согласованное линейное расширение чума  $\mathcal{P}$ , и пусть  $L_\sigma$  — соответствующая ему цепь максимальной длины в чуме порядковых идеалов чума  $\mathcal{P}$  (см. начало доказательства предложения 2.12). Заметим, что многогранник  $F_{L_\sigma} \in \mathcal{K}_{\mathcal{P},\lambda}$  (см. доказательство предложения 2.12) по построению является мечено-порядковым многогранником  $O(\mathcal{P}_\sigma, \lambda)$ . Из определений линейного расширения чума и мечено-порядкового многогранника (см. определение 2.1) следует, что многогранник  $O(\mathcal{P}_\sigma, \lambda)$  высекается из многогранника  $O(\mathcal{P}, \lambda)$  набором полупространств, поэтому  $\bigcup_{\sigma} O(\mathcal{P}_\sigma, \lambda) \subset O(\mathcal{P}, \lambda)$  (где объединение берется по всем  $\lambda$ -согласованным линейным расширениям). Покажем, что верно и обратное включение. Пусть  $x \in O(\mathcal{P}, \lambda)$ . Значения функции  $x$  на элементах  $P$  можно упорядочить по возрастанию, а затем записать связывающую их цепочку неравенств  $x_{q_1} \leq x_{q_2} \leq \dots \leq x_{q_{\#P}}$  (такая цепочка может быть не одна, если функция  $x$  принимает одинаковые значения на нескольких элементах  $P$ ). Так как  $x \in O(\mathcal{P}, \lambda)$ , то перестановке  $q_1, \dots, q_{\#P}$  элементов  $P$  соответствует некоторое  $\lambda$ -согласованное линейное расширение  $\mathcal{P}_\sigma$ . Заключаем, что  $x \in O(\mathcal{P}_\sigma, \lambda)$ .

Для любого политопального комплекса верно, что его тело является объединением многогранников комплекса максимальной размерности. Поэтому  $|\mathcal{K}_{\mathcal{P},\lambda}| = \bigcup_{\sigma} F_{L_\sigma}$ . Таким образом,

$$|\mathcal{K}_{\mathcal{P},\lambda}| = \bigcup_{\sigma} F_{L_\sigma} = \bigcup_{\sigma} O(\mathcal{P}_\sigma, \lambda) = O(\mathcal{P}, \lambda). \quad \square$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.19.** Политопальный комплекс  $\mathcal{K}_{\mathcal{P},\lambda}$  является кубо-симплициальным подразбиением многогранника  $O(\mathcal{P}, \lambda)$ , так как каждый из многогранников  $F_{L_\sigma} = O(\mathcal{P}_\sigma, \lambda)$  является произведением симплексов.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.20.** Подразбиение  $\mathcal{K}_{\mathcal{P},\lambda}$  мечено-порядкового многогранника можно описать геометрически [9, доказательство теоремы 3.4]. А именно, исходя из всевозможных пар несравнимых элементов  $\mathcal{P}$ , будем рассекать многогранник  $O(\mathcal{P}, \lambda)$  некоторым набором гиперплоскостей. Возможны такие варианты: (а)  $u, v \in P \setminus P^*$  — несравнимые элементы, ни один из которых не является отмеченным, тогда проведем гиперплоскость  $x_u = x_v$ , обозначим ее через  $H_{uv}$ ; (б)  $s \in P \setminus P^*$  и  $a \in P^*$  — несравнимые элементы, один из которых является отмеченным, тогда проведем гиперплоскость  $x_s = \lambda(a)$ , обозначим ее через  $H_{as}$ ; (в)  $b, c \in P^*$  — несравнимые элементы, которые оба оказались отмеченными, тогда они не участвуют в дополнительных построениях. В результате получим некоторое подразбиение  $\mathcal{K}'$  многогранника  $O(\mathcal{P}, \lambda)$ .

Покажем, что каждый  $F_{L_\sigma} = O(\mathcal{P}_\sigma, \lambda)$  принадлежит  $\mathcal{K}'$ . Напомним, что в  $\mathcal{P}_\sigma$  зафиксирован порядок между элементами, которые были несравнимы в  $\mathcal{P}$ . Поэтому каждый многогранник

$$O(\mathcal{P}_\sigma, \lambda) = O(\mathcal{P}, \lambda) \cap \left( \bigcap_{u,v} H_{uv}^{\geq} \right) \cap \left( \bigcap_{a,s} H_{as}^{\geq} \right),$$

где символ  $H_{uv}^{\geq}$  означает одно из двух полупространств  $x_u \leq x_v$  или  $x_u \geq x_v$  в зависимости от установленного порядка между элементами  $u$  и  $v$  в  $\mathcal{P}_\sigma$ . Таким образом,  $O(\mathcal{P}_\sigma, \lambda) \in \mathcal{K}'$ . Принимая во внимание предложение 2.12 и следствие 2.18, можно заключить, что  $\mathcal{K}_{\mathcal{P}, \lambda} = \mathcal{K}'$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.21. Также в [9, § 5.2] для случая мечено-порядковых многогранников, построенных по строго планарному чуму с отмеченными элементами (см. [9, определение 4.2]), приведена конструкция, которая позволяет, поэтапно преобразуя исходный чум, получить цепи с отмеченными элементами, мечено-порядковые многогранники которых суть многогранники  $F_{L_\sigma}^-$ .

### 3. Вычисление $f$ -вектора многогранника $O(\mathcal{P}, \lambda)$

Пусть снова  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{P}^*$  и  $\lambda$  — участвующие в определении 2.1 чум, подчум отмеченных элементов и сохраняющая порядок функция из  $\mathcal{P}^*$  в  $\mathbb{R}$  соответственно. В этом разделе мы хотим описать коцепной комплекс  $C_{\mathcal{K}_{\mathcal{P}, \lambda}}^*$  в чисто комбинаторных терминах, т. е. напрямую в терминах чума  $\mathcal{P}$  и сохраняющего порядок отображения  $\lambda$ , без ссылок на какие-либо многогранники.

Для того чтобы описать в комбинаторных терминах группы коцепей комплекса  $C_{\mathcal{K}_{\mathcal{P}, \lambda}}^*$ , сначала опишем в комбинаторных терминах размерность многогранника  $F_L$  (см. 2.8) для всякой  $\lambda$ -допустимой цепи  $L$  (см. определение 2.7).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Назовем *размерностью*  $\lambda$ -допустимой цепи  $L = (\emptyset = I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq \dots \subsetneq I_m \subsetneq I_{m+1} = P)$  количество таких разностей соседних идеалов  $I_i \setminus I_{i-1}$ , которые не пересекаются с  $P^*$ . Обозначение:  $\dim L$ .

Легко видеть, что  $\dim F_L = \dim L$ .

Заметим, что  $\dim L + 3$  для  $\lambda$ -допустимой цепи  $L$  не превосходит *длины*  $L$ , т. е. количества входящих в  $L$  идеалов; равенство достигается, например, если  $P^*$  содержит только наименьший и наибольший элементы  $\mathcal{P}$  (в этом случае количество таких разностей соседних идеалов  $I_i \setminus I_{i-1}$ , которые не пересекаются с  $P^*$ , равно  $m - 1$ , что в точности на 3 меньше длины цепи  $L$ ).

Несложно описать в комбинаторных терминах и размерность всего многогранника  $O(\mathcal{P}, \lambda)$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Назовем *размерностью* пары  $(\mathcal{P}, \lambda)$  максимум размерностей  $\lambda$ -допустимых цепей в чуме порядковых идеалов чума  $\mathcal{P}$ . Обозначение:  $\dim(\mathcal{P}, \lambda)$ .

Легко видеть, что  $\dim(\mathcal{P}, \lambda) = \dim O(\mathcal{P}, \lambda)$ .

Для того чтобы описать в комбинаторных терминах коцепной гомоморфизм комплекса  $C_{\mathcal{K}_{\mathcal{P}, \lambda}}^*$ , нам нужно сначала научиться для произвольной  $\lambda$ -допустимой цепи  $L$  выписывать все содержащие ее  $\lambda$ -допустимые цепи на единицу большей размерности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Будем говорить, что  $\lambda$ -допустимая цепь  $L_k$  получена  $I_k$ -*уплотнением* из  $\lambda$ -допустимой цепи

$$L = (\emptyset = I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq \dots \subsetneq I_m \subsetneq I_{m+1} = P),$$

$$\begin{array}{c}
\emptyset \\
\parallel \\
L = (I_0 \subsetneq I_1 \cdots \subsetneq I_{k-1} \subsetneq \textcircled{I_k} \subsetneq \cdots \subsetneq I_m \subsetneq I_{m+1}) \\
\parallel \qquad \parallel \qquad \parallel \qquad \parallel \qquad \parallel \qquad \parallel \qquad \parallel \\
L_k = (J_0 \subsetneq J_1 \cdots \subsetneq J_{k-1} \subsetneq J_k \subsetneq J_{k+1} \subsetneq \cdots \subsetneq J_{m+1} \subsetneq J_{m+2})
\end{array}$$

Рис. 5.  $I_k$ -Уплотнение  $\lambda$ -допустимой цепи  $L$ .

если  $L_k$  получена из  $L$  добавлением единственного идеала  $J_k$  такого, что  $I_{k-1} \subsetneq J_k \subsetneq I_k$  (рис. 5).

Покажем, что всякое  $I_k$ -уплотнение увеличивает размерность  $\lambda$ -допустимой цепи ровно на единицу.

**Лемма 3.4.**  $\dim L_k = \dim L + 1$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Будем использовать обозначения рис. 5. Заметим, что  $I_k \setminus I_{k-1} = (J_k \setminus J_{k-1}) \cup (J_{k+1} \setminus J_k)$ . Все остальные разности соседних идеалов у цепей  $L$  и  $L_k$  совпадают. Возможны два случая.

**СЛУЧАЙ А:**  $I_k \setminus I_{k-1}$  содержит отмеченные элементы  $a_1, \dots, a_n$  (все, на которых  $\lambda$  принимает одно и то же значение;  $n \geq 1$ ). Так как  $L_k$  является по определению  $\lambda$ -допустимой цепью, то по условию (6) либо  $J_k \setminus J_{k-1}$  содержит все отмеченные элементы  $a_1, \dots, a_n$  (тогда  $J_{k+1} \setminus J_k$  не содержит отмеченных элементов), либо  $J_{k+1} \setminus J_k$  содержит все отмеченные элементы  $a_1, \dots, a_n$  (тогда  $J_k \setminus J_{k-1}$  не содержит отмеченных элементов). Поэтому в цепи  $L_k$  ровно на одну больше разностей соседних идеалов, не пересекающихся с  $P^*$ .

**СЛУЧАЙ Б:**  $I_k \setminus I_{k-1}$  не содержит отмеченные элементы. Тогда, очевидно,  $J_k \setminus J_{k-1}$  и  $J_{k+1} \setminus J_k$  также не содержат отмеченных элементов. И размерность цепи  $L_k$  снова на единицу больше размерности  $L$ .  $\square$

**Следствие 3.5.** Пусть  $L$  и  $L'$  —  $\lambda$ -допустимые цепи,  $L \subset L'$  и  $\dim L' = \dim L + 1$ . Тогда  $L'$  получена из  $L$  некоторым  $I_k$ -уплотнением.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Всякое  $I_k$ -уплотнение  $\lambda$ -допустимой цепи — это минимально возможное увеличение цепи (ровно на один идеал). Предположим, что  $L$  содержится в  $L'$  и они отличаются на  $r$  идеалов. Несложно понять, что в этом случае существует последовательность вложенных цепей  $L \subsetneq L^1 \subsetneq \cdots \subsetneq L^{r-1} \subsetneq L'$  такая, что каждая следующая цепь получается из предыдущей некоторым  $I_k$ -уплотнением. Согласно лемме 3.4  $\dim L' = \dim L + r$ . По условию  $r = 1$ , поэтому  $L'$  получена из  $L$  некоторым  $I_k$ -уплотнением.  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.6.** В общем случае в  $\lambda$ -допустимой цепи  $L$  могут встретиться как идеалы  $I_k$  такие, что  $L$  нельзя  $I_k$ -уплотнить, так и идеалы такие, что  $L$  можно  $I_k$ -уплотнить более чем одним способом.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.7.** Будем говорить, что  $\lambda$ -допустимые цепи  $L'$  и  $L''$   $I_k$ -сопряжены, если они получены  $I_k$ -уплотнением из некоторой  $\lambda$ -допустимой цепи  $L$  и справедливы равенства  $J_{k+1} \setminus J_k = J'_k \setminus J'_{k-1}$  и  $J_k \setminus J_{k-1} = J'_{k+1} \setminus J'^{(2)}_k$ .

<sup>2)</sup>Другими словами, разность идеалов  $I_k \setminus I_{k-1}$  распадается на две части ( $I_k \setminus I_{k-1} = A \cup B$ ), которые, присоединяясь в разном порядке, приводят к образованию  $L'$  и  $L''$ . Имеем  $J_k = I_{k-1} \cup A = I_k \setminus B$  и  $J'_k = I_{k-1} \cup B = I_k \setminus A$ .

Пусть  $C^i(\mathcal{P}, \lambda)$  — векторное пространство над  $\mathbb{Z}_2$  с базисом, состоящим из всех  $\lambda$ -допустимых цепей размерности  $i$  в чуме порядковых идеалов чума  $\mathcal{P}$ . Для  $\lambda$ -допустимой цепи  $L = (\emptyset = I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq \dots \subsetneq I_m = P)$  положим

$$\delta(L) = \Sigma_1(L) + \dots + \Sigma_m(L), \quad (8)$$

где  $\Sigma_k(L)$  — формальная сумма всех  $I_k$ -уплотнений  $L$ , имеющих  $I_k$ -сопряженное. Заметим, что  $\delta(L) \in C^{i+1}(\mathcal{P}, \lambda)$ , так как всякое  $I_k$ -уплотнение увеличивает размерность  $\lambda$ -допустимой цепи на единицу (см. лемму 3.4). Продолжив  $\delta$  по линейности, получим линейные отображения  $\delta : C^i(\mathcal{P}, \lambda) \rightarrow C^{i+1}(\mathcal{P}, \lambda)$ . Положим

$$C^*(\mathcal{P}, \lambda) = (C^0(\mathcal{P}, \lambda) \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} C^n(\mathcal{P}, \lambda)), \text{ где } n = \dim(\mathcal{P}, \lambda).$$

**Теорема 3.8.**  $C^*(\mathcal{P}, \lambda)$  является коцепным комплексом (т. е.  $\delta \circ \delta = 0$ ) и изоморфен комплексу  $C_{\mathcal{H}\mathcal{P}, \lambda}^*$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для начала построим изоморфизм градуированных векторных пространств  $\bigoplus_{i=0}^{\dim(\mathcal{P}, \lambda)} C^i(\mathcal{P}, \lambda)$  и  $\bigoplus_{i=0}^{\dim O(\mathcal{P}, \lambda)} C_{\mathcal{H}\mathcal{P}, \lambda}^i$  (напомним, что размерность пары  $(\mathcal{P}, \lambda)$  совпадает с размерностью многогранника  $O(\mathcal{P}, \lambda)$ , см. определение 3.2). Как уже упоминалось после определения 1.6, группы коцепей комплекса  $C_{\mathcal{H}\mathcal{P}, \lambda}^*$  такие же, как у  $C^*(\mathcal{H}\mathcal{P}, \lambda; \mathbb{Z}_2)$  (действительно, каждая клетка  $CW$ -комплекса, соответствующего подразбиению выпуклого многогранника, содержится в относительной внутренности единственной грани этого многогранника). Поэтому  $C_{\mathcal{H}\mathcal{P}, \lambda}^i$  — векторное пространство над  $\mathbb{Z}_2$  с базисом, состоящим из коцепей, принимающих значение 1 на внутренностях  $\overset{\circ}{F}_L$  всех  $i$ -мерных многогранников вида  $F_L$  и 0 на остальных клетках. Далее в нашем рассуждении будем отождествлять базисные коцепи  $C_{\mathcal{H}\mathcal{P}, \lambda}^i$  с соответствующими многогранниками  $F_L$ , если это не отражается на строгости изложения.

Мы знаем, что соответствие  $\phi : L \mapsto F_L$  между  $\lambda$ -допустимыми цепями в чуме порядковых идеалов чума  $\mathcal{P}$  и непустыми многогранниками вида  $F_L$  взаимно однозначно (см. лемму 2.9), причем  $\dim L = \dim F_L$  (см. определение 3.1). Продолжив  $\phi$  по линейности для каждого  $i$ , получим градуированный изоморфизм

$$\phi : \bigoplus_{i=0}^{\dim(\mathcal{P}, \lambda)} C^i(\mathcal{P}, \lambda) \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{\dim O(\mathcal{P}, \lambda)} C_{\mathcal{H}\mathcal{P}, \lambda}^i.$$

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} C^i(\mathcal{P}, \lambda) & \xrightarrow{\delta} & C^{i+1}(\mathcal{P}, \lambda) \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ C_{\mathcal{H}\mathcal{P}, \lambda}^i & \xrightarrow{d} & C_{\mathcal{H}\mathcal{P}, \lambda}^{i+1}, \end{array} \quad (9)$$

где через  $d$  обозначен коцепной гомоморфизм комплекса  $C_{\mathcal{H}\mathcal{P}, \lambda}^*$ .

Доказав коммутативность (9), т. е. справедливость равенства  $\phi \circ \delta = d \circ \phi$ , получим сразу и  $\delta \circ \delta = 0$ , и изоморфизм рассматриваемых коцепных комплексов.

Опишем композицию  $\phi \circ \delta$ . Пусть  $L$  —  $\lambda$ -допустимая цепь размерности  $i$ . Мы определили  $\delta(L) = \Sigma_1(L) + \dots + \Sigma_m(L)$ , где  $\Sigma_k(L)$  — сумма всех  $I_k$ -уплотнений  $L$ , имеющих  $I_k$ -сопряженное. Заметим, что  $\Sigma_k(L)$  разбивается на пары  $I_k$ -сопряженных друг другу цепей:  $\Sigma_k(L) = (L_k^1 + (L_k^1)') + \dots + (L_k^{l_k} + (L_k^{l_k})')$ , где  $L_k^j$  и  $(L_k^j)'$  являются  $I_k$ -сопряженными. Поэтому  $\delta(L)$  можно переписать в виде

$$\delta(L) = \sum_{k=1}^m ((L_k^1 + (L_k^1)') + \dots + (L_k^{l_k} + (L_k^{l_k})')).$$

Таким образом,

$$\phi(\delta(L)) = \sum_{k=1}^m ((F_{L_k^1} + F_{(L_k^1)'}) + \dots + (F_{L_k^{l_k}} + F_{(L_k^{l_k})'})). \quad (10)$$

Заметим, что все многогранники из правой части формулы (10) имеют размерность  $\dim F_L + 1$  (так как  $\dim F_{L_k^j} = \dim L_k^j$ ), содержат  $F_L$  (см. следствие 2.17) и соответствуют  $I_k$ -уплотнениям цепи  $L$ , имеющим  $I_k$ -сопряженное для некоторого  $1 \leq k \leq m$ . Более того, все многогранники подразделения  $\mathcal{K}_{\mathcal{P}, \lambda}$  с перечисленными свойствами входят в правую часть формулы (10).

Теперь опишем композицию  $d \circ \phi$ . Пусть снова  $L$  —  $\lambda$ -допустимая цепь размерности  $i$ , тогда  $\phi(L) = F_L$ , где  $F_L \in \mathcal{K}_{\mathcal{P}, \lambda}$  и  $\dim F_L = i$ . Таким образом,  $d(\phi(L)) = d(F_L)$  и остается доказать, что  $d(F_L)$  совпадает с правой частью формулы (10).

Согласно определению 1.6  $d(F_L)$  — формальная сумма с коэффициентами из  $\mathbb{Z}_2$  многогранников  $Q \in \mathcal{K}_{\mathcal{P}, \lambda}$  таких, что выполнены три условия:

- (а)  $F_L \subset Q$  (другими словами,  $F_L$  является гранью  $Q$ ),
  - (б)  $\dim Q = \dim F_L + 1$ ,
  - (в)  $\overset{\circ}{F}_L$  и  $\overset{\circ}{Q}$  лежат в относительной внутренней одной и той же грани  $A$  многогранника  $O(\mathcal{P}, \lambda)$ .
- (11)

Мы уже знаем из следствий 2.17 и 3.5, что условия (11(а),(б)) означают, что  $Q = F_{L_k}$ , где  $L_k$  —  $\lambda$ -допустимая цепь, которая получена из  $L$  некоторым  $I_k$ -уплотнением. Напомним, что согласно определению 2.8  $F_L$  состоит из функций  $x \in \mathbb{R}^P$ , для которых выполнены условия:

- (А)  $x|_{P^*} = \lambda$ ,
- (Б)  $x$  постоянна на множествах  $I_1 \setminus I_0, \dots, I_m \setminus I_{m-1}$ ,
- (В)  $x(I_1) \leq x(I_2 \setminus I_1) \leq \dots \leq x(I_k \setminus I_{k-1}) \leq \dots \leq x(P \setminus I_{m-1})$ .

Согласно определению 3.3 цепь  $L_k$  получена из  $L$  добавлением единственного идеала  $J_k$  такого, что  $I_{k-1} \subsetneq J_k \subsetneq I_k$ . Соответственно  $F_{L_k}$  состоит из функций  $x \in \mathbb{R}^P$ , для которых выполнены условия:

- (А)  $x|_{P^*} = \lambda$ ,
- (Б')  $x$  постоянна на множествах  $I_1 \setminus I_0, \dots, J_k \setminus I_{k-1}, I_k \setminus J_k, \dots, I_m \setminus I_{m-1}$ ,

$$(B') \quad x(I_1) \leq x(I_2 \setminus I_1) \leq \dots \leq x(J_k \setminus I_{k-1}) \leq x(I_k \setminus J_k) \leq \dots \leq x(P \setminus I_{m-1}).$$

Таким образом, система (B') отличается от (B) тем, что значения функции  $x$  на множествах  $J_k \setminus I_{k-1}$  и  $I_k \setminus J_k$  не совпадают, а связаны неравенством  $x(J_k \setminus I_{k-1}) \leq x(I_k \setminus J_k)$ . Так как  $F_L \subset F_{L_k}$ , то и для аффинных оболочек выполнено  $\text{Aff}(F_L) \subset \text{Aff}(F_{L_k})$ . Заметим, что аффинные оболочки  $\text{Aff}(F_L)$  и  $\text{Aff}(F_{L_k})$  задаются системами равенств из условий (B) и (B'). Пусть  $p \in J_k \setminus I_{k-1}$ ,  $q \in I_k \setminus J_k$ ,  $H_{pq}$  — гиперплоскость, заданная равенством  $x_p = x_q$ , и  $H_{pq}^{\leq}$  — полупространство, заданное неравенством  $x_p \leq x_q$ . Несложно видеть, что  $\text{Aff}(F_L) = \text{Aff}(F_{L_k}) \cap H_{pq}$  и  $F_{L_k} \subset \text{Aff}(F_{L_k}) \cap H_{pq}^{\leq}$ .

Также несложно видеть, что  $\text{Aff}(F_L)$  делит  $\text{Aff}(F_{L_k})$  на два полупространства  $\text{Aff}(F_{L_k}) \cap H_{pq}^{\leq}$  и  $\text{Aff}(F_{L_k}) \cap H_{pq}^{\geq}$ . Рассмотрим произвольную точку  $y \in \overset{\circ}{F}_L$ . В малой окрестности  $U$  точки  $y$ , целиком лежащей в  $\text{Aff}(F_{L_k})$ , есть как точки  $\overset{\circ}{F}_{L_k}$ , которые содержатся в  $\text{Aff}(F_{L_k}) \cap H_{pq}^{\leq}$ , так и точки дополнительного полупространства  $\text{Aff}(F_{L_k}) \cap H_{pq}^{\geq}$ . Что можно сказать про точки  $U$ , которые оказались в дополнительном полупространстве  $\text{Aff}(F_{L_k}) \cap H_{pq}^{\geq}$ ? Согласно геометрическому описанию подразделения  $\mathcal{K}_{\mathcal{P}, \lambda}$  (см. замечание 2.20) они либо не принадлежат  $O(\mathcal{P}, \lambda)$ , либо содержатся в относительной внутренности некоторой грани  $F_{L'_k}$  нашего разбиения такой, что  $\text{Aff } F_{L'_k} = \text{Aff } F_{L_k}$ . Однако мы знаем, что  $\overset{\circ}{F}_L$  и  $\overset{\circ}{F}_{L_k}$  лежат в относительной внутренности одной и той же грани  $A$  многогранника  $O(\mathcal{P}, \lambda)$  (см. условие 11(в)). Поэтому в рассматриваемом случае общие точки окрестности  $U$  и полупространства  $\text{Aff}(F_{L_k}) \cap H_{pq}^{\geq}$  содержатся в относительной внутренности некоторой грани  $F_{L'_k}$  нашего разбиения.

Покажем, что  $F_{L'_k}$  состоит из функций  $x \in \mathbb{R}^P$ , для которых выполнены условия:

$$(A) \quad x|_{P^*} = \lambda,$$

$$(B') \quad x \text{ постоянна на множествах } I_1 \setminus I_0, \dots, J_k \setminus I_{k-1}, I_k \setminus J_k, \dots, I_m \setminus I_{m-1},$$

$$(B'') \quad x(I_1) \leq x(I_2 \setminus I_1) \leq \dots \leq x(I_k \setminus J_k) \leq x(J_k \setminus I_{k-1}) \leq \dots \leq x(P \setminus I_{m-1}).$$

Действительно, (A) выполнено очевидным образом; (B') выполнено, так как  $\text{Aff } F_{L'_k} = \text{Aff } F_{L_k}$ ; (B'') выполнено, так как  $F_{L'_k} \subset \text{Aff } F_{L_k} \cap H_{pq}^{\geq}$  и  $F_{L_k} \cap F_{L'_k} = F_L$  ( $p \in J_k \setminus I_{k-1}$ ,  $q \in I_k \setminus J_k$  и  $H_{pq}^{\geq}$  — полупространство, заданное неравенством  $x_p \geq x_q$ ).

Заметим, что согласно лемме 2.9 и определению 3.7  $L'_k$  и  $L_k$  являются  $I_k$ -сопряженными и для грани  $F_{L'_k}$  по построению выполнены условия (11). Мы доказали, что если многогранник  $Q \in \mathcal{K}_{\mathcal{P}, \lambda}$  входит в  $d(F_L)$  с ненулевым коэффициентом, то  $Q = F_{L_k}$ , где  $L_k$  —  $\lambda$ -допустимая цепь, полученная из  $L$  некоторым  $I_k$ -уплотнением и имеющая  $I_k$ -сопряженное, а именно  $L'_k$ . Причем  $F_{L'_k}$  также входит в  $d(F_L)$  с ненулевым коэффициентом.

Таким образом, доказано, что все многогранники, входящие в  $d(F_L)$  с ненулевым коэффициентом, входят и в правую часть формулы (10). Обратно, пусть  $L_k$  —  $\lambda$ -допустимая цепь, полученная из  $L$  некоторым  $I_k$ -уплотнением и имеющая  $I_k$ -сопряженное (обозначим его через  $L'_k$ ). Благодаря проделанной работе легко видеть, что  $F_{L_k}$  и  $F_{L'_k}$  удовлетворяют условиям (11). Следовательно,  $F_{L_k}$

входит в  $d(F_L)$  с ненулевым коэффициентом.  $\square$

ПРИМЕР 3.9. Изменим немного чум из примера 2.3. Пусть  $P = \{r, p, q, s, t\}$ . Отношение частичного порядка  $\preceq$  зададим накрывающими соотношениями:  $r \prec \cdot p \prec \cdot q \prec \cdot s$  (рис. 6(a) — крайний левый чум). В качестве  $P^*$  выберем трехэлементное подмножество  $\{r, s, t\}$ . Сохраняющую порядок функцию  $\lambda : \mathcal{P}^* \rightarrow \mathbb{R}$  определим равенствами:  $\lambda(r) = 0$ ,  $\lambda(s) = 2$  и  $\lambda(t) = 1$  (рис. 6(a) — второй слева чум). Согласно определению (2.1)

$$O(\mathcal{P}, \lambda) = \begin{cases} 0 = x_r \leq x_p \leq x_q \leq x_s = 2, \\ x_t = 1. \end{cases}$$

Построим проекцию  $O(\mathcal{P}, \lambda)$  на плоскость  $Ox_p x_q$  и проведем прямые  $x_p = 1$  и  $x_q = 1$ , чтобы получить проекцию подразбиения  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}, \lambda}$  на ту же плоскость (см. замечание 2.20, рис. 6(б)).

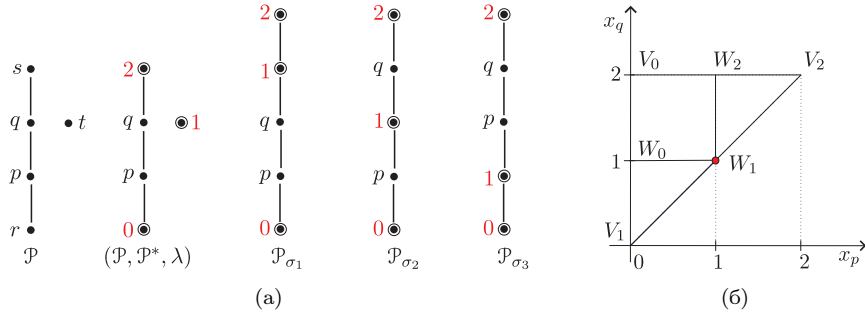


Рис. 6. (а) Слева направо: диаграмма Хассе чума  $\mathcal{P}$  из примера 3.9; диаграмма Хассе чума  $\mathcal{P}$  из примера 3.9, в которой выделены элементы  $P^*$  и указаны значения функции  $\lambda$  на них; диаграммы Хассе линейных расширений  $\mathcal{P}_{\sigma_1}$ ,  $\mathcal{P}_{\sigma_2}$  и  $\mathcal{P}_{\sigma_3}$  чума  $\mathcal{P}$  из примера 3.9; (б) проекция  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}, \lambda}$  на координатную плоскость  $Ox_p x_q$  для чума  $\mathcal{P}$  из примера 3.9.

Вычислим  $f$ -вектор  $O(\mathcal{P}, \lambda)$  с помощью теоремы 3.8 и леммы 1.7. Для этого выпишем коцепной комплекс  $C^*(\mathcal{P}, \lambda)$  и вычислим его когомологии.

Мы знаем, что  $C^i(\mathcal{P}, \lambda)$  — векторное пространство над  $\mathbb{Z}_2$  с базисом, состоящим из всех  $\lambda$ -допустимых цепей размерности  $i$  в чуме порядковых идеалов чума  $\mathcal{P}$ . Выпишем базисные  $\lambda$ -допустимые цепи для каждого  $i$ .

Начнем с  $\lambda$ -допустимых цепей старшей размерности. Из доказательства предложения 2.12 мы знаем, что такие  $\lambda$ -допустимые цепи приходят из линейных расширений чума  $\mathcal{P}$ . В нашем примере  $\lambda$ -допустимые цепи максимальной размерности соответствуют линейным расширениям  $\mathcal{P}_{\sigma_1}$ ,  $\mathcal{P}_{\sigma_2}$  и  $\mathcal{P}_{\sigma_3}$ , представленным на рис. 6. В табл. 3 эти цепи выписаны и обозначены соответственно  $L_{\sigma_1}$ ,  $L_{\sigma_2}$  и  $L_{\sigma_3}$ . Всюду далее при написании  $\lambda$ -допустимых цепей рассматриваемого чума  $\mathcal{P}$  мы на месте отмеченных элементов будем писать значение функции  $\lambda$  на них. В табл. 4 выписаны  $\lambda$ -допустимые цепи, на единицу меньшей размерности.



Таблица 3

$L$	$\dim L$	$F_L$
$L_{\sigma_1} = (\emptyset \neq \{0\} \subsetneq \{0, p\} \subsetneq \{0, p, q\} \subsetneq \{0, p, q, 1\} \subsetneq P)$	2	$V_1 W_1 W_0 : 0 \leq x_p \leq x_q \leq 1$
$L_{\sigma_2} = (\emptyset \neq \{0\} \subsetneq \{0, p\} \subsetneq \{0, p, 1\} \subsetneq \{0, p, 1, q\} \subsetneq P)$	2	$W_0 W_1 W_2 V_0 : 0 \leq x_p \leq 1 \leq x_q \leq 2$
$L_{\sigma_3} = (\emptyset \neq \{0\} \subsetneq \{0, 1\} \subsetneq \{0, 1, p\} \subsetneq \{0, 1, p, q\} \subsetneq P)$	2	$W_1 V_2 W_2 : 1 \leq x_p \leq x_q \leq 2$

Таблица 4

$L$	$\dim L$	$F_L$
$L_1 = (\emptyset \neq \{0, p\} \subsetneq \{0, p, 1\} \subsetneq \{0, p, 1, q\} \subsetneq P)$	1	$W_0 V_0 : 0 = x_p \leq 1 \leq x_q \leq 2$
$L_2 = (\emptyset \neq \{0, p\} \subsetneq \{0, p, q\} \subsetneq \{0, p, q, 1\} \subsetneq P)$	1	$V_1 W_0 : 0 = x_p \leq x_q \leq 1$
$L_3 = (\emptyset \neq \{0\} \subsetneq \{0, p, q\} \subsetneq \{0, p, q, 1\} \subsetneq P)$	1	$V_1 W_1 : 0 \leq x_p = x_q \leq 1$
$L_4 = (\emptyset \neq \{0\} \subsetneq \{0, 1\} \subsetneq \{0, 1, p, q\} \subsetneq P)$	1	$W_1 V_2 : 1 \leq x_p = x_q \leq 2$
$L_5 = (\emptyset \neq \{0\} \subsetneq \{0, 1\} \subsetneq \{0, 1, p\} \subsetneq P)$	1	$V_2 W_2 : 1 \leq x_p \leq x_q = 2$
$L_6 = (\emptyset \neq \{0\} \subsetneq \{0, p\} \subsetneq \{0, p, 1\} \subsetneq P)$	1	$W_2 V_0 : 0 \leq x_p \leq 1 \leq x_q = 2$
$L_7 = (\emptyset \neq \{0\} \subsetneq \{0, p, 1\} \subsetneq \{0, p, 1, q\} \subsetneq P)$	1	$W_1 W_2 : 0 \leq x_p = 1 \leq x_q \leq 2$
$L_8 = (\emptyset \neq \{0\} \subsetneq \{0, p\} \subsetneq \{0, p, q, 1\} \subsetneq P)$	1	$W_1 W_0 : 0 \leq x_p \leq x_q = 1$

В табл. 5 выписаны нульмерные  $\lambda$ -допустимые цепи.

Таблица 5

$L$	$\dim L$	$F_L$
$L_{v_0} = (\emptyset \neq \{0, p\} \subsetneq \{0, p, 1\} \subsetneq P)$	0	$V_0 : 0 = x_p \leq 1 \leq x_q = 2$
$L_{v_1} = (\emptyset \neq \{0, p, q\} \subsetneq \{0, p, q, 1\} \subsetneq P)$	0	$V_1 : 0 = x_p = x_q \leq 1$
$L_{v_2} = (\emptyset \neq \{0\} \subsetneq \{0, 1\} \subsetneq P)$	0	$V_2 : 1 \leq x_p = x_q = 2$
$L_{w_0} = (\emptyset \neq \{0, p\} \subsetneq \{0, p, q, 1\} \subsetneq P)$	0	$W_0 : 0 = x_p \leq x_q = 1$
$L_{w_1} = (\emptyset \neq \{0\} \subsetneq \{0, p, q, 1\} \subsetneq P)$	0	$W_1 : 0 \leq x_p = x_q = 1$
$L_{w_2} = (\emptyset \neq \{0\} \subsetneq \{0, p, 1\} \subsetneq P)$	0	$W_2 : 0 \leq x_p = 1 \leq x_q = 2$

Таким образом,

$$C^2(\mathcal{P}, \lambda) = \langle L_{\sigma_1}, L_{\sigma_2}, L_{\sigma_3} \rangle;$$

$$C^1(\mathcal{P}, \lambda) = \langle L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7, L_8 \rangle;$$

$$C^0(\mathcal{P}, \lambda) = \langle L_{v_0}, L_{v_1}, L_{v_2}, L_{w_0}, L_{w_1}, L_{w_2} \rangle.$$

Теперь вычислим коцепной гомоморфизм на базисных элементах групп  $C^i(\mathcal{P}, \lambda)$ . Будем действовать согласно правилу (8).

Рассмотрим  $\lambda$ -допустимую цепь  $L_{v_0} = (\emptyset \neq \{0, p\} \subsetneq \{0, p, 1\} \subsetneq P)$ . Мы можем  $I_1$ -уплотнить  $L_{v_0}$  единственным способом: получим  $L_6 = (\emptyset \neq \{0\} \subsetneq \{0, p\} \subsetneq \{0, p, 1\} \subsetneq P)$ , а также  $I_3$ -уплотнить  $L_{v_0}$  единственным способом: получим  $L_1 = (\emptyset \neq \{0, p\} \subsetneq \{0, p, 1\} \subsetneq \{0, p, 1, q\} \subsetneq P)$ . Таким образом, ни одно из  $I_k$ -уплотнений  $L_{v_0}$  не имеет  $I_k$ -сопряженное, а значит,  $\delta^0(L_{v_0}) = 0$ .

Рассмотрим  $\lambda$ -допустимую цепь  $L_{w_0} = (\emptyset \neq \{0, p\} \subsetneq \{0, p, q, 1\} \subsetneq P)$ . Вновь мы можем  $I_1$ -уплотнить рассматриваемую цепь только единственным образом: получим  $L_8 = (\emptyset \neq \{0\} \subsetneq \{0, p\} \subsetneq \{0, p, q, 1\} \subsetneq P)$ , однако возможны два различных  $I_2$ -уплотнения. Сведения об  $I_2$ -уплотнениях  $L_{w_0}$  занесем в табл. 6.

Таблица 6

$I_2$ -уплотнения $L_{w_0} = (\emptyset \neq \{0, p\} \subsetneq \{0, p, q, 1\} \subsetneq P)$	$J_2 \setminus J_1$	$J_3 \setminus J_2$
$L_1 = (\emptyset \neq \{r, p\} \subsetneq \{r, p, 1\} \subsetneq \{r, p, t, q\} \subsetneq P)$	$\{1\}$	$\{q\}$
$L_2 = (\emptyset \neq \{0, p\} \subsetneq \{0, p, q\} \subsetneq \{0, p, q, 1\} \subsetneq P)$	$\{q\}$	$\{1\}$

Таким образом,  $L_1$  и  $L_2$  согласно определению 3.7 являются  $I_2$ -сопряженными, поэтому  $\delta^0(L_{w_0}) = L_1 + L_2$ .

Рассмотрим  $\lambda$ -допустимую цепь  $L_1 = (\emptyset \neq \{0, p\} \subsetneq \{0, p, 1\} \subsetneq \{0, p, 1, q\} \subsetneq P)$ . Мы можем  $I_1$ -уплотнить  $L_1$  единственным способом: получим  $L_{\sigma_2} = (\emptyset \neq \{0\} \subsetneq \{0, p\} \subsetneq \{0, p, 1\} \subsetneq \{0, p, 1, q\} \subsetneq P)$ . Таким образом,  $L_1$  имеет единственное  $I_k$  уплотнение и  $\delta^1(L_1) = 0$ .

Рассмотрим  $\lambda$ -допустимую цепь  $L_7 = (\emptyset \neq \{0\} \subsetneq \{0, p, 1\} \subsetneq \{0, p, 1, q\} \subsetneq P)$ . Мы можем  $I_2$ -уплотнить ее двумя различными способами. Сведения об  $I_2$ -уплотнениях  $L_7$  занесем в табл. 7.

Таблица 7

$I_2$ -уплотнения $L_7 = (\emptyset \neq \{0\} \subsetneq \{0, p, 1\} \subsetneq \{0, p, 1, q\} \subsetneq P)$	$J_2 \setminus J_1$	$J_3 \setminus J_2$
$L_{\sigma_2} = (\emptyset \neq \{0\} \subsetneq \{0, p\} \subsetneq \{0, p, 1\} \subsetneq \{0, p, 1, q\} \subsetneq P)$	$\{p\}$	$\{1\}$
$L_{\sigma_3} = (\emptyset \neq \{0\} \subsetneq \{0, 1\} \subsetneq \{0, 1, p\} \subsetneq \{0, 1, p, q\} \subsetneq P)$	$\{1\}$	$\{p\}$

Стало быть,  $L_{\sigma_2}$  и  $L_{\sigma_3}$  согласно определению 3.7 являются  $I_2$ -сопряженными, поэтому  $\delta^1(L_7) = L_{\sigma_2} + L_{\sigma_3}$ .

Для остальных базисных элементов групп  $C^i(\mathcal{P}, \lambda)$  вычисления можно выполнить аналогично. Читателю предоставляется возможность провести их самостоятельно и сравнить полученные результаты с теми, которые выписаны в табл. 8.

Таблица 8

$C^0(\mathcal{P}, \lambda)$	$C^1(\mathcal{P}, \lambda)$	$C^2(\mathcal{P}, \lambda)$	$\delta^0$	$\delta^1$
$L_{v_0}$	$L_1$	$L_{\sigma_1}$	$\delta^0(L_{v_0}) = 0$	$\delta^1(L_1) = 0$
$L_{v_1}$	$L_2$	$L_{\sigma_2}$	$\delta^0(L_{v_1}) = 0$	$\delta^1(L_2) = 0$
$L_{v_2}$	$L_3$	$L_{\sigma_3}$	$\delta^0(L_{v_2}) = 0$	$\delta^1(L_3) = 0$
$L_{w_0}$	$L_4$	—	$\delta^0(L_{w_0}) = L_1 + L_2$	$\delta^1(L_4) = 0$
$L_{w_1}$	$L_5$	—	$\delta^0(L_{w_1}) = L_3 + L_4$	$\delta^1(L_5) = 0$
$L_{w_2}$	$L_6$	—	$\delta^0(L_{w_2}) = L_5 + L_6$	$\delta^1(L_6) = 0$
—	$L_7$	—	—	$\delta^1(L_7) = L_{\sigma_2} + L_{\sigma_3}$
—	$L_8$	—	—	$\delta^1(L_8) = L_{\sigma_1} + L_{\sigma_2}$

$$H^0(C^*(\mathcal{P}, \lambda)) \simeq \ker \delta^0 \simeq \langle L_{v_0}, L_{v_1}, L_{v_2} \rangle \simeq \mathbb{Z}_2^3,$$

$$H^1(C^*(\mathcal{P}, \lambda)) \simeq \langle L_1, \dots, L_6 \rangle / \langle L_1 + L_2, L_3 + L_4, L_5 + L_6 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2^3,$$

$$H^2(C^*(\mathcal{P}, \lambda)) \simeq \langle L_{\sigma_1}, L_{\sigma_2}, L_{\sigma_3} \rangle / \langle L_{\sigma_1} + L_{\sigma_2}, L_{\sigma_2} + L_{\sigma_3} \rangle \simeq \mathbb{Z}_2.$$

Согласно лемме 1.7 и теореме 3.8

$$f_0(O(\mathcal{P}, \lambda)) = \dim H^0(C^*(\mathcal{P}, \lambda)) = 3,$$

$$f_1(O(\mathcal{P}, \lambda)) = \dim H^1(C^*(\mathcal{P}, \lambda)) = 3,$$

$$f_2(O(\mathcal{P}, \lambda)) = \dim H^2(C^*(\mathcal{P}, \lambda)) = 1.$$

В завершение данного примера заметим, что коцепной комплекс  $C^*_{\mathcal{H}(\mathcal{P}, \lambda)}$  для рассматриваемого многогранника  $O(\mathcal{P}, \lambda)$  выписан в примере 1.10. Несложно видеть, что коцепные комплексы примеров 1.10 и 3.9 связывает изоморфизм, построенный в доказательстве теоремы 3.8.

**Благодарности.** Я признательна моему научному руководителю В. А. Тиморину за общую постановку задачи, постоянное внимание и поддержку, М. Э. Казаряну, В. А. Кириченко, С. К. Ландо и А. И. Эстерову за интерес к работе. Я очень благодарна моему мужу Сереже Мелихову за поддержку и веру в меня. Также хотелось бы поблагодарить рецензентов за полезные замечания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Stanley R. P. Two poset polytopes // Discrete Comput. Geom. 1986. V. 1, N 1. P. 9–23.
2. Ardila F., Bliem T., Salazar D. Gelfand–Tsetlin polytopes and Feigin–Fourier–Littelmann–Vinberg polytopes as marked poset polytopes // J. Comb. Theory, Ser. A. 2011. V. 118, N 8. P. 2454–2462.
3. An B. H., Cho, Y., Kim J. S. On the  $f$ -vectors of Gelfand–Cetlin polytopes // Eur. J. Comb. 2018. V. 67. P. 61–77.
4. Мелихова Е. В. О числе граней многогранников Гельфанда — Цетлина // Алгебра и анализ. 2021. Т. 33, № 3. С. 169–190.
5. Gusev P., Kiritchenko V., Timorin V. Counting vertices in Gelfand–Zetlin polytopes // J. Comb. Theory, Ser. A. 2013. V. 120, N 4. P. 960–969.
6. De Loera J. A., McAllister T. B. Vertices of Gelfand–Tsetlin polytopes // Discrete Comput. Geom. 2004. V. 32, N 4. P. 459–470.
7. Pegel C. The face structure and geometry of marked order polyhedra // Order. 2018. V. 35, N 3. P. 467–488.
8. Postnikov A. Permutohedra, associahedra, and beyond // Int. Math. Res. Not. IMRN. 2009. N 6. P. 1026–1106.
9. Liu R. I., Mészáros K., St. Dizier A. Gelfand–Tsetlin polytopes: a story of flow and order polytopes // SIAM J. Discrete Math. 2019. V. 33, N 4. P. 2394–2415.
10. Ziegler G. M. Lectures on polytopes. New York: Springer, 1995. (Grad. Texts Math.; V. 152).

11. Фоменко А. Т., Фукс Д. Б. Курс гомотопической топологии. М.: Наука, 1989.

*Поступила в редакцию 16 апреля 2025 г.*

*После доработки 24 июля 2025 г.*

*Принята к публикации 29 августа 2025 г.*

Мелихова Екатерина Владимировна

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,

факультет математики,

ул. Усачёва, 6, Москва 119048

`ekmelikhova86@gmail.com`

## ON THE NUMBER OF FACES OF MARKED ORDER POLYTOPES

E. V. Melikhova

**Abstract:** We present a new method for computing the  $f$ -vector of a marked order polytope. Namely, given an arbitrary (polytopal) subdivision of an arbitrary convex polytope, we construct a cochain complex (over the two-element field  $\mathbb{Z}_2$ ) such that the dimensions of its cohomology groups equal the components of the  $f$ -vector of the original polytope. In the case of a marked order polytope and its well-known cubosimplicial subdivision, this cochain complex can be described purely combinatorially, which yields the said computation of the  $f$ -vector. Of independent interest may be our combinatorial description of the said cubosimplicial subdivision (which was originally constructed geometrically).

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-3-28-52

**Keywords:** marked order polytope,  $f$ -vector, polyhedral complex.

### REFERENCES

1. Stanley R. P., “Two poset polytopes,” *Discrete Comput. Geom.*, **1**, 9–23 (1986).
2. Ardila F., Bliem T., and Salazar D., “Gelfand–Tsetlin polytopes and Feigin–Fourier–Littelmann–Vinberg polytopes as marked poset polytopes,” *J. Comb. Theory, Ser. A*, **118**, No. 8, 2454–2462 (2011).
3. An B. H., Cho Y., and Kim J. S., “On the  $f$ -vectors of Gelfand–Cetlin polytopes,” *Eur. J. Comb.*, **67**, 61–77 (2018).
4. Melikhova E. V., “On the number of faces of Gelfand–Zetlin polytopes,” *St. Petersburg. Math. J.*, **33**, No. 3, 553–568 (2022).
5. Gusev P., Kiritchenko V., and Timorin V., “Counting vertices in Gelfand–Zetlin polytopes,” *J. Comb. Theory, Ser. A*, **120**, No. 4, 960–969 (2013).
6. De Loera J. A. and McAllister T. B., “Vertices of Gelfand–Tsetlin polytopes,” *Discrete Comput. Geom.*, **32**, No. 4, 459–470 (2004).
7. Pegel C., “The face structure and geometry of marked order polyhedra,” *Order*, **35**, No. 3, 467–488 (2018).
8. Postnikov A., “Permutohedra, associahedra, and beyond,” *Int. Math. Res. Not. IMRN*, No. 6, 1026–1106 (2009).
9. Liu R. I., Mészáros K., and St. Dizier A., “Gelfand–Tsetlin polytopes: a story of flow and order polytopes,” *SIAM J. Discrete Math.*, **33**, No. 4, 2394–2415 (2019).
10. Ziegler G. M., *Lectures on Polytopes*, Springer, New York (1995) (*Grad. Texts Math.*; vol. 152).
11. Fomenko A. T. and Fuchs D. B., *Homotopical Topology*, Springer, New York (2016) (*Grad.*

Texts Math.; vol. 273).

*Submitted April 16, 2025*

*Revised July 24, 2025*

*Accepted August 29, 2025*

Ekaterina V. Melikhova

National Research University “Higher School of Economics”,

Faculty of Mathematics,

6 Usachev Street, Moscow 119048, Russia

## РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОЙ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

С. Б. Мингнарлов

**Аннотация.** Рассматривается задача Коши для одной системы, не разрешенной относительно старшей производной по времени. Эта система является псевдогиперболической. Доказана однозначная разрешимость задачи Коши в соболевских пространствах, получены оценки решения.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-3-53-60

**Ключевые слова:** система, не разрешенная относительно старшей производной, псевдогиперболическая система, задача Коши, изгибно-крутильные колебания.

### 1. Введение

В работе рассматривается задача Коши для системы уравнений с постоянными вещественными коэффициентами

$$\mathcal{L}(D_t, D_x)U = F(t, x), \quad t > 0, \quad x \in R, \quad (1.1)$$

$\mathcal{L}(D_t, D_x)$  имеет вид

$$\mathcal{L}(D_t, D_x) = L_0(D_x)D_t^2 + L_1D_x^4, \quad (1.2)$$

здесь

$$L_0(D_x) = \begin{pmatrix} I - \alpha_1 D_x^2 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & I - \alpha_2 D_x^2 & -\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & I - \alpha_3 D_x^2 \end{pmatrix}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{12} & l_{22} & l_{23} \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{pmatrix},$$

где  $0 < \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 < 1$ ,  $\alpha_j > 0$ ,  $j = 1, 2, 3$ , и матрица  $L_1$  положительно определена.

Впервые система вида (1.1), где  $l_{ij} = 0$ ,  $i \neq j$ , рассматривалась в [1] при описании поперечных изгибно-крутильных колебаний упругого стержня.

Система (1.1) является не разрешенной относительно старшей производной по времени и входит в класс псевдогиперболических систем (см. [2]). В монографии [2] был введен класс псевдогиперболических уравнений и изучена задача Коши для него. Дальнейшие исследования разрешимости задачи Коши для

---

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00370, <https://rscf.ru/project/24-21-00370/>.

псевдогиперболических уравнений проводились в [3–5] и др. Для псевдогиперболических систем общей теории разрешимости задачи Коши нет. В литературе разрешимость задачи Коши изучалась для конкретных систем (см., например, [6, 7]). В данной работе будет исследован более общий вид псевдогиперболических систем четвертого порядка.

## 2. Формулировка результатов

Рассмотрим задачу Коши для псевдогиперболической системы:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(D_t, D_x)U &= F(t, x), \quad t > 0, \quad x \in R, \\ U|_{t=0} &= \Phi(x), \quad D_t U|_{t=0} = \Psi(x),\end{aligned}\tag{2.1}$$

где  $\mathcal{L}(D_t, D_x)$  из (1.2),

$$\begin{aligned}U(t, x) &= (u(t, x), v(t, x), \theta(t, x))^T, \quad F(t, x) = (f^1(t, x), f^2(t, x), f^3(t, x))^T, \\ \Phi(x) &= (\varphi^1(x), \varphi^2(x), \varphi^3(x))^T, \quad \Psi(x) = (\psi^1(x), \psi^2(x), \psi^3(x))^T.\end{aligned}$$

Дадим определения анизотропных соболевских пространств (см., например, [2]), которые понадобятся при доказательстве разрешимости задачи (2.1).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Функция  $u(t, x) \in L_2(G)$  принадлежит анизотропному соболевскому пространству  $W_2^{l_1, l_2}(G)$ ,  $G \subseteq R^2$ ,  $l_1, l_2 \in N$ , если существуют обобщенные производные

$$D_t^{\alpha_1} D_x^{\alpha_2} u(t, x), \quad \alpha_1/l_1 + \alpha_2/l_2 \leq 1,$$

в области  $G$ , при этом  $D_t^{\alpha_1} D_x^{\alpha_2} u(t, x) \in L_2(G)$ . Введем норму

$$\|u, W_2^{l_1, l_2}(G)\| = \sum_{\alpha_1/l_1 + \alpha_2/l_2 \leq 1} \|D_t^{\alpha_1} D_x^{\alpha_2} u, L_2(G)\|.$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Функция  $u(t, x)$  принадлежит анизотропному соболевскому пространству с экспоненциальным весом  $W_{2, \gamma}^{l_1, l_2}(G)$ ,  $\gamma > 0$ , если  $e^{-\gamma t} u(t, x) \in W_2^{l_1, l_2}(G)$ . Полагаем

$$\|u(t, x), W_{2, \gamma}^{l_1, l_2}(G)\| = \|e^{-\gamma t} u(t, x), W_2^{l_1, l_2}(G)\|.$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.** Функция  $f(t, x)$  принадлежит анизотропному соболевскому пространству  $W_{2, \gamma}^{0, 1}(G)$ ,  $\gamma > 0$ , если  $e^{-\gamma t} f(t, x) \in L_2(G)$ , существует обобщенная производная  $D_x f(t, x)$  в  $G$ , при этом  $e^{-\gamma t} D_x f(t, x) \in L_2(G)$ . Полагаем

$$\|f(t, x), W_{2, \gamma}^{0, 1}(R_+^2)\| = \|e^{-\gamma t} f(t, x), L_2(G)\| + \|e^{-\gamma t} D_x f(t, x), L_2(G)\|.$$

Будем говорить, что  $V(t, x) = (v^1(t, x), v^2(t, x), v^3(t, x))^T$  принадлежит  $W_{2, \gamma}^{l_1, l_2}(G)$ , если  $v^j(t, x) \in W_{2, \gamma}^{l_1, l_2}(G)$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Полагаем

$$\|V(t, x), W_{2, \gamma}^{l_1, l_2}(G)\| = \sum_{j=1}^3 \|v^j(t, x), W_{2, \gamma}^{l_1, l_2}(G)\|.$$

В работе доказаны следующие теоремы.



**Теорема 1.** Для любой вектор-функции  $U(t, x) \in W_{2,\gamma}^{2,4}(R^2)$ ,  $\gamma > 0$ , такой, что  $D_t^2 D_x^2 U(t, x) \in L_{2,\gamma}(R^2)$ , имеет место оценка

$$\gamma \|(1 + \xi^2)(|\eta| + \gamma + |\xi|)\widehat{U}_\gamma(\eta, \xi), L_2(R^2)\| \leq c \|\mathcal{L}(D_t, D_x)U(t, x), L_{2,\gamma}(R^2)\| \quad (2.2)$$

с константой  $c > 0$ , не зависящей от  $U(t, x)$ . Здесь  $\mathcal{L}(D_t, D_x)$  из (1.2),  $\widehat{U}_\gamma(\eta, \xi)$  — преобразование Фурье вектор-функции  $U_\gamma(t, x) = e^{-\gamma t}U(t, x)$ .

**Теорема 2.** Пусть  $F(t, x) \in W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2)$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\Phi(x) \in W_2^4(R)$ ,  $\Psi(x) \in W_2^3(R)$ . Тогда задача Коши (2.1) однозначно разрешима в классе вектор-функций  $U(t, x)$  из  $W_{2,\gamma}^{2,4}(R_+^2)$  таких, что  $D_t^2 D_x^2 U \in L_{2,\gamma}(R_+^2)$ , для решения имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \|U(t, x), W_{2,\gamma}^{2,4}(R_+^2)\| + \|D_t^2 D_x^2 U(t, x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| \\ & \leq c(\gamma) (\|\Phi(x), W_2^4(R)\| + \|\Psi(x), W_2^3(R)\| + \|F(t, x), W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2)\|), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $c(\gamma)$  — константа, зависящая от коэффициентов системы и  $\gamma$ .

### 3. Энергетические оценки

Рассмотрим форму

$$\mathcal{M}U = -\operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\gamma t} \mathcal{L}(D_t, D_x)U(t, x) \overline{(e^{-\gamma t} \mathcal{L}^1(D_t, D_x)U(t, x))} dz, \quad z = (t, x), \quad (3.1)$$

где

$$\mathcal{L}^1(D_t, D_x) = 2iL_0(D_x)D_t.$$

Используя свойства преобразования Фурье, (3.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{M}U &= -\operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{L}(D_t + \gamma I, D_x)U_\gamma(t, x) \overline{(\mathcal{L}^1(D_t + \gamma I, D_x)U_\gamma(t, x))} dz \\ &= -\operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{L}(i\eta + \gamma, i\xi)\widehat{U}_\gamma(\eta, \xi) \overline{(\mathcal{L}^1(i\eta + \gamma, i\xi)\widehat{U}_\gamma(\eta, \xi))} d\zeta, \quad \zeta = (\eta, \xi). \end{aligned}$$

Запишем матрицы  $\mathcal{L}(i\eta + \gamma, i\xi)$  и  $\mathcal{L}^1(i\eta + \gamma, i\xi)$  в виде

$$\mathcal{L}(i\eta + \gamma, i\xi) = (i\eta + \gamma)^2 L_0(i\xi) + \xi^4 L_1, \quad \mathcal{L}^1(i\eta + \gamma, i\xi) = 2i(i\eta + \gamma)L_0(i\xi).$$

Проводя вычисления, получим следующую форму:

$$\mathcal{M}U = 2\gamma \int_{\mathbb{R}^2} ((\eta^2 + \gamma^2)L_0(i\xi) + \xi^4 L_1)\widehat{U}_\gamma(\eta, \xi) \overline{L_0(i\xi)\widehat{U}_\gamma(\eta, \xi)} d\zeta. \quad (3.2)$$

Учитывая (1.2), (3.2), для любой вектор-функции  $U(t, x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  можно получить двухстороннюю оценку

$$\begin{aligned} & 2c_1\gamma \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \xi^2)^2 (\eta^2 + \gamma^2 + \xi^2) |\widehat{U}_\gamma(\eta, \xi)|^2 d\zeta \\ & \leq \mathcal{M}U \leq 2c_2\gamma \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \xi^2)^2 (\eta^2 + \gamma^2 + \xi^2) |\widehat{U}_\gamma(\eta, \xi)|^2 d\zeta. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Из неравенства (3.3), очевидно, следует оценка (2.2) для псевдогиперболического оператора  $\mathcal{L}(D_t, D_x)$ . Оценка (2.2) является аналогом энергетической оценки [2]. Из теоремы 1 вытекает единственность решения задачи Коши для псевдогиперболической системы с постоянными коэффициентами в соболевском пространстве  $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_+^2)$ ,  $\gamma > 0$ .

#### 4. Разрешимость задачи Коши

Применим оператор преобразования Фурье по  $x$  к задаче (2.1).

$$\begin{aligned} L_0(i\xi)D_t^2\widehat{U} + L_1\xi^4\widehat{U} &= \widehat{F}(t, \xi), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \xi \in \mathbb{R}, \\ \widehat{U}|_{t=0} &= \widehat{\Phi}(\xi), \quad D_t\widehat{U}|_{t=0} = \widehat{\Psi}(\xi), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$L_0(i\xi) = \begin{pmatrix} 1 + \alpha_1\xi^2 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & 1 + \alpha_2\xi^2 & -\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & 1 + \alpha_3\xi^2 \end{pmatrix}.$$

Можно записать  $L_0(i\xi)$  в следующем виде:

$$L_0(i\xi) = S \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} S^{-1}, \quad S^{-1} = S^*, \quad \lambda_j = \lambda_j(\xi).$$

При  $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 < 1$  несложно получить следующую оценку:

$$q_1(1 + \xi^2)|\nu|^2 < \langle L_0(i\xi)\nu, \nu \rangle \leq q_2(1 + \xi^2)|\nu|^2, \quad q_1 > 0. \quad (4.2)$$

Поскольку все собственные значения  $\lambda_j$  матрицы  $L_0(i\xi)$  положительны, то определена матрица

$$M(i\xi) = \sqrt{L_0(i\xi)} = S \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3} \end{pmatrix} S^{-1}. \quad (4.3)$$

Поэтому систему из (4.1) можно записать в виде

$$M(i\xi)M(i\xi)D_t^2\widehat{U} + \xi^4L_1\widehat{U} = \widehat{F}(t, \xi),$$

или

$$M(i\xi)D_t^2(M(i\xi)\widehat{U}) + \xi^4L_1(M(i\xi))^{-1}M(i\xi)\widehat{U} = \widehat{F}(t, \xi).$$

Сделаем замену

$$V(t, \xi) = M(i\xi)\widehat{U}(t, \xi),$$

$$D_t^2V + B(i\xi)V = (M(i\xi))^{-1}\widehat{F}(t, \xi), \quad (4.4)$$

где  $B(i\xi) = \xi^4(M(i\xi))^{-1}L_1(M(i\xi))^{-1}$  — эрмитова матрица, при этом

$$(B(i\xi))^* = B(i\xi) > 0, \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad B(0) = 0.$$

Тогда  $B(i\xi)$  матрицу можно записать в виде

$$B(i\xi) = T \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 \end{pmatrix} T^{-1} = T J T^{-1},$$

где  $\tau_j = \tau_j(\xi) \geq 0$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $T^{-1} = T^*$ . Поэтому система (4.4) эквивалентна следующей:

$$D_t^2 V + T J T^{-1} V = (M(i\xi))^{-1} \widehat{F}(t, \xi),$$

или после замены  $W(t, \xi) = T^{-1} V(t, \xi)$

$$D_t^2 W + J W = T^{-1} (M(i\xi))^{-1} \widehat{F}(t, \xi).$$

Следовательно, задача Коши (4.1) эквивалентна следующей:

$$\begin{aligned} D_t^2 W + J W &= T^{-1} (M(i\xi))^{-1} \widehat{F}(t, \xi), \\ W|_{t=0} &= T^{-1} M(i\xi) \widehat{\Phi}(\xi), \quad D_t W|_{t=0} = T^{-1} M(i\xi) \widehat{\Psi}(\xi). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Поэтому решение задачи Коши (4.1) имеет вид  $\widehat{U}(t, \xi) = (M(i\xi))^{-1} T W(t, \xi)$ , т. е.

$$\widehat{U}(t, \xi) = \widehat{U}_1(t, \xi) + \widehat{U}_2(t, \xi) + \widehat{U}_3(t, \xi),$$

где

$$\widehat{U}_1(t, \xi) = (M(i\xi))^{-1} T H_1(t, \xi) T^{-1} M(i\xi) \widehat{\Phi}(\xi), \quad (4.6)$$

$$H_1(t, \xi) = \begin{pmatrix} \cos(k_1 t) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(k_2 t) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(k_3 t) \end{pmatrix}, \quad k_j = k_j(\xi) = \sqrt{\tau_j(\xi)},$$

$$\widehat{U}_2(t, \xi) = (M(i\xi))^{-1} T H_2(t, \xi) T^{-1} M(i\xi) \widehat{\Psi}(\xi), \quad (4.7)$$

$$H_2(t, \xi) = \begin{pmatrix} \frac{\sin(k_1 t)}{k_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sin(k_2 t)}{k_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sin(k_3 t)}{k_3} \end{pmatrix},$$

$$\widehat{U}_3(t, \xi) = \int_0^t (M(i\xi))^{-1} T H_2(t-s, \xi) T^{-1} (M(i\xi))^{-1} \widehat{F}(s, \xi) ds. \quad (4.8)$$

При получении оценок вектор-функции  $\widehat{U}(t, \xi)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , будем использовать следующие неравенства:

$$1^\circ) \quad c_1 |\xi| \leq |k_j(\xi)| \leq c_2 |\xi|, \quad c_1 > 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$2^\circ) \quad \|M(i\xi)\| \leq \sqrt{q_2(1+\xi^2)},$$

$$3^\circ) \quad \|(M(i\xi))^{-1}\| \leq \frac{1}{\sqrt{q_1(1+\xi^2)}},$$

$$4^\circ) \quad \|H_1(t, \xi)\| \leq 1,$$

$$5^\circ) \quad \|H_2(t, \xi)\| \leq \max\left\{\left|\frac{\sin(k_j(\xi)t)}{k_j(\xi)}\right|\right\}.$$

Учитывая (4.6),  $2^\circ-4^\circ$ , имеем

$$\|\widehat{U}_1(t, \xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| \leq c_3(\gamma) \|\widehat{\Phi}(\xi), L_2(R)\|. \quad (4.9)$$

В силу 1° получим

$$\left| \frac{\sin(k_j(\xi)t)}{k_j(\xi)} \right| \leq \frac{c_4}{|\xi|}, \quad |\xi| \geq 1, \quad (4.10)$$

и поскольку

$$\sin(k_j(\xi)t) = k_j(\xi)t \int_0^1 \cos(sk_j(\xi)t) ds,$$

то

$$\left| \frac{\sin(k_j(\xi)t)}{k_j(\xi)} \right| \leq t, \quad |\xi| < 1. \quad (4.11)$$

Из оценок (4.10), (4.11) вытекает неравенство

$$\left| \frac{\sin(k_j(\xi)t)}{k_j(\xi)} \right| \leq \frac{c_5(t+1)}{1+|\xi|}, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (4.12)$$

Поэтому из формулы (4.7) в силу 2°, 3°, 5°, (4.12) получим

$$\|\widehat{U}_2(t, \xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| \leq c_6(\gamma) \|\widehat{\Psi}(\xi), L_2(R)\|, \quad (4.13)$$

$$\|\xi^4 \widehat{U}_2(t, \xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| \leq c_7(\gamma) \|\xi|^3 \widehat{\Psi}(\xi), L_2(R)\|. \quad (4.14)$$

Рассуждая аналогично и используя (4.14) и равенство Парсеваля, будем иметь

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^2 (\|D_t^2 \widehat{U}_j(t, \xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| + \|D_t^2 |\xi|^2 \widehat{U}_j(t, \xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\|) \\ & \leq c_8(\gamma) (\|\Phi(x), W_2^4(R_+^2)\| + \|\Psi(x), W_2^3(R_+^2)\|). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Проведем оценку третьего слагаемого из  $\widehat{U}(t, \xi)$ . Учитывая (4.8) и используя функцию Хевисайда  $\theta(t)$ , в силу неравенства Юнга получим

$$\begin{aligned} & \sum_{\beta \leq 4} \|\xi|^\beta \widehat{U}_3(t, \xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| = \sum_{\beta \leq 4} \left\| |\xi|^\beta \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t-s) e^{-\gamma(t-s)} \right. \\ & \quad \times (M(i\xi))^{-1} T H_2(t-s, \xi) T^{-1} (M(i\xi))^{-1} e^{-\gamma s} \theta(s) \widehat{F}(s, \xi) ds, L_2(R^2) \left. \right\| \\ & \leq \sum_{\beta \leq 4} \left( \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2\beta} \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t-s) e^{-\gamma(t-s)} (M(i\xi))^{-1} T H_2(t-s, \xi) T^{-1} (M(i\xi))^{-1} \right. \right. \\ & \quad \times e^{-\gamma s} \theta(s) \widehat{F}(s, \xi) ds \left. \left. \right\|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \sum_{\beta \leq 4} \left( \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2\beta} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t) e^{-\gamma t} \|(M(i\xi))^{-1}\| \|T\| \|H_2(t-s, \xi)\| \|T^{-1}\| \|(M(i\xi))^{-1}\| dt \right. \right. \end{aligned}$$

$$\times \left( \int_{\mathbb{R}} (e^{-2\gamma t} \theta(t) \|\widehat{F}(t, \xi)\|)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} d\xi \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Используя  $1^\circ$ – $3^\circ$ ,  $5^\circ$ , (4.12), будем иметь

$$\sum_{\beta \leq 4} \|\xi|^\beta \widehat{U}_3(t, \xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| \leq c_9(\gamma) \|F(t, x), W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2)\|. \quad (4.16)$$

Аналогичным образом можно получить следующую оценку:

$$\begin{aligned} \|D_t^2 \widehat{U}_3(t, \xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| + \|\xi|^2 D_t^2 \widehat{U}_3(t, \xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| \\ \leq c_{10}(\gamma) \|F(t, x), W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2)\|, \end{aligned} \quad (4.17)$$

где константы  $c_9(\gamma), c_{10}(\gamma) > 0$  зависят от  $\gamma$ .

Из проведенных рассуждений, вытекает, что вектор-функции

$$U(t, x) = F^{-1}[\widehat{U}](t, x) \in W_{2,\gamma}^{2,4}(R_+^2)$$

является решением задачи Коши (2.1).

Из неравенств (4.9), (4.13), (4.15)–(4.17) и равенства Парсеваля для этой вектор-функции следует оценка (2.3).

**Благодарность.** Автор выражает благодарность Г. В. Демиденко за постановку задачи и внимание к работе, а также Л. Н. Бондарь, С. Ма и В. С. Нурмахматову за полезные обсуждения результатов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. М.; Л.: Стройиздат, 1940.
2. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998.
3. Демиденко Г. В. Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56. № 6. С. 1289–1303.
4. Бондарь Л. Н., Демиденко Г. В. О корректности задачи Коши для псевдогиперболических уравнений в весовых соболевских пространствах // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 5. С. 895–911.
5. Fedotov I., Volevich L. V. The Cauchy problem for hyperbolic equations not resolved with respect to the highest time derivative // Russ. J. Math. Phys. 2006. V. 13. N 3. P. 278–292.
6. Bondar L. N., Demidenko G. V. Solvability of the Cauchy problem for a pseudohyperbolic system // Complex Variables and Elliptic Equ. 2021. V. 66, N 6-7. P. 1084–1099.
7. Бондарь Л. Н., Мингнарлов С. Б. О задаче Коши для одной системы псевдогиперболического типа // Мат. заметки СВФУ. 2023. Т. 30, № 4. С. 3–11.

Поступила в редакцию 7 июля 2025 г.

После доработки 10 августа 2025 г.

Принята к публикации 29 августа 2025 г.

Мингнарлов Санжар Баходир угли  
Новосибирский государственный университет,  
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090  
s.mingnarov@ng.su.ru

UDC 517.955

# SOLVABILITY OF THE CAUCHY PROBLEM FOR ONE FOURTH-ORDER PSEUDOHYPERBOLIC SYSTEM

S. B. Mingnarov

**Abstract:** The Cauchy problem for one system unsolvable with respect to the highest time derivative is considered. This system is pseudohyperbolic. The unique solvability of the Cauchy problem in Sobolev spaces is proved and estimates for the solution are obtained.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-3-53-60

**Keywords:** system unsolvable with respect to the highest derivative, pseudohyperbolic system, Cauchy problem, transverse flexural-torsional vibrations.

## REFERENCES

1. Vlasov V. Z., Thin-Walled Elastic Beams, Nat. Sci. Found., Washington, DC (1961).
2. Demidenko G. V. and Uspenskii S. V., Partial Differential Equations and Systems Not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative, Marcel Dekker, New York; Basel (2003).
3. Demidenko G. V., “Solvability conditions of the Cauchy problem for pseudohyperbolic equations,” Sib. Math. J., **56**, No. 6, 1028–1041 (2015).
4. Bondar L. N. and Demidenko G. V., “On well-posedness of the Cauchy problem for pseudohyperbolic equations in weighted Sobolev spaces,” Sib. Math. J., **64**, No. 5, 895–911 (2023).
5. Fedotov I. and Volevich L. V., “The Cauchy problem for hyperbolic equations not resolved with respect to the highest time derivative,” Russ. J. Math. Phys., **13**, No. 3, 278–292 (2006).
6. Bondar L. N. and Demidenko G. V., “Solvability of the Cauchy problem for a pseudohyperbolic system,” Complex Variables Elliptic Equ., **66**, No. 6-7, 1084–1099 (2021).
7. Bondar L. N. and Mingnarov S. B., “On the Cauchy problem for one system of pseudohyperbolic type [in Russian],” Mat. Zamet. SVFU, **30**, No. 4, 3–11 (2023).

*Submitted July 7, 2025*

*Revised August 10, 2025*

*Accepted August 29, 2025*

Sanzhar B. Mingnarov  
Novosibirsk State University,  
1 Pirogov Street, Novosibirsk 630090, Russia  
[s.mingnarov@ng.su.ru](mailto:s.mingnarov@ng.su.ru)

## ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ СТЕФАНА ДЛЯ СЛУЧАЯ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ ВЕЩЕСТВА

А. Г. Подгаев, Т. Д. Кулеш

**Аннотация.** Методами компактности для функций из шкалы банаховых пространств доказана разрешимость задачи с нелинейной скрытой теплотой плавления вещества в условиях Стефана. Предварительно исследуется начальная краевая задача в нецилиндрической области с заданной криволинейной границей класса  $W_2^1$ . Для нее получены равномерные оценки, необходимые для использования в основной задаче. Затем рассматривается задача, для которой в условии на неизвестной границе коэффициент скрытой удельной теплоты плавления является функцией размера зоны протаивания  $s(t)$ . Эта техника может быть применена к более общим уравнениям. Изучаемая задача описывает процессы перехода вещества из одного состояния в другое. В результате установлена регулярная глобальная по времени разрешимость однофазной задачи Стефана для нелинейного параболического уравнения. Начальные данные принадлежат только классу  $W_2^1$ , а граница фазового перехода, определяемая вместе с решением, принадлежит пространству  $W_4^1$ .

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-3-61-81

**Ключевые слова:** задача Стефана, относительная компактность, нецилиндрическая область, неизвестная граница.

### Введение

Основное отличие задач с подвижными (неизвестными) границами от обычных начально-краевых задач состоит в том, что с течением времени меняется область, где протекает описываемый уравнением процесс, и она также подлежит определению. Это приводит к существенной нелинейности задачи, даже если уравнение остается линейным.

Некоторые результаты и обзоры современного состояния этого типа задач изложены в работах [1–8]. Имеются также классические работы А. Фридмана, Л. Рубинштейна, А. М. Мейрманова.

Наиболее распространенный подход (см., например, работы А. М. Мейрманова) к исследованию задач с неизвестной границей состоит в том, чтобы,

---

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН № 075–00459–25–00. Работа выполнена в Дальневосточном центре математических исследований при финансовой поддержке Минобрнауки России, соглашение от 28 февраля 2024 г. № 075–02–2024–1432 по реализации программ развития региональных научно-образовательных математических центров.

используя замену переменных, задачу в неизвестной области свести к начально-краевой задаче для параболического уравнения в известной цилиндрической области, но с неизвестными коэффициентами в уравнении. Эти коэффициенты находят по дополнительному краевому условию. Но чтобы их найти, необходимо построить нелинейный оператор, неподвижные точки которого определяют решение исходной задачи. Некоторые свойства этого оператора опираются на свойства решений краевых задач в цилиндрических областях. Этот подход, как правило, приводил к некоторым требованиям малости (обычно промежутка времени) и более жестким требованиям (по сравнению с предлагаемыми в работе) на гладкость искомой границы.

Другой подход, основанный на введенном С. Л. Каменомостской и О. А. Олейник понятии обобщенного решения задачи Стефана, оказался эффективным при рассмотрении многомерных задач. Дюво предложил способ сведения задачи Стефана к вариационному неравенству. Однако эти подходы, обладая большой общностью, теряют значительную часть сведений: не остается никакой информации о структуре раздела фаз, о принадлежности неизвестной границы какому-либо классу. Предлагаемый в работе подход гарантирует существование решения с искомой границей, принадлежащей лишь классу типа  $W_p^1$ . Он позволяет также рассматривать условие Стефана на неизвестной границе с величиной  $L$  значительно более общего вида, например,  $L(s(t), s'(t))$ , где коэффициент скрытой удельной теплоты плавления является функцией, зависящей не только от положения свободной границы, как в рассматриваемой нами задаче, но и от скорости ее передвижения. Этот случай рассмотрен в [3] для одномерного линейного уравнения теплопроводности в области без начального условия и заключается в построении явных решений задачи. Значительная библиография и обзор работ по задачам с подвижной границей имеется также в [8]. Развитию методов компактности, ориентированных на задачи с неизвестной границей, посвящена работа [9].

Основная цель исследования — доказать глобальную разрешимость задачи для указанного нелинейного уравнения с коэффициентом скрытой удельной теплоты плавления в условии Стефана, зависящим от глубины зоны протаивания и при начальном условии из класса  $W_2^1$ .

Один из шагов используемого здесь метода требует проводить исследования нестационарных задач в нецилиндрических областях. Этот вопрос решался в ряде старых исследований, но интерес к нему в связи с новыми идеями и целями возникает и сейчас постоянно. В частности, будем использовать абстрактные методы из [10, 11] и результаты работы [12] по разрешимости краевой задачи в заданной нецилиндрической области.

## 1. Постановка задачи

Рассматривается одномерная задача с неизвестной границей  $x = s(t)$  (такой, что  $s(0) = 1$ ) для нелинейного уравнения теплопроводности

$$u_t = a(u)u_{xx} \text{ при } t > 0, \quad 0 < x < s(t), \quad t \in (0, T). \quad (1)$$



Уравнение (1) дополняется начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u_0 \geq 0, \quad u_0 \in W_2^1, \quad u_0(1) = 0. \quad (2)$$

Неотрицательность означает, что в начальный момент времени рассматриваемый слой вещества находился в жидком или переходном состоянии.

На границе  $x = 0$  в каждый момент времени задается плотность потока тепла (для простоты берем случай отсутствия потока):

$$(A(u))_x = a(u)u_x = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad t \in (0, T], \quad (3)$$

где  $A(\eta) = \int_0^\eta a(\xi) d\xi$  — первообразная для  $a$ . На неизвестной границе фазового перехода  $x = s(t)$  задается постоянная температура плавления вещества, которую считаем равной нулю:

$$u = 0 \quad \text{при } x = s(t), \quad t > 0, \quad (4)$$

а также условие Стефана

$$a(u)u_x = -Ls'(t) \quad \text{при } x = s(t), \quad t > 0. \quad (5)$$

В отличие от обычного условия Стефана, в котором  $L$  — постоянная величина, показывающая (при  $\rho = 1$ ,  $c = 1$  и  $k = 1$ ), какое минимальное количество теплоты необходимо для того, чтобы перевести единицу массы вещества из твердого состояния в жидкое при неизменной температуре, равной температуре плавления, мы предполагаем, что  $L = \varphi(s)$  — заданная непрерывная функция, т. е.  $L$  зависит от положения свободной границы. Физически это может означать, что твердая часть вещества с удалением от начала координат изменяет свои характеристики (связь между плотностью  $\rho$ , теплопроводностью  $k$  и скрытой теплотой  $L$ ) по некоторому известному закону. Действительно,  $s$  есть расстояние от начала координат до границы раздела твердой и жидкой фаз, а  $\varphi(s)$  описывает закон изменения. Задачи с подобным условием в последнее время привлекают исследователей, см. библиографию в [8], содержащую в основном результаты по построению (при специальных граничных и начальных условиях и функциях  $\varphi(s)$ ) явных решений задачи.

Уравнение (1), рассматриваемое на промежутке  $(0, T)$ , преобразуется к виду

$$u_t = (A(u))_{xx} - a'(u)(u_x)^2 \quad \text{при } t > 0, \quad 0 < x < s(t), \quad t \in (0, T), \quad s(0) = 1, \quad (6)$$

а начально-краевые условия для нахождения решения  $u(x, t)$  и границы раздела фаз  $s(t)$  — к виду

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u_0 = 0 \quad \text{при } x = 1, \quad (7)$$

$$(A(u))_x = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad t \in (0, T), \quad (8)$$

$$u = 0 \quad \text{при } x = s(t), \quad t \in [0, T], \quad (9)$$

$$(A(u))_x = -\varphi(s)s'(t) \text{ при } x = s(t), t \in (0, T). \quad (10)$$

В работе будем предполагать, что функции  $a'(\xi)$  и  $\varphi(\xi)$  непрерывны для всех  $\xi$  (конкретно для задачи Стефана дополнительно будем считать, что  $\sup a''(u)$  конечен на промежутке, определяемом начальной функцией), а также что

$$a(\xi) \geq \delta, \quad \xi a'(\xi) \geq 0, \quad \varphi(\xi) \geq \delta > 0. \quad (11)$$

Введем нецилиндрическую область  $Q_t = \{(x, \tau) : 0 < x < s(\tau), \tau \in (0, t)\}$ . При предположении, что  $u_0(x) \geq 0$ ,  $u_0 \in W_2^1$ ,  $u_0(1) = 0$ , будет установлено, что искомая функция  $s(t)$  не убывает,  $s(t) \in W_4^1(0, T)$  и, следовательно, непрерывна по Гёльдеру.

Используя (9), запишем уравнение (10) в виде

$$\varphi(s)s'(t) = -a(0)u_x(s(t), t), \quad t \in (0, T).$$

Интегрируя, выведем эквивалентное соотношение

$$\int_0^t (\Phi(s(\tau))) d\tau = -a(0) \int_0^t u_x(s(\tau), \tau) d\tau, \quad t \in (0, T], \quad (12)$$

где

$$\Phi(\eta) = \int_0^\eta \varphi(\xi) d\xi$$

— первообразная для  $\varphi$ .

Задачи (6)–(10) и (6)–(9), (12) эквивалентны.

Однако фактически будем использовать эквивалентное (12) и дающее дополнительную информацию соотношение

$$\Phi(s(t)) = \Phi(s(0)) - a(0) \left[ \int_0^{s(t)} B(u(\xi, t)) d\xi - \int_0^{s(0)} B(u_0(\xi)) d\xi \right], \quad B(u) = \int_0^u \frac{d\eta}{a(\eta)}. \quad (13)$$

Оно получается, если в (12) выразить  $u_x(s(t), t)$  через  $\int_0^{s(t)} u_{xx}(\xi, t) d\xi$ , заменить  $u_{xx}$  на  $\frac{u_t}{a(u)}$  и проинтегрировать по  $t$ , используя (9).

## 2. Краевая задача в заданной нецилиндрической области

Пусть  $s(t)$  — заданная функция из класса  $W_2^1(0, T)$  такая, что  $\frac{d}{dt}s(t) \geq 0$ ,  $s(0) = 1$ . По ней определим функцию  $u(x, t)$  как решение следующей краевой задачи в заданной нецилиндрической области  $Q_T = \{(x, t) : 0 < x < s(t), t \in (0, T)\}$ :

$$\begin{aligned} u_t &= (A(u))_{xx} - a'(u)(u_x)^2, \quad 0 < x < s(t), \quad t \in (0, T), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u_0 \geq 0, \quad u_0(1) = 0, \quad u_0 \in W_2^1(0, 1), \\ (A(u))_x &= 0, \quad \text{при } x = 0, \quad t \in (0, T), \\ u &= 0 \text{ при } x = s(t), \quad t \in (0, T). \end{aligned} \quad (14)$$

### 3. Построение приближенных решений задачи (14) и равномерные оценки их производных по $x$

Приближенные решения задачи (14) будем искать в виде

$$u_m = \sum_{k=0}^m c_k^m(t) \omega_k(x, t), \text{ где } \omega_k(x, t) = \sqrt{2} \cos \left[ \left( \frac{\pi}{2} + \pi k \right) \frac{x}{s(t)} \right]$$

исходя из требований

$$\begin{aligned} \int_0^{s(t)} u_{mt}(x, t) \omega_j(x, t) dx + \int_0^{s(t)} (A(u_m))' \omega_{jx}(x, t) dx \\ + \int_0^{s(t)} a'(u_m) u_{mx}^2 \omega_j(x, t) dx = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (15)$$

$$c_k^m(0) = c_k = \int_0^1 u_0(x) \omega_k(x, 0) dx, \quad u_m(x, 0) = \sum_{k=0}^m c_k \omega_k(x, 0).$$

Заметим, что для всех  $t \in [0, T]$  система функций  $\{\omega_k(x, t)\}_{k=0}^\infty$  ортогональна и полна как в пространстве  $L_2(0, s(t))$ , так и в пространстве функций из  $W_2^1(0, s(t))$ , равных нулю при  $x = s(t)$ . При этом

$$\int_0^{s(t)} \omega_k(x, t) \omega_j(x, t) dx = \delta_k^j s(t).$$

Отсюда, в частности, следует, что для коэффициентов Фурье  $c_k$  функции  $u_0(x) \in W_2^1(0, 1)$  такой, что  $u(1) = 0$ , будем иметь

$$u_m(x, 0) = \sum_{k=0}^m c_k \omega_k(x, 0) \rightarrow u_0(x)$$

в  $L_2(0, 1)$  и в  $W_2^1(0, 1)$ .

Важно заметить, что

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} = \sum_{k=0}^m \left( \frac{dc_k^m}{dt} \omega_k(x, t) + c_k^m(t) \frac{\partial \omega_k}{\partial t}(x, t) \right), \quad (16)$$

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial t} = \sqrt{2} \left( \frac{\pi}{2} + \pi k \right) \frac{x}{(s(t))^2} s'(t) \sin \left[ \left( \frac{\pi}{2} + \pi k \right) \frac{x}{s(t)} \right]. \quad (17)$$

В силу ортогональности в  $L_2(0, s(t))$  системы  $\{\omega_k(x, t)\}_{k=0}^\infty$  система обыкновенных дифференциальных уравнений (15) эквивалентна нормальной форме

$$\begin{aligned} (s(t)) \frac{dc_j^m}{dt} = - \sum_{k=0}^m c_k^m(t) \int_0^{s(t)} \omega_{kt}(x, t) \omega_j(x, t) dx \\ - \int_0^{s(t)} [(A(u_m))_x \omega_{jx}(x, t) + a'(u_m) u_{mx}^2 \omega_j(x, t)] dx, \end{aligned}$$

$$c_j^m(0) = c_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m.$$

В силу непрерывности  $a'(\xi)$  и леммы из [12], обобщающей лемму Виши-ка — Дубинского (прямая ссылка на которую невозможна в силу появления в первом слагаемом правой части системы дифференциальных уравнений множителя  $s'(t) \in L_2(0, T)$ , не являющегося непрерывной функцией), задача Коши для этой системы имеет решение из класса  $W_2^1(0, T)$ , так как основное условие леммы следует из полученной ниже оценки.

Преобразуя равенство (15) стандартным образом, получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} u_m^2 dx + \int_0^{s(t)} [a(u_m) + a'(u_m)u_m] u_{mx}^2 dx = 0. \quad (18)$$

Интегрирование равенства (18) от 0 до  $t$  дает

$$\begin{aligned} & \int_0^{s(t)} u_m^2 dx + 2 \int_0^t \int_0^{s(\tau)} [a(u_m) + a'(u_m)u_m] u_{mx}^2 dx d\tau \\ &= \int_0^{s(0)} \left( \sum_{k=0}^m c_k \omega_k(x, 0) \right)^2 dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^m c_k^2 \cdot 1 dx = \sum_{k=0}^m c_k^2 \leq \sum_{k=0}^\infty c_k^2 = \|u_0\|_{L_2}^2 = c_0^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Для получения второй группы оценок умножим левую и правую части равенства (15) на  $-\left(\frac{\pi + \pi j}{s(t)}\right)^2 c_j^m(t)$  и просуммируем по  $j$  от 0 до  $m$ . После некоторых преобразований, используя равенства  $u_m(s(t), t) = 0$ ,  $u_{mx}(0, t) = 0$ ,  $u_{mt}(s(t), t) = -u_{mx}(s(t), t)s'(t)$ , а также  $s'(t) \geq 0$ , получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} u_{mx}^2 dx + \frac{1}{2} u_{mx}^2(s(t), t) s'(t) + \int_0^{s(t)} a(u) u_{xx}^2 dx = 0. \quad (20)$$

Проинтегрируем последнее равенство от 0 до  $t$ . Получаем

$$\int_0^{s(t)} u_{mx}^2 dx + \int_0^t u_{mx}^2(s(\tau), \tau) s'(\tau) d\tau + 2 \int_0^t \int_0^{s(\tau)} u_{mxx}^2 dx d\tau \leq \int_0^1 u_{mx}^2(x, 0) dx \leq c_1^2. \quad (21)$$

Здесь  $c_1^2 = \int_0^1 u_{0x}^2(x) dx$ . Из этой оценки, в частности, следует, что

$$|u_m(x, t)|^2 = 2 \left| \int_{s(t)}^x u_m(\xi, t) u_{mx}(\xi, t) d\xi \right| \leq 2c_0 c_1.$$

#### 4. Оценка производной по времени у решений задачи (14)

Очевидно, что

$$\sum_{k=0}^m \frac{dc_k^m}{dt} \omega_k(x, t) = \frac{\partial u^m}{\partial t} + \frac{\partial u^m}{\partial x} \frac{x}{s(t)} s'(t). \quad (22)$$

Умножим (15) на  $\frac{dc_j^m}{dt}$  и просуммируем по  $j$  от 0 до  $m$ . В результате, учитывая (22), получим равенство

$$\int_0^{s(t)} u_t^m \left( u_t^m + u_x^m \frac{x}{s(t)} s'(t) \right) dx = \int_0^{s(t)} a(u) u_{xx}^m \left( u_t^m + u_x^m \frac{x}{s(t)} s'(t) \right) dx.$$

Перепишем последнее тождество в виде

$$\begin{aligned} \int_0^{s(t)} u_{mt}^2 dx + \frac{s'(t)}{s(t)} \int_0^{s(t)} u_{mt} u_{mxx} dx \\ = \int_0^{s(t)} a(u) u_{mxx} u_{mt} dx + \frac{s'(t)}{s(t)} \int_0^{s(t)} a(u_m) u_{mxx} u_{mxx} dx. \end{aligned}$$

Оценим второе слагаемое слева и оба в правой части равенства, используя непрерывность  $a$ , равномерную ограниченность  $u_m$ , (21), а также что  $\frac{x}{s(t)} \leq 1$ :

$$\begin{aligned} \left| -\frac{s'(t)}{s(t)} \int_0^{s(t)} u_{mt} u_{mxx} dx \right| &\leq \varepsilon \int_0^{s(t)} u_{mt}^2 dx + c(\varepsilon) s'^2(t), \\ \int_0^{s(t)} a(u_m) u_{mxx} u_{mt} dx &\leq \varepsilon \int_0^{s(t)} u_{mt}^2 dx + c(\varepsilon) \int_0^{s(t)} a(u_m) u_{mxx}^2 dx, \\ \frac{s'(t)}{s(t)} \int_0^{s(t)} a(u_m) u_{mxx} u_{mxx} dx &\leq c s'^2(t) + c \int_0^{s(t)} a(u_m) u_{mxx}^2 dx. \end{aligned}$$

Подставляя выведенные оценки в последнее тождество, получаем

$$\begin{aligned} (1 - 2\varepsilon) \int_0^{s(t)} u_{mt}^2 dx &\leq c(\varepsilon) s'^2(t) \\ &+ c(\varepsilon) \int_0^{s(t)} a(u_m) u_{mxx}^2 dx + c s'^2(t) + c \int_0^{s(t)} a(u_m) u_{mxx}^2 dx. \end{aligned}$$

Выбирая  $\varepsilon = \frac{1}{3}$  и интегрируя неравенство от 0 до  $t$ , получим равномерную по  $m$  оценку

$$\int_0^t \int_0^{s(\tau)} u_{mt}^2 dx d\tau \leq \tilde{c} \left( \int_0^T s'^2(\tau) d\tau + 1 \right). \quad (23)$$

### 5. Об одном результате о компактности

Для обоснования перехода к пределу по  $m$  нам понадобится обоснование возможности применения одного результата о компактности. Возьмем в [10] в качестве семейства пространств  $B_1^t$  ( $t$  пробегает все значения от 0 до  $T$ ) пространства  $L_2(0, s(t))$ , а в качестве  $B^t$  — пространства  $W_p^1(0, s(t))$ ,  $1 < p \leq 2$ , а норму зададим формулой

$$\|v\|_{B^t} = \left( \int_0^{s(t)} (|v(x)|^p + |v_x(x)|^p) dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Неубывание  $s(t)$ ,  $t \in (0, T)$ , дает  $B^{t_1} \subset B^{t_2}$ ,  $B_1^{t_1} \subset B_1^{t_2}$  при  $t_1 > t_2$ .

Далее, определим  $S^t$  как подмножество пространства  $B^t$ , снабженное функцией  $M_t(\cdot) : S^t \rightarrow \overline{R}^+$ , где

$$M_t(v) = \int_0^{s(t)} (v^2(x) + v_x^2(x) + v_{xx}^2(x)) dx, \quad t \in [0, T].$$

Введем обозначение  $S_a^t = \{\theta(x) \in S^t : M_t(\theta) \leq a\}$  и отметим, что для любого  $a < \infty$  множество  $S_a^t$  относительно компактно в  $B^t$  при любом  $t \in [0, T]$  [13, лемма 2].

В силу неубывания  $s(t)$  выполняется  $M_{t_2}(v) \leq M_{t_1}(v)$  при  $t_1 > t_2$  для всех  $v$  из  $S^{t_1}$ .

Через  $F_1$  обозначается подмножество абстрактных функций  $v(t)$  таких, что при  $t \in [0, T]$  и  $v(t) \in B^t$  выполнены неравенства

$$\text{vrai max}_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_{B^t} \leq c_2; \quad \int_0^T M_t(v(t)) dt \leq c_3, \quad (24)$$

где  $c_2$  и  $c_3$  — общие постоянные для всех  $v(t) \in F_1$ .

Для использования указанной в [10] теоремы необходимо доказать существование такой функции  $\eta(t_1, t_2)$ , что для всех пар элементов  $u, v \in F_1$  и всех  $t_1 \geq t_2$

$$| \|u(t_1) - v(t_1)\|_{B^{t_2}} - \|u(t_1) - v(t_1)\|_{B^{t_1}} | \leq \eta(t_1, t_2) \rightarrow 0$$

при  $t_1 - t_2 \rightarrow 0$ . Здесь  $\eta$  не зависит от  $u, v$  из  $F_1$ . Для построенной нами последовательности это означает, что

$$| \|u_{m_1}(x, t_1) - u_{m_2}(x, t_1)\|_{B^{t_2}} - \|u_{m_1}(x, t_1) - u_{m_2}(x, t_1)\|_{B^{t_1}} | \leq \eta(t_1, t_2) \rightarrow 0$$

и доказывается из свойства гёльдеровости  $s(t)$  и полученных оценок аналогично приведенному примеру в [13].

## 6. Предельный переход. Существование решения задачи (14)

Пусть  $b_i(t)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , образуют полную систему в  $L_2[0, T]$ . Умножая все члены (15) на  $b_i(t)$ , суммируя по  $j$ ,  $i$  от 0 до  $M$ ,  $M \leq m$ , и интегрируя по  $t$ , для  $F_M(x, t) = \sum_{i,j=0}^M b_i(t)\omega_j(x, t)$  получим

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^{s(t)} u_t^m F_M dx dt + \int_0^T \int_0^{s(t)} (A(u_m))' F_{Mx} dx dt \\ + \int_0^T \int_0^{s(t)} a'(u_m) u_{mx}^2 F_M dx dt = 0, \quad M \leq m. \end{aligned} \quad (25)$$

Теорема компактности из [10] и полученные оценки позволяют выделить подпоследовательность  $\{u_{m_r}\}$ , которая сходится в нормах  $\left( \int_0^T \|u\|_{B^1}^{p_1} dt \right)^{\frac{1}{p_1}}$ ,  $p_1 \in [1, 2)$ , и можно считать, что  $\{u_{m_r}\}$  сходится почти всюду. Тогда из оценки

$$u_{mx}^4(x, t) = \left( \int_0^x \frac{\partial u_{mx}^2(x, t)}{\partial x} dx \right)^2 \leq 4 \int_0^x u_{mx}^2 dx \int_0^x u_{mxx}^2 dx \leq 4c_1^2 \int_0^x u_{mxx}^2 dx \quad (26)$$

следует, что семейство  $\{u_{mx}^2\}$  равномерно ограничено в норме  $L_2(Q_T)$ . Лемма 3.2 в [16, с. 80] позволяет считать, что  $u_{m_r x}^2$  сходится в  $L_q(Q_T)$ ,  $q < 2$ .

Из вложения  $W_2^1(Q_T) \cap L_\infty(0, T; \widetilde{W}_2^1(0, s(t))) \subset C_{x,t}^{1/2, 1/4}(\overline{Q_T})$ , [13, лемма 1], где  $\widetilde{W}_2^1(0, s(t)) = \{v \in W_2^1(0, s(t)) : v(s(t)) = 0\}$ , следует, что можно считать последовательность  $\{u_{m_r}\}$  равномерно сходящейся. Вместе с предыдущей сходимостью это позволяет перейти к пределу в нелинейных членах  $a(u_{m_r})u_{m_r x}$ ,  $a'(u_{m_r})u_{m_r x}^2$  соответствующего интегрального тождества (25). Переходя к пределу при  $m_r \rightarrow \infty$ , получим

$$\int_0^T \int_0^{s(t)} u_t F_M dx dt + \int_0^T \int_0^{s(t)} (A(u))' F_{Mx} dx dt + \int_0^T \int_0^{s(t)} a'(u) u_x^2 dx dt F_M = 0, \quad M \leq m.$$

После этого, переходя к пределу при  $M \rightarrow \infty$ , получаем выполнение равенства (25) для любой  $F \in L_2(0, T; W_2^1(0, s(t)))$  с условием  $F(s(t), t) = 0$ . Поэтому

$$\int_0^T \int_0^{s(t)} u_t F dx dt + \int_0^T \int_0^{s(t)} (A(u))' F_x dx dt + \int_0^T \int_0^{s(t)} a'(u) u_x^2 F dx dt = 0. \quad (27)$$

Стандартно можно установить, что предельная функция  $u = \lim u_{m_r}$  имеет вторую по  $x$  обобщенную производную, суммируемую с квадратом, что выполнено уравнение (14) (и (1)) и условия задачи (14), в частности, след  $u_x$  при  $x = 0$

равен 0. Кроме того, из уравнения (1) получается оценка в  $L_2(Q_T)$  производной по  $t$  (не зависящая от  $s(t)$ ), зависящая только от  $\|u_0\|_{L_2(0,1)} + \|u_{0x}\|_{L_2(0,1)}$ .

Таким образом, установлена разрешимость краевой задачи (14) для квазилинейного параболического уравнения в области с фиксированной нецилиндрической правой границей  $x = s(t)$  из класса  $W_2^1$  неубывающих функций.

Из принципа максимума (доказанного в [14]) следует, что при  $u_0(x) \geq 0$ ,  $u_0 \in W_2^1(0,1)$ ,  $u_0(1) = 0$  решение задачи (14) неотрицательно в  $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < s(t), t \in (0,T)\}$ . Отсюда легко выводим, что  $u_x^n(s(t), t) \leq 0$ .

## 7. Основной оператор задачи и его свойства

Исходная задача Стефана будет решена, если подобрать функцию  $s(t)$ , задающую правую границу, из описанного выше класса, определяющую решение  $u(x,t)$  задачи (14), для которых будет выполнено условие Стефана (10). Последнее, как показано, эквивалентно каждому из условий (12) или (13). Полагая  $s(0) = 1$ , (13) перепишем в виде

$$\begin{aligned} s(t) &= \Phi^{-1}(\alpha - a(0) \int_0^{s(t)} B(u(\xi, t)) d\xi), \\ B(u) &= \int_0^u \frac{d\eta}{a(\eta)}, \quad \alpha = \Phi(1) + a(0) \int_0^1 B(u_0(\xi)) d\xi. \end{aligned} \quad (28)$$

Определим оператор

$$G(s(t)) = \Phi^{-1}(\alpha - a(0) \int_0^{s(t)} B(u(\xi, t)) d\xi), \quad (29)$$

действующий на подмножестве  $S$  пространства  $C[0, T]$ ,  $S = \{s(t) \in W_2^1(0, T) : s(0) = 1, s'(t) \geq 0, \|s'\|_{L_2(0, T)} \leq b_1\}$ . Его неподвижная точка даст искомую функцию  $s(t)$ . Очевидно, что  $S$  — выпуклое и замкнутое подмножество пространства  $C[0, T]$ . Из вложения  $W_2^1(0, T)$  в  $C^{\frac{1}{2}}[0, T]$  следует компактность  $S$  в  $C[0, T]$ . Кроме того,

$$\begin{aligned} \frac{dG(s(t))}{dt} &= \frac{1}{\Phi'(G(s(t)))} \left( -a(0) \int_0^{s(t)} \frac{d}{dt} B(u(\xi, t)) d\xi \right) \\ &= \frac{1}{\Phi'(G(s(t)))} \left( -a(0) \int_0^{s(t)} \frac{u_t}{a(u)} d\xi \right) \\ &= -\frac{a(0)}{\Phi'(G(s(t)))} \int_0^{s(t)} u_{xx} d\xi = -\frac{a(0)}{\varphi(G(s(t)))} u_x(s(t), t) \geq 0. \end{aligned} \quad (30)$$



В частности,

$$\frac{dG(s(t))}{dt} = \frac{a(0)}{\varphi(G(s(t)))} |u_x(s(t), t)| \leq \frac{a(0)}{\delta} |u_x(s(t), t)|.$$

Оценим  $u_x(s(t), t)$ , используя (21):

$$u_x^2(s(t), t) = \int_0^{s(t)} \frac{\partial}{\partial \xi} u_x^2 d\xi = 2 \int_0^{s(t)} u_x u_{xx} d\xi \leq 2c_1 \left( \int_0^{s(t)} u_{xx}^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}, \quad c_1 = \|u_{0x}\|_{L_2(0,T)}.$$

Поэтому, используя вторую часть (21), имеем

$$\int_0^T u_x^2(s(t), t) dt \leq 2c_1 \int_0^T \left( \int_0^{s(t)} u_{xx}^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} dt \leq c_1^2 \sqrt{\frac{2T}{\delta}}.$$

Таким образом,

$$\left\| \frac{dG(s(t))}{dt} \right\|_{L_2(0,T)} \leq \frac{a(0)}{\delta} c_1 \left( \frac{2T}{\delta} \right)^{\frac{1}{4}} \stackrel{\text{def}}{=} b_1. \quad (31)$$

Постоянная  $b_1$  не зависит от  $s(t)$  и именно она входит в определение множества  $S$ .

Формулы (29), (30) и равенство  $G(s(t))|_{t=0} = \Phi^{-1}(\Phi(1)) = 1$  показывают, что оператор  $G$  переводит  $S$  в себя. Докажем его непрерывность в пространстве  $C[0, T]$ .

Будем обозначать через  $u(x, t; s)$  решение задачи (14) с заданной правой границей  $x = s(t)$ , а через  $u_n(x, t; s_n)$  — задачи (14) с правой границей  $x = s_n(t)$ . Будем считать, что  $s(t)$  и  $s_n(t)$  принадлежат множеству  $S$  и  $\gamma_n(t) = \min(s(t), s_n(t))$ . Для дальнейшего отметим, что  $\gamma_n(t) \in W_2^1(0, T)$  и  $\|\gamma_n'\|_{L_2(0,T)}$  равномерно по  $n$  ограничена.

**Теорема 1.** Пусть функции  $a, a', \varphi$  непрерывны на  $R$ ,  $a \geq \delta > 0$ ,  $\varphi \geq \delta > 0$ ,  $u_0 \in W_2^1(0, 1)$ ,  $u_0(0) = 1$  и  $\sup a''(u)$  ограничен при  $u \leq 2\|u_0\|_{L_2(0,1)}\|u_{0x}\|_{L_2(0,1)}$ . Тогда оператор  $G : C[0, T] \rightarrow C[0, T]$  с областью определения  $W_2^1(0, T)$  непрерывен на  $S$ .

Надо установить, что если  $s_n(t) \in S$  и  $s_n(t) \rightarrow s(t)$  в  $C[0, T]$ , то  $G(s_n(t)) \rightarrow G(s(t))$  в банаховом пространстве  $C[0, T]$ .

Из определения  $\Phi$  и  $B$  легко получить

$$\begin{aligned} & |G(s_n) - G(s)| \\ &= \left| \Phi^{-1}(\alpha - a(0)) \int_0^{s_n(t)} B(u_n(\xi, t; s_n)) d\xi - \Phi^{-1}(\alpha - a(0)) \int_0^{s(t)} B(u(\xi, t; s)) d\xi \right| \\ &\leq \frac{a(0)}{\delta} \left| \int_0^{s_n(t)} B(u_n(\xi, t; s_n)) d\xi - \int_0^{s(t)} B(u(\xi, t; s)) d\xi \right| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{a(0)}{\delta} \left| \int_0^{\gamma_n(t)} B(u_n) d\xi - \int_0^{\gamma_n(t)} B(u) d\xi \right| + \frac{a(0)}{\delta} \left| \int_{\gamma_n(t)}^{s_n(t)} B(u_n) d\xi - \int_{\gamma_n(t)}^{s(t)} B(u) d\xi \right|.$$

В силу равномерной ограниченности  $u_n$ ,  $u$  и непрерывности  $B$  второе слагаемое справа не превосходит

$$c(|s_n(t) - \gamma_n(t)| + |s(t) - \gamma_n(t)|) = c|s_n(t) - s(t)|.$$

Первое слагаемое не превосходит

$$\frac{a(0)}{\delta} \int_0^{\gamma_n(t)} |B(u_n) - B(u)| d\xi \leq \frac{a(0)}{\delta^2} \int_0^{\gamma_n(t)} |u_n - u| d\xi.$$

Поскольку

$$\int_0^{\gamma_n(t)} |u_n - u| d\xi \leq \left( \int_0^{\gamma_n(t)} |u_n - u|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} (1 + b_1 T^{\frac{1}{2}}),$$

теорема 1 будет доказана, если установить, что

$$\max_{t \in [0, T]} \int_0^{\gamma_n(t)} |u_n(\xi, t; s_n) - u(\xi, t; s)|^2 d\xi \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Для этого рассмотрим уравнения для  $u$  и для  $u_n$  в виде (1) в общей области определения  $0 < x < \gamma_n(t)$ ,  $0 < t < T$ , умножим разность этих уравнений на  $u - u_n$  и проинтегрируем по  $\xi$  от 0 до  $\gamma_n(t)$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{\gamma_n(t)} (u(\xi, t; s) - u_n(\xi, t; s_n))_t (u - u_n) d\xi &= \int_0^{\gamma_n(t)} a(u)(u_{xx} - u_{nxx})(u - u_n) d\xi \\ &+ \int_0^{\gamma_n(t)} (a(u) - a(u_n))u_{nxx}(u - u_n) d\xi. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, получим равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{\gamma_n(t)} (u - u_n)^2 d\xi + \int_0^{\gamma_n(t)} a(u)(u_x - u_{nx})^2 d\xi &= \gamma'_n(t) \frac{(u - u_n)^2}{2} \Big|_{x=\gamma_n(t)} \\ &- \int_0^{\gamma_n(t)} a'(u)u_x(u_x - u_{nx})(u - u_n) d\xi + [a(u)(u_x - u_{nx})(u - u_n)] \Big|_{x=\gamma_n(t)} \\ &+ \int_0^{\gamma_n(t)} (a(u) - a(u_n))u_{nxx}(u - u_n) d\xi. \quad (32) \end{aligned}$$

Для дальнейшего заметим, что  $u$  и  $u_n$  удовлетворяют условию Гёльдера по  $x$ :

$$|u(x_1, t) - u(x_2, t)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} u_x(\xi, t) d\xi \right| \leq \left( \int_0^{s(t)} u_x^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} |x_1 - x_2|^{\frac{1}{2}} \leq c_1 |x_1 - x_2|^{\frac{1}{2}}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |u - u_n|_{x=\gamma_n(t)} &= |u(\gamma_n(t), t) - u(s(t), t) + u_n(s_n(t), t) - u_n(s_n(t), t)| \\ &\leq |u(\gamma_n(t), t) - u(s(t), t)| + |u_n(s_n(t), t) - u_n(\gamma_n(t), t)| \\ &\leq c_1 |\gamma_n(t) - s(t)|^{\frac{1}{2}} + c_1 |s_n(t) - \gamma_n(t)|^{\frac{1}{2}} = c_1 |s_n(t) - s(t)|^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$c_a = \frac{1}{2} \max \left( \sup_{0 \leq u \leq 2c_0 c_1} |a''(u)|, \max_{0 \leq u \leq 2c_0 c_1} |a'(u)| \right), \quad \tilde{c}_a = \max_{0 \leq u \leq 2c_0 c_1} a(u).$$

Оценим каждое слагаемое в правой части равенства (32), используя равномерную оценку  $u_n$  и  $u$  через  $2c_0 c_1$  и краевые условия при  $x = s(t)$  и  $x = s_n(t)$ :

$$\left| \gamma'_n(t) \frac{(u - u_n)^2}{2} \right|_{x=\gamma_n(t)} \leq \frac{1}{2} c_1^2 |\gamma'_n(t)| |s_n(t) - s(t)| \leq \delta_n |\gamma'_n(t)|, \quad (33)$$

где  $\delta_n = \frac{1}{2} c_1^2 \max_{t \in [0, T]} |s_n(t) - s(t)| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ;

$$\begin{aligned} - \int_0^{\gamma_n(t)} a'(u) u_x (u_x - u_{nx}) (u - u_n) d\xi &= \frac{1}{2} \int_0^{\gamma_n(t)} (a''(u) u_x^2 + a'(u) u_{xx}) (u - u_n)^2 d\xi \\ - \frac{1}{2} a'(u) u_x (u - u_n)^2|_{x=\gamma_n(t)} &\leq c_a \int_0^{\gamma_n(t)} (u_x^2 + |u_{xx}|) (u - u_n)^2 d\xi + 2c_a \delta_n \int_0^{\gamma_n(t)} |u_{xx}| d\xi \\ &\leq c_a \left[ \left( \int_0^{\gamma_n(t)} u_x^4 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_0^{\gamma_n(t)} u_{xx}^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left( \int_0^{\gamma_n(t)} (u - u_n)^4 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + 2c_a \delta_n \sqrt{\tilde{\gamma}_n} \left( \int_0^{\gamma_n(t)} |u_{xx}|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c_a (2\sqrt{c_1 \tilde{\gamma}_n} + 1) \left( \int_0^{\gamma_n(t)} u_{xx}^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^{\gamma_n(t)} (u - u_n)^4 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + 2c_a \delta_n \sqrt{\tilde{\gamma}_n} \left( \int_0^{\gamma_n(t)} |u_{xx}|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (34) \end{aligned}$$

В последнем неравенстве использовалась оценка (26), а

$$\tilde{\gamma}_n = \max_{0 \leq t \leq T} \gamma_n(t) \leq 1 + \sqrt{T}b_1.$$

Оцениваем третье и четвертое:

$$\begin{aligned} |a(u)(u_x - u_{nx})(u - u_n)|_{x=\gamma_n(t)} &\leq \tilde{c}_a(|u_x| + |u_{nx}|)|_{x=\gamma_n(t)} \sqrt{2\delta_n} \\ &\leq \tilde{c}_a \sqrt{2\delta_n} \left( \left| \int_0^{\gamma_n(t)} u_{xx}(\xi, t) d\xi \right| + \left| \int_0^{\gamma_n(t)} u_{nxx}(\xi, t) d\xi \right| \right) \\ &\leq \tilde{c}_a \sqrt{2\delta_n} \tilde{\gamma}_n \left( \left( \int_0^{\gamma_n(t)} u_{xx}^2(\xi, t) d\xi \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_0^{\gamma_n(t)} u_{nxx}^2(\xi, t) d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \right); \quad (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\gamma_n(t)} (a(u) - a(u_n)) u_{nxx} (u - u_n) d\xi \right| &= \left| \int_0^{\gamma_n(t)} a'(\tilde{u}_n) u_{nxx} (u - u_n)^2 d\xi \right| \\ &\leq c_a \left( \int_0^{\gamma_n(t)} |u_{nxx}|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^{\gamma_n(t)} |u - u_n|^4 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (36) \end{aligned}$$

Оценки интегралов с  $u_{xx}$  и  $u_{nxx}$  в (34) и в (36) одинаковы и основаны на равенстве и неравенстве:

$$\begin{aligned} (u - u_n)^2 &= \int_{\gamma_n(t)}^x \frac{\partial(u - u_n)^2}{\partial \xi} d\xi + (u - u_n)^2|_{x=\gamma_n(t)}, \\ \max_{0 \leq x \leq \gamma_n(t)} |u - u_n| &\leq \sqrt{2} \left( \int_0^{\gamma_n(t)} v_{nx}^2 d\xi \right)^{\frac{1}{4}} \left( \int_0^{\gamma_n(t)} v_n^2 d\xi \right)^{\frac{1}{4}} + \sqrt{2\delta_n}, \quad (37) \end{aligned}$$

где  $v_n = |u - u_n|$ . Используя их и (21), получим, например, для интеграла с  $u_{nxx}$ :

$$\begin{aligned} &\left( \int_0^{\gamma_n(t)} |u_{nxx}|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^{\gamma_n(t)} v_n^4 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left( \int_0^{\gamma_n(t)} |u_{nxx}|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} \left( \int_0^{\gamma_n(t)} v_{nx}^2 d\xi \right)^{\frac{1}{4}} \left( \int_0^{\gamma_n(t)} v_n^2 d\xi \right)^{\frac{3}{4}} \\ &\quad + 2\sqrt{2\delta_n} c_1 \left( \int_0^{\gamma_n(t)} |u_{nxx}|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (38) \end{aligned}$$

Подставим эти оценки в (34) и (36) и проинтегрируем по  $\tau$  от 0 до  $t$  правые части каждого оцененного слагаемого. Получим соответственно для первого

$$\delta_n \left| \int_0^t \gamma'_n(\tau) d\tau \right| \leq 2\delta_n \int_0^t (s'(\tau) + s'_n(\tau)) d\tau \leq 4\delta_n b_1 \sqrt{t}.$$

Здесь использовали представление минимума через срезки функций, дифференцируемость последних [16, леммы 3.3, 3.4], монотонность и принадлежность  $s$  и  $s_n$  классу  $S$  и оценку (31).

Далее учтем равномерную ограниченность  $\tilde{\gamma}_n$  и в дальнейших оценках одной буквой  $c$  будем обозначать различные константы, зависящие только от входных данных задачи. Будем только следить за степенями  $\delta_n$ . Продолжим оценку для проинтегрированного по  $t$  слагаемого (34) (и аналогично в (36)) и учтем (37):

$$\begin{aligned} & c \int_0^t \left( \int_0^{\gamma_n(\tau)} u_{xx}^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^{\gamma_n(\tau)} (u - u_n)^4 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} d\tau + c\delta_n \int_0^t \left( \int_0^{\gamma_n(\tau)} |u_{xx}|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} d\tau \\ & \leq c \int_0^t \left( \int_0^{\gamma_n(\tau)} u_{xx}^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \left( \int_0^{\gamma_n(\tau)} v_{nx}^2 d\xi \right)^{\frac{1}{4}} \left( \int_0^{\gamma_n(\tau)} v_n^2 d\xi \right)^{\frac{1}{4}} + \sqrt{\delta_n} \right] \\ & \quad \times \left( \int_0^{\gamma_n(\tau)} v_n^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} d\tau + c\delta_n \int_0^t \left( \int_0^{\gamma_n(\tau)} u_{xx}^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} d\tau \\ & \leq c \left( \int_0^t \int_0^{\gamma_n(\tau)} |u_{xx}|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^t \left( \int_0^{\gamma_n(\tau)} v_{nx}^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^{\gamma_n(\tau)} v_n^2 d\xi \right)^{\frac{3}{2}} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & + c\sqrt{\delta_n} \left( \int_0^t \int_0^{\gamma_n(\tau)} |u_{xx}|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^t \int_0^{\gamma_n(\tau)} v_n^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \delta_n \sqrt{t} \left( \int_0^t \int_0^{\gamma_n(\tau)} u_{xx}^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq c \left( \int_0^t \left( \int_0^{\gamma_n(\tau)} v_{nx}^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^{\gamma_n(\tau)} v_n^2 d\xi \right)^{\frac{3}{2}} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + c\sqrt{\delta_n}. \end{aligned}$$

Здесь использована ограниченность интегралов от  $u_{xx}^2 v_n^2$ .

Аналогично интеграл по  $t$  от оценки третьего слагаемого в (35) даст оценку

$$c\sqrt{\delta_n} \left[ \left( \int_0^t \int_0^{\gamma_n(\tau)} u_{nxx}^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_0^t \int_0^{\gamma_n(\tau)} u_{xx}^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right] \leq c\sqrt{\delta_n}.$$

Интегрирование (32) по  $t$  и использование полученных оценок дает

$$\int_0^{\gamma_n(t)} |u - u_n|^2 d\xi + 2 \int_0^t \int_0^{\gamma_n(\tau)} a(u) |u_x - u_{nx}|^2 d\xi d\tau$$

$$\begin{aligned}
&\leq c \left( \int_0^t \left( \int_0^{\gamma_n(\tau)} |u_x - u_{nx}|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^{\gamma_n(\tau)} |u - u_n|^2 d\xi \right)^{\frac{3}{2}} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + c\sqrt{\delta_n} \\
&\leq c \left( \int_0^t \int_0^{\gamma_n(\tau)} |u_x - u_{nx}|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{4}} \left( \int_0^t \left( \int_0^{\gamma_n(\tau)} |u - u_n|^2 d\xi \right)^3 d\tau \right)^{\frac{1}{4}} + c\sqrt{\delta_n}.
\end{aligned}$$

Воспользуемся неравенством с  $\varepsilon$ :

$$ab \leq \varepsilon a^4 + \frac{3}{4} \left( \frac{1}{4\varepsilon} \right)^{\frac{1}{3}} b^{\frac{4}{3}},$$

и продолжим, оценивая произведение под интегралом по  $t$ :

$$\leq c\varepsilon \int_0^t \int_0^{\gamma_n(\tau)} |u_x - u_{nx}|^2 d\xi d\tau + c(\varepsilon) \left( \int_0^t \left( \int_0^{\gamma_n(\tau)} |u - u_n|^2 d\xi \right)^3 d\tau \right)^{\frac{1}{3}} + c\sqrt{\delta_n}.$$

Так как  $a(u) > \delta$ , выбрав  $\varepsilon = \varepsilon_0$  такое, что  $c\varepsilon_0 < \delta$ , получим неравенство

$$\int_0^{\gamma_n(t)} |u - u_n|^2 d\xi \leq c(\varepsilon_0) \left( \int_0^t \left( \int_0^{\gamma_n(\tau)} |u - u_n|^2 d\xi \right)^3 d\tau \right)^{\frac{1}{3}} + c\sqrt{\delta_n}. \quad (39)$$

Возведение в куб дает

$$\left( \int_0^{\gamma_n(t)} |u - u_n|^2 d\xi \right)^3 \leq \tilde{c}(\varepsilon_0) \int_0^t \left( \int_0^{\gamma_n(\tau)} |u - u_n|^2 d\xi \right)^3 d\tau + \tilde{c}(\delta_n)^{\frac{3}{2}}.$$

Из неравенства Гронуолла с  $\tilde{c}_0 = \tilde{c}(\varepsilon_0)$  следует, что

$$\int_0^{\gamma_n(t)} |u - u_n|^2 d\xi \leq \tilde{c}^{\frac{1}{3}} \exp\left(\frac{\tilde{c}_0 T}{3}\right) (\delta_n)^{\frac{1}{2}}.$$

Окончательно получаем, что

$$\max_{t \in [0, T]} \int_0^{\gamma_n(t)} |u - u_n|^2 d\xi \leq c \max_{t \in [0, T]} |s(t) - s_n(t)|^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0. \quad (40)$$

Теорема 1 доказана.

Обозначим  $1 + \sqrt{T}b_1 = b_2$ ,  $\tilde{Q}_T = [0, T] \times [0, b_2]$ , где  $b_2$  — величина, которую не может превысить ни одна из функций  $s(t)$  класса  $S$ . Тогда соответствующие решения задачи (14)  $u(x, t; s)$ , продолженные нулем за кривую  $x = s(t)$ , будут принадлежать пространству  $L_\infty(0, T; W_2^1(0, b_2)) \cap C^{\frac{1}{4}}(\tilde{Q}_T)$ . Указанные продолжения обозначим через  $U = U(x, t; s)$ ,  $U_n = U(x, t; s_n)$ .

**Следствие 1.** При предположениях теоремы оператор, ставящий в соответствие каждой функции  $s(t) \in S$  решение краевой задачи (14), непрерывен как оператор из  $C[0, T]$  в  $C[\tilde{Q}_T]$ . При этом имеет место квалифицированная непрерывность:

$$\|U - U_n\|_{C(\tilde{Q}_T)} \leq c \|s - s_n\|_{C[0, T]}^{\frac{1}{8}}. \quad (41)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** При  $x \leq \gamma_n(t)$  имеем  $U = u$ ,  $U_n = u_n$  и используя (40) получим

$$\begin{aligned} |u - u_n| &= \left( \int_{\gamma_n(t)}^x \frac{\partial(u - u_n)^2}{\partial \xi} d\xi + (u - u_n)^2|_{x=\gamma_n(t)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left( 2 \left( \int_0^{\gamma_n(t)} (u_x - u_{nx})^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^{\gamma_n(t)} (u - u_n)^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} + c|s - s_n| \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (c\|s - s_n\|_{C[0, T]}^{\frac{1}{4}} + c|s - s_n|^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \leq c\|s - s_n\|_{C[0, T]}^{\frac{1}{8}}. \end{aligned}$$

При  $\gamma_n(t) \leq x \leq j_n(t) = \max(s_n(t), s(t))$  выводим, используя граничные условия и гёльдеровость по  $x$  порядка  $\frac{1}{2}$ :

$$\begin{aligned} |U - U_n| &= |U(x, t; s) - U(s(t), t) + U_n(s_n(t), t) - U_n(x, t; s_n)| \\ &\leq |U(x, t; s) - U(s(t), t)| + |U_n(s_n(t), t) - U_n(x, t; s_n)| \leq c(|x - s(t)|^{\frac{1}{2}} + |x - s_n(t)|^{\frac{1}{2}}) \\ &= c|s(t) - s_n(t)|^{\frac{1}{2}} \leq c\|s(t) - s_n(t)\|_{C[0, T]}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Из полученных неравенств для каждой из областей получаем утверждение следствия 1.

**Следствие 2.** При предположениях теоремы 1 краевая задача (14) с заданной правой границей  $s(t)$  класса  $W_2^1(0, T)$  в пространстве  $L_\infty(0, T; W_2^1(0, s(t))) \cap L_2(0, T; W_2^2(0, s(t)))$  имеет единственное решение.

Действительно, предположив, что для одной и той же  $s(t)$  при одном и том же начальном условии  $u_0(x)$  задача имеет два решения из неравенства (40) (или (41)) получим единственность.

Полученные выше результаты позволяют обосновать важное для задачи Стефана свойство.

**Теорема 2.** При предположениях теоремы 1 оператор  $G$  имеет в множестве  $S$  неподвижную точку.

Действительно, мы доказали, что оператор  $G$  с областью определения  $W_2^1(0, T)$  является непрерывным в банаховом пространстве  $C[0, T]$  и переводит ограниченное замкнутое выпуклое множество  $S$  в себя. А так как  $S$  компактно в  $C[0, T]$ , то он вполне непрерывен на  $S$ . По теореме Шаудера он имеет неподвижную точку в  $S$ , т. е. для этого  $s(t)$  выполнено (28).

Построив по  $s(t)$  соответствующее решение задачи (14)  $u(x, t; s)$ , получим пару функций  $u, s$ , являющуюся решением рассматриваемой задачи (1)–(4), (10). Таким образом, установлена

**Теорема 3.** При предположениях теоремы 1 задача Стефана (1)–(4), (10) имеет решение из класса  $u \in L_\infty(0, T; W_2^1(0, s(t))) \cap L_2(0, T; W_2^2(0, s(t)))$ ,  $s \in W_2^1(0, T)$ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Из оценки (26) и равенства (30) видно, что фактически найденная функция  $s(t)$  принадлежит  $W_4^1(0, T)$ . Это было упомянуто в преамбуле. Поэтому  $s(t) \in C^{\frac{3}{4}}[0, T]$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Бородин М. А. Задача Стефана // Укр. мат. вісник. 2011. Т. 8, № 1. С. 17–54.
2. Мейрманов А. М., Гальцева О. А., Сельдемиров В. Е. О существовании обобщенного решения в целом по времени одной задачи со свободной границей // Мат. заметки. 2020. Т. 107, № 2. С. 229–240.
3. Bollati J., Tarzia A. D. One-phase Stefan problem with a latent heat depending on the position of the free boundary and its rate of change // Electron. J. Differ. Equ. 2018. V. 2018, N 10. P. 1–12.
4. Белых В. Н. Корректность одной нестационарной осесимметричной задачи гидродинамики со свободной поверхностью // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 4. С. 728–744.
5. Тахиров Ж. О., Тураев Р. Н. Нелокальная задача Стефана для квазилинейного параболического уравнения // Вестн. Сам. гос. тех. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2012. Т. 28, № 3. С. 8–16.
6. Bollati J., Tarzia D. A. Explicit solution for Stefan problem with latent heat depending on the position and a convective boundary condition at the fixed face using Kummer functions // arxiv.org/abs/1610.09338 [math.AP]. 2016.
7. Ли Ф., Лу Д. Распространение решений для уравнения диффузии реакции со свободными границами в периодической среде // Электрон. журн. Дифференц. уравнения. 2018. № 185. С. 1–12.
8. Tarzia D. A. A bibliography on moving-free boundary problems for the heat-diffusion equation. The Stefan and related problems // MAT. Serie A. 2000. N 2. P. 1–297.
9. Подгаев А. Г., Кулеш Т. Д. Теоремы компактности для задач с неизвестной границей // Дальневост. мат. журн. 2021. Т. 21, № 1. С. 105–112.
10. Подгаев А. Г. Об относительной компактности множества абстрактных функций из шкалы банаховых пространств // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 2. С. 135–137.
11. Подгаев А. Г. Разрешимость осесимметричной задачи для нелинейного параболического уравнения в областях с нецилиндрической или неизвестной границей. I // Челяб. физ.-мат. журн. 2020. Т. 5, № 1. С. 44–55.
12. Подгаев А. Г., Син А. З. Об одном обобщении леммы Вишика — Дубинского и неравенства Гронуолла // Уч. заметки ТОГУ. 2013. № 4. С. 2113–2118.
13. Подгаев А. Г., Лисенков К. В. Разрешимость квазилинейного параболического уравнения в области с кусочно-монотонной границей // Дальневост. мат. журн. 2013. Т. 13, № 2. С. 250–272.
14. Подгаев А. Г., Прудников В. Я., Кулеш Т. Д. Глобальная разрешимость трехмерной осесимметричной задачи Стефана для квазилинейного уравнения // Дальневост. мат. журн. 2022. Т. 22, № 1. С. 61–75.
15. Podgaev A. G. On relative compactness set of abstract Function from scale of the Banach spaces // Functional Analysis, Approximation Theory and Numerical Analysis. Singapore: Word Sci. Publ. Co., 1994. P. 219–236.
16. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.



- 
17. Meirmanov A. M. The Stefan problem. Berlin: Walter de Gruyter, 1992.

*Поступила в редакцию 24 мая 2024 г.*

*После доработки 12 августа 2025 г.*

*Принята к публикации 29 августа 2025 г.*

Подгаев Александр Григорьевич  
Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН,  
ул. Серышева, 60, Хабаровск 680038;  
Тихоокеанский государственный университет,  
ул. Тихоокеанская, 136, Хабаровск 680035  
000210@togudv.ru

Кулеш Тимофей Дмитриевич  
Тихоокеанский государственный университет,  
ул. Тихоокеанская, 136, Хабаровск 680035  
2015302323@togudv.ru

INVESTIGATION OF SOLVABILITY OF THE  
STEFAN PROBLEM FOR THE CASE OF  
COMPLEX STRUCTURE OF MATTER  
A. G. Podgaev and T. D. Kulesh

**Abstract:** Using compactness methods for functions from the scale of Banach spaces, we prove the solvability of the problem with nonlinear latent heat of matter fusion in Stefan's condition. An initial boundary value problem in a non-cylindrical domain with a given curved boundary of class  $W_2^1$  is preliminarily investigated, for which we obtain uniform estimates necessary for the main problem. Then we consider a problem in which the coefficient of the latent specific heat of fusion in the condition on the unknown boundary is a function of the size of the thawing zone  $s(t)$ . This technique can also be applied to more general equations. The studied problem describes the processes of transition of matter from one state to another. As a result, the regular global in time solvability of the one-phase Stefan problem for the nonlinear parabolic equation is established. The initial data belong only to the class  $W_2^1$ , while the phase transition boundary defined together with the solution belongs to  $W_4^1$ .

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-3-61-81

**Keywords:** Stefan problem, relative compactness, non-cylindrical domain, unknown boundary.

REFERENCES

1. Borodin A. M., "Stefan's problem [in Russian]," *Ukr. Mat. Vestn.*, **8**, No. 1, 17–54 (2011).
2. Meyrmanov A. M., Galtseva O. A., and Seldemirov V. E., "On the existence of a generalized time-based solution to a single problem with a free boundary [in Russian]," *Mat. Zametki*, **107**, No. 2, 229–240 (2020).
3. Bollati J. and Tarzia A. D., "One-phase Stefan problem with a latent heat depending on the position of the free boundary and its rate of change," *Electron. J. Differ. Equ.*, **2018**, No. 10, 1–12 (2018).
4. Belykh V. N., "The correctness of a single unsteady axisymmetric hydrodynamic problem with a free surface [in Russian]," *Sib. Mat. J.*, **58**, No. 4, 728–744 (2017).
5. Takhirov Zh. O. and Turaev R. N., "The non-local Stefan problem for a quasi-linear parabolic equation [in Russian]," *Vestn. Sam. Gos. Tekh. Univ.*, **28**, No. 3, 8–16 (2012).
6. Bollati J. and Tarzia A. D., "Explicit solution for Stefan problem with latent heat depending on the position and a convective boundary condition at the fixed face using Kummer functions," *arXiv:1610.09338 [math.AP]* (2016).
7. Lee F. and Lu D., "Propagation of solutions for the diffusion equation of a free-boundary reaction in a periodic medium," *Electron. J. Differ. Equ.*, No. 185, 1–12 (2018).
8. Tarzia A. D., "A bibliography on moving-free boundary problems for the heat-diffusion equation. The Stefan and related problems," *MAT. Serie A*, No. 2, 1–297 (2000).
9. Podgaev A. G. and Kulesh T. D., "Compactness theorems for problems with unknown boundary [in Russian]," *Dalnevost. Mat. Zh.*, **21**, No. 1, 105–112 (2021).

10. Podgaev A. G., "On the relative compactness of a set of abstract functions from the scale of Banach spaces [in Russian]," *Sib. Mat. J.*, **34**, No. 2, 135–137 (1993).
11. Podgaev A. G., "Solvability of an axisymmetric problem for a nonlinear parabolic equation in regions with a non-cylindrical or unknown boundary. I [in Russian]," *Chelyab. Fiz.-Mat. Zh.*, **5**, No. 1, 44–55 (2020).
12. Podgaev A. G. and Sin A. Z., "A generalization of the Vishik–Dubinsky lemma and the Gronwall inequality [in Russian]," *Uch. Zametki TOGU*, No. 4, 2113–2118 (2013).
13. Podgaev A. G. and Lisenkov K. V., "Solvability of a quasi-linear parabolic equation in a domain with a piecewise monotonic boundary [in Russian]," *Dalnevost. Mat. Zh.*, **13**, No. 2, 250–272 (2013).
14. Podgaev A. G., Prudnikov V. Ya., and Kulesh T. D., "Global solvability of the three-dimensional axisymmetric Stefan problem for a quasi-linear equation [in Russian]," *Dalnevost. Mat. Zh.*, **22**, No. 1, 61–75 (2022).
15. Podgaev A. G., "On relative compactness set of abstract function from scale of the Banach spaces," in: *Functional Analysis, Approximation Theory and Numerical Analysis*, pp. 219–236, World Sci. Publ. Co, Singapore (1994).
17. Ladyzhenskaya O. A. and Uraltseva N. N., *Linear and Quasilinear Elliptic Type Equations* [in Russian], Nauka, Moscow (1973).
18. Meirmanov A. M., *The Stefan Problem*, Walter de Gruyter, Berlin (1992).

*Submitted May 24, 2024*

*Revised August 12, 2025*

*Accepted August 29, 2025*

Aleksandr G. Podgaev

Khabarovsk branch of the Institute of Applied Mathematics,  
Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences,  
60 Seryshev Street, Khabarovsk 680038, Russia; Pacific State University,  
136 Tikhookeanskaya Street, Khabarovsk 680035, Russia  
000210@togudv.ru

Timofey D. Kulesh

Pacific State University,  
136 Tikhookeanskaya Street, Khabarovsk 680035, Russia  
2015302323@togudv.ru

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛООБМЕНА ПО ГРАНИЧНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ ДАННЫМ

О. А. Солдатов

**Аннотация.** Рассматриваются вопросы корректности в пространствах Соболева обратных задач определения коэффициента теплопередачи по набору интегралов по границе этой области. Показано, что при определенных условиях на данные решение задачи существует локально по времени, единственно и непрерывно зависит от данных задачи. Метод является конструктивным и на основе предложенного подхода возможно построение численных методов решения задачи. Доказательство использует априорные оценки и теорему о неподвижной точке.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-3-82-94

**Ключевые слова:** параболическое уравнение, коэффициент теплопередачи, обратная задача, существование, единственность.

### Введение

Рассматривается параболическое уравнение второго порядка вида

$$Mu = u_t - Lu = f(x, t), \quad (x, t) \in Q = G \times (0, T), \quad (1)$$

где

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} - a_0 u,$$

$G \subset \mathbb{R}^n$  — ограниченная область с границей  $\Gamma$ ,  $S = (0, T) \times \Gamma$ . Уравнение (1) дополняется начально-краевыми условиями

$$Ru|_S = g, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (2)$$

где

$$Ru = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \nu_i \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sigma_0(x, t)(u - \bar{u}),$$

$\vec{\nu}$  — единичный вектор внешней нормали и  $\bar{u}$  — заданная функция. Коэффициент  $\sigma_0$  в (2) имеет вид

$$\sigma_0 = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) \Phi_i(t, x),$$

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда и правительства Ханты-Мансийского автономного округа-ЮГРЫ (грант № 25-11-20026).

где функции  $\alpha_i$  подлежат определению, а функции  $\{\Phi_i\}$  известны и по сути это некоторый базис. Условия на них сформулируем ниже. Условия для определения этих функций имеют вид

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial N} \varphi_j(x) d\Gamma = \psi_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, r. \quad (3)$$

Задача состоит в нахождении решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2), (3), и функций  $\{\alpha_i(t)\}$ .

Обратные задачи об определении граничных режимов встречаются в разных областях математической физики, в частности, при моделировании процессов теплообмена на поверхностях твердых тел, оценки термического состояния мерзлых грунтов в задачах геокриологии, моделирования свойств и тепловых режимов композитных материалов (см. [1–3]). Основное внимание уделено доказательству корректности конкретных прикладных задач. Наиболее часто в приложениях встречаются задачи с точечным условием переопределения, т. е. с условием вида  $u(t, b_i) = \psi_j$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ . Теорема существования и единственности решений таких задач в классах Соболева была получена, например, в [4] и многих других работах. Следует отметить известные работы [5, 6], где в модельном случае была получена теорема единственности классических решений об определении коэффициента теплопередачи вида  $\sigma(t)$  как по точечному условию вида  $u(t, x_0) = \alpha(t)$ , так и по интегральному условию вида

$$\int_{\Gamma_0} u(t, x) \varphi_i(x) d\Gamma_0 = \psi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Точечное условие переопределения используется в работе [7] в случае  $n = 1$  в задаче определения коэффициента  $\sigma(t)$  в граничном условии вида

$$-u_x + \sigma(t)u(t, 0) = f_1, \quad -u_x + \sigma(t)u(t, 1) = f_2, \quad x \in (0, 1), \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Интегральные условия переопределения вида

$$\int_{\Gamma} u(t, x) \varphi_i(x) d\Gamma = \psi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

могут быть использованы как некоторые приближения точечных условий переопределения (это отмечается в [8, 9]), в том числе и при построении численного решения задачи. В одномерном случае интегральные условия вида

$$\int_{\Gamma} u(t, x) \varphi_i(x) d\Gamma = \psi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

заменялись другими условиями, в частности, в работе [10] (граничные условия имеют вид (4)) условием вида  $\gamma_0 u(t, 0) + \gamma_1 u(1, t) = \beta(t)$ , а в [11] — условием вида  $u^2(t, 0) + u^2(1, t) = \beta(t)$ . Также известны случаи, когда возникали задачи с нелинейными условиями вида

$$Bu = \frac{\partial u}{\partial N} + \sigma(t)g(u),$$

где определению подлежит функция  $\sigma(t)$  и часто условия переопределения вида

$$\int_{\Gamma} u(t, x) \varphi_i(x) d\Gamma = \psi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

заменялись нелинейными вида

$$\int_{\Gamma} F(u) d\Gamma = \psi(t), \quad F(u) = \int_0^u g(\xi) d\xi$$

(см. [12]) или вида  $F(u)(0, t) + F(u)(1, t) = E(t)$  в случае  $n = 1$  (см. [13]). Стоит также отметить работы [8, 9, 14–17], где граничное условие представлено в виде

$$Bu = \frac{\partial u}{\partial N} + g(u),$$

условие переопределения в виде

$$F(u) = \int_0^u g(\xi) d\xi = \psi(t),$$

а определению подлежит функция  $g$ . Довольно полную библиографию можно найти в работе [9]. Стандартный подход к задачам, близким к задаче (1)–(3), состоит в том, что задача сводится к задаче управления и минимизация соответствующего функционала осуществляется в классах знакоопределенных функций  $\sigma_0$ . Например, в работе [8], условие переопределения есть интеграл от решения, умноженного на некоторую весовую функцию  $\omega$ . В этом случае полученные оценки позволяют осуществить предельный переход и показать разрешимость задачи управления. Однако эта задача не эквивалентна исходной обратной задаче. Единственной работой, где в случае интегральных условий переопределения вида

$$\int_{\Gamma_0} u(t, x) \varphi_i(x) d\Gamma_0 = \psi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

(линейных или нелинейных) есть эквивалентность и разрешимость обратной задачи показана, является работа [13], в которой  $n = 1$  и интеграл по границе заменяется суммой  $F(u(0, t)) + F(u(l, t)) = E(t)$  ( $x \in (0, l)$ ,  $t > 0$ ). Условия вида (3), где интеграл берется не по части границы, а по области  $G$ , были рассмотрены в [18, 19], где восстанавливалась функция  $g$ , а не коэффициент теплопередачи  $\sigma_0$ . Вопросы корректности задачи определения коэффициента  $\sigma_0$  по дополнительным данным в виде наборов интегралов от решения по области  $G$  были рассмотрены в [4]. Условие переопределения вида (3) используется в [20], где рассмотрены вопросы существования и единственности решений обратных задач об определении младших коэффициентов в параболической системе уравнений. По всей видимости, ранее теорем существования и единственности решений для задачи (1)–(3) об определении коэффициента теплопередачи не было. В данной работе при определенных условиях на данные показана корректность задачи (1)–(3) в пространствах Соболева.

### 1. Определения и вспомогательные результаты

Пусть  $E$  — банахово пространство. Через  $L_p(G; E)$  ( $G$  — область в  $\mathbb{R}^n$ ) обозначается пространство измеримых функций, определенных на  $G$ , со значениями в  $E$ , снабженное конечной нормой  $\| \|u(x)\|_E \|_{L_p(G)}$  [21]. Обозначения для пространств Соболева  $W_p^s(G; E)$ ,  $W_p^s(Q; E)$  и т. д. стандартные (см. [21, 22]). Если  $E = \mathbb{C}$  или  $E = \mathbb{C}^n$ , то последнее пространство обозначаем просто через  $W_p^s(Q)$ . Таким образом, включение  $u \in W_p^s(G)$  для данной вектор-функции  $u = (u_1, u_2, \dots, u_k)$  означает, что каждая из компонент  $u_i$  принадлежит пространству  $W_p^s(G)$ . В этом случае под нормой вектора понимаем сумму норм координат. Для данного интервала  $J = (0, T)$  положим  $W_p^{s,r}(Q) = W_p^s(J; L_p(G)) \cap L_p(J; W_p^r(G))$ . Пусть  $\Gamma$  — гладкая поверхность размерности  $n-1$  и  $S = (0, T) \times \Gamma$ . Тогда соответственно  $W_p^{s,r}(S) = W_p^s(J; L_p(\Gamma)) \cap L_p(J; W_p^r(\Gamma))$ . Определения пространств Гёльдера  $C^{\alpha,\beta}(\overline{Q})$ ,  $C^{\alpha,\beta}(\overline{S})$  могут быть найдены, например, в [23]. Пусть  $(u, v) = \int_G u(x)v(x)dx$ . Все пространства и коэффициенты уравнений предполагаются вещественными.

Положим  $Q_\gamma = (0, \gamma) \times G$ ,  $Q_{\alpha,\beta} = (\alpha, \beta) \times G$ ,  $S_\gamma = (0, \gamma) \times \partial G$ . Далее считаем, что  $\Gamma \in C^2$ . Будем использовать в пространстве  $W_p^s(\alpha, \beta; E)$  ( $s \in (0, 1)$ ,  $E$  — банахово пространство) норму

$$\|q(t)\|_{W_p^s(\alpha,\beta;E)} = (\|q\|_{L_p(\alpha,\beta;E)}^p + \langle q \rangle_{s,p}^p)^{1/p},$$

$$\langle q \rangle_{s,p}^p = \int_\alpha^\beta \int_\alpha^\beta \frac{\|q(t_1) - q(t_2)\|_E^p}{|t_1 - t_2|^{1+sp}} dt_1 dt_2.$$

Если  $E = \mathbb{C}$ , то получим обычное пространство  $W_p^s(\alpha, \beta)$ . При  $s \in (0, 1)$  положим

$$\widetilde{W}_p^s(\alpha, \beta; E) = \{q \in W_p^s(\alpha, \beta; E) : (t - \alpha)^{-s} q(t) \in L_p(\alpha, \beta; E)\}.$$

Это банахово пространство с нормой

$$\|q(t)\|_{\widetilde{W}_p^s(\alpha,\beta;E)}^p = \left\| \frac{q}{(t - \alpha)^s} \right\|_{L_p(\alpha,\beta;E)}^p + \langle q \rangle_{s,p}^p.$$

Если  $s > 1/p$ , то все функции  $q$  из этого пространства обладают тем свойством, что  $q(\alpha) = 0$  и при  $s \neq 1/p$  эта норма и обычная норма  $\|\cdot\|_{W_p^s(\alpha,\beta;E)}$  эквивалентны для функций  $q(t)$  таких, что  $q(\alpha) = 0$ , если  $s > 1/p$  (см., например, лемму 1 п. 3.2.6 в [21]). Пространства

$$\widetilde{W}_p^s(\alpha, \beta; L_p(G)), \quad \widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_{\alpha,\beta}) = \widetilde{W}_p^s(\alpha, \beta; L_p(G)) \cap L_p(\alpha, \beta; W_p^{2s}(G))$$

при  $s \neq 1/p$  состоят из функций  $v(t, x)$  из  $W_p^s(\alpha, \beta; L_p(G))$  и  $W_p^{s,2s}(Q_{\alpha,\beta})$  соответственно таких, что  $v(\alpha, x) = 0$ , если  $s > 1/p$ . Нормы  $\|\cdot\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_{\alpha,\beta})}$ ,

$\|\cdot\|_{\widetilde{W}_p^s(\alpha, \beta; L_p(G))}$  определяются естественным образом с использованием вышеприведенной нормы в  $\widetilde{W}_p^s(\alpha, \beta; E)$ . Имеем

$$\begin{aligned} \|u\|_{\widetilde{W}_p^{s, 2s}(Q_{\alpha, \beta})}^p &= \left( \int_G \int_{\alpha}^{\beta} \frac{|u(x, t)|^p}{(t - \alpha)^{sp}} dt dx \right. \\ &\quad \left. + \int_G \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{|u(x, t) - u(x, \tau)|^p}{|t - \tau|^{1+sp}} dt d\tau dx + \|u\|_{L_p(\alpha, \beta; W_p^{2s}(G))}^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Аналогично определяем пространства  $\widetilde{W}_p^s(\alpha, \beta; L_p(\Gamma))$ ,  $\widetilde{W}_p^{s, 2s}(S_\gamma)$ . Далее во всем тексте, если не оговорено противное, считаем, что  $\Gamma \in C^2$  и  $p > n + 2$ . Такой выбор параметра  $p$  связан с тем, что все формулировки и доказательства значительно упрощаются, другие значения параметра  $p \in (1, \infty)$  вполне допустимы и результаты имеют место.

**Лемма 1** [24, лемма 2]. Существует постоянная  $C$ , не зависящая от  $\phi \in (0, T]$ , такая, что

$$\begin{aligned} \|v\|_{\widetilde{W}_p^{s_1, 2s_1}(S_\phi)} &\leq C \|v\|_{W_p^{1, 2}(Q_\phi)}, \quad s_1 = 1 - 1/2p, \\ \left\| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\phi)} &\leq C \|v\|_{W_p^{1, 2}(Q_\phi)}, \quad s_0 = 1/2 - 1/2p, \end{aligned} \quad (5)$$

для всех  $v \in W_p^{1, 2}(Q_\phi)$  таких, что  $v(0, x) = 0$ . Здесь  $\frac{\partial v}{\partial \nu}$  — производная по внешней нормали к  $S_\phi$ .

**Лемма 2** [25, лемма 2]. Пусть  $s \in ((n + 2)/2p, 1)$ . Тогда справедливы следующие утверждения. Произведение  $q \cdot v$  функций класса  $W_p^{s, 2s}(Q_\phi)$  ( $\tau \in (0, T]$ ) принадлежит  $W_p^{s, 2s}(Q_\phi)$ , а если  $q \in \widetilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\phi)$  и  $v \in W_p^{s, 2s}(Q_\phi)$ , то  $qv \in \widetilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\phi)$  и справедлива оценка

$$\|qv\|_{\widetilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\phi)} \leq c_0 \|q\|_{\widetilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\phi)} (\|v\|_{W_p^{s, 2s}(Q_\phi)} + \|v\|_{L_\infty(Q_\phi)}).$$

Если  $v \in W_p^{s, 2s}(Q)$ , то последнее неравенство можно переписать в виде

$$\|qv\|_{\widetilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\phi)} \leq c_1 \|q\|_{\widetilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\phi)} \|v\|_{W_p^{s, 2s}(Q)},$$

а если  $v \in \widetilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\phi)$ , то в виде

$$\|qv\|_{\widetilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\phi)} \leq c_2 \|q\|_{\widetilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\phi)} \|v\|_{\widetilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\phi)},$$

где постоянные  $c_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , не зависят от  $q, v$  и  $\phi \in (0, T]$ . Множество  $Q_\phi$  в этих утверждениях может быть заменено на  $S_\phi$  (в этом случае считаем, что  $1 > s > (n + 1)/2p$ ). Если  $q$  зависит только от одной переменной  $t$ , то норма  $q$  в  $\widetilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\phi)$  в этих неравенствах заменяется нормой  $q$  в  $\widetilde{W}_p^s(0, \phi)$ .

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$Mu = u_t - Lu = f, \quad Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} - \sum_{i,j=1}^n a_i u_{x_i} - a_0 u; \quad (6)$$



$$Ru|_S = g, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (7)$$

где

$$Ru = \frac{\partial u}{\partial N}(t, x) + \sigma_0(x, t)(u - \bar{u}), \quad \frac{\partial u}{\partial N}(t, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \nu_i \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

и  $\bar{u}(t, x)$  — некоторая заданная функция. Считаем, что

$$a_{ij} \in C(\bar{G}), \quad a_{ij}|_S \in W_p^{s_0, 2s_0}(S), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad p > n + 2; \quad (8)$$

$$u_0(x) \in W_p^{2-2/p}(G), \quad f \in L_p(Q), \quad \bar{u}, g \in W_p^{s_0, 2s_0}(S), \quad a_k \in L_p(Q), \quad k = 0, \dots, n. \quad (9)$$

Матрица  $\{a_{ij}\}$  симметрична и найдется постоянная  $\delta_0 > 0$  такая, что

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \delta_0 |\vec{\xi}|^2 \quad \forall \vec{\xi} \in \mathbb{R}^n, \quad (t, x) \in Q.$$

Будем искать решение задачи (6), (7), т. е. функцию  $u$ , в классе  $u \in W_p^{1,2}(Q)$ . Запишем условия согласования:

$$Ru_0(x)|_\Gamma = g(0, x). \quad (10)$$

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия (8)–(10) и  $\sigma_0 \in W_p^{s_0, 2s_0}(S)$ . Тогда существует единственное решение  $u$  задачи (6), (7) такое, что  $u \in W_p^{1,2}(Q)$ . Решение удовлетворяет оценке

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q)} \leq c(\|f\|_{L_p(Q)} + \|g\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S)} + \|\bar{u}\|_{W_p^{s_0, 2s_2}(S)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G)}).$$

Если  $u_0 = 0$ ,  $\bar{u} = 0$ , то на любом промежутке  $(0, \tau)$  ( $\tau \leq T$ ) решение удовлетворяет оценке

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau)} \leq c(\|f\|_{L_p(Q_\tau)} + \|g\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)}),$$

где постоянная  $c$  не зависит от  $\tau \in (0, T]$  и  $f, g$ .

Утверждение теоремы 1 вытекает из теоремы 1 работы [4].

## 2. Основные результаты

Считаем, что выполнены условия

$$\Phi_i \in W_p^{s_0, 2s_0}(S), \quad (11)$$

$$\int_\Gamma \frac{\partial u_0}{\partial N} \varphi_i d\Gamma = \psi_j(0), \quad \psi_j(t) \in W_p^{s_0}(0, T), \quad j = 1, 2, \dots, r. \quad (12)$$

Пусть  $B_0$  — матрица с элементами

$$\phi_{ij} = \int_\Gamma \Phi_j(0, x)(u_0 - \bar{u})(0, x) \varphi_i(x) d\Gamma, \quad i, j = 1, 2, \dots, r,$$

причем

$$|\det B_0| > 0, \quad \varphi_k \in L_{p'}(\Gamma), \quad k = 1, \dots, r, \quad p' = p/(p-1). \quad (13)$$

Рассмотрим граничное условие (7)  $Ru|_S = g(t, x)$ . Умножим это равенство, взятое в точке  $t = 0$ , на  $\varphi_j(x)$  и проинтегрируем по  $\Gamma$ . Получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \alpha_i(0) \int_{\Gamma} \Phi_i(0, x)(u_0 - \bar{u})(0, x) \varphi_j(x) d\Gamma \\ = - \int_{\Gamma} \frac{\partial u_0}{\partial N}(0, x) \varphi_j(x) d\Gamma + \int_{\Gamma} g(0, x) \varphi_j(x) d\Gamma, \quad j \leq r. \end{aligned}$$

В силу условия (13) система имеет единственное решение и можем записать  $\vec{\alpha}(0) = B_0^{-1} \vec{F}_0$ , где  $\vec{F}_0 = (F_{01}, \dots, F_{0r})^T$ ,  $\vec{\alpha}(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_r(t))^T$  и

$$F_{0j} = \int_{\Gamma} g(0, x) \varphi_j d\Gamma - \psi_j(0).$$

Таким образом, если решаем обратную задачу (1)–(3), то данные задачи позволяют однозначно определить  $\vec{\alpha}(0)$ . Тогда условия согласования при  $t = 0$ ,  $x \in \Gamma$  записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial N}(0, x) + \sigma_0(0, x)(u_0 - \bar{u})(0, x) = g(0, x) \quad (x \in \Gamma), \\ \sigma_0(0, x) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(0) \Phi_i(0, x). \end{aligned} \quad (14)$$

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия (8), (9), (11)–(14). Тогда найдется число  $\gamma_0$  такое, что на промежутке  $[0, \gamma_0]$  существует единственное решение задачи (1)–(3) такое, что  $u \in W_p^{1,2}(Q_{\gamma_0})$ ,  $\alpha_i \in W_p^{s_0, 2s_0}(0, \gamma_0)$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем задачу к более простому виду. Положим

$$\beta = \sum_{i=1}^r \beta_i \Phi_i, \quad \tilde{\sigma}_0 = \sum_{i=1}^r \alpha_i(0) \Phi_i(t, x), \quad \beta_i = \alpha_i(t) - \alpha_i(0).$$

Используя теорему 1, построим решение  $v$  задачи (6), (7), где возьмем в качестве функции  $\sigma_0$  функцию  $\tilde{\sigma}_0$ . Тогда функция  $w = u - v$  есть решение задачи

$$Mw = w_t - Lw = 0, \quad w|_{t=0} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial w}{\partial N} + \tilde{\sigma}_0 w|_S = -(\beta w + \beta(v - \bar{u}))|_S, \quad (16)$$

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial w(t, x)}{\partial N} \varphi_i(x) d\Gamma = \psi_i(t) - \int_{\Gamma} \frac{\partial v(t, x)}{\partial N} \varphi_i(x) d\Gamma = \tilde{\psi}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (17)$$

Далее сведем нашу обратную задачу к некоторому (фактически интегральному) уравнению. Умножим (16) на  $\varphi_j(x)$  и проинтегрируем по области  $\Gamma$ . Получим равенство

$$\int_{\Gamma} \varphi_j \beta (v - \bar{u}) d\Gamma = \sum_{i=1}^r \beta_i \int_{\Gamma} \varphi_j \Phi_i (v - \bar{u}) d\Gamma = -\tilde{\psi}_j - \int_{\Gamma} \varphi_j \tilde{\sigma}_0 w d\Gamma - \int_{\Gamma} \varphi_j \beta w d\Gamma. \quad (18)$$

Всё можем записать в виде

$$B\vec{\beta} = \vec{S}, \quad \vec{S} = (S_1, \dots, S_r)^T, \quad S_j = -\widetilde{\psi}_j - \int_{\Gamma} \varphi_j \widetilde{\sigma}_0 w d\Gamma - \int_{\Gamma} \varphi_j \beta w d\Gamma,$$

где матрица  $B$  имеет элементы  $b_{ij} = \int_{\Gamma} \Phi_j \varphi_i (v - \bar{u}) d\Gamma$ . Имеем

$$B(0) = B_0, \quad \det B_0 \neq 0, \quad b_{ij}|_{t=0} = \int_{\Gamma} \Phi_j(0, x) \varphi_i(x) (u_0 - \bar{u}(0, x)) d\Gamma.$$

Обращая матрицу  $B$ , получим  $\vec{\beta} = B^{-1}\vec{S}$ , где  $\vec{S}$  зависит от  $w$  — решения задачи (15), (16), которое, в свою очередь, зависит от  $\vec{\beta}$ . Таким образом, имеем уравнение

$$\vec{\beta} = B^{-1}\vec{S}(\beta) = \vec{S}_0(\beta). \quad (19)$$

Найдем  $B^{-1}\vec{S}(0)$ . Если  $\vec{\beta} = 0$ , то  $w = 0$  и  $S_j = -\widetilde{\psi}_j$ , т. е.  $\vec{S} = (-\widetilde{\psi}_1, -\widetilde{\psi}_2, \dots, -\widetilde{\psi}_r)$ . Возьмем  $R_0 = 2\|B^{-1}\vec{S}(0)\|$ . Далее считаем, что  $\vec{\beta} \in B_{R_0, \gamma} = \{\vec{\beta} : \|\vec{\beta}\|_{W_p^{s_0}(0, \gamma)} \leq R_0\}$ . Получим оценки и докажем, что уравнение (19) имеет решение на некотором промежутке  $(0, \gamma)$ . Используя лемму 2 и теорему 1, запишем оценки для функции  $\vec{w}$ :

$$\|w\|_{W_p^{1,2}(Q_\gamma)} \leq c\|\beta\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\gamma)} (\|w\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\gamma)} + \|v - \bar{u}\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S)}), \quad (20)$$

где постоянная  $c$  не зависит от  $\gamma \in (0, T]$ . Непосредственно из определения нормы и леммы 1 вытекает, что

$$\|w\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \gamma; L_p(\Gamma))} \leq c_1 \gamma^{1/2} \|w\|_{\widetilde{W}_p^{s_1}(0, \gamma; L_p(\Gamma))} \leq c_2 \gamma^{1/2} \|w\|_{\widetilde{W}_p^{1,2}(Q_\gamma)}. \quad (21)$$

Далее, используя интерполяционное неравенство [19]

$$\|w\|_{W_p^s(G)} \leq c_0 \|w\|_{W_p^{s_1}(G)}^\theta \|w\|_{W_p^{s_2}(G)}^{1-\theta}, \quad s_1 \theta + s_2(1 - \theta) = s, \quad s_2 < s < s_1, \quad (22)$$

и теоремы вложения, имеем

$$\|w\|_{L_p(0, \gamma; W_p^{2s_0}(\Gamma))} \leq c_3 \|w\|_{L_p(0, \gamma; W_p^1(G))} \leq c_4 \|w\|_{L_p(0, \gamma; W_p^2(G))}^{1/2} \|w\|_{L_p(Q_\gamma)}^{1/2}. \quad (23)$$

Из неравенств (21), (23) и очевидного неравенства

$$\|w\|_{L_p(0, \gamma; L_p(G))} \leq \gamma \|w_t\|_{L_p(0, \gamma; L_p(G))}, \quad w(0, x) = 0, \quad (24)$$

вытекающего из формулы Ньютона — Лейбница, имеем

$$\|w\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\gamma)} \leq c_5 \gamma^{1/2} \|w\|_{W_p^{1,2}(Q_\gamma)}. \quad (25)$$

Тогда неравенство (20) и лемма 1 влекут, что

$$\|w\|_{W_p^{1,2}(Q_\gamma)} \leq c_6 \gamma^{1/2} \|\beta\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\gamma)} \|w\|_{\widetilde{W}_p^{1,2}(Q_\gamma)} + c_7 \|\beta\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\gamma)} \|v - \bar{u}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S)}. \quad (26)$$

Отметим, что в силу леммы 2

$$\|\beta\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\gamma)} \leq c_8 \|\vec{\beta}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \gamma)} \leq c_8 R_0. \quad (27)$$

где постоянная  $c_8$  не зависит от  $\gamma$ . Выберем  $\gamma_0$  такое, что  $c_6 c_8 \gamma_0^{1/2} R_0 = 1/2$ . Тогда неравенство (26) запишется в виде

$$\|w\|_{W_p^{1,2}(Q_\gamma)} \leq 2c_7 c_8 \|\vec{\beta}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\gamma)} \|v - \bar{u}\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S)}, \quad \vec{\beta} \in B_{R_0, \gamma}, \quad \gamma \leq \gamma_0. \quad (28)$$

Пусть  $\vec{\beta}^i \in B_{R_0, \gamma}$  ( $\gamma \leq \gamma_0$ ),  $\vec{\beta}^i = (\beta_1^i, \dots, \beta_r^i)^T$ ,  $i = 1, 2$ . Обозначим соответствующие им функции через  $\beta_1, \beta_2$ , а решения задачи (15), (16) — через  $w_1, w_2$ . Получим оценки нормы разности  $S_0(\vec{\beta}^1) - S_0(\vec{\beta}^2)$ .

Вычитая равенства (15), (16) для  $w_1, w_2$ , получим, что  $w_0 = w_1 - w_2$  — решение задачи

$$Mv = w_{0t} - Lw_0 = 0, \quad w_0|_{t=0} = 0, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_0}{\partial N} + \tilde{\sigma}_0 w_0|_\Gamma \\ = - \left[ (\beta_1 - \beta_2) \frac{(w_1 + w_2)}{2} + \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{2} (w_1 - w_2) + (\beta_1 - \beta_2)(v - \bar{u}) \right] |_\Gamma. \end{aligned}$$

Повторяя рассуждения из вывода оценки (28), при всех  $\gamma \leq \gamma_2$  получим аналог этой оценки, но для функции  $w_0$ , т. е. оценку

$$\begin{aligned} \|w_1 - w_2\|_{W_p^{1,2}(Q_\gamma)} \leq \|\vec{\beta}_1 - \vec{\beta}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\gamma)} (2c_7 c_8 \|v - \bar{u}\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S)} \\ + c_9 \|w_1 + w_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\gamma)}), \quad \vec{\beta} \in B_{R_0, \gamma}, \quad \gamma \leq \gamma_2, \quad (30) \end{aligned}$$

где постоянные  $c_i$  не зависят от  $\gamma$ . Для оценки последнего слагаемого используем оценки (28), записанные для функций  $w_i$ . Получим оценку

$$\|w_1 - w_2\|_{W_p^{1,2}(Q_\gamma)} \leq \|\vec{\beta}_1 - \vec{\beta}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\gamma)} (2c_7 c_8 \|v - \bar{u}\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S)} + c_{10} R_0). \quad (31)$$

Оценим  $\|B^{-1}S(\vec{\beta}_1) - B^{-1}S(\vec{\beta}_2)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \gamma)}$ . Найдется число  $\gamma_1 \leq \gamma_0$  такое, что  $|\det B(t)| \geq \delta_0/2 > 0$  на  $[0, \gamma_1]$ . В силу леммы 2 и неравенства Гёльдера имеем

$$\begin{aligned} \|B^{-1}S(\vec{\beta}_1) - B^{-1}S(\vec{\beta}_2)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \gamma)} &\leq C \|S(\vec{\beta}_1) - S(\vec{\beta}_2)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \gamma)} \\ &\leq \sum_{j=1}^r \left\| \int_\Gamma \tilde{\sigma}_0(w_1 - w_2) \varphi_j d\Gamma \right\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \gamma)} + \left\| \int_\Gamma (\beta_1 w_1 - \beta_2 w_2) \varphi_j d\Gamma \right\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \gamma)} \\ &\leq c_{11} (\|\tilde{\sigma}_0(w_1 - w_2)\|_{L_p(\Gamma; \widetilde{W}_p^{s_0}(0, \gamma))} + \|(\beta_1 - \beta_2)(w_1 + w_2)\|_{L_p(\Gamma; \widetilde{W}_p^{s_0}(0, \gamma))} \\ &\quad + \|(\beta_1 + \beta_2)(w_1 - w_2)\|_{L_p(\Gamma; \widetilde{W}_p^{s_0}(0, \gamma))}). \quad (32) \end{aligned}$$

Используя лемму 2 и оценки (25), (27) для функций  $\beta_i, w_1 \pm w_2$ , оценку (28), записанную для функций  $w_i$  и (32), получим, что правая часть оценивается через  $c_{12} \gamma^{1/2} \|\vec{\beta}_1 - \vec{\beta}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \gamma)}$ . Таким образом,

$$\|B^{-1}S(\vec{\beta}_1) - B^{-1}S(\vec{\beta}_2)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \gamma)} \leq c_{12} \|\vec{\beta}_1 - \vec{\beta}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \gamma)} \gamma^{1/2},$$

где  $\beta > 0$ ,  $\gamma \in (0, T]$  и постоянная  $c_{12}$  не зависит от  $\tau$ . Выберем  $\gamma_2 \leq \gamma_1$  так, что  $c_{12} \gamma_2^{1/2} \leq \frac{1}{2}$ , тогда при  $\gamma \leq \gamma_2$  уравнение (19) имеет единственное решение в шаре

$B_{R_0, \gamma}$ . Покажем, что условия (17) выполнены. По условию вектор-функция  $\vec{\beta}$  есть решение уравнения (19), т. е.

$$\int_{\Gamma} \varphi_j \beta (v - \bar{u}) d\Gamma = -\tilde{\psi}_i - \int_{\Gamma} \tilde{\sigma}_0 w \varphi_j d\Gamma - \int_{\Gamma} \beta w \varphi_j d\Gamma. \quad (33)$$

Умножим равенство (16) на  $\varphi_j$  и проинтегрируем по  $\Gamma$ . Получим

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial N} \varphi_j d\Gamma = - \int_{\Gamma} \tilde{\sigma}_0 w \varphi_j d\Gamma - \int_{\Gamma} \varphi_j (\beta w + \beta (v - u)) d\Gamma.$$

Вычитая это равенство из (33), имеем

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial N} \varphi_j d\Gamma = \tilde{\psi}_j.$$

Единственность решений вытекает из оценок, полученных в процессе доказательства. Теорема доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Ненарокомов В. Е. Обратные задачи в исследовании сложного теплообмена. М.: Янус и К, 2009.
2. Пермяков П. П., Афанасьева Т. А., Варламов С. П., Скрябин П. Н. Восстановление граничных условий для моделирования теплообмена на поверхности грунта // АРКТИКА XXI век. Гум. науки. 2019. № 1. С. 27–35.
3. Пермяков П. П. Идентификация параметров математической модели тепловлагопереноса в мерзлых грунтах. Новосибирск: Наука, 1989.
4. Pyatkov S. G., Baranchuk V. A. Determination of the heat transfer coefficient in mathematical models of heat and mass transfer // Math. Notes. 2023. V. 113, N 1. P. 93–108.
5. Kostin A. B., Prilepko A. I. On some problems of the reconstruction of a boundary condition for a parabolic equation, II // Differ. Equ. 1996. V. 32, N 11. P. 1515–1525.
6. Kostin A. B., Prilepko A. I. On some problem of the reconstruction of a boundary condition for a parabolic equation. I // Differ. Equ. 1996. V. 32, N 1. P. 113–122.
7. Pilant M., Rundell W. An iteration method for the determination of an unknown boundary condition in a parabolic initial-boundary value problem // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1989. V. 32. P. 59–71.
8. Dihn N., Hao D. N., Thanh P. X., Lesnik D. Determination of the heat transfer coefficients in transient heat conduction // Inverse Probl. 2013. V. 29. 095020.
9. Hao D. N., Huong B. V., Thanh P. X., Lesnik D. Identification of nonlinear heat transfer laws from boundary observations // Appl. Anal. 2014. V. 94, N 9. P. 1784–1799.
10. Slodicka M., Van Keer R. Determination of a Robin coefficient in semilinear parabolic problems by means of boundary measurements // Inverse Probl. 2002. V. 18. P. 139–152.
11. Onyango T. T. M., Ingham D. B., Lesnic D., Slodicka M. Determination of a time-dependent heat transfer coefficient from non-standard boundary measurements // Math. Computers Simul. 2009. V. 79. P. 1577–1584.
12. Da Silva W. B., Dutra J. C. S., Kopperschimdt C. E. P., Lesnic D., Aykroyd R. G. Sequential particle filter estimation of a time-dependent heat transfer coefficient in a multidimensional nonlinear inverse heat conduction problem // Appl. Math. Model. 2021. V. 89 (Part 1). P. 654–668.
13. Slodicka M., Lesnic D., Onyango T. T. M. Determination of a time-dependent heat transfer coefficient in a nonlinear inverse heat conduction problem // Inverse Probl. Sci. Eng. 2010. V. 18, № 1. P. 65–81.

14. Rundell W., Yin H.-M. A parabolic inverse problem with an unknown boundary condition // J. Differ. Equ. 1990. V. 86. P. 234–242.
15. Rösch A. Second order optimality conditions and stability estimates for the identification of nonlinear heat transfer laws // Control and Estimation of Distributed Parameter Systems. Basel: Birkhäuser, 1998. P. 237–246. (Int. Ser. Numer. Math.; V. 126).
16. Rösch A. A Gauss–Newton method for the identification of nonlinear heat transfer laws // Optimal Control of Complex Structures. Basel: Birkhäuser, 2002. P. 217–230. (Int. Ser. Numer. Math.; V. 139).
17. Onyango T. T. M., Ingham D. B., Lesnic D. Reconstruction of boundary condition laws in heat conduction using the boundary element method // Comput. Math. Appl. 2009. V. 57. P. 153–168.
18. Kozhanov A. I. Linear inverse for some classes of nonlinear nonstationary equations // Sib. Electron. Rep. 2015. V. 12. P. 264–275.
19. Вержбицкий М. А., Пятков С. Г. О некоторых обратных задачах об определении граничных режимов // Мат. заметки СВФУ. 2016. Т. 23, № 2. P. 3–18.
20. Ding M. H., Liu H., Zheng G. H. On inverse problems for several coupled PDE systems arising in mathematical biology // J. Math. Biol. 2023. V. 87, N 86.
21. Triebel H. Interpolation theory. Function spaces. Differential operators. Berlin: Deutsch. Verl. Wiss., 1978.
22. Amann H. Compact embeddings of vector-valued Sobolev and Besov spaces // Glas. Mat. 2000. V. 35, N 1. P. 161–177.
23. Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N. Linear and quasi-linear equations of parabolic type. Providence: Amer. Math. Soc., 1968. (Transl. Math. Monogr.; V. 23).
24. Belonogov V. A., Pyatkov S. G. On solvability of some classes of transmission problems in a cylindrical space domain // Сиб. электрон. мат. изв. 2021. Т. 18, № 1. С. 176–206.
25. Belonogov V. A., Pyatkov S. G. On some classes of inverse problems of recovering the heat transfer coefficient in stratified media // Sib. Math. J. 2022. V. 63, N 2. P. 206–223.

*Поступила в редакцию 13 мая 2025 г.*

*После доработки 14 июня 2025 г.*

*Принята к публикации 29 августа 2025 г.*

Солдатов Олег Альбертович  
Югорский государственный университет,  
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012  
oleg.soldatov.97@bk.ru

## IDENTIFICATION OF HEAT TRANSFER COEFFICIENT FROM BOUNDARY INTEGRAL MEASUREMENT

O. A. Soldatov

**Abstract:** In this article we examine in Sobolev spaces well-posedness questions of inverse problems of recovering the heat transfer coefficient from a collection of integrals of a flux with weight over the boundary. Under some conditions we demonstrate that a unique solution to the problem exists locally in time and depends continuously on the data. The method is constructive and the proposed approach allows us to construct new numerical methods for determining a solution. The proof employs a priori bounds and the contraction mapping principle.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-3-82-94

**Keywords:** parabolic equation, heat transfer coefficient, inverse problem, existence, uniqueness.

### REFERENCES

1. Alifanov O. M., Artyukhin E. A., and Nenarokomov A. V., *Inverse Problems in the Study of Complex Heat Transfer* [in Russian], Yanus-K, Moscow (2009).
2. Permyakov P. P., Afanas'eva T. A., Varlamov S. P., and Skryabin P. N., "Recovering boundary condition for modeling heat transfer on the surface of soils [in Russian]," *Arktika XXI Vek*, Gum. Nauki, No. 1, 27–35 (2019).
3. Permyakov P. P., *Identification of Parameters in the Mathematical Model of Heat and Moisture Transfer in Frozen Soils* [in Russian], Nauka, Novosibirsk (1989).
4. Pyatkov S. G. and Baranchuk V. A., "Determination of the heat transfer coefficient in mathematical models of heat and mass transfer," *Math. Notes*, **113**, No. 1, 93–108 (2023).
5. Kostin A. B. and Prilepko A. I., "On some problems of the reconstruction of a boundary condition for a parabolic equation, II," *Differ. Equ.*, **32**, No. 11, 1515–1525 (1996).
6. Kostin A. B. and Prilepko A. I., "On some problem of the reconstruction of a boundary condition for a parabolic equation, I," *Differ. Equ.*, **32**, No. 1, 113–122 (1996).
7. Pilant M. and Rundell W., "An iteration method for the determination of an unknown boundary condition in a parabolic initial-boundary value problem," *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **32**, 59–71 (1989).
8. Dihn N., Hao D. N., Thanh P. X., and Lesnik D., "Determination of the heat transfer coefficients in transient heat conduction," *Inverse Probl.*, **29**, 095020 (2013).
9. Hao D. N., Huong B. V., Thanh P. X., and Lesnik D., "Identification of nonlinear heat transfer laws from boundary observations," *Appl. Anal.*, **94**, No. 9, 1784–1799 (2014).
10. Slodicka M. and Van Keer R., "Determination of a Robin coefficient in semilinear parabolic problems by means of boundary measurements," *Inverse Probl.*, **18**, 139–152 (2002).
11. Onyango T. T. M., Ingham D.B., Lesnic D., and Slodicka M., "Determination of a time-dependent heat transfer coefficient from non-standard boundary measurements," *Math. Computers Simul.*, **79**, 1577–1584 (2009).

12. *Da Silva W. B., Dutra J. C. S., Kopperschimdt C. E. P., Lesnic D., and Aykroyd R. G.*, "Sequential particle filter estimation of a time-dependent heat transfer coefficient in a multi-dimensional nonlinear inverse heat conduction problem," *Appl. Math. Model.*, **89**, 654–668 (2021).
13. *Slodicka M., Lesnic D., and Onyango T. T. M.*, "Determination of a time-dependent heat transfer coefficient in a nonlinear inverse heat conduction problem," *Inverse Probl. Sci. Eng.*, **18**, No. 1, 65–81 (2010).
14. *Rundell W. and Yin H.-M.*, "A parabolic inverse problem with an unknown boundary condition," *J. Differ. Equ.*, **86**, 234–242 (1990).
15. *Rösch A.*, "Second order optimality conditions and stability estimates for the identification of nonlinear heat transfer laws," in: *Control and Estimation of Distributed Parameter Systems*, pp. 237–246, Birkhäuser, Basel (1998) (*Int. Ser. Numer. Math.*; vol. 126).
16. *Rösch A.*, "A Gauss–Newton method for the identification of nonlinear heat transfer laws," in: *Optimal Control of Complex Structures*, pp. 217–230, Birkhäuser, Basel (2002) (*Int. Ser. Numer. Math.*; vol. 139).
17. *Onyango T. T. M., Ingham D. B., and Lesnic D.*, "Reconstruction of boundary condition laws in heat conduction using the boundary element method," *Comput. Math. Appl.*, **57**, 153–168 (2009).
18. *Kozhanov A. I.*, "Linear inverse for some classes of nonlinear nonstationary equations," *Sib. Electron. Math. Rep.*, **12**, 264–275 (2015).
19. *Verzhbitskii M. A. and Pyatkov S. G.*, "On some inverse problems of determining boundary regimes [in Russian]," *Mat. Zamet. SVFU*, **23**, No. 2, 3–18 (2016).
20. *Ding M. H., Liu H., and Zheng G. H.*, "On inverse problems for several coupled PDE systems arising in mathematical biology," *J. Math. Biol.*, **87**, No. 86 (2023).
21. *Triebel H.*, *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, Deutsch. Verl. Wiss., Berlin (1978).
22. *Amann H.*, "Compact embeddings of vector-valued Sobolev and Besov spaces," *Glas. Mat.*, **35**, No. 1, 161–177 (2000).
23. *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., and Ural'tseva N. N.*, *Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type*, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1968) (*Transl. Math. Monogr.*; vol. 23).
24. *Belonogov V. A. and Pyatkov S. G.*, "On solvability of some classes of transmission problems in a cylindrical space domain," *Sib. Electron. Math. Rep.*, **18**, No. 1, 176–206 (2021).
25. *Belonogov V. A. and Pyatkov S. G.*, "On some classes of inverse problems of recovering the heat transfer coefficient in stratified media," *Sib. Math. J.*, **63**, No. 2, 206–223 (2022).

*Submitted May 13, 2025*

*Revised June 14, 2025*

*Accepted August 29, 2025*

Oleg A. Soldatov  
Yugra State University,  
16 Chekhov Street, 628012 Khanty-Mansiisk, Russia  
Oleg.soldatov.97@bk.ru



ЗАДАЧА ТИПА КОШИ И ОБРАТНЫЕ  
ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С РЕГУЛЯРНЫМ  
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ  
ОПЕРАТОРОМ ТИПА РИМАНА —  
ЛИУВИЛЛЯ И ЗАМКНУТЫМ ОПЕРАТОРОМ  
В. Е. Федоров, А. В. Нагуманова,  
А. О. Сагимбаева

**Аннотация.** Исследуется однозначная разрешимость задачи типа Коши и линейных обратных коэффициентных задач для эволюционного уравнения в банаховом пространстве с интегро-дифференциальным оператором типа Римана — Лиувилля первого порядка с регулярным ядром. Оператор при неизвестной функции в уравнении предполагается замкнутым. Получены условия существования и единственности решения задачи типа Коши для линейного неоднородного уравнения. Найден критерий корректной разрешимости для обратной задачи со стационарным неизвестным коэффициентом и с интегральным в смысле Римана — Стильбеса условием переопределения, включающим в себя условие финального переопределения как частный случай. Найден условия разрешимости и устойчивости решения обратной задачи с нестационарным неизвестным коэффициентом и абстрактным условием переопределения на полуинтервале. Полученные абстрактные результаты использованы при исследовании линейных обратных начально-краевых задач для уравнений с интегро-дифференциальным оператором типа Римана — Лиувилля первого порядка по временной переменной, с многочленами от самосопряженного эллиптического дифференциального оператора по пространственным переменным и с неизвестным коэффициентом в правой части.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-3-95-112

**Ключевые слова:** интегро-дифференциальный оператор типа Римана — Лиувилля, линейное эволюционное уравнение в банаховом пространстве, задача типа Коши, линейная обратная коэффициентная задача, начально-краевая задача.

### Введение

В прикладных исследованиях часто возникают задачи для дифференциальных уравнений с неизвестными коэффициентами — так называемые обратные коэффициентные задачи. Их практическая значимость и теоретическая новизна привели к тому, что уже несколько десятилетий такие задачи вызывают

---

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Правительства Челябинской области № 24-21-20015, <https://rscf.ru/project/24-21-20015/>.

© 2025 Федоров В. Е., Нагуманова А. В., Сагимбаева А. О.

большой интерес многих авторов [1–9]. В последние годы все большее внимание исследователей обращено к обратным задачам для уравнений с различными дробными производными: Римана — Лиувилля [10–13], Герасимова — Капуто [14–22], Джрбашяна — Нерсесяна [23–26].

Помимо уравнений с дробными производными интерес исследователей вызывают также уравнения с другими интегро-дифференциальными операторами, которые разделим на классы операторов типа Римана — Лиувилля (композиция оператора свертки и оператора производной целого порядка) и операторов типа Герасимова (сначала действует оператор производной целого порядка, а затем оператор свертки). При этом интегро-дифференциальный оператор каждого из классов будем называть сингулярным или регулярным в зависимости от того, имеет ядро свертки особенность в начале интервала интегрирования или нет.

Для различных классов линейных уравнений в банаховых пространствах с сингулярными интегро-дифференциальными операторами типа Римана — Лиувилля и типа Герасимова исследованы прямые [27–29] и обратные задачи [30, 31].

Интерес исследователей в последние годы часто направлен на уравнения с регулярными интегро-дифференциальными операторами (см. [32, 33] и др.). Условия существования и единственности решения задачи Коши и линейных обратных задач для уравнения в банаховом пространстве с производной Капуто — Фабрицио и ограниченным оператором при неизвестной функции изучены в работе [34]. Вопросы однозначной разрешимости прямых и обратных коэффициентных задач для эволюционных уравнений в банаховых пространствах с регулярным интегро-дифференциальным оператором типа Римана — Лиувилля общего вида в случае ограниченного оператора при искомой функции исследованы в [35]. В данной работе в продолжение работы [35] будет изучено уравнение с регулярным интегро-дифференциальным оператором типа Римана — Лиувилля и линейным замкнутым оператором при неизвестной функции.

Коротко опишем содержание работы. В первом параграфе методами теории преобразования Лапласа получены условия существования и единственности решения задачи типа Коши для линейного неоднородного уравнения, разрешенного относительно регулярного интегро-дифференциального оператора типа Римана — Лиувилля, действующего на искомую функцию, в случае линейного замкнутого оператора при неизвестной функции в правой части уравнения. Найден вид решения. Второй параграф содержит теорему о корректности линейной обратной задачи для такого уравнения в банаховом пространстве со стационарным неизвестным коэффициентом в уравнении. В третьем параграфе получены условия однозначной разрешимости аналогичной задачи с нестационарным неизвестным коэффициентом, доказана оценка устойчивости решения. Полученные абстрактные результаты в четвертом параграфе использованы при исследовании начально-краевых задач для класса уравнений, содержащих регулярный интегро-дифференциальный оператор типа Римана — Лиувилля по

времени и многочлены от самосопряженного эллиптического дифференциального по пространственным переменным оператора.

### § 1. Задача типа Коши

Пусть  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{U}$  — банаховы пространства,  $\mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{U})$  — банахово пространство всех линейных ограниченных операторов из  $\mathcal{X}$  в  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{L}(\mathcal{X}) := \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{X})$ ,  $\mathcal{C}l(\mathcal{X})$  — множество всех линейных замкнутых операторов в пространстве  $\mathcal{X}$ , область определения  $D_A$  оператора  $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{X})$  снабжена нормой графика  $\|\cdot\|_{D_A} := \|\cdot\|_{\mathcal{X}} + \|A\cdot\|_{\mathcal{X}}$ ,  $\rho(A) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})\}$  — резольвентное множество оператора  $A$ , а  $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$  — его спектр,  $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$ ,  $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ ,  $K(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$  при  $t > 0$ . Определим оператор свертки

$$(J^K z)(t) := \int_0^t K(t-s)z(s) ds := (K * z)(t), \quad t > 0,$$

и интегро-дифференциальный оператор типа Римана — Лиувилля

$$(D^{1,K} z)(t) := D^1(J^K z)(t) := D^1 \int_0^t K(t-s)z(s) ds, \quad t > 0,$$

где  $D^1$  — оператор производной первого порядка.

Заметим, что для  $K \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{X}))$ ,  $z \in L_1(0, T; \mathcal{X})$

$$\left\| \int_0^t K(t-s)z(s) ds \right\|_{\mathcal{X}} \leq \max_{s \in [0, T]} \|K(s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \|z\|_{L_1(0, t; \mathcal{X})} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0+.$$

Поэтому  $(J^K z)(0) = 0$  и далее будем рассматривать именно такое начальное условие.

Пусть  $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{X})$ ,  $f \in C([0, T]; \mathcal{X})$ , рассмотрим задачу типа Коши

$$(J^K z)(0) = 0 \tag{1}$$

для эволюционного уравнения

$$(D^{1,K} z)(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in (0, T]. \tag{2}$$

Решением задачи (1), (2) назовем такую функцию  $z \in C((0, T]; D_A) \cap L_1(0, T; \mathcal{X})$ , что  $J^K z \in C([0, T]; \mathcal{X}) \cap C^1((0, T]; \mathcal{X})$ , выполняются условия (1) и равенство (2) при  $t \in (0, T]$ .

**Теорема 1.** Пусть  $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{X})$ ,  $K \in C^1([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{X}))$ ,  $(K(0) - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ ,  $f \equiv 0$ . Тогда функция  $z(t) \equiv 0$  является единственным решением задачи (1), (2).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $z$  — решение задачи (1), (2) при  $f \equiv 0$ , тогда

$$(D^{1,K} z)(t) = K(0)z(t) + (J^{K'} z)(t) = Az(t).$$

Отсюда  $z(t) = -(K(0) - A)^{-1}(J^{K'}z)(t)$ . Рассмотрим оператор

$$Bz(t) = -(K(0) - A)^{-1}(J^{K'}z)(t)$$

в пространстве  $L_1(0, T_1; \mathcal{Z})$ ,  $T_1 \leq T$ . Для  $t \in [0, T_1]$  имеем

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t K'(t-s)z(s) ds \right\|_{\mathcal{Z}} &\leq \int_0^t \|K'(t-s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \|z(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \\ &\leq \|K'\|_{C([0, T_1]; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))} \|z\|_{L_1(0, T_1; \mathcal{Z})}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|Bz\|_{L_1(0, T_1; \mathcal{Z})} &\leq \|(K(0) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \int_0^T \left\| \int_0^t K'(t-s)z(s) ds \right\|_{\mathcal{Z}} dt \\ &\leq T_1 \|(K(0) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \|K'\|_{C([0, T_1]; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))} \|z\|_{L_1(0, T_1; \mathcal{Z})} = \frac{1}{2} \|z\|_{L_1(0, T_1; \mathcal{Z})}, \end{aligned}$$

где

$$T_1 = \frac{1}{2\|(K(0) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \|K'\|_{C([0, T_1]; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))}}.$$

Следовательно, оператор  $B$  является сжимающим в пространстве  $L_1(0, T_1; \mathcal{Z})$  и единственным решением уравнения  $z = Bz$  в этом пространстве является функция  $z \equiv 0$ . Если  $T_1 < T$ , возьмем пространство  $L_1^{T_1}(0, 2T_1; \mathcal{Z}) := \{y \in L_1(0, 2T_1; \mathcal{Z}) : y(t) = 0 \text{ почти всюду на } [0, T_1]\}$ . Тогда

$$\|B\|_{\mathcal{L}(L_1^{T_1}(0, 2T_1; \mathcal{Z}))} \leq (2T_1 - T_1) \|(K(0) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \|K'\|_{C([0, T_1]; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))} = \frac{1}{2} < 1$$

и на отрезке  $[0, 2T_1]$  получаем единственность решения уравнения  $z = Bz$ . Если  $2T_1 < T$ , рассмотрим пространство  $L_1^{2T_1}(0, 3T_1; \mathcal{Z}) := \{y \in L_1(0, 3T_1; \mathcal{Z}) : y(t) = 0 \text{ почти всюду на } [0, 2T_1]\}$  и докажем единственность тривиального решения уравнения  $z = Bz$  на отрезке  $[0, 3T_1]$ . Повторяя рассуждения, за конечное число шагов полностью покроем отрезок  $[0, T]$ . Значит, решение  $z \equiv 0$  задачи (1), (2) при  $f \equiv 0$  единственно на отрезке  $[0, T]$ .  $\square$

Для функции  $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{Z}$  обозначим ее преобразование Лапласа через  $\hat{h}$ .

Далее будем предполагать выполнение следующего условия.

( $\hat{K}$ ) Для функции  $K \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+}; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$  существует преобразование Лапласа  $\hat{K}(\lambda)$ , продолжимое до однозначной аналитической функции на множестве  $\Omega_{a_K} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > a_K\} \cup \infty$ , где  $a_K > 0$ .

**Лемма 1.** Пусть  $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ ,  $K \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+}; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ ,  $(K(0) - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ , выполняется условие ( $\hat{K}$ ). Тогда при некотором  $r > a_K$  определены и аналитичны оператор-функции

$$Z(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (\lambda \hat{K}(\lambda) - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda, \quad t \in \mathbb{C}, \quad (3)$$

$$AZ(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \lambda \widehat{K}(\lambda) (\lambda \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda, \quad t \in \mathbb{C}. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме о начальном значении оригинала [36]  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \widehat{K}(\lambda) = K(0)$  в  $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ . Поскольку  $(K(0) - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ , с учетом условия  $(\widehat{K})$  это означает, что существуют операторы

$$\begin{aligned} (\lambda \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} &= (K(0) - A + \lambda \widehat{K}(\lambda) - K(0))^{-1} \\ &= (I + (K(0) - A)^{-1}(\lambda \widehat{K}(\lambda) - K(0)))^{-1} (K(0) - A)^{-1} \end{aligned}$$

для достаточно больших  $|\lambda| > r_0 \geq a_K$ , для которых

$$\|(\lambda \widehat{K}(\lambda) - K(0))\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} < \frac{1}{2} \|(K(0) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}^{-1}.$$

Поэтому для  $C = 2\|(K(0) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} > 0$  при всех  $|\lambda| > r_0 \geq a_K$

$$\|(\lambda \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq C.$$

Также заметим, что

$$\begin{aligned} (\lambda \widehat{K}(\lambda) - A)(\mu \widehat{K}(\mu) - A)^{-1} &= I + (\lambda \widehat{K}(\lambda) - \mu \widehat{K}(\mu))(\mu \widehat{K}(\mu) - A)^{-1}, \\ (\mu \widehat{K}(\mu) - A)^{-1} - (\lambda \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} &= (\lambda \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}(\lambda \widehat{K}(\lambda) - \mu \widehat{K}(\mu))(\mu \widehat{K}(\mu) - A)^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(\mu \widehat{K}(\mu) - A)^{-1} - (\lambda \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \\ \leq C \|\lambda \widehat{K}(\lambda) - \mu \widehat{K}(\mu)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \|(\mu \widehat{K}(\mu) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow \mu. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\frac{d}{d\mu}(\mu \widehat{K}(\mu) - A)^{-1} = -(\mu \widehat{K}(\mu) - A)^{-1} \left[ \frac{d}{d\mu}[\mu \widehat{K}(\mu)] \right] (\mu \widehat{K}(\mu) - A)^{-1}.$$

Следовательно, подынтегральное выражение в (3) аналитично в  $\Omega_{r_0}$ , и поскольку контур  $\{|\lambda| = r > r_0\}$  ограничен, то функция  $Z(t)$  аналитична по  $t \in \mathbb{C}$ . При этом

$$\begin{aligned} AZ(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (A - \lambda \widehat{K}(\lambda) + \lambda \widehat{K}(\lambda))(\lambda \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda \\ &= 0 + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \lambda \widehat{K}(\lambda) (\lambda \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda. \end{aligned}$$

Используя опять же аналитичность подынтегрального выражения в (4) и ограниченность контура, получаем требуемое.  $\square$

**Теорема 2.** Пусть  $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ ,  $K \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ ,  $(K(0) - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ , выполняется условие  $(\widehat{K})$ ,  $f \in C((0, T]; \mathcal{Z}) \cap L_1(0, T; \mathcal{Z})$ . Тогда функция

$$z(t) = (K(0) - A)^{-1}f(t) + \int_0^t Z(t-s)f(s)ds \quad (5)$$

является единственным решением задачи (1), (2).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу леммы 1 функция (5) лежит в  $C((0, T]; \mathcal{Z}) \cap L_1(0, T; \mathcal{Z})$ , следовательно, выполнено условие (1).

Далее,

$$A(K(0) - A)^{-1}f = K(0)(K(0) - A)^{-1}f - f \in C((0, T]; \mathcal{Z}),$$

$$A \int_0^t Z(t-s)f(s)ds = \int_0^t AZ(t-s)f(s)ds \in C([0, T]; \mathcal{Z}),$$

поэтому  $z \in C((0, T]; D_A)$ . Кроме того,

$$(J^K z)(t) = (K(0) - A)^{-1}(J^K f)(t) + \int_0^t K(t-\tau) \int_0^\tau Z(\tau-s)f(s)dsd\tau \in C([0, T]; \mathcal{Z}),$$

$$(D^{1,K} z)(t) = K(0)(K(0) - A)^{-1}f(t) + (K(0) - A)^{-1}(J^{K'} f)(t)$$

$$+ K(0) \int_0^t Z(t-s)f(s)ds + \int_0^t K'(t-\tau) \int_0^\tau Z(\tau-s)f(s)dsd\tau \in C((0, T]; \mathcal{Z}).$$

При  $\operatorname{Re} \mu > r$  по интегральной формуле Коши получаем, с учетом положительной ориентации используемых контуров,

$$\begin{aligned} \widehat{Z}(\mu) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{1}{\mu - \lambda} (\lambda \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=\frac{1}{r}} \frac{1}{\mu - \frac{1}{\eta}} \left( \frac{1}{\eta} \widehat{K} \left( \frac{1}{\eta} \right) - A \right)^{-1} \frac{d\eta}{\eta^2} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=\frac{1}{r}} \frac{1}{\mu \eta (\eta - \frac{1}{\mu})} \left( \frac{1}{\eta} \widehat{K} \left( \frac{1}{\eta} \right) - A \right)^{-1} d\eta = (\mu \widehat{K}(\mu) - A)^{-1} - (K(0) - A)^{-1}. \end{aligned}$$

Доопределим функцию  $f$  непрерывным ограниченным образом при  $t > T$  и обозначим  $z_f := Z * f$ , тогда

$$\widehat{z}_f(\lambda) = \widehat{Z}(\lambda) \widehat{f}(\lambda) = [(\lambda \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} - (K(0) - A)^{-1}] \widehat{f}(\lambda).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \widehat{z}(\lambda) &= (K(0) - A)^{-1} \widehat{f}(\lambda) + [(\lambda \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} - (K(0) - A)^{-1}] \widehat{f}(\lambda) = (\lambda \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} \widehat{f}(\lambda), \\ \widehat{D^{1,K} z}(\lambda) - \widehat{A z}(\lambda) &= (\lambda \widehat{K}(\lambda) - A)(\lambda \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} \widehat{f}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda). \end{aligned}$$

Применив обратное преобразование Лапласа, получим (2).

Единственность решения задачи (1), (2) следует из единственности решения соответствующей задачи типа Коши для однородного уравнения, которая доказана в теореме 1.  $\square$

## § 2. Линейная обратная задача с постоянным коэффициентом

Пусть  $\mathcal{Z}$ ,  $\mathcal{U}$  — банаховы пространства. Рассмотрим обратную задачу для эволюционного уравнения

$$(D^{1,K}z)(t) = Az(t) + B(t)u + g(t), \quad t \in (0, T], \quad (6)$$

где  $K \in C^1([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ ,  $D^{1,K}$  — интегро-дифференциальный оператор типа Римана — Лиувилля,  $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ ,  $B \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Z}))$ ,  $g \in C([0, T]; \mathcal{Z})$ , с начальным условием

$$(J^K z)(0) = 0 \quad (7)$$

и условием переопределения

$$\int_0^T z(t) d\nu(t) = z_T \in D_A, \quad (8)$$

где функция  $\nu : (0, T] \rightarrow \mathbb{C}$  имеет ограниченную вариацию, в обозначениях  $\nu \in BV((0, T]; \mathbb{C})$ . При этом дополнительный неизвестный элемент  $u$  в уравнении (6) требуется найти с использованием дополнительного условия (8).

Назовем элемент  $u \in \mathcal{U}$  *решением задачи* (6)–(8), если соответствующее решение задачи типа Коши (6), (7) удовлетворяет условию (8). Задачу (6)–(8) назовем *корректной*, если для любых  $z_T \in D_A$ ,  $g \in C([0, T]; \mathcal{Z})$  существует единственное решение  $u \in \mathcal{U}$  задачи, при этом удовлетворяющее оценке

$$\|u\|_{\mathcal{U}} \leq C(\|z_T\|_{D_A} + \|g\|_{C([0, T]; \mathcal{Z})}),$$

где  $C > 0$  не зависит от  $z_T$ ,  $g$ .

В силу представления решения (5) элемент  $u$  является решением задачи (6)–(8) тогда и только тогда, когда он удовлетворяет уравнению

$$\chi u = \psi, \quad (9)$$

где  $\chi$  и  $\psi$  определяются формулами

$$\begin{aligned} \chi &:= \int_0^T (K(0) - A)^{-1} B(t) d\nu(t) + \int_0^T \int_0^t Z(t-s) B(s) ds d\nu(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Z}), \\ \psi &:= z_T - \int_0^T (K(0) - A)^{-1} g(t) d\nu(t) - \int_0^T \int_0^t Z(t-s) g(s) ds d\nu(t) \in \mathcal{Z}. \end{aligned}$$

**Теорема 3.** Пусть  $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ ,  $K \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ ,  $(K(0) - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ , выполняется условие  $(\widehat{K})$ ,

$$g \in C([0, T]; \mathcal{Z}), \quad B \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Z})), \quad \nu \in BV((0, T]; \mathbb{C}), \quad z_T \in D_A.$$

Тогда обратная задача (6)–(8) корректна в том и только в том случае, когда существует обратный оператор  $\chi^{-1} \in \mathcal{L}(D_A; \mathcal{U})$ . При этом решение задачи имеет вид  $u = \chi^{-1}\psi$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2 существует решение задачи типа Коши (6), (7) с известным элементом  $u \in \mathcal{U}$ , и оно имеет вид

$$z(t) = (K(0) - A)^{-1}(B(t)u + g(t)) + \int_0^t Z(t-s)(B(s)u + g(s)) ds.$$

Подставим это решение в условие переопределения (8) и получим (9). При этом

$$\begin{aligned} A\chi &= \int_0^T (A - K(0) + K(0))(K(0) - A)^{-1}B(t) d\nu(t) + \int_0^T \int_0^t AZ(t-s)B(s) ds d\nu(t) \\ &= \int_0^T K(0)(K(0) - A)^{-1}B(t) d\nu(t) - \int_0^T B(t) d\nu(t) \\ &\quad + \int_0^T \int_0^t AZ(t-s)B(s) ds d\nu(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{X}) \end{aligned}$$

в силу леммы 1, поэтому  $\chi \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; D_A)$ . Аналогично доказывается, что

$$\int_0^T (K(0) - A)^{-1}g(t) d\nu(t), \int_0^T \int_0^t Z(t-s)g(s) ds d\nu(t) \in D_A.$$

Отсюда получаем, что корректность обратной задачи (6)–(8) равносильна существованию оператора  $\chi^{-1} \in \mathcal{L}(D_A; \mathcal{U})$ . В таком случае

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{U}} &\leq \|\chi^{-1}\|_{\mathcal{L}(D_A; \mathcal{U})} \|\psi\|_{D_A} \\ &\leq \|\chi^{-1}\|_{\mathcal{L}(D_A; \mathcal{U})} (\|z_T\|_{D_A} + T^2 V_0^T(\nu) \|Z\|_{C([0, T]; D_A)} \|g\|_{C([0, T]; \mathcal{X})} \\ &\quad + TV_0^T(\nu) (\|K(0)(K(0) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} + 2) \|g\|_{C([0, T]; \mathcal{X})}) \\ &\leq C(\|z_T\|_{D_A} + \|g\|_{C([0, T]; \mathcal{X})}) \end{aligned}$$

при некотором  $C > 0$ . Здесь  $V_0^T(\nu)$  — вариация функции  $\nu$  на полуинтервале  $(0, T]$ .  $\square$

### § 3. Обратная задача с переменным коэффициентом

Рассмотрим уравнение

$$(D^{1,K}z)(t) = Az(t) + B(t)u(t) + g(t), \quad t \in (0, T], \quad (10)$$

где  $K \in C^1([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{X}))$ ,  $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{X})$ ,  $B \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{X}))$ ,  $g \in C([0, T]; \mathcal{X})$ . В отличие от предыдущего параграфа здесь неизвестный элемент  $u$  зависит от  $t$ . Снабдим уравнение (10) начальным условием

$$(J^K z)(0) = 0 \quad (11)$$



и условием переопределения

$$\Phi z(t) = \Psi(t), \quad t \in (0, T], \quad (12)$$

где  $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{U})$ ,  $\Psi \in C((0, T]; \mathcal{U})$ .

Назовем  $u \in C([0, T]; \mathcal{U})$  решением задачи (10)–(12), если соответствующее решение задачи типа Коши (10), (11) удовлетворяет условию (12).

**Теорема 4.** Пусть  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ ,  $K \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{L}(\mathcal{X}))$ ,  $(K(0) - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ , выполняется условие  $(\widehat{K})$ ,  $B \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{X}))$ ,  $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{U})$ , для всех  $t \in [0, T]$  существует обратный оператор  $(\Phi K(0)(K(0) - A)^{-1}B(t))^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ , при этом  $(\Phi K(0)(K(0) - A)^{-1}B(t))^{-1} \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}))$ ,  $\Psi \in C((0, T]; \mathcal{U})$ ,  $D^{1,K}\Psi \in C([0, T]; \mathcal{U})$ . Тогда задача (10)–(12) имеет единственное решение, при этом выполняется оценка

$$\|u\|_{C([0, T]; \mathcal{U})} \leq C(\|g\|_{C([0, T]; \mathcal{X})} + \|D^{1,K}\Psi\|_{C([0, T]; \mathcal{U})}),$$

где  $C > 0$  не зависит от  $g$ ,  $\Psi$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} (D^{1,K}\Psi)(t) &= (D^{1,K}\Phi z)(t) = \Phi(D^{1,K}z)(t) = \Phi(Az(t) + B(t)u(t) + g(t)) \\ &= \Phi A(K(0) - A)^{-1}(B(t)u(t) + g(t)) + \Phi A \int_0^t Z(t-s)(B(s)u(s) + g(s)) ds \\ &+ \Phi B(t)u(t) + \Phi g(t) = \Phi K(0)(K(0) - A)^{-1}B(t)u(t) + \Phi K(0)(K(0) - A)^{-1}g(t) \\ &+ \Phi A \int_0^t Z(t-s)(B(s)u(s) + g(s)) ds. \end{aligned}$$

Отсюда получаем уравнение Вольтерры

$$u(t) = \int_0^t N(t, s)u(s) ds + h(t), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} N(t, s) &= (\Phi K(0)(K(0) - A)^{-1}B(t))^{-1}\Phi AZ(t-s)B(s), \\ h(t) &= (\Phi K(0)(K(0) - A)^{-1}B(t))^{-1}(D^{1,K}\Psi)(t) \\ &- (\Phi K(0)(K(0) - A)^{-1}B(t))^{-1} \left( \Phi K(0)(K(0) - A)^{-1}g(t) + \Phi A \int_0^t Z(t-s)g(s) ds \right). \end{aligned}$$

По условиям теоремы и в силу леммы 1 имеем  $h \in C([0, T]; \mathcal{U})$ ,  $N \in C(\widetilde{\Delta}; \mathcal{L}(\mathcal{U}))$ , где  $\widetilde{\Delta} := \{(t, s) : t \in [0, T], s \in [0, t]\}$ . Поэтому по теореме 5.1.17 из [2] уравнение Вольтерры (13) имеет единственное решение, причем

$$\|u\|_{C([0, T]; \mathcal{U})} \leq C(N)\|h\|_{C([0, T]; \mathcal{U})} \leq C(\|g\|_{C([0, T]; \mathcal{X})} + \|D^{1,K}\Psi\|_{C([0, T]; \mathcal{U})}). \quad \square$$

**§ 4. Приложение к обратным задачам для одного класса уравнений в частных производных**

Пусть  $P_n(\lambda) = \sum_{i=0}^n c_i \lambda^i$ ,  $Q_n(\lambda) = \sum_{j=0}^n d_j \lambda^j$ ,  $c_i, d_j \in \mathbb{C}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $d_n \neq 0$ . Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  — ограниченная область с гладкой границей  $\partial\Omega$ , операторный пучок  $\Lambda, B_1, B_2, \dots, B_r$  регулярно эллиптичен [37], где

$$(\Lambda w)(\xi) = \sum_{|q| \leq 2r} \frac{a_q(\xi) \partial^{|q|} w(\xi)}{\partial \xi_1^{q_1} \partial \xi_2^{q_2} \dots \partial \xi_d^{q_d}}, \quad a_q \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$(B_l w)(\xi) = \sum_{|q| \leq r_l} \frac{b_{lq}(\xi) \partial^{|q|} w(\xi)}{\partial \xi_1^{q_1} \partial \xi_2^{q_2} \dots \partial \xi_d^{q_d}}, \quad b_{lq} \in C^\infty(\partial\Omega), \quad l = 1, 2, \dots, r,$$

$q = (q_1, q_2, \dots, q_d) \in \mathbb{N}_0^d$ ,  $|q| = q_1 + \dots + q_d$ . Положим

$$\mathcal{X} = \{w \in H^{2rn}(\Omega) : B_l \Lambda^k w(\xi) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad l = 1, 2, \dots, r, \quad \xi \in \partial\Omega\}.$$

Зададим оператор  $\Lambda_1 : D_{\Lambda_1} \rightarrow L_2(\Omega)$  с областью определения [37]:

$$D_{\Lambda_1} = H_{\{B_l\}}^{2r}(\Omega) := \{w \in H^{2r}(\Omega) : B_l w(\xi) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, r, \quad \xi \in \partial\Omega\},$$

действующий по правилу  $\Lambda_1 u = \Lambda u$ . Предположим, что оператор  $\Lambda_1$  самосопряженный и имеет ограниченный справа спектр. Тогда спектр  $\sigma(\Lambda_1)$  оператора  $\Lambda_1$  является действительным, дискретным, конечнократным и сгущается только на  $-\infty$  [37]. Пусть  $0 \notin \sigma(\Lambda_1)$ ,  $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$  — ортонормированная в  $L_2(\Omega)$  система собственных функций оператора  $\Lambda_1$ , занумерованных по невозрастанию соответствующих собственных значений  $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$  с учетом их кратности.

Возьмем  $K(t) := a e^{bt} I$ ,  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , определим оператор свертки и интегро-дифференциальный оператор типа Римана — Лиувилля

$$(J^K h)(t) := a \int_0^t e^{b(t-s)} h(s) ds, \quad (D^{1,K} h)(t) := a D^1 \int_0^t e^{b(t-s)} h(s) ds,$$

тогда преобразование Лапласа  $\widehat{K}(\lambda) = \frac{a}{\lambda - b}$  является аналитическим в  $\Omega_{|b|}$ , а значит, выполняется условие  $(\widehat{K})$ .

Рассмотрим обратную задачу с не зависящим от времени элементом  $u$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \int_0^t e^{b(t-s)} v(\xi, s) ds = 0, \quad \xi \in \Omega, \quad (14)$$

$$B_l \Lambda^k v(\xi, t) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad l = 1, 2, \dots, r, \quad (\xi, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \quad (15)$$

$$a P_n(\Lambda) D^1 \int_0^t e^{b(t-s)} v(\xi, s) ds = Q_n(\Lambda) v(\xi, t) + c(t) u(\xi), \quad (16)$$

$$(\xi, t) \in \Omega \times (0, T], \quad v(\xi, T) = v_T(\xi), \quad \xi \in \Omega,$$

где  $v_T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  — заданные функции.

Пусть  $n_0 := \max\{j \in \{0, 1, \dots, n\} : c_j \neq 0\}$ ,  $\mathcal{Z} := \{w \in H^{2rn_0}(\Omega) : B_l A^k w(\xi) = 0, k = 0, 1, \dots, n_0, l = 1, 2, \dots, r, \xi \in \partial\Omega\}$ . Оператор  $P_n(\Lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}; L_2(\Omega))$  непрерывно обратим тогда и только тогда, когда  $P_n(\lambda_k) \neq 0$  при всех  $k \in \mathbb{N}$ . В этом случае определим на банаховом пространстве  $\mathcal{Z}$  линейный оператор  $A = P_n(\Lambda)^{-1} Q_n(\Lambda)$ , который ограничен в  $\mathcal{Z}$ , если  $n_0 = n$ , т. е.  $c_n \neq 0$ . Если же  $c_n = 0$  и  $n_0 < n$ , имеем оператор  $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$  с областью определения  $D_A := \{w \in H^{2rn}(\Omega) : B_l A^k w(\xi) = 0, k = 0, 1, \dots, n, l = 1, 2, \dots, r, \xi \in \partial\Omega\} \subset \mathcal{Z}$ . Задача (14)–(16) таким образом редуцирована к задаче (6), (7).

**Теорема 5.** Пусть  $P_n(\lambda_k) \neq 0$ ,  $Q_n(\lambda_k) \neq aP_n(\lambda_k)$  при всех  $k \in \mathbb{N}$ ,  $c \in C((0, T]; \mathbb{R}) \cap L_1(0, T; \mathbb{R})$ ,  $u \in L_2(\Omega)$ . Тогда задача (14)–(16) имеет единственное решение

$$v(\xi, t) = c(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle u, \varphi_k \rangle \varphi_k(\xi)}{aP_n(\lambda_k) - Q_n(\lambda_k)} - ab \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_n(\lambda_k) \langle u, \varphi_k \rangle \varphi_k(\xi)}{(Q_n(\lambda_k) - aP_n(\lambda_k))^2} \exp \left( \frac{b(t-s) \frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}}{\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)} - a} \right) c(s) ds.$$

Здесь и далее символом  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  будем обозначать скалярное произведение в пространстве  $L_2(\Omega)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Нетрудно показать, что спектр оператора

$$A = P_n(\Lambda_1)^{-1} Q_n(\Lambda_1)$$

есть множество  $\sigma(A) = \{Q_n(\lambda_k)/P_n(\lambda_k), k \in \mathbb{N}\}$ . Следовательно, неравенство  $Q_n(\lambda_k) \neq aP_n(\lambda_k)$  для всех  $k \in \mathbb{N}$  означает существование обратного оператора  $(K(0) - A)^{-1} = (aI - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ .

Заметим, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b \frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}}{\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)} - a} = b,$$

поэтому существует

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{b \frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}}{\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)} - a} \right|.$$

Рассмотрим равенство при  $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{\frac{a\lambda}{\lambda-b} - \frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{(\lambda-b)e^{\lambda t} d\lambda}{\left(a - \frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}\right) \left(\lambda - \frac{b \frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}}{\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)} - a}\right)} \\ &= \frac{-ab}{\left(\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)} - a\right)^2} \exp \left( \frac{bt \frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}}{\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)} - a} \right), \quad r > \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{b \frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}}{\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)} - a} \right|, \end{aligned}$$

отсюда

$$Z(t) = -ab \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{\left(\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)} - a\right)^2} \exp\left(\frac{bt \frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}}{\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)} - a}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Возьмем  $f(t) = c(t)P_n(\Lambda_1)^{-1}u(\cdot)$  в теореме 2 и получим требуемое утверждение.  $\square$

**Теорема 6.** Пусть  $P_n(\lambda_k) \neq 0$ ,  $Q_n(\lambda_k) \neq aP_n(\lambda_k)$  для всех  $k \in \mathbb{N}$ ,  $c \in C([0, T]; \mathbb{R})$ ,  $v_T \in D_A$ . Тогда обратная задача (14)–(17) корректна, если и только если существует такое  $d > 0$ , что при всех  $k \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{c(T)}{aP_n(\lambda_k) - Q_n(\lambda_k)} - \frac{abP_n(\lambda_k)}{(Q_n(\lambda_k) - aP_n(\lambda_k))^2} \int_0^T \exp\left(\frac{b(T-s)\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}}{\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)} - a}\right) c(s) ds \right| \geq d$$

или

$$\left| \frac{c(T)\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}}{aP_n(\lambda_k) - Q_n(\lambda_k)} - \frac{abQ_n(\lambda_k)}{(Q_n(\lambda_k) - aP_n(\lambda_k))^2} \int_0^T \exp\left(\frac{b(T-s)\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}}{\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)} - a}\right) c(s) ds \right| \geq d.$$

При этом

$$u(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle v_T, \varphi_k \rangle \varphi_k(\xi)}{\frac{c(T)}{aP_n(\lambda_k) - Q_n(\lambda_k)} - \frac{abP_n(\lambda_k)}{(Q_n(\lambda_k) - aP_n(\lambda_k))^2} \int_0^T \exp\left(\frac{b(T-s)\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}}{\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)} - a}\right) c(s) ds}.$$

**Доказательство.** Здесь  $\nu$  — функция единичного скачка в точке  $t = T$ . Возьмем пространство  $\mathcal{U} = L_2(\Omega)$  и оператор-функцию  $B(t) = c(t)P_n(\Lambda_1)^{-1} \in C([0, T]; \mathcal{L}(L_2(\Omega); \mathcal{U}))$ . Таким образом, задача (14)–(17) редуцирована к обратной задаче (6)–(8). Для данной задачи получаем оператор

$$\begin{aligned} \chi := c(T) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{aP_n(\lambda_k) - Q_n(\lambda_k)} \\ - ab \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_n(\lambda_k) \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k(\xi)}{(Q_n(\lambda_k) - aP_n(\lambda_k))^2} \int_0^T \exp\left(\frac{b(T-s)\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}}{\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)} - a}\right) c(s) ds. \end{aligned}$$

Из условий данной теоремы следует, что  $\|\chi^{-1}\|_{\mathcal{L}(D_A; L_2(\Omega))} \leq d^{-1}$ , и по теореме 3  $u = \chi^{-1}v_T$ .  $\square$

Пусть теперь уравнение имеет вид

$$aP_n(\Lambda)D^1 \int_0^t e^{b(t-s)} v(\xi, s) ds = Q_n(\Lambda)v(\xi, t) + c(\xi)u(t), \quad (\xi, t) \in \Omega \times (0, T], \quad (18)$$

и снабжено условиями

$$v(\xi_0, t) = \psi(t), \quad t \in (0, T], \quad (19)$$

где  $c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\psi : (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  — заданные функции,  $\xi_0 \in \Omega$  — фиксированная точка.

Рассмотрим задачу (14), (15), (18), (19).

**Теорема 7.** Пусть  $P_n(\lambda_k) \neq 0$ ,  $Q_n(\lambda_k) \neq aP_n(\lambda_k)$  для всех  $k \in \mathbb{N}$ ,  $c \in L_2(\Omega)$ ,  $\xi_0 \in \Omega$ ,  $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ ,  $D^{1,K}\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ ,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle c, \varphi_k \rangle \varphi_k(\xi_0)}{aP_n(\lambda_k) - Q_n(\lambda_k)} \neq 0. \quad (20)$$

Тогда задача (14), (15), (18), (19) имеет единственное решение, при этом выполняется оценка

$$\|u\|_{C([0, T]; \mathbb{R})} \leq C \|D^{1,K}\psi\|_{C([0, T]; \mathbb{R})},$$

где  $C > 0$  не зависит от  $\psi$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Возьмем пространство  $\mathcal{U} = \mathbb{R}$  и оператор-функцию  $B$  в виде функции умножения на  $P_n(\Lambda_1)^{-1}c \in C([0, T]; \mathcal{U})$ . Задача (14), (15), (18), (19) редуцирована к обратной задаче (10)–(12). Условие (20) означает, что существует  $(\Phi K(0)(K(0) - A)^{-1}B)^{-1} \in \mathbb{R}$ . По теореме 4 получим требуемое.  $\square$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kozhanov A. I. Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
2. Prilepko A. I., Orlovskii D. G., Vasin I. A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York; Basel: Marcel Dekker, Inc., 2000.
3. Тихонов И. В., Айдельман Ю. С. Обратная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве и распределение нулей целой функции типа Миттаг-Леффлера // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 5. С. 637–644.
4. Abasheeva N. L. Some inverse problems for parabolic equations with changing time direction // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2004. V. 12, N 4. P. 337–348.
5. Fedorov V. E., Urazaeva A. V. An inverse problem for linear Sobolev type equations // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2004. V. 12, N 4. P. 387–395.
6. Favini A., Lorenzi A. Differential equations. Inverse and direct problems. New York: Chapman and Hall/CRC, 2006.
7. Фалалеев М. В. Абстрактная задача прогноз-управление с вырождением в банаховых пространствах // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2010. Т. 3, № 1. С. 126–132.
8. Пятков С. Г., Самков М. Л. О некоторых классах коэффициентных обратных задач для параболических систем уравнений // Мат. тр. 2012. Т. 15, № 1. С. 155–177.
9. Al Horani M., Favini A. Degenerate first-order inverse problems in Banach spaces // Nonlinear Anal. 2012. V. 75, N 1. P. 68–77.
10. Глушак А. В. Об одной обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения дробного порядка // Мат. заметки. 2010. Т. 87, вып. 5. С. 684–693.
11. Orlovsky D. G. Parameter determination in a differential equation of fractional order with Riemann–Liouville fractional derivative in a Hilbert space // Журн. Сиб. федер. ун-та. Математика и физика. 2015. Т. 8, № 1. P. 55–63.
12. Fedorov V. E., Nazhimov R. R. Inverse problems for a class of degenerate evolution equations with Riemann–Liouville derivative // Fract. Calc. Appl. Anal. 2019. V. 22, N 2. P. 271–286.
13. Fedorov V. E., Nagumanova A. V., Avilovich A. S. A class of inverse problems for evolution equations with the Riemann–Liouville derivative in the sectorial case // Math. Methods Appl. Sci. 2021. V. 44, N 15. P. 11961–11969.
14. Fedorov V. E., Ivanova N. D. Identification problem for degenerate evolution equations of fractional order // Fract. Calc. Appl. Anal. 2017. V. 20, N 3. P. 706–721.
15. Orlovsky D. G. Determination of the parameter of the differential equation of fractional order with the Caputo derivative in Hilbert space // J. Phys. Conf. Ser. 2019. V. 1205, N 1. 012042.
16. Федоров В. Е., Костич М. Задача идентификации для сильно вырожденных эволюционных уравнений с производной Герасимова — Капуто // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57, № 1. С. 100–113.

17. Fedorov V. E., Nagumanova A. V., Kostić M. A class of inverse problems for fractional order degenerate evolution equations // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2021. V. 29, N 2. P. 173–184.
18. Ашуров Р. Р., Файзиев Ю. Э. Обратная задача по определению порядка дробной производной в волновом уравнении // Мат. заметки. 2021. Т. 110, № 6. С. 824–836.
19. Kostin A. B., Piskarev S. I. Inverse source problem for the abstract fractional differential equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2021. V. 29, N 2. P. 267–281.
20. Fedorov V. E., Ivanova N. D., Borel L. V., Avilovich A. S. Nonlinear inverse problems for fractional differential equations with sectorial operators // Lobachevskii J. Math. 2022. V. 43, N 11. P. 3125–3141.
21. Fedorov V. E., Nagumanova A. V. Inverse linear problems for a certain class of degenerate fractional evolution equations // J. Math. Sci. 2022. V. 260, N 3. P. 371–386.
22. Федоров В. Е., Плеханова М. В., Иванова Н. Д., Шуклина А. Ф., Филин Н. В. Нелинейные обратные задачи для некоторых уравнений с дробными производными // Челяб. физ.-мат. журн. 2023. Т. 8, вып. 2. С. 190–202.
23. Fedorov V. E., Plekhanova M. V., Melekhina D. V. Nonlinear inverse problems for equations with Dzhrbashyan–Nersesyan derivatives // Fractal and Fractional. 2023. V. 7, N 6. P. 464.
24. Fedorov V. E., Plekhanova M. V., Melekhina D. V. On local unique solvability for a class of nonlinear identification problems // Axioms. 2023. V. 12, N 11. P. 1013.
25. Федоров В. Е., Плеханова М. В., Сагимбаева А. О. Нелинейные обратные задачи со стационарным неизвестным элементом для уравнений с производными Джрбашьяна — Нерсисяна // Мат. заметки СВФУ. 2024. Т. 31, № 3. С. 53–72.
26. Plekhanova M. V., Izhberdeeva E. M., Melekhina D. V., Sagimbaeva A. O. Global solvability of nonlinear inverse problems with Dzhrbashyan–Nersesyan derivatives and sectorial operators // J. Math. Sci. 2025. Publ. 15 Feb. 2025. <https://doi.org/10.1007/s10958-025-07570-1>
27. Fedorov V. E., Godova A. D., Kien B. T. Integro-differential equations with bounded operators in Banach spaces // Bull. Karaganda Univ. Math. Ser. 2024. N 2. P. 93–107.
28. Федоров В. Е., Годова А. Д. Интегро-дифференциальные уравнения в банаховых пространствах и аналитические разрешающие семейства операторов // Современная математика. Фундаментальные направления. 2023. Т. 69, вып. 1. С. 166–184.
29. Федоров В. Е., Годова А. Д. Интегро-дифференциальные уравнения типа Герасимова с секториальными операторами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2024. Т. 30, № 2. С. 243–258.
30. Федоров В. Е., Годова А. Д. Линейные обратные задачи для интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах с ограниченным оператором // Современная математика. Фундаментальные направления. 2024. Т. 70, вып. 4. С. 79–90.
31. Федоров В. Е., Мелехина Д. В. Линейные задачи идентификации для сингулярных интегро-дифференциальных уравнений типа Герасимова // Мат. заметки СВФУ. 2025. Т. 32, № 1. С. 46–64.
32. Caputo M., Fabrizio M. A new definition of fractional derivative without singular kernel // Progr. Fract. Differ. Appl. 2015. V. 1, N 2. P. 73–85.
33. Atangana A., Baleanu D. New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model // Thermal Sci. 2016. V. 20. P. 763–769.
34. Нагуманова А. В., Федоров В. Е. Прямые и обратные задачи для линейных уравнений с производной Капуто — Фабрицио и ограниченным оператором // Челяб. физ.-мат. журн. 2024. Т. 9, вып. 3. С. 389–406.
35. Fedorov V. E., Nagumanova A. V. Direct and inverse problems for evolution equations with regular integrodifferential operators // J. Math. Sci. 2024. V. 286, N 2. P. 278–289.
36. LePage W. R. Complex variables and the Laplace transform for engineers. New York: Dover Publ., 1961.
37. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные

операторы. М.: Мир, 1980.

*Поступила в редакцию 7 августа 2025 г.*

*После доработки 19 августа 2025 г.*

*Принята к публикации 29 августа 2025 г.*

Федоров Владимир Евгеньевич,  
Нагуманова Анна Викторовна,  
Сагимбаева Ангелина Олеговна,  
Челябинский государственный университет,  
кафедра математического анализа,  
ул. Бр. Кашириных, 129, комн. 447, Челябинск 454001  
`kar@csu.ru`, `urazaeva_anna@mail.ru` `angsag@mail.ru`

A CAUCHY TYPE PROBLEM AND  
INVERSE PROBLEMS FOR EQUATIONS  
WITH A RIEMANN—LIOUVILLE TYPE  
REGULAR INTEGRO-DIFFERENTIAL  
OPERATOR AND A CLOSED OPERATOR

V. E. Fedorov, A. V. Nagumanova,  
and A. O. Sagimbaeva

**Abstract:** The unique solvability of a Cauchy-type problem and linear inverse coefficient problems for an evolution equation in a Banach space with a first-order Riemann–Liouville integro-differential operator with a regular kernel is investigated. The operator at the unknown function in the equation is assumed to be closed. The conditions for the existence and uniqueness of a solution of the Cauchy type problem for a linear inhomogeneous equation are obtained. A criterion of correct solvability is found for the inverse problem with a stationary unknown coefficient and with an integral overdetermination condition in the Riemann–Stieltjes sense, which includes the condition of final overdetermination as a special case. The conditions for the solvability and stability of a solution of the inverse problem with a nonstationary unknown coefficient and an abstract overdetermination condition on the interval are found. The abstract results obtained are used in the study of linear inverse initial boundary value problems for equations with a first-order Riemann–Liouville type regular integro-differential operator in a time variable, with polynomials with respect to a self-adjoint elliptic differential operator in spatial variables and with an unknown coefficient.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-3-95-112

**Keywords:** Riemann–Liouville type regular integro-differential operator, linear evolution equation in a Banach space, Cauchy type problem, linear inverse coefficient problem, initial boundary value problem.

REFERENCES

1. Kozhanov A. I., Composite Type Equations and Inverse Problems, Utrecht, VSP (1999).
2. Prilepko A. I., Orlovskii D. G., and Vasin I. A., Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics, Marcel Dekker, New York; Basel (2000).
3. Tikhonov I. V. and Eidelman Yu. S., “An inverse problem for a differential equation in a Banach space and the distribution of zeros of an entire Mittag-Leffler function,” *Differ. Equ.*, **38**, No. 5, 669–677 (2002).
4. Abasheeva N. L., “Some inverse problems for parabolic equations with changing time direction,” *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **12**, No. 4, 337–348 (2004).
5. Fedorov V. E. and Urazaeva A. V., “An inverse problem for linear Sobolev type equations,” *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **12**, No. 4, 387–395 (2004).
6. Favini A. and Lorenzi A., *Differential Equations, Inverse and Direct Problems*, Chapman and Hall/CRC, New York (2006).



7. *Falaleev M. V.*, “Abstract problem of prediction-control with degeneration in Banach spaces [in Russian],” *Izv. Irkut. Gos. Univ., Ser. Mat.*, **3**, No. 1, 126–132 (2010).
8. *Pyatkov S. G. and Samkov M. L.*, “On some classes of coefficient inverse problems for parabolic systems of equations,” *Sib. Adv. Math.*, **22**, No. 4, 155–177 (2012).
9. *Al Horani M. and Favini A.*, “Degenerate first-order inverse problems in Banach spaces,” *Nonlinear Anal.*, **75**, No. 1, 68–77 (2012).
10. *Glushak A. V.*, “On an inverse problem for an abstract differential equation of fractional order,” *Math. Notes*, **87**, No. 5, 654–662 (2010).
11. *Orlovsky D. G.*, “Parameter determination in a differential equation of fractional order with Riemann–Liouville fractional derivative in a Hilbert space,” *J. Sib. Fed. Univ., Ser. Math. Phys.*, **8**, No. 1, 55–63 (2015).
12. *Fedorov V. E. and Nazhimov R. R.*, “Inverse problems for a class of degenerate evolution equations with Riemann–Liouville derivative,” *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **22**, No. 2, 271–286 (2019).
13. *Fedorov V. E., Nagumanova A. V., and Avilovich A. S.*, “A class of inverse problems for evolution equations with the Riemann–Liouville derivative in the sectorial case,” *Math. Methods Appl. Sci.*, **44**, No. 15, 11961–11969 (2021).
14. *Fedorov V. E. and Ivanova N. D.*, “Identification problem for degenerate evolution equations of fractional order,” *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **20**, No. 3, 706–721 (2017).
15. *Orlovsky D. G.*, “Determination of the parameter of the differential equation of fractional order with the Caputo derivative in Hilbert space,” *J. Phys. Conf. Ser.*, **1205**, No. 1, article ID 012042 (2019).
16. *Fedorov V. E. and Kostic M.*, “Identification problem for strongly degenerate evolution equations with the Gerasimov–Caputo derivative,” *Differ. Equ.*, **56**, No. 12, 1613–1627 (2020).
17. *Fedorov V. E., Nagumanova A. V., and Kostić M.*, “A class of inverse problems for fractional order degenerate evolution equations,” *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **29**, No. 2, 173–184 (2021).
18. *Ashurov R. R. and Fayziev Yu. E.*, “Inverse problem for finding the order of the fractional derivative in the wave equation,” *Math. Notes*, **110**, No. 6, 842–852 (2021).
19. *Kostin A. B. and Piskarev S. I.*, “Inverse source problem for the abstract fractional differential equation,” *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **29**, No. 2, 267–281 (2021).
20. *Fedorov V. E., Ivanova N. D., Borel L. V., and Avilovich A. S.*, “Nonlinear inverse problems for fractional differential equations with sectorial operators,” *Lobachevskii J. Math.*, **43**, No. 11, 3125–3141 (2022).
21. *Fedorov V. E. and Nagumanova A. V.*, “Inverse linear problems for a certain class of degenerate fractional evolution equations,” *J. Math. Sci.*, **260**, No. 3, 371–386 (2022).
22. *Fedorov V. E., Plekhanova M. V., Ivanova N. D., Shuklina A. F., and Filin N. V.*, “Nonlinear inverse problems for some equations with fractional derivatives,” *Chelyab. Phys. Math. J.*, **8**, No. 2, 190–202 (2023).
23. *Fedorov V. E., Plekhanova M. V., and Melekhina D. V.*, “Nonlinear inverse problems for equations with Dzhrbashyan–Nersesyan derivatives,” *Fractal Fract.*, **7**, No. 6, article ID 464 (2023).
24. *Fedorov V. E., Plekhanova M. V., and Melekhina D. V.*, “On local unique solvability for a class of nonlinear identification problems,” *Axioms*, **12**, No. 11, article ID 1013 (2023).
25. *Fedorov V. E., Plekhanova M. V., and Sagimbaeva A. O.*, “Nonlinear inverse problems with a stationary unknown element for equations with Dzhrbashyan–Nersesyan derivatives,” *Mat. Zamet. SVFU*, **31**, No. 3, 53–72 (2024).
26. *Plekhanova M. V., Izherdeeva E. M., Melekhina D. V., and Sagimbaeva A. O.*, “Global solvability of nonlinear inverse problems with Dzhrbashyan–Nersesyan derivatives and sectorial operators,” *J. Math. Sci.* (publ. 15 Feb. 2025) (2025). <https://doi.org/10.1007/s10958-025-07570-1>
27. *Fedorov V. E., Godova A. D., and Kien B. T.*, “Integro-differential equations with bounded operators in Banach spaces,” *Bull. Karaganda Univ. Math. Ser.*, No. 2, 93–107 (2024).
28. *Fedorov V. E. and Godova A. D.*, “Integro-differential equations in Banach spaces and analytic resolving families of operators,” *J. Math. Sci.*, **283**, No. 2, 317–334 (2024).
29. *Fedorov V. E. and Godova A. D.*, “Integro-differential equations of Gerasimov type with sectorial operators,” *Proc. Steklov Inst. Math.*, **325**, suppl. 1, S99–S113 (2024).

- 30. Fedorov V. E. and Godova A. D., “Linear inverse problems for integro-differential equations in Banach spaces with a bounded operator [in Russian],” *Contemp. Math., Fund. Directions*, **70**, No. 4, 79–90 (2024).
- 31. Fedorov V. E. and Melekhina D. V., “Linear identifications problems for singular integro-differential equations of Gerasimov type,” *Mat. Zamet. SVFU*, **32**, No. 1, 46–64 (2025).
- 32. Caputo M., Fabrizio M., “A new definition of fractional derivative without singular kernel,” *Progr. Fract. Differ. Appl.*, **1**, No. 2, 73–85 (2015).
- 33. Atangana A. and Baleanu D., “New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model,” *Thermal Sci.*, **20**, 763–769 (2016).
- 34. Nagumanova A. V. and Fedorov V. E., “Direct and inverse problems for linear equations with Caputo–Fibrizio derivative and a bounded operator,” *Chelyab. Phys. Math. J.*, **9**, No. 3, 389–406 (2024).
- 35. Fedorov V. E. and Nagumanova A. V., “Direct and inverse problems for evolution equations with regular integrodifferential operators,” *J. Math. Sci.*, **286**, No. 2, 278–289 (2024).
- 36. LePage W. R., *Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers*, Dover Publ., New York (1961).
- 37. Triebel H., *Interpolation Theory, Functional Spaces, Differential Operators*, VEB Deutsch. Verl. Wiss., Berlin (1978).

*Submitted August 7, 2025*

*Revised August 19, 2025*

*Accepted August 29, 2025*

Vladimir E. Fedorov, Anna V. Nagumanova, and Angelina O. Sagimbaeva  
Mathematical Analysis Department,  
Chelyabinsk State University,  
129 Kashirin Brothers Street, Chelyabinsk 454001, Russia  
`kar@csu.ru`, `urazaeva_anna@mail.ru` `angsag@mail.ru`

## О ВЫСОКОТОЧНОМ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СКРЫТЫХ АТТРАКТОРОВ В КУСОЧНО–ГЛАДКОЙ СИСТЕМЕ ЧУА

А. Н. Пчелинцев

**Аннотация.** Рассматривается адаптация к кусочно-гладкой системе Чуа разработанного ранее высокоточного численного метода построения приближений к неустойчивым решениям динамических систем с квадратичными нелинейностями на их аттракторах. Также получена модификация алгоритма Бенеттина — Вольфа для вычисления характеристических показателей Ляпунова рассматриваемой кусочно-гладкой системы для рассматриваемого режима. Разработан способ, основанный на методе наименьших квадратов, позволяющий вычислить усредненную оценку старшего показателя Ляпунова на основе данных о поведении линеаризованной динамической системы с использованием высокоточного метода на больших промежутках времени. Для скрытых аттракторов в системе Чуа получены следующие результаты: 1) фрактальная размерность скрытого хаотического аттрактора на основе статистики возвратов Пуанкаре, 2) значения характеристических показателей Ляпунова для устойчивого цикла и хаотического аттрактора с помощью разработанной модификации алгоритма Бенеттина — Вольфа; повышена его эффективность за счет использования параллельных вычислений.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-3-113-134

**Ключевые слова:** система Чуа, характеристические показатели Ляпунова, высокоточный численный метод, кусочно-гладкая система, возвраты Пуанкаре, параллельные вычисления.

### 1. Введение

Рассмотрим кусочно-гладкую динамическую систему Чуа [1–3]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha(x_2 - \mu x_1) - \alpha\psi(x_1), \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = -\beta x_2 - \gamma x_3, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$\psi(x_1) = \frac{a}{2}(|x_1 + 1| - |x_1 - 1|), \quad (2)$$

$\alpha, \mu = m_1 + 1, \beta, \gamma, a = m_0 - m_1, m_0$  и  $m_1$  — параметры системы.

Заметим, что по виду функции  $\psi(x_1)$  систему (1) можно назвать *системой с преобразователем типа упора* [4, с. 23, 24].

Для локализации скрытых аттракторов системы (1) в работах [1–3] используется метод описывающей функции. При этом приведены значения начальных условий, дающих приближения к этим аттракторам.

При оценке характеристик аттракторов динамических систем (например, спектра показателей Ляпунова, фрактальных размерностей и др.) важно иметь высокоточные методы построения приближений к их решениям на больших промежутках времени из-за неустойчивости решений таких систем на аттракторах. Классические численные методы могут давать большие накопления ошибок из-за конечной точности представления вещественных чисел в ЭВМ и погрешностей численного интегрирования. Заметим, что для системы Чуа на сегодня существует не так много работ, посвященных особенностям численного интегрирования системы. Поскольку функция  $\psi(x_1)$  не является всюду гладкой, применение классических численных методов также усложнено тем, что переходы через плоскости  $x_1 = \pm 1$  вызывают скачок погрешности метода. Например, для дифференциальных уравнений с разрывной правой частью можно использовать [5–8] метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности в областях гладкости с последующим склеиванием приближенных решений на границе. Однако ошибка определения момента времени, когда траектория пересекает такую границу, дает свой вклад в накопление общей ошибки интегрирования, которая со временем нарастает, если точное решение системы в некоторых областях неустойчиво. Заметим, что данная проблема в известной литературе достаточно редко рассматривается [6, 9, 10]. Пример системы уравнений с кусочно-гладкой правой частью лоренцева типа, для которой решения на аттракторе неустойчивы и имеют место скользящие режимы, приведен в статье [11]. В статье [12] представлена схема алгоритма численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с произвольным количеством поверхностей разрыва в виде конечного автомата, с помощью которой можно построить приближенные решения таких систем в общем виде. Данная схема предусматривает скользящие режимы.

Отметим, что в современной литературе (см., например, [13]) для кусочно-гладких систем некоторые исследователи применяют высокоточные модификации метода гармонического баланса для отыскания приближений к периодическим решениям, являющегося численно-аналитическим и достаточно трудоемким по алгоритмической реализации в общем случае.

В последние годы появилось несколько работ [14–19] автора, посвященных разработке высокоточного численного метода построения приближений к неустойчивым решениям динамических систем с квадратичными нелинейностями на их аттракторах на базе метода степенных рядов и локализации вертикальных асимптот динамических систем взрывного типа [19]. В статье [19] также была предложена идея переноса разработанного метода на негладкий случай системы (1). Заметим, что данный метод может быть применен и для проверки точности найденного приближения к неустойчивому периодическому решению системы Лоренца [20].

Для применения рассматриваемых численных схем нужно описать следу-

ющие моменты. Введем обозначение:

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} \alpha(x_2 - \mu x_1) - \alpha\psi(x_1) \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ -\beta x_2 - \gamma x_3 \end{bmatrix}.$$

Перепишем систему (1) в векторной форме:

$$\dot{X} = F(X),$$

где  $X(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)]^\top$ .

Заметим, что функция  $\psi(x_1)$  глобально липшицева:

$$\begin{aligned} |\psi(x_1) - \psi(y_1)| &\leq \frac{|a|}{2} (|x_1 + 1| - |y_1 + 1|) - (|x_1 - 1| - |y_1 - 1|) \\ &\leq \frac{|a|}{2} (|x_1 + 1| - |y_1 + 1| + |x_1 - 1| - |y_1 - 1|), \end{aligned}$$

по свойству модуля  $||r| - |w|| \leq |r - w|$  имеем

$$|\psi(x_1) - \psi(y_1)| \leq \frac{|a|}{2} (|x_1 - y_1| + |x_1 - y_1|) \leq l|x_1 - y_1|$$

с константой Липшица  $l = |a|$ .

Поскольку остальные компоненты векторной функции  $F(x_1, x_2, x_3)$  линейны, то функция  $F$  удовлетворяет условию Липшица. Тогда решение системы (1) существует и единственно для любых начальных условий [21].

По свойству функции  $\psi(x_1)$

$$|\psi(x_1)| \leq |a||x_1|$$

имеем оценку

$$|\alpha(x_2 - \mu x_1) - \alpha\psi(x_1)| \leq ((|\alpha\mu| + |a|)|x_1| + |\alpha||x_2|) \leq n_1(|x_1| + |x_2| + |x_3|) = n_1\|X\|_1,$$

где  $n_1 = \max\{|\alpha\mu| + |a|, |\alpha|, 1\}$ . Аналогично

$$|x_1 - x_2 + x_3| \leq \|X\|_1, \quad |-\beta x_2 - \gamma x_3| \leq n_3\|X\|_1,$$

где  $n_3 = \max\{1, |\beta|, |\gamma|\}$ . Тогда

$$\|F(X)\|_1 \leq (n_1 + 1 + n_3)\|X\|_1 = L(\|X\|_1),$$

причем функция  $L(\varphi)$  удовлетворяет условию Осгуда [22]. Таким образом, все решения системы (1) нелокально продолжаемы вправо.

В настоящей статье будем исследовать два скрытых аттрактора в системе (1), существование которых доказано в статье [1]. Также в статье [1] приведены начальные условия, близкие к скрытым аттракторам, и доказан их тип для значений параметров  $\alpha = 8.4$ ,  $\beta = 12$ ,  $\gamma = -0.005$ ,  $m_0 = -1.2$  и  $m_1 = -0.05$ .

1. Устойчивый цикл с циклической частотой

$$\omega \approx 3.2396 \tag{3}$$

и приближение к его начальным условиям:

$$X(0) = \begin{bmatrix} 11.7546 \\ 9.7044 \\ -16.7367 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

2. Хаотический аттрактор:

$$X(0) = \begin{bmatrix} 1.5187 \\ 0.0926 \\ -2.1682 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Целью настоящей статьи является адаптация высокоточного численного метода для систем с квадратичной правой частью к кусочно-гладкой системе (1). На базе данного метода провести исследования режимов (4) и (5) и решить следующие задачи.

1. Модифицировать алгоритм Бенеттина — Вольфа для гладких систем при вычислении характеристических показателей Ляпунова системы (1) для рассматриваемого режима.

2. Разработать способ, основанный на методе наименьших квадратов, позволяющий вычислить усредненную оценку старшего показателя Ляпунова на основе данных о поведении линеаризованной динамической системы на больших промежутках времени.

3. Вычислить фрактальную размерность для режима (5) на основе статистики возвратов Пуанкаре.

4. Вычислить значения характеристических показателей Ляпунова для режимов (4) и (5) с помощью разработанной модификации алгоритма Бенеттина — Вольфа; повысить его эффективность за счет использования параллельных вычислений.

## 2. Описание численного метода

Модули, стоящие в правой части первого уравнения системы (1), определяют три области, разделенные плоскостями с уравнениями

$$x_1 = 1 \quad (6)$$

и

$$x_1 = -1, \quad (7)$$

которым будут соответствовать свои гладкие системы. Введем номер области  $j$ :

- 1)  $j = 0$  при  $x_1 < -1$ ,
- 2)  $j = 1$  при  $x_1 \in [-1, 1]$ ,
- 3)  $j = 2$  при  $x_1 > 1$ .

Перепишем систему (1) в общем виде для введенных областей:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = q_j + p_j x_1 + \alpha x_2 \equiv w_1(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = -\beta x_2 - \gamma x_3, \end{cases} \quad (8)$$

где  $q_0 = c$ ,  $p_0 = d$ ,  $q_1 = 0$ ,  $p_1 = b$ ,  $q_2 = -c$ ,  $p_2 = d$ ;  $b = -\alpha(m_0 + 1)$ ,  $c = a\alpha$ ,  $d = -\mu\alpha$ .

Представим решение системы (8) в области с номером  $j$  в виде степенных рядов:

$$x_1(t) = \xi_{1,0}^{(j)} + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{1,i}^{(j)} t^i, \quad x_2(t) = \xi_{2,0}^{(j)} + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{2,i}^{(j)} t^i, \quad x_3(t) = \xi_{3,0}^{(j)} + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{3,i}^{(j)} t^i, \quad (9)$$

сходящихся на некотором отрезке времени  $[-\tau, \tau]$ . В общем случае значение  $\tau$  ограничено и зависит от выбора начальных условий [14, 19].

Отметим, что, исходя из формул (9),  $\xi_{1,0}^{(j)}$ ,  $\xi_{2,0}^{(j)}$  и  $\xi_{3,0}^{(j)}$  — заданные значения начальных условий для системы (8) в рассматриваемой области с номером  $j$ .

Коэффициенты разложения в ряды (9) имеют вид [16, 17]

$$\xi_{1,1}^{(j)} = q_j + p_j \xi_{1,0}^{(j)} + \alpha \xi_{2,0}^{(j)}, \quad \xi_{2,1}^{(j)} = \xi_{1,0}^{(j)} - \xi_{2,0}^{(j)} + \xi_{3,0}^{(j)}, \quad (10)$$

$$\xi_{3,1}^{(j)} = -\beta \xi_{2,0}^{(j)} - \gamma \xi_{3,0}^{(j)}; \quad (11)$$

при  $i \geq 2$

$$\xi_{1,i}^{(j)} = \frac{p_j \xi_{1,i-1}^{(j)} + \alpha \xi_{2,i-1}^{(j)}}{i}, \quad \xi_{2,i}^{(j)} = \frac{\xi_{1,i-1}^{(j)} - \xi_{2,i-1}^{(j)} + \xi_{3,i-1}^{(j)}}{i}, \quad (12)$$

$$\xi_{3,i}^{(j)} = \frac{-\beta \xi_{2,i-1}^{(j)} - \gamma \xi_{3,i-1}^{(j)}}{i}. \quad (13)$$

Чтобы при вычислениях оперировать положительными (или отрицательными) шагами по времени, необходимо иметь гарантированную оценку величины  $\tau$ . Поэтому перепишем систему (8) в векторной форме [16, 17]:

$$\dot{X} = A_0^{(j)} + A_1^{(j)} X,$$

где

$$A_0^{(j)} = [q_j \ 0 \ 0]^T, \quad A_1^{(j)} = \begin{bmatrix} p_j & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Затем вычисляем значения функций

$$h_1(\xi_{1,0}^{(j)}, \xi_{2,0}^{(j)}, \xi_{3,0}^{(j)}) = |\xi_{1,0}^{(j)}| + |\xi_{2,0}^{(j)}| + |\xi_{3,0}^{(j)}|, \quad (15)$$

$$h_2(\xi_{1,0}^{(j)}, \xi_{2,0}^{(j)}, \xi_{3,0}^{(j)}) = \begin{cases} \|A_0^{(j)}\| + \|A_1^{(j)}\| \cdot h_1(\xi_{1,0}^{(j)}, \xi_{2,0}^{(j)}, \xi_{3,0}^{(j)}), & \text{если } h_1 > 1, \\ \|A_0^{(j)}\| + \|A_1^{(j)}\| & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (16)$$

$$\tau(\xi_{1,0}^{(j)}, \xi_{2,0}^{(j)}, \xi_{3,0}^{(j)}) = \frac{1}{h_2(\xi_{1,0}^{(j)}, \xi_{2,0}^{(j)}, \xi_{3,0}^{(j)}) + \delta_{pw}}, \quad (17)$$

где

$$\|A_0^{(j)}\| = \|A_0^{(j)}\|_1 = |q_j|, \quad \|A_1^{(j)}\| = \|A_1^{(j)}\|_1 = \max\{|p_j| + 1, |\alpha| + |\beta| + 1, |\gamma| + 1\},$$

$\delta_{pw}$  — любое положительное число.

Алгоритм построения дуги траектории системы [8] подробно описан в тезисах [23] с использованием высокоточных вычислений на базе библиотеки MPFR C++ [24] в случае, когда дуга траектории на рассматриваемом отрезке времени целиком находится в области с номером  $j$ . Отметим, что метод аналогичен методам Рунге-Кутты, но с гибким изменением порядка и выбором шага, обеспечивающим сходимость рядов (9).

Далее рассмотрим модификацию данного алгоритма с учетом кусочно-гладкой правой части системы (1).

Введем векторы

$$\Xi_i^{(j)} = [\xi_{1,i}^{(j)} \ \xi_{2,i}^{(j)} \ \xi_{3,i}^{(j)}]^\top.$$

Пусть  $T$  — длина отрезка интегрирования. Зададим такое представление вещественного числа, чтобы

$$\varepsilon_m \ll \varepsilon_{pw},$$

где  $\varepsilon_m$  — машинный эпсилон и  $\varepsilon_{pw}$  — точность оценки общего члена ряда (9). Таким образом, суммирование при использовании формулы (9) прекращается при таком значении  $i = i^*$ , когда

$$\|\Xi_{i^*}^{(j)}\| \cdot |\Delta t|^{i^*} < \varepsilon_{pw}, \quad (18)$$

где  $\Delta t$  — шаг интегрирования. Отметим, что для сходимости ряда величину  $\Delta t$  нужно выбирать так:

$$0 < \Delta t \leq \tau(\Xi_0^{(j)}).$$

Рассмотрим более подробно алгоритм построения дуги траектории системы (1) на отрезке времени  $[0, T]$ . В начале алгоритма по начальному условию для координаты  $x_1$  определяем, в какой части фазового пространства мы находимся, т. е. номер  $j$ . Далее делаем шаг по времени  $\Delta t = \tau(\Xi_0^{(j)})$  вперед. При этом нужно запомнить полученные полиномы  $\tilde{x}_1(t)$ ,  $\tilde{x}_2(t)$  и  $\tilde{x}_3(t)$ , аппроксимирующие соответствующие фазовые координаты  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  и  $x_3(t)$  на отрезке времени  $[0, \Delta t]$ .

Если  $\tilde{x}_1(\Delta t)$  не принадлежит текущей части фазового пространства, то необходимо с высокой точностью найти момент времени  $t = \Delta t_{new}$ , когда траектория пересекает одну из плоскостей (6) или (7). Для этого методом секущих численно решается уравнение

$$\tilde{x}_1(t) - g = 0, \quad (19)$$

где  $g = 1$  или  $g = -1$ , с заданной погрешностью  $\delta_{sec}$ . Заметим, что под достижением величины  $\delta_{sec}$  в итерационном процессе

$$\Delta t^{[k]}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (20)$$

поиска приближений к корню  $\Delta t_{new}$  уравнения (19) понимается достижение такого номера  $k = k^*$ , когда

$$|\Delta t^{[k^*]} - \Delta t^{[k^*-1]}| < \delta_{sec}.$$



Далее вектор начальных условий принимается равным

$$\Xi_0^{(j_{new})} = [g \quad \tilde{x}_2(\Delta t^{[k*]}) \quad \tilde{x}_3(\Delta t^{[k*]})]^\top,$$

где  $j_{new}$  — номер новой области, в которую мы попали, и поскольку система (8) динамическая, начальный момент времени принимается равным нулю.

Преимущества метода секущих при решении данной задачи:

- 1) для достижения точности  $\varepsilon_{sec}$  этим методом требуется  $O(\ln \ln(1/\varepsilon_{sec}))$  итераций, как и в методе Ньютона [25, с. 335, 336];
- 2) не требуется построения выражений и вычисления производной функции  $\tilde{x}_1(t)$ ;
- 3) перед началом итерационного процесса (20) имеем отрезок  $[0, \Delta t]$  локализации корня.

Отметим, что в работах [6, 10] во избежание скачка погрешности приближенного решения в методе Рунге-Кутты 4-го порядка точности для корректировки шага интегрирования используются интерполяционные полиномы с интерполяцией назад и метод Ньютона для численного решения уравнения относительно шага с экстраполяцией до поверхности границы раздела областей, чтобы не вычислять значения правой части системы в другой области. В нашем случае аппроксимирующие полиномы фазовые координаты  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  и  $x_3(t)$  строятся по коэффициентам рядов (9).

Описанный алгоритм является базовым для всех дальнейших исследований характеристик аттракторов в системе (1). Сначала рассмотрим его применение для вычислений спектра показателей Ляпунова.

### 3. Модификация алгоритма Бенеттина — Вольфа для вычисления оценок значений характеристических показателей Ляпунова

Для вычисления оценок значений характеристических показателей Ляпунова на практике обычно используют алгоритм Бенеттина — Вольфа [26, 27]. Однако его применение напрямую к системе (1) осложнено тем, что она не является гладкой. Поэтому осуществим следующую процедуру.

Рассмотрим разностный аналог частной производной функции  $w_1$  и матрицы Якоби для системы (8)

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} &\simeq \frac{q_{j_{new}} + p_{j_{new}}(x_1 + \Delta) + \alpha x_2 - q_j - p_j x_1 - \alpha x_2}{\Delta} \\ &= p_{j_{new}} + \frac{q_{j_{new}} - q_j + (p_{j_{new}} - p_j)x_1}{\Delta}, \\ \tilde{J}_{j \mapsto j_{new}}(x_1) &= \begin{bmatrix} p_{j_{new}} + \frac{q_{j_{new}} - q_j + (p_{j_{new}} - p_j)x_1}{\Delta}, & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $\Delta$  — достаточно малая величина,  $p_{j_{new}}$  и  $q_{j_{new}}$  — значения коэффициентов системы (8) в новой области фазового пространства с номером  $j_{new}$ ,  $j \mapsto j_{new}$

означает переход из текущей области с номером  $j$  в область с номером  $j_{new}$ . Заметим, что когда  $j_{new} = j$ , матрица в формуле (21) совпадает с матрицей в (14).

Выбор величины  $\Delta$  осуществляется следующим образом. Пусть  $\delta_{x_1} > 0$  — заданная малая величина. Если  $j_{new} < j$ , то  $\Delta = -\delta_{x_1}$  (идет движение в сторону уменьшения координаты  $x_1$ ); иначе  $\Delta = \delta_{x_1}$ . В нашем случае направление возрастания нумерации областей фазового пространства совпадает с направлением возрастания координаты  $x_1$ .

Пусть  $x_4(t)$ ,  $x_5(t)$  и  $x_6(t)$  — возмущения для координат  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  и  $x_3(t)$  соответственно. Тогда уравнения относительно данных возмущений имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_4 &= \left( p_{j_{new}} + \frac{q_{j_{new}} - q_j + (p_{j_{new}} - p_j)x_1}{\Delta} \right) x_4 + \alpha x_5, \\ \dot{x}_5 &= x_4 - x_5 + x_6, \\ \dot{x}_6 &= -\beta x_5 - \gamma x_6.\end{aligned}\tag{22}$$

Перепишем уравнение (22), выделив в нем линейную и квадратичную части:

$$\dot{x}_4 = \left( p_{j_{new}} + \frac{q_{j_{new}} - q_j}{\Delta} \right) x_4 + \alpha x_5 + \frac{p_{j_{new}} - p_j}{\Delta} x_1 x_4.$$

По аналогии с подходом, используемым в работах автора [17, 18], расширим систему (8), дополнив ее уравнениями для фазовых координат возмущений. При этом введем вектор

$$\hat{X}(t) = [x_1(t) \ \dots \ x_6(t)]^\top$$

и матрицы

$$\begin{aligned}\hat{A}_0^{(j)} &= [q_j \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^\top, \\ \hat{A}_1^{(j)} &= \begin{bmatrix} p_j & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & -\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{j_{new}} + \frac{q_{j_{new}} - q_j}{\Delta} & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta & -\gamma \end{bmatrix}, \\ \hat{Q}_1^{(j)} &= \hat{Q}_2^{(j)} = \hat{Q}_3^{(j)} = \hat{Q}_5^{(j)} = \hat{Q}_6^{(j)} = \mathbf{O}, \\ \hat{Q}_4^{(j)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{p_{j_{new}} - p_j}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Расширенная динамическая система имеет вид

$$d\hat{X}/dt = \hat{A}_0^{(j)} + \hat{A}_1^{(j)} \hat{X} + \Phi(\hat{X}),\tag{23}$$

где

$$\Phi(\hat{X}) = [\varphi_1(\hat{X}) \dots \varphi_6(\hat{X})]^\top, \quad \varphi_p(\hat{X}) = \langle Q_p \hat{X}, \hat{X} \rangle, \quad p = 1, \dots, 6.$$

Получим [17, 18] рекуррентные соотношения для вычисления коэффициентов рядов возмущений

$$x_4(t) = \xi_{4,0}^{(j)} + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{4,i}^{(j)} t^i, \quad x_5(t) = \xi_{5,0}^{(j)} + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{5,i}^{(j)} t^i, \quad x_6(t) = \xi_{6,0}^{(j)} + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{6,i}^{(j)} t^i, \quad (24)$$

$$\xi_{4,i}^{(j)} = \frac{(p_{j_{new}} + \frac{q_{j_{new}} - q_j}{\Delta}) \xi_{4,i-1}^{(j)} + \alpha \xi_{5,i-1}^{(j)} + \frac{p_{j_{new}} - p_j}{\Delta} \sum_{k=0}^i \xi_{1,k}^{(j)} \xi_{4,i-k}^{(j)}}{i}, \quad (25)$$

$$\xi_{5,i}^{(j)} = \frac{\xi_{4,i-1}^{(j)} - \xi_{5,i-1}^{(j)} + \xi_{6,i-1}^{(j)}}{i}, \quad (26)$$

$$\xi_{6,i}^{(j)} = \frac{-\beta \xi_{5,i-1}^{(j)} - \gamma \xi_{6,i-1}^{(j)}}{i}. \quad (27)$$

Формулы (25)–(27) являются дополнением формул (10)–(13).

Значение числа  $\tau$ , определяющего отрезок сходимости степенных рядов (9) и (24), вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \|\hat{A}_0^{(j)}\| &= \|\hat{A}_0^{(j)}\|_1 = |q_j|, \\ \|\hat{A}_1^{(j)}\| &= \|\hat{A}_1^{(j)}\|_1 = \max \left\{ |p_j| + 1, |\alpha| + |\beta| + 1, |\gamma| + 1, \left| p_{j_{new}} + \frac{q_{j_{new}} - q_j}{\Delta} \right| + 1 \right\}, \\ \|\hat{Q}_1^{(j)}\| &= \|\hat{Q}_2^{(j)}\| = \|\hat{Q}_3^{(j)}\| = \|\hat{Q}_5^{(j)}\| = \|\hat{Q}_6^{(j)}\| = 0, \\ \|\hat{Q}_4^{(j)}\| &= \left| \frac{p_{j_{new}} - p_j}{\Delta} \right|, \\ \mu &= 6 \max_{p=1, \dots, 6} \|\hat{Q}_p^{(j)}\| = 6 \left| \frac{p_{j_{new}} - p_j}{\Delta} \right|, \\ h_1(\xi_{1,0}^{(j)}, \dots, \xi_{6,0}^{(j)}) &= \|\Xi_i^{(j)}\| = \|\Xi_i^{(j)}\|_1 = \sum_{p=1}^6 |\xi_{p,0}^{(j)}|, \\ h_2(\xi_{1,0}^{(j)}, \dots, \xi_{6,0}^{(j)}) &= \begin{cases} \mu h_1^2 + (\|\hat{A}_1^{(j)}\| + 2\mu) h_1 + \|\hat{A}_0^{(j)}\|, & \text{если } h_1 > 1, \\ \|\hat{A}_0^{(j)}\| + \|\hat{A}_1^{(j)}\| + \mu & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ \tau(\xi_{1,0}^{(j)}, \dots, \xi_{6,0}^{(j)}) &= \frac{1}{h_2 + \delta_{pw}}. \end{aligned} \quad (28)$$

Применение алгоритма Бенеттина — Вольфа для вычисления оценок  $\tilde{\lambda}_1$ ,  $\tilde{\lambda}_2$  и  $\tilde{\lambda}_3$  характеристических показателей Ляпунова в случае систем с квадратичной правой частью подробно описано в статье [18]. Напомним, что заданный отрезок времени  $[0, T_L]$  (обычно достаточно большой), на котором мы будем искать оценки показателей, делится на отрезки одинаковой длины

$$\tau_M = \frac{T_L}{M},$$

где  $M$  — количество таких отрезков. Далее, используя процесс Грама — Шмидта (ГШ) [26; 27, с. 163–165; 28, с. 126–132], формируем три начальных условия для системы (23), у которых три первые координаты совпадают соответственно — они являются координатами точки, близкой к аттрактору. Остальные координаты — это нормированные и ортогонализированные возмущения.

Выбор значения  $M$  — это отдельная проблема. В [26, с. 294, 297] указано, что имеется некоторая неустойчивость в значениях самого младшего отрицательного показателя  $\lambda_3$ , так как «элементы объема, включающие отрицательные направления экспоненты, затухают экспоненциально быстро», и рекомендуется отслеживать установившиеся оценки показателей Ляпунова в зависимости от изменения  $\tau_M$ . Поэтому вычисление младшего показателя лучше реализовывать для малых значений  $\tau_M$ .

В случае хаотического аттрактора для системы третьего порядка частое применение ГШ-процесса (при малых значениях  $\tau_M$ ) вызывает потерю ориентации в фазовом пространстве [26, с. 299], внося шум в получаемое значение оценки старшего  $\tilde{\lambda}_1 > 0$  показателя. При больших значениях  $\tau_M$  элементы объема фазового пространства становятся слишком большими, демонстрируя экспоненциальный рост во времени. Это дает возможность улучшить оценку  $\tilde{\lambda}_1$ , но применение классических численных методов с малыми фиксированными порядками точности и стандартного представления вещественных чисел в ЭВМ (например, в языке C) приведет к большим ошибкам интегрирования и переполнению используемых переменных в программном коде.

Использование описанной высокоточной численной схемы на базе метода степенных рядов совместно с библиотекой MPFR C++ [24, 29] для представления чисел произвольной точности (тип данных `mpreal` с перегруженными арифметическими операциями и дружественными математическими функциями) позволяет избежать переполнений и контролировать накопление ошибки численного интегрирования при варьировании точности  $\varepsilon_{pw}$  оценки общего члена рядов (9) и (24). Таким образом, мы можем увеличить значение  $\tau_M$  для уменьшения шума в получаемом значении  $\tilde{\lambda}_1$ .

При переходе из одной области фазового пространства в другую (изменение номера  $j$ ) по алгоритму, описанному в разд. 2, вычисляется приближенное значение шага  $\Delta t_{new}$  по времени, когда траектория системы (1) пересечет одну из плоскостей (6) или (7). При достижении данной границы, система (23) будет иметь квадратичную правую часть (внутри области она линейна), при этом значение  $j_{new}$  — это индекс новой области. Из-за малости величины  $\delta_{x_1}$  значения коэффициентов данной системы очень велики, но полученная оценка длины (28) отрезка сходимости рядов (9) и (24) в работе [16] гарантирует их сходимость на шаге интегрирования  $\Delta t = \tau$ . Взрывной рост фазовых координат при этом невозможен, поскольку из формулы (28) следует, что

$$\Delta t = O(\|\Xi_0^{(j)}\|^{-2}) \quad (29)$$

при  $\|\Xi_0^{(j)}\| \rightarrow \infty$ , т. е. величина  $\Delta t$  будет достаточно малой, а после перехода в

новую область система (23) станет линейной. Периодическое применение ГШ-процесса также останавливает резкий рост фазовых координат возмущений.

Стоит отметить следующую особенность описанной схемы вычислений оценок значений характеристических показателей Ляпунова. Исходя из оценки (29), экспоненциальный рост фазовых координат дает экспоненциальное затухание значения шага по времени, что ведет к резкому росту времени вычислений. Поскольку для системы третьего порядка необходимо три раза решать систему (23) между ГШ-процессами, данную процедуру можно распараллелить. Как было описано выше, организация вычислений происходит с использованием вещественных чисел произвольной точности, что делает невозможным на данный момент применение GPU. Поскольку мы имеем три независимых процесса, использующих небольшой объем вычислительных ресурсов, параллельные вычисления можно организовать в рамках одной ЭВМ на CPU, например, в многопоточном режиме. Заметим, что параллельные вычисления на GPU на сегодняшний день используются при анализе нескольких предельных решений ОДУ, в том числе скрытых аттракторов (например, в работах [30, 31]).

Чтобы проверить точность найденных оценок  $\tilde{\lambda}_1$ ,  $\tilde{\lambda}_2$  и  $\tilde{\lambda}_3$ , воспользуемся следующим соотношением [32, с. 136]:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \langle \operatorname{div} F \rangle, \quad (30)$$

где

$$\langle \operatorname{div} F \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \operatorname{div} F(x_1(t)) dt,$$

при этом

$$\operatorname{div} F(x_1) = -\alpha\mu - \alpha\psi'_{x_1} - 1 - \gamma.$$

Тогда вычисление правой части равенства (30) сводится к вычислению среднего значения  $\langle \psi'_{x_1} \rangle$  функции  $\psi'_{x_1}(x_1(t))$  на отрезке времени  $[0, T]$  при больших значениях  $T$ .

Исходя из графика функции  $\psi(x_1)$ , значения

$$\psi'_{x_1}(x_1) = \begin{cases} a, & \text{если } x_1 \in (-1, 1), \\ 0, & \text{если } x_1 \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty). \end{cases}$$

Поскольку в алгоритме, описанном в разд. 2, рассчитывается такое значение шага по времени, когда траектория пересечет одну из плоскостей (6) или (7), а также по виду частей, составляющих функцию  $\psi'_{x_1}(x_1(t))$ , для реализации вычисления  $\langle \psi'_{x_1} \rangle$  используется метод левых прямоугольников с переменным шагом интегрирования таким же, какой используется в данном алгоритме. Следовательно, внутри шага не произойдет скачка значения  $\psi'_{x_1}(x_1(t))$ .

#### 4. Результаты вычислений значений $\tilde{\lambda}_1$ , $\tilde{\lambda}_2$ и $\tilde{\lambda}_3$ для скрытых аттракторов системы (1)

Пусть  $b_m$  — число бит под мантиссу вещественного числа. Для вычислений были подобраны такие точности, что у получаемых значений показателей верны

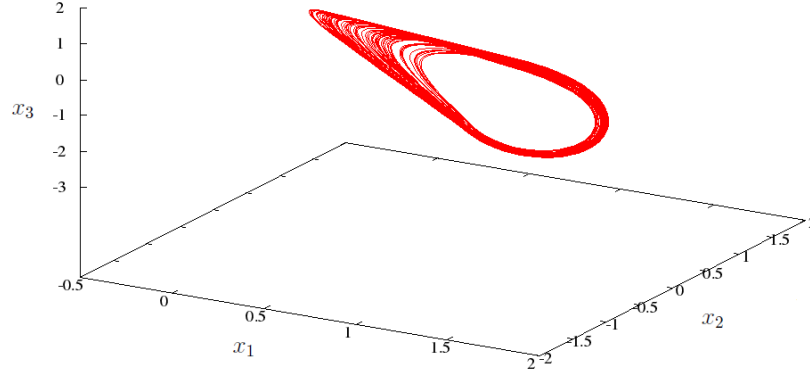


Рис. 1. Траектория системы (1), соответствующая скрытому хаотическому аттрактору.

первые 4 знака в дробной части:

$$b_m = 300, \text{ тогда } \varepsilon_m = 9.8 \cdot 10^{-91};$$

$$\delta_{pw} = 10^{-10}, \varepsilon_{pw} = 10^{-80}, \delta_{sec} = 10^{-60}, \delta_{x_1} = 10^{-2}.$$

Отметим, что уменьшение величины  $\delta_{x_1}$  не дает значительного эффекта в результатах вычислений.

Для начальных условий (5) была получена точка, более близкая к скрытому хаотическому аттрактору в системе (1), по алгоритму, описанному в разд. 2:

$$X(0) = \begin{bmatrix} 0.242607564664894625733914154575786941050105924448969850851 \\ -0.129154013908900093933869116916933583688948511046159634882 \\ 0.265287927489326246666551239611062113982412884174965132271 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Таблица 1. Результаты вычислений оценок  $\tilde{\lambda}_1$ ,  $\tilde{\lambda}_2$  и  $\tilde{\lambda}_3$  для различных значений числа  $M$

$M$	$\tilde{\lambda}_1$	$\tilde{\lambda}_2$	$\tilde{\lambda}_3$
20000	0.2121	-0.0266	-4.1824
10000	0.1964	-0.0123	-4.1950
5000	0.1834	-0.0126	-4.1987
2000	0.1760	-0.0039	-4.2011
500	0.1610	-0.0028	-3.5639
200	0.1614	0.0036	-1.6694
100	0.1634	0.0013	-0.8706
50	0.1621	0.0017	-0.4860
29	0.1638	0.0020	-0.3221

Используя описанную выше модификацию алгоритма Бенеттина — Вольфа, при  $T_L = 1000$  для точки (31) при разных значениях числа  $M$  усредненные значения оценок  $\tilde{\lambda}_1$ ,  $\tilde{\lambda}_2$  и  $\tilde{\lambda}_3$  сведены в табл. 1, откуда видна стабилизация показателя  $\tilde{\lambda}_1$  при уменьшении значения  $M$ . Также можно отметить стабильность в значениях  $\tilde{\lambda}_3$  при больших значениях числа  $M$ , что и было указано в разд. 3 данной статьи. Тогда можно сделать вывод о том, что для скрытого хаотического аттрактора, представленного на рис. 1, значения

$$\tilde{\lambda}_1 \approx 0.16, \quad \tilde{\lambda}_2 \approx 0, \quad \tilde{\lambda}_3 \approx -4.2, \quad \tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_3 \approx -4.04.$$

При этом для  $T = T_L$  средние значения

$$\langle \psi'_{x_1} \rangle \approx -0.6, \quad \langle \operatorname{div} F \rangle \approx -3.93.$$

Таким образом, в равенстве (30) левая и правая части отличаются примерно на 0.11, что говорит о приемлемой точности вычисления оценок значений характеристических показателей Ляпунова.

Применение параллельных вычислений для расчета оценок показателей Ляпунова дает следующие результаты. В многопоточном режиме (используемая операционная система — Ubuntu Linux) время вычислений при  $M = 29$  составляет 47 мин на процессоре AMD Ryzen 7 5700G (4.67 ГГц, 16-ти потоковый), температура процессора достигает 70°C, загрузка — два-три ядра (обычный режим работы процессора, при котором нет вычислительных задач, — 40°C). Контроль температуры осуществлялся в приложении Psensor. Время вычислений для последовательного алгоритма (загружено одно ядро, температура — 64°C) — 71 мин; с использованием библиотеки libopenmpi (технология Open MPI) (загрузка — 4 ядра, максимальная температура процессора составляет 78°C) — 59 мин. Увеличение загрузки процессора и времени вычислений связано с тем, при работе с MPI-приложениями происходит запуск нескольких процессов на одном (если позволяют ресурсы) или нескольких компьютерах. В многопоточном же режиме параллельные вычисления выполняются в виде нескольких потоков (нитей) в одном процессе, при этом операционная система может оптимизировать загрузку ядер в рамках данного процесса, в отличие от многопроцессного режима работы, где синхронизация процессов выполняется программно.

Поскольку рассматриваемый метод оценки характеристических показателей Ляпунова позволяет увеличить отрезок между ГШ-процессами, мы можем построить график зависимости нормы  $\|\hat{X}\|_2$  от времени, например, на первом шаге по алгоритму, описанному в разд. 2. При  $T_L = 1000$  и  $M = 29$  величина  $\tau_M \approx 34.48$ . Данный график представлен на рис. 2. Также на этом рисунке построен график усредненной зависимости  $\|\hat{X}\|_2$  от  $t$

$$\overline{\|\hat{X}\|_2} = b_0 + b_1 e^{\tilde{\lambda}_{1a} t},$$

где коэффициенты  $b_0$ ,  $b_1$  и  $\tilde{\lambda}_{1a}$  определяются по методу наименьших квадратов в математическом пакете Maxima [33]:

$$b_0 \approx 8.4, \quad b_1 \approx 0.26, \quad \tilde{\lambda}_{1a} \approx 0.272.$$

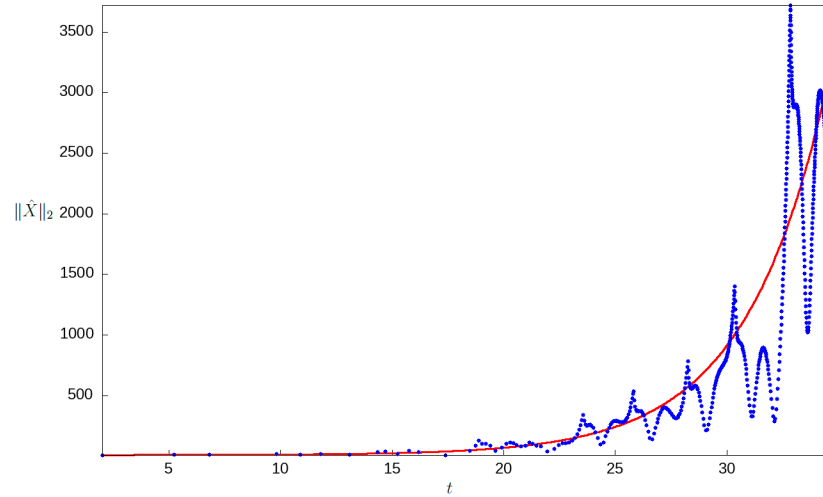


Рис. 2. График зависимости нормы  $\|\hat{X}\|_2$  от  $t$  и усредненная кривая для вычисления  $\tilde{\lambda}_{1a}$ .

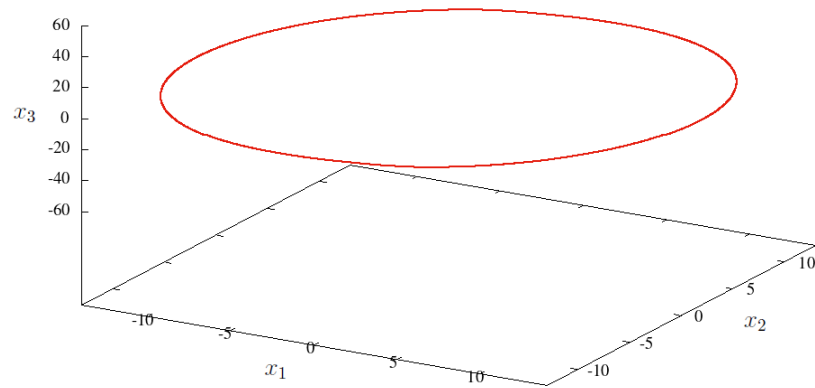


Рис. 3. Траектория системы (1), соответствующая скрытому аттрактору — предельному циклу.

Таким образом, получена еще одна оценка  $\tilde{\lambda}_{1a}$  старшего показателя Ляпунова. При этом значение

$$\tilde{\lambda}_{1a} + \tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_3 \approx -3.928,$$

которое более близко к величине  $\langle \operatorname{div} F \rangle$ .

Отметим, что достоинство данного способа вычисления старшего показателя Ляпунова по сравнению с алгоритмом Бенеттина — Вольфа в том, что получаемое значение показателя учитывает значения фазовых координат на отрезке времени  $[0, \tau_M]$ , а не только в конечный момент времени.

По аналогии была получена точка, более близкая к предельному циклу, чем



(4):

$$X(0) = \begin{bmatrix} 10.9947740082418782801240113997819195633739779444994538757 \\ 9.61981334895099741414351646822521979405421000896426828936 \\ -11.8170827045443885649065273583176924298515470429370283924 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Расчеты для данного скрытого аттрактора проводилось для значения  $T_L = 194.2$ , кратного периоду цикла (данная величина будет далее определена). При  $M = 10$  значение  $\tilde{\lambda}_1 \approx 0.0068 \approx 0$ . Значения остальных показателей определялись при  $M = 20000$ , поскольку они отрицательные:

$$\tilde{\lambda}_2 \approx -0.042, \quad \tilde{\lambda}_3 \approx -8.43.$$

Тогда

$$\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_3 \approx -8.472.$$

Значение

$$\langle \operatorname{div} F \rangle \approx -8.457,$$

что обеспечивает достоверность найденных оценок.

Исследуемая траектория показана на рис. 3.

## 5. Устойчивость по Пуассону точек скрытых аттракторов

В работах [15, 16] численно исследованы точки предельных решений на устойчивость по Пуассону, что позволило понять, имеем ли мы квазипериодический или хаотический режим.

Напомним [21], что точка  $y$  фазового пространства называется *положительно устойчивой по Пуассону* (обозначение  $P^+$ ), если для любой окрестности  $U$  точки  $y$  и для любого  $T_P > 0$  найдется такое значение времени  $t \geq T_P$ , что траектория динамической системы попадет в окрестность  $U$ . Аналогично если найдется такое  $t \leq -T_P$ , при котором траектория попадет в окрестность  $U$ , то точка  $y$  *отрицательно устойчива по Пуассону* (обозначение  $P^-$ ). Точка, устойчивая  $P^+$  и  $P^-$ , называется просто *устойчивой по Пуассону*. Если каждая точка траектории устойчива по Пуассону, то такая траектория называется устойчивой по Пуассону.

Из ограниченности предельных решений диссипативных систем следует [21, 27], что любой установившийся режим колебаний описывается устойчивыми по Пуассону траекториями. Данное утверждение относится и к динамическому хаосу. Если рассматривается траектория, отличная от положения равновесия, то устойчивой по Пуассону она будет в том случае, если обладает свойством возвращаться в сколь угодно малую  $\varepsilon$ -окрестность каждой своей точки бесконечное число раз. Такие возвраты называют *возвратами Пуанкаре*. В [27, с. 146] указано, что «изучение статистики возвратов Пуанкаре — мощное средство анализа и классификации динамических режимов. По-видимому, потенциальные возможности этого подхода еще не полностью исчерпаны в современной

нелинейной динамике». Например, для периодических режимов возвраты следуют друг за другом регулярно. Тогда [27, с. 145] «динамический хаос — это такая ситуация, когда возвраты Пуанкаре в  $\varepsilon$ -окрестность стартовой точки не проявляют регулярности, интервал времени между двумя последовательными возвратами оказывается каждый раз другим и возникает некоторое статистическое распределение времен возврата». Пример анализа возвратов Пуанкаре, основанного на теореме Каца [34, с. 67], для дискретных и непрерывных динамических систем с хаотическими аттракторами приведен в работах [35, 36].

Для исследования возвратов Пуанкаре разработана программа [37], которая собирает статистику возвратов. Алгоритм ее работы следующий.

Пусть  $X_0 = X(0)$  — начальная точка для системы (1), соответствующая исследуемой, в частности, близкая к скрытому аттрактору. Отслеживание возвратов необходимо производить не сразу, а через некоторый заданный момент времени  $t_s$ , чтобы выйти из  $\varepsilon$ -окрестности точки  $X_0$ . Значения  $\varepsilon < 1$  при этом перебираются из некоторого убывающего конечного набора

$$\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_K$$

вещественных чисел. Для каждого значения  $\varepsilon_m$  ( $m = 0, \dots, K$ ) организуется цикл по времени от  $t = t_s$  до некоторого большого значения  $T$  с заданным малым шагом  $\Delta\tau$  вычисления приближенных значений фазовых координат  $X(t)$  системы (1) по алгоритму, описанному в разд. 2, в момент времени  $t$ , причем фиксируются такие моменты  $t = t_k$ , когда

$$\|X(t_k) - X_0\|_2 < \varepsilon_m,$$

где  $k = 1, \dots, k_{\max}$ . Заметим, что в данном случае фиксируются моменты вхождения в  $\varepsilon_m$ -окрестность [36].

После этого вычисляется среднее время возврата [35, с. 5]

$$\overline{\tau(\varepsilon_m)} = \frac{1}{k_{\max}} \sum_{k=1}^{k_{\max}} (t_{k+1} - t_k) = \frac{t_{k_{\max}} - t_1}{k_{\max}}.$$

В случае хаотического аттрактора высокоточные вычисления важны для получения более точной статистики возвратов.

По следствию из теоремы Каца [35, с. 4]

$$\overline{\tau(\varepsilon)} = C\varepsilon^{-d},$$

где  $C$  — некоторая постоянная,  $d$  — фрактальная размерность аттрактора.

Для начальной точки (31) получена статистика возвратов в ее окрестность по описанному алгоритму. При этом

$$t_s = 0.5, \quad \varepsilon_0 = 0.1, \quad T = T_L, \quad \varepsilon_m = \frac{\varepsilon_0}{m}$$

для  $m \geq 1$ . Далее по методу наименьших квадратов в математическом пакете *Mathima* определяются коэффициенты  $C$  и  $d$ :

$$C = 0.424, \quad d = 0.877.$$

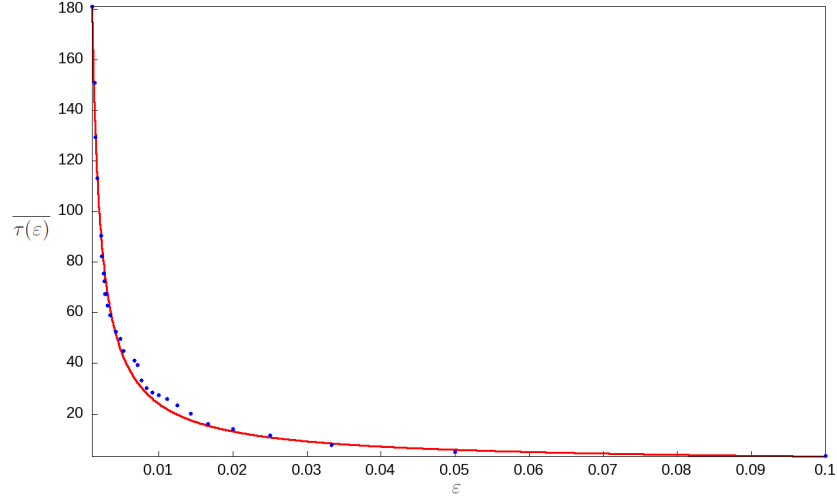


Рис. 4. Зависимость среднего времени возврата от радиуса отслеживаемой окрестности.

Коэффициент детерминации  $R^2 = 99\%$ , что говорит о хорошем качестве аппроксимации. На рис. 4 показаны полученные точки, соответствующие радиусу отслеживаемой окрестности и среднему времени возврата, а также аппроксимирующая кривая.

Для регулярного режима, соответствующего точке (32), определены средние времена возвратов в окрестности точки  $X_0$ . Оказалось, что

$$\overline{\tau(\varepsilon_0)} = \dots = \overline{\tau(\varepsilon_K)} = 1.942,$$

откуда можно сделать вывод о том, что данное значение равно периоду  $T_p$  предельного цикла.

Полученное число соответствует циклической частоте (3):

$$\omega_p = \frac{2\pi}{T_p} \approx 3.235 \approx \omega.$$

## 6. Заключение

В данной статье рассмотрен численный метод решения кусочно-гладкой системы обыкновенных дифференциальных уравнений Чуа с использованием высокоточных вычислений, который может быть применен для сбора статистики возвратов Пуанкаре с целью оценки фрактальной размерности рассматриваемого аттрактора. Описана реализация модификации алгоритма Бенеттина — Вольфа для данной системы, в основу которой положена рассматриваемая численная схема решения систем дифференциальных уравнений на базе метода степенных рядов, реализованная с использованием параллельных алгоритмов и арифметики произвольной точности на больших отрезках разбиения заданного промежутка времени. Программный комплекс разработан на языке C++, получено свидетельство о его регистрации [37].

Замечено, что полученные характеристики аттракторов зависят от применяемых алгоритмов, которые опираются на важные теоретические результаты. Например, на зависимость оценки области сходимости рядов в описанном высокоточном численном методе для выбора шага интегрирования от начальных условий (формула (29)) и теорему Каца для исследования устойчивости по Пуассону приведенных точек. Также отметим, что показатели Ляпунова могут отличаться для разных траекторий аттракторов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Kuznetsov N. V., Kuznetsova O. A., Leonov G. A., Mokaev T. N., Stankevich N. V. Hidden attractors localization in Chua circuit via the describing function method // IFAC-Papers-OnLine, 2017. V. 50, N 1. P. 2651–2656.
2. Stankevich N. V., Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Chua L. O. Scenario of the birth of hidden attractors in the Chua circuit // Int. J. Bifurcation Chaos. 2017. V. 27, N 12. 1730038.
3. Kuznetsov N., Kuznetsova O., Leonov G., Vagaitsev V. Analytical-numerical localization of hidden attractor in electrical Chua's circuit // Lect. Notes Electrical Eng. 2013. V. 174. P. 149–158.
4. Красносельский М. А., Покровский А. В. Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983.
5. Piironen P. T., Kuznetsov Y. A. An event-driven method to simulate Filippov systems with accurate computing of sliding motions // ACM Trans. Math. Softw. 2008. V. 34, N 3. 13.
6. Коробицын В. В., Фролова Ю. В., Маренич В. Б. Алгоритм численного решения кусочно-сшитых систем // Вычисл. технологии. 2008. Т. 13, № 2. С. 70–81.
7. Коробицын В. В., Фролова Ю. В. Алгоритм численного решения дифференциальных уравнений с разрывной правой частью // Мат. структуры и моделирование. 2005. № 15. С. 46–54.
8. Коробицын В. В., Маренич В. Б., Фролова Ю. В. Исследование поведения явных методов Рунге — Кутты при решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью // Мат. структуры и моделирование. 2007. № 17. С. 19–25.
9. Коробицын В. В., Фролова Ю. В. Оценка погрешности вычисления точки пересечения продолжения кривой решения задачи Коши с поверхностью разрыва // Мат. структуры и моделирование. 2011. № 22. С. 5–14.
10. Коробицын В. В. Об определении точки пересечения кривой решения задачи Коши с поверхностью разрыва // Вычисл. технологии. 2011. Т. 16, № 4. С. 50–63.
11. Belykh V. N., Barabash N. V., Belykh I. V. Sliding homoclinic bifurcations in a Lorenz-type system: Analytic proofs // Chaos. 2021. V. 31. 043117.
12. Коробицын В. В., Фролова Ю. В. Представление алгоритма численного решения гибридной динамической системы с конечным множеством дискретных состояний в виде конечного автомата // Вестн. Омск. ун-та. 2013. № 4. С. 221–227.
13. Lim C. W., Wu B. S. Accurate higher-order approximations to frequencies of nonlinear oscillators with fractional powers // J. Sound Vibration. 2005. V. 281, N 3–5. P. 1157–1162.
14. Пчелинцев А. Н. Численное и физическое моделирование динамики системы Лоренца // Сиб. журн. вычисл. математики. 2014. Т. 17, № 2. С. 191–201.
15. Lozi R., Pchelintsev A. N. A new reliable numerical method for computing chaotic solutions of dynamical systems: the Chen attractor case // Int. J. Bifurcation Chaos. 2015. V. 25, No 13. 1550187.
16. Lozi R., Pogonin V. A., Pchelintsev A. N. A new accurate numerical method of approximation of chaotic solutions of dynamical model equations with quadratic nonlinearities // Chaos Solitons Fractals. 2016. V. 91. P. 108–114.
17. Pchelintsev A. N. An accurate numerical method and algorithm for constructing solutions of chaotic systems // J. Appl. Nonlin. Dyn. 2020. V. 9, N 2. P. 207–221.
18. Pchelintsev A. N. On the Poisson stability to study a fourth-order dynamical system with quadratic nonlinearities // Mathematics. 2021. V. 9, N 17. 2057.
19. Pchelintsev A. N. On a high-precision method for studying attractors of dynamical systems and systems of explosive type // Mathematics. 2022. V. 10, N 8. 1207.

20. Пчелинцев А. Н., Полуновский А. А., Юханова И. Ю. Метод гармонического баланса для отыскания приближенных периодических решений системы Лоренца // Вестн. рос. ун-тов. Математика. 2019. Т. 24, № 126. С. 187–203.
21. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004.
22. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.
23. Пчелинцев А. Н. Высокоточные вычисления для моделирования нелинейных динамических систем с аттракторами // Информатика: проблемы, методы, технологии (под ред. Д. Н. Борисова). Мат. XXII Междунар. науч.-практ. конф. им. Э. К. Алгазина (Воронеж, 10–12 февраля 2022 г.). Воронеж, 2022. С. 437–443.
24. The high-performance C++ interface for MPFR library. <https://github.com/advanpix/mpreal>.
25. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011.
26. Wolf A., Jack B., Swift J. B., Swinney H. L., Vastano J. A. Determining Lyapunov exponents from a time series // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1985. V. 16, N 3. P. 285–317.
27. Кузнецов С. П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006.
28. Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б., Подлазов А. В. Нелинейная динамика: Подходы, результаты, надежды. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2016.
29. Fousse L., Guillaume H., Lefèvre V., Pélissier P., Zimmermann P. MPFR: A multiple-precision binary floating-point library with correct rounding // ACM Trans. Math. Softw. (TOMS). 2007. V. 33, N 2. 13.
30. Ostrovskii V. Yu., Rybin V. G., Karimov A. I., Butusov D. N. Inducing multistability in discrete chaotic systems using numerical integration with variable symmetry // Chaos Solitons Fractals. 2022. V. 165. 112794.
31. Yan H., Jiang J., Hong L. The birth of a hidden attractor through boundary crisis // Int. J. Bifurcation Chaos. 2022. V. 32, N 2. 2230005.
32. Гринченко В. Т., Мацыгура В. Т., Снарский А. А. Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы. М.: ЛЕНАНД, 2019.
33. Maxima computer algebra system <http://maxima.sourceforge.net/ru/>.
34. Кас М., Uhlenbeck G. E., Hibbs A. R., Pol B. V. D., Gillis J. Probability and related topics in physical sciences. New York: Intersci., 1959.
35. Anishchenko V. S., Boev Y. I., Semenova N. I., Strelkova G. I. Local and global approaches to the problem of Poincaré recurrences. Applications in nonlinear dynamics // Phys. Rep. 2015. V. 587. P. 1–39.
36. Gao J. B. Recurrence time statistics for chaotic systems and their applications // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 3, N 16. P. 3178–3181.
37. Пчелинцев А. Н. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2024616332. Программный комплекс для численного моделирования динамики системы Чуа на основе параллельных алгоритмов. 19.03.2024 г.

*Поступила в редакцию 17 февраля 2025 г.*

*После доработки 10 июля 2025 г.*

*Принята к публикации 29 августа 2025 г.*

Пчелинцев Александр Николаевич (ORCID 0000-0003-4136-1227)

Тамбовский государственный технический университет,

ул. Советская, 106, Тамбов 392000

[pchelintsev.an@yandex.ru](mailto:pchelintsev.an@yandex.ru)

## ON A HIGHLY ACCURATE NUMERICAL METHOD FOR STUDYING OF THE HIDDEN ATTRACTORS IN THE PIECEWISE SMOOTH CHUA SYSTEM

A. N. Pchelintsev

**Abstract:** We consider an adaptation to the piecewise smooth Chua system of the previously developed high-precision numerical method for constructing approximations to unstable solutions of dynamic systems with quadratic nonlinearities on their attractors. Also, a modification of the Benettin–Wolf algorithm for calculating the characteristic Lyapunov exponents of the considered piecewise smooth system is obtained for the mode under consideration. A method based on the least squares method is developed, which makes possible to calculate the averaged estimate of the highest Lyapunov exponent based on the data on the behavior of the linearized dynamic system using a high-precision method over large time intervals. The following results are obtained for hidden attractors in the Chua system: 1) the fractal dimension of the hidden chaotic attractor based on the Poincaré return statistics, 2) the values of the characteristic Lyapunov exponents for a stable cycle and a chaotic attractor with the use of the developed modification of the Benettin–Wolf algorithm; its efficiency is increased due to parallel computing.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-3-113-134

**Keywords:** Chua system, Lyapunov characteristic exponents, high-precision numerical method, piecewise smooth system, Poincaré returns, parallel computing.

### REFERENCES

1. Kuznetsov N. V., Kuznetsova O. A., Leonov G. A., Mokaev T. N., and Stankevich N. V., “Hidden attractors localization in Chua circuit via the describing function method,” IFAC-PapersOnLine, **50**, No. 1, 2651–2656 (2017).
2. Stankevich N. V., Kuznetsov N. V., Leonov G. A., and Chua L. O., “Scenario of the birth of hidden attractors in the Chua circuit,” Int. J. Bifurcation Chaos, **27**, No. 12, 1730038 (2017).
3. Kuznetsov N., Kuznetsova O., Leonov G., and Vagitsev V., “Analytical-numerical localization of hidden attractor in electrical Chua’s circuit,” Lect. Notes Electrical Eng., **174**, 149–158 (2013).
4. Krasnoselsky M. A. and Pokrovsky A. V., Systems with Hysteresis [in Russian], Nauka, Moscow (1983).
5. Piironen P. T. and Kuznetsov Y. A., “An event-driven method to simulate Filippov systems with accurate computing of sliding motions,” ACM Trans. Math. Softw., **34**, No. 3, 13 (2008).
6. Korobitsyn V. V., Frolova Yu. V., and Marenich V. B., “Algorithm for numerical solution of piecewise-stitched systems [in Russian],” Comput. Tekhnol., **13**, No. 2, 70–81 (2008).
7. Korobitsyn V. V. and Frolova Yu. V., “Algorithm for numerical solution of differential equations with discontinuous right-hand side [in Russian],” Mat. Struktury Model., No. 15, 46–54 (2005).
8. Korobitsyn V. V., Marenich V. B., and Frolova Yu. V., “Investigation of the behavior of explicit Runge–Kutta methods in solving systems of ordinary differential equations with discontinuous right-hand side [in Russian],” Mat. Struktury Model., No. 17, 19–25 (2007).

9. Korobitsyn V. V. and Frolova Yu. V., "Estimation of the error in calculating the intersection point of the continuation curve of the solution of the Cauchy problem with the discontinuity surface [in Russian]," *Mat. Struktury Model.*, No. 22, 5–14 (2011).
10. Korobitsyn V. V., "On the determination of the intersection point of the curve of the solution of the Cauchy problem with the discontinuity surface [in Russian]," *Komput. Tekhnol.*, **16**, No. 4, 50–63 (2011).
11. Belykh V. N., Barabash N. V., and Belykh I. V., "Sliding homoclinic bifurcations in a Lorenz-type system: Analytic proofs," *Chaos*, **31**, 043117 (2021).
12. Korobitsyn V. V. and Frolova Yu. V., "Representation of the algorithm for numerical solution of a hybrid dynamic system with a finite set of discrete states in the form of a finite state machine [in Russian]," *Vestn. Omsk. Univ.*, No. 4, 221–227 (2013).
13. Lim C. W. and Wu B. S., "Accurate higher-order approximations to frequencies of nonlinear oscillators with fractional powers," *J. Sound Vibration*, **281**, No. 3–5, 1157–1162 (2005).
14. Pchelintsev A. N., "Numerical and physical modeling of the dynamics of the Lorenz system," *Numer. Anal. Appl.*, **7**, No. 2, 159–167 (2014).
15. Lozi R. and Pchelintsev A. N., "A new reliable numerical method for computing chaotic solutions of dynamical systems: the Chen attractor case," *Int. J. Bifurcation Chaos*, **25**, No. 13, 1550187 (2015).
16. Lozi R., Pogonin V. A., and Pchelintsev A. N., "A new accurate numerical method of approximation of chaotic solutions of dynamical model equations with quadratic nonlinearities," *Chaos Solitons Fractals*, **91**, 108–114 (2016).
17. Pchelintsev A. N., "An accurate numerical method and algorithm for constructing solutions of chaotic systems," *J. Appl. Nonlin. Dyn.*, **9**, No. 2, 207–221 (2020).
18. Pchelintsev A. N., "On the Poisson stability to study a fourth-order dynamical system with quadratic nonlinearities," *Mathematics*, **9**, No. 17, 2057 (2021).
19. Pchelintsev A. N., "On a high-precision method for studying attractors of dynamical systems and systems of explosive type," *Mathematics*, **10**, No. 8, 1207 (2022).
20. Pchelintsev A. N., Polunovskiy A. A., and Yukhanova I. Yu., "The harmonic balance method for finding approximate periodic solutions of the Lorenz system [in Russian]," *Vestn. Ros. Univ. Mat.*, **24**, No. 126, 187–203 (2019).
21. Nemytskii V. V. and Stepanov V. V., *Qualitative Theory of Differential Equations*, Dover Publ., New York (1989).
22. Krasnoselsky M. A., *Shift Operator Along the Trajectories of Differential Equations* [in Russian], Nauka, Moscow (1966).
23. Pchelintsev A. N., "The high-precision computations for modeling nonlinear dynamic systems with attractors [in Russian]," in: *Computer Science: Problems, Methods, Technologies* (ed. D. N. Borisov), *Proc. XXII Int. Sci. Pract. Algazinov Conf.* (Voronezh, Feb. 10–12, 2022), pp. 437–443, Voronezh (2022).
24. The high-performance C++ interface for MPFR library. <https://github.com/advanpix/mpreal>.
25. Bakhvalov N. S., Zhidkov N. P., and Kobelkov G. M., *Numerical Methods* [in Russian], BINOM, Moscow (2011).
26. Wolf A., Jack B., Swift J. B., Swinney H. L., and Vastano J. A., "Determining Lyapunov exponents from a time series," *Phys. D, Nonlin. Phenomena*, **16**, No. 3, 285–317 (1985).
27. Kuznetsov S. P., *Dynamic Chaos* [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2006).
28. Malinetsky G. G., Potapov A. B., and Podlazov A. V., *Nonlinear Dynamics: Approaches, Results, Hopes* [in Russian], LIBROCOM, Moscow (2016).
29. Fousse L., Guillaume H., Lefèvre V., Pélissier P., and Zimmermann P., "MPFR: A multiple-precision binary floating-point library with correct rounding," *ACM Trans. Math. Software (TOMS)*, **33**, No. 2, 13 (2007).
30. Ostrovskii V. Yu., Rybin V. G., Karimov A. I., and Butusov D. N., "Inducing multistability in discrete chaotic systems using numerical integration with variable symmetry," *Chaos Solitons Fractals*, **165**, 112794 (2022).
31. Yan H., Jiang J., and Hong L., "The birth of a hidden attractor through boundary crisis," *Int. J. Bifurcation Chaos*, **32**, No. 2, 2230005 (2022).
32. Grinchenko V. T., Matsypura V. T., and Snarsky A. A., *Introduction to Nonlinear Dynamics: Chaos and Fractals* [in Russian], LENAND, Moscow (2019).

- 33. Maxima Computer Algebra System <http://maxima.sourceforge.net/ru/>.
- 34. Kac M., Uhlenbeck G. E., Hibbs A. R., Pol B. V. D., and Gillis J., Probability and Related Topics in Physical Sciences, Intersci., New York (1959).
- 35. Anishchenko V. S., Boev Y. I., Semenova N. I., and Strelkova G. I., “Local and global approaches to the problem of Poincaré recurrences. Applications in nonlinear dynamics,” Phys. Rep., **587**, 1–39 (2015).
- 36. Gao J. B., “Recurrence time statistics for chaotic systems and their applications,” Phys. Rev. Lett., **83**, No. 16, 3178–3181 (1999).
- 37. Pchelintsev A. N., Certificate of state registration of the computer program No. 2024616332, The software package for numerical modeling of the dynamics of the Chua system based on parallel algorithms, Reg. March 19, 2024.

*Submitted February 17, 2025*

*Revised July 10, 2025*

*Accepted August 29, 2025*

Alexander N. Pchelintsev (ORCID 0000-0003-4136-1227)  
Tambov State Technical University,  
106 Sovetskaya Street, Tambov 392000, Russia  
[pchelintsev.an@yandex.ru](mailto:pchelintsev.an@yandex.ru)



## Математическая жизнь — конференция

С 18 по 22 августа в Республике Бурятия была проведена Международная конференция «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование», посвященная 80-летию со дня рождения профессора Владимира Николаевича Врагова, ректора Новосибирского государственного университета в 1993–1997 гг. Непосредственными организаторами конференции были Бурятский государственный университет и Новосибирский государственный университет, содействие и поддержку в организации конференции оказали Математический центр в Академгородке и Газпромбанк.

Открытие конференции состоялось 18 августа в Бурятском государственном университете, заседания проводились на базе отдыха на берегу Байкала.

В конференции приняли участие свыше 150 участников из Москвы, Новосибирска, Челябинска, Воронежа, Якутска, Владивостока и других городов России, а также из Китая, Монголии, Узбекистана, Киргизии, Таджикистана.

Тематика конференции охватывала многие вопросы фундаментальных разделов теории дифференциальных уравнений — вопросы существования и единственности решений, качественных свойств решений, теории операторно-дифференциальных уравнений. Значительное место в программе конференции занимали доклады, связанные с вычислительной математикой и математическим моделированием механических, физических и химических процессов, процессов экологии и экономики.

Высокий уровень докладов, сделанных на конференции, позволил Программному и Организационному комитетам обратиться к редакциям журналов "Journal of Mathematical Sciences" и "Computer Mathematics and Modelling" с предложениями подготовить спецвыпуск трудов, и эти предложения были приняты.

Безусловно, проведению конференции способствовала прекрасная природа Байкала и Бурятии.

## ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. К публикации в журнале «Математические заметки СВФУ» принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики, механики и информатики. Статьи, опубликованные ранее, а также направленные в другие издания, редакцией не рассматриваются. Редакционный совет вправе воздержаться от принятия статьи к рассмотрению, если она не соответствует профилю журнала.

2. Направляя статью в редакцию журнала, автор (соавторы) на безвозмездной основе передает(ют) издателю на срок действия авторского права по действующему законодательству РФ исключительное право на использование статьи или отдельной ее части (в случае принятия статьи к опубликованию) на территории всех государств, где авторские права в силу международных договоров Российской Федерации являются охраняемыми, в том числе следующие права: на воспроизведение, на распространение, на публичный показ, на доведение до всеобщего сведения, на перевод на иностранные языки (и исключительное право на использование переведенного произведения вышеуказанными способами), на предоставление всех вышеперечисленных прав другим лицам. Одновременно со статьей автор (соавторы) направляет в редакцию подписанный лицензионный договор на право использования научного произведения в журнале. Образец договора высылается авторам по электронной почте вместе с сообщением о принятии статьи к печати.

3. Для рассмотрения статьи на предмет ее публикации в журнале в редакцию представляются текст статьи объемом не более 1,5 авторских листов (18 страниц журнального текста), написанной на русском или, по согласованию с редакцией, на английском языке, а также сопроводительное письмо, в котором сообщается, что статья направляется именно в журнал «Математические заметки СВФУ», и информация об авторе (коллективе авторов) с указанием фамилии, имени и отчества, полного почтового адреса для переписки, места работы, подробного служебного адреса, адреса электронной почты и номера телефона. Статьи объемом более 1,5 авторских листов, как правило, не рассматриваются и могут быть приняты к рассмотрению и опубликованы лишь по специальному решению редакционного совета.

4. Статья должна быть подготовлена с использованием текстового редактора LaTeX и представлена в виде файлов форматов pdf и tex.

5. В начале статьи указывается индекс УДК и/или MSC. Статья сопровождается аннотацией объемом не менее 100 слов, желательно без формул, и списком ключевых слов. Аннотация и список должны быть представлены на русском и английском языках.

6. Список литературы печатается в конце текста. Ссылки на литературу в тексте нумеруются в порядке их появления и даются в квадратных скобках. Ссылки на неопубликованные работы нежелательны. Оформление литературы должно соответствовать требованиям стандартов (примеры библиографических описаний см. в последних номерах журнала).

7. Издание осуществляет рецензирование всех поступающих в редакцию материалов, соответствующих ее тематике, с целью их экспертной оценки. Все рецензенты являются признанными специалистами по тематике рецензируемых материалов и имеют в течение последних 3 лет публикации по тематике рецензируемой статьи. Рецензии хранятся в редакции издания в течение 5 лет.

8. Принятая к рассмотрению статья направляется на анонимное рецензирование. На основании рецензии редсовет принимает решение о возможности публикации статьи, которое сообщается автору. Автор вправе сообщить свои замечания и возражения к рецензии. Повторное решение редсовета по статье является окончательным.

9. Редакция издания направляет авторам представленных материалов копии рецензий или мотивированный отказ, а также обязуется направлять копии рецензий в Министерство науки и высшего образования Российской Федерации при поступлении в редакцию издания соответствующего запроса.

10. После редакционной подготовки непосредственно перед публикацией автору высылается корректура. По возможности в наиболее короткие сроки необходимо ее прочесть, внести исправления (правка против авторского оригинала нежелательна) и направить в редакцию. Статья выходит в свет только после получения от автора (коллектива авторов) авторской корректуры, подписанной автором (всеми соавторами) в печать.

11. В соответствии с международными законами об авторском праве Редакция уведомляет авторов журнала об их ответственности за получение ими в случае необходимости письменного разрешения на использование охраняемых авторским правом материалов, таких, как цитаты, воспроизведение данных, иллюстраций и любых иных материалов, которые могут быть использованы в их публикациях, а также о том, что вытекающая отсюда ответственность за нарушение таких авторских прав лежит на авторах. Плата за опубликование с авторов или учреждений, где работают авторы, не взимается, и опубликованные статьи не оплачиваются.

12. Права авторов на использование материалов статей и переводов статей из журнала «Математические заметки СВФУ» в иных публикациях определяются общими международными и российскими законами об авторских правах.



Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и массовых коммуникаций  
Свидетельство о регистрации № ПИ № ФС 77-59001 от 11.08.2014 г.

Учредитель: ФГАОУ ВО «Северо-Восточный  
федеральный университет имени М. К. Аммосова»  
ул. Белинского, 58, Якутск 677000

---

Подписано в печать 03.10.2025. Формат 70 × 108/16.  
Печать цифровая. Усл. печ. л. 15,8. Уч.-изд. л. 9,3. Тираж 50 экз. Заказ № 188.  
Издательский дом Северо-Восточного федерального университета,  
677891, г. Якутск, ул. Петровского, 5.  
Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии ИД СВФУ.  
Свободная цена.