Математические заметки СВФУ
Июль—сентябрь, 2025. Том 32, № 3

УДК 517.9

ЗАДАЧА ТИПА КОШИ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С РЕГУЛЯРНЫМ ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ ТИПА РИМАНА — ЛИУВИЛЛЯ И ЗАМКНУТЫМ ОПЕРАТОРОМ

В. Е. Федоров, А. В. Нагуманова, А. О. Сагимбаева

Аннотация. Исследуется однозначная разрешимость задачи типа Коши и линейных обратных коэффициентных задач для эволюционного уравнения в банаховом пространстве с интегро-дифференциальным оператором типа Римана — Лиувилля первого порядка с регулярным ядром. Оператор при неизвестной функции в уравнении предполагается замкнутым. Получены условия существования и единственности решения задачи типа Коши для линейного неоднородного уравнения. Найден критерий корректной разрешимости для обратной задачи со стационарным неизвестным коэффициентом и с интегральным в смысле Римана — Стилтьеса условием переопределения, включающим в себя условие финального переопределения как частный случай. Найдены условия разрешимости и устойчивости решения обратной задачи с нестационарным неизвестным коэффициентом и абстрактным условием переопределения на полуинтервале. Полученные абстрактные результаты использованы при исследовании линейных обратных начально-краевых задач для уравнений с интегро-дифференциальным оператором типа Римана — Лиувилля первого порядка по временно́й переменной, с многочленами от самосопряженного эллиптического дифференциального оператора по пространственным переменным и с неизвестным коэффициентом в правой части.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-3-95-112

Ключевые слова: интегро-дифференциальный оператор типа Римана — Лиувилля, линейное эволюционное уравнение в банаховом пространстве, задача типа Коши, линейная обратная коэффициентная задача, начально-краевая задача.

Введение

В прикладных исследованиях часто возникают задачи для дифференциальных уравнений с неизвестными коэффициентами — так называемые обратные коэффициентные задачи. Их практическая значимость и теоретическая новизна привели к тому, что уже несколько десятилетий такие задачи вызывают

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Правительства Челябинской области № 24-21-20015, https://rscf.ru/project/24-21-20015/.

большой интерес многих авторов [1–9]. В последние годы все большее внимание исследователей обращено к обратным задачам для уравнений с различными дробными производными: Римана — Лиувилля [10–13], Герасимова — Капуто [14–22], Джрбашяна — Нерсесяна [23–26].

Помимо уравнений с дробными производными интерес исследователей вызывают также уравнения с другими интегро-дифференциальными операторами, которые разделим на классы операторов типа Римана — Лиувилля (композиция оператора свертки и оператора производной целого порядка) и операторов типа Герасимова (сначала действует оператор производной целого порядка, а затем оператор свертки). При этом интегро-дифференциальный оператор каждого из классов будем называть сингулярным или регулярным в зависимости от того, имеет ядро свертки особенность в начале интервала интегрирования или нет.

Для различных классов линейных уравнений в банаховых пространствах с сингулярными интегро-дифференциальными операторами типа Римана — Лиувилля и типа Герасимова исследованы прямые [27–29] и обратные задачи [30, 31].

Интерес исследователей в последние годы часто направлен на уравнения с регулярными интегро-дифференциальными операторами (см. [32, 33] и др.). Условия существования и единственности решения задачи Коши и линейных обратных задач для уравнения в банаховом пространстве с производной Капуто — Фабрицио и ограниченным оператором при неизвестной функции изучены в работе [34]. Вопросы однозначной разрешимости прямых и обратных коэффициентных задач для эволюционных уравнений в банаховых пространствах с регулярным интегро-дифференциальным оператором типа Римана — Лиувилля общего вида в случае ограниченного оператора при искомой функции исследованы в [35]. В данной работе в продолжение работы [35] будет изучено уравнение с регулярным интегро-дифференциальным оператором типа Римана — Лиувилля и линейным замкнутым оператором при неизвестной функции.

Коротко опишем содержание работы. В первом параграфе методами теории преобразования Лапласа получены условия существования и единственности решения задачи типа Коши для линейного неоднородного уравнения, разрешенного относительно регулярного интегро-дифференциального оператора типа Римана — Лиувилля, действующего на искомую функцию, в случае линейного замкнутого оператора при неизвестной функции в правой части уравнения. Найден вид решения. Второй параграф содержит теорему о корректности линейной обратной задачи для такого уравнения в банаховом пространстве со стационарным неизвестным коэффициентом в уравнении. В третьем параграфе получены условия однозначной разрешимости аналогичной задачи с нестационарным неизвестным коэффициентом, доказана оценка устойчивости решения. Полученные абстрактные результаты в четвертом параграфе использованы при исследовании начально-краевых задач для класса уравнений, содержащих регулярный интегро-дифференциальный оператор типа Римана — Лиувилля по времени и многочлены от самосопряженного эллиптического дифференциального по пространственным переменным оператора.

§ 1. Задача типа Коши

Пусть $\mathscr{Z}$, $\mathscr{U}$ — банаховы пространства, $\mathscr{L}(\mathscr{Z};\mathscr{U})$ — банахово пространство всех линейных ограниченных операторов из $\mathscr{Z}$ в $\mathscr{U}$, $\mathscr{L}(\mathscr{Z}) := \mathscr{L}(\mathscr{Z};\mathscr{Z})$, $\mathscr{C}l(\mathscr{Z})$ — множество всех линейных замкнутых операторов в пространстве $\mathscr{Z}$, область определения D_A оператора $A \in \mathscr{C}l(\mathscr{Z})$ снабжена нормой графика $\|\cdot\|_{D_A} := \|\cdot\|_{\mathscr{Z}} + \|A\cdot\|_{\mathscr{Z}}$, $\rho(A) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu I - A)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Z})\}$ — резольвентное множество оператора A, а $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ — его спектр, $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $K(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{Z})$ при $t > 0$. Определим оператор свертки

$$(J^K z)(t) := \int\limits_0^t K(t-s)z(s)\,ds := (K * z)(t), \quad t > 0,$$

и интегро-дифференциальный оператор типа Римана — Лиувилля

$$(D^{1,K} z)(t) := D^1 (J^K z)(t) := D^1 \int\limits_0^t K(t-s)z(s)\,ds, \quad t > 0,$$

где D^1 — оператор производной первого порядка.

Заметим, что для $K \in C([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{Z}))$, $z \in L_1(0,T;\mathscr{Z})$

$$\left\| \int\limits_0^t K(t-s)z(s)\,ds \right\|_{\mathscr{Z}} \le \max_{s\in[0,T]} \|K(s)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \|z\|_{L_1(0,t;\mathscr{Z})} \to 0, \quad t \to 0+.$$

Поэтому $(J^K z)(0) = 0$ и далее будем рассматривать именно такое начальное условие.

Пусть $A \in \mathscr{C}l(\mathscr{Z})$, $f \in C([0,T];\mathscr{Z})$, рассмотрим задачу типа Коши

$$(J^K z)(0) = 0 \tag{1}$$

для эволюционного уравнения

$$(D^{1,K} z)(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in (0,T]. \tag{2}$$

Решением задачи (1), (2) назовем такую функцию $z \in C((0,T];D_A) \cap L_1(0,T;\mathscr{Z})$, что $J^K z \in C([0,T];\mathscr{Z}) \cap C^1((0,T];\mathscr{Z})$, выполняются условия (1) и равенство (2) при $t \in (0,T]$.

Теорема 1. *Пусть $A \in \mathscr{C}l(\mathscr{Z})$, $K \in C^1([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{Z}))$, $(K(0) - A)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Z})$, $f \equiv 0$. Тогда функция $z(t) \equiv 0$ является единственным решением задачи* (1), (2).

Доказательство. Пусть z — решение задачи (1), (2) при $f \equiv 0$, тогда

$$(D^{1,K} z)(t) = K(0)z(t) + (J^{K'} z)(t) = Az(t).$$

Отсюда $z(t) = -(K(0) - A)^{-1}(J^{K'}z)(t)$. Рассмотрим оператор

$$Bz(t) = -(K(0) - A)^{-1}(J^{K'}z)(t)$$

в пространстве $L_1(0, T_1; \mathscr{Z})$, $T_1 \le T$. Для $t \in [0, T_1]$ имеем

$$\left\| \int_0^t K'(t-s)z(s)\,ds \right\|_{\mathscr{Z}} \le \int_0^t \|K'(t-s)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \|z(s)\|_{\mathscr{Z}}\,ds$$
$$\le \|K'\|_{C([0,T_1];\mathscr{L}(\mathscr{Z}))} \|z\|_{L_1(0,T_1;\mathscr{Z})}.$$

Тогда

$$\|Bz\|_{L_1(0,T_1;\mathscr{Z})} \le \|(K(0)-A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \int_0^T \left\| \int_0^t K'(t-s)z(s)\,ds \right\|_{\mathscr{Z}} dt$$
$$\le T_1 \|(K(0)-A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \|K'\|_{C([0,T_1];\mathscr{L}(\mathscr{Z}))} \|z\|_{L_1(0,T_1;\mathscr{Z})} = \frac{1}{2}\|z\|_{L_1(0,T_1;\mathscr{Z})},$$

где

$$T_1 = \frac{1}{2\|(K(0)-A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \|K'\|_{C([0,T_1];\mathscr{L}(\mathscr{Z}))}}.$$

Следовательно, оператор B является сжимающим в пространстве $L_1(0, T_1; \mathscr{Z})$ и единственным решением уравнения $z = Bz$ в этом пространстве является функция $z \equiv 0$. Если $T_1 < T$, возьмем пространство $L_1^{T_1}(0, 2T_1; \mathscr{Z}) := \{y \in L_1(0, 2T_1; \mathscr{Z}) : y(t) = 0$ почти всюду на $[0, T_1]\}$. Тогда

$$\|B\|_{\mathscr{L}\left(L_1^{T_1}(0,2T_1;\mathscr{Z})\right)} \le (2T_1 - T_1)\|(K(0)-A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \|K'\|_{C([0,T_1];\mathscr{L}(\mathscr{Z}))} = \frac{1}{2} < 1$$

и на отрезке $[0, 2T_1]$ получаем единственность решения уравнения $z = Bz$. Если $2T_1 < T$, рассмотрим пространство $L_1^{2T_1}(0, 3T_1; \mathscr{Z}) := \{y \in L_1(0, 3T_1; \mathscr{Z}) : y(t) = 0$ почти всюду на $[0, 2T_1]\}$ и докажем единственность тривиального решения уравнения $z = Bz$ на отрезке $[0, 3T_1]$. Повторяя рассуждения, за конечное число шагов полностью покроем отрезок $[0, T]$. Значит, решение $z \equiv 0$ задачи (1), (2) при $f \equiv 0$ единственно на отрезке $[0, T]$. $\square$

Для функции $h : \mathbb{R}_+ \to \mathscr{Z}$ обозначим ее преобразование Лапласа через $\widehat{h}$.

Далее будем предполагать выполнение следующего условия.

$(\widehat{K})$ Для функции $K \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathscr{L}(\mathscr{Z}))$ существует преобразование Лапласа $\widehat{K}(\lambda)$, продолжимое до однозначной аналитической функции на множестве $\Omega_{a_K} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > a_K\} \cup \infty$, где $a_K > 0$.

Лемма 1. *Пусть $A \in \mathscr{C}l(\mathscr{Z})$, $K \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathscr{L}(\mathscr{Z}))$, $(K(0) - A)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Z})$, выполняется условие $(\widehat{K})$. Тогда при некотором $r > a_K$ определены и аналитичны оператор-функции*

$$Z(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} e^{\lambda t}\,d\lambda, \quad t \in \mathbb{C}, \tag{3}$$

$$AZ(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} \lambda\widehat{K}(\lambda)(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} e^{\lambda t}\, d\lambda, \quad t \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

Доказательство. По теореме о начальном значении оригинала [36] $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda\widehat{K}(\lambda) = K(0)$ в $\mathscr{L}(\mathscr{Z})$. Поскольку $(K(0) - A)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Z})$, с учетом условия $(\widehat{K})$ это означает, что существуют операторы

$$(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} = (K(0) - A + \lambda\widehat{K}(\lambda) - K(0))^{-1} \\ = (I + (K(0) - A)^{-1}(\lambda\widehat{K}(\lambda) - K(0)))^{-1}(K(0) - A)^{-1}$$

для достаточно больших $|\lambda| > r_0 \geq a_K$, для которых

$$\|(\lambda\widehat{K}(\lambda) - K(0))\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} < \frac{1}{2}\|(K(0) - A)^{-1}\|^{-1}_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})}.$$

Поэтому для $C = 2\|(K(0) - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} > 0$ при всех $|\lambda| > r_0 \geq a_K$

$$\|(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \leq C.$$

Также заметим, что

$$(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)(\mu\widehat{K}(\mu) - A)^{-1} = I + (\lambda\widehat{K}(\lambda) - \mu\widehat{K}(\mu))(\mu\widehat{K}(\mu) - A)^{-1},$$

$$(\mu\widehat{K}(\mu) - A)^{-1} - (\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} = (\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}(\lambda\widehat{K}(\lambda) - \mu\widehat{K}(\mu))(\mu\widehat{K}(\mu) - A)^{-1},$$

$$\|(\mu\widehat{K}(\mu) - A)^{-1} - (\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \\ \leq C\|\lambda\widehat{K}(\lambda) - \mu\widehat{K}(\mu)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})}\|(\mu\widehat{K}(\mu) - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \to 0, \quad \lambda \to \mu.$$

Кроме того,

$$\frac{d}{d\mu}(\mu\widehat{K}(\mu) - A)^{-1} = -(\mu\widehat{K}(\mu) - A)^{-1}\left[\frac{d}{d\mu}[\mu\widehat{K}(\mu)]\right](\mu\widehat{K}(\mu) - A)^{-1}.$$

Следовательно, подынтегральное выражение в (3) аналитично в Ω_{r_0}, и поскольку контур $\{|\lambda| = r > r_0\}$ ограничен, то функция $Z(t)$ аналитична по $t \in \mathbb{C}$. При этом

$$AZ(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} (A - \lambda\widehat{K}(\lambda) + \lambda\widehat{K}(\lambda))(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} e^{\lambda t}\, d\lambda \\ = 0 + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} \lambda\widehat{K}(\lambda)(\lambda\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} e^{\lambda t}\, d\lambda.$$

Используя опять же аналитичность подынтегрального выражения в (4) и ограниченность контура, получаем требуемое. □

Теорема 2. *Пусть* $A \in \mathscr{C}l(\mathscr{Z})$, $K \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathscr{L}(\mathscr{Z}))$, $(K(0)-A)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Z})$, *выполняется условие* $(\widehat{K})$, $f \in C((0,T];\mathscr{Z}) \cap L_1(0,T;\mathscr{Z})$. *Тогда функция*

$$z(t) = (K(0)-A)^{-1}f(t) + \int\limits_0^t Z(t-s)f(s)\,ds \tag{5}$$

является единственным решением задачи (1), (2).

Доказательство. В силу леммы 1 функция (5) лежит в $C((0,T];\mathscr{Z}) \cap L_1(0,T;\mathscr{Z})$, следовательно, выполнено условие (1).

Далее,

$$A(K(0)-A)^{-1}f = K(0)(K(0)-A)^{-1}f - f \in C((0,T];\mathscr{Z}),$$

$$A\int\limits_0^t Z(t-s)f(s)\,ds = \int\limits_0^t AZ(t-s)f(s)\,ds \in C([0,T];\mathscr{Z}),$$

поэтому $z \in C((0,T];D_A)$. Кроме того,

$$(J^K z)(t) = (K(0)-A)^{-1}(J^K f)(t) + \int\limits_0^t K(t-\tau)\int\limits_0^\tau Z(\tau-s)f(s)\,dsd\tau \in C([0,T];\mathscr{Z}),$$

$$(D^{1,K}z)(t) = K(0)(K(0)-A)^{-1}f(t) + (K(0)-A)^{-1}(J^{K'}f)(t)$$
$$+ K(0)\int\limits_0^t Z(t-s)f(s)\,ds + \int\limits_0^t K'(t-\tau)\int\limits_0^\tau Z(\tau-s)f(s)\,dsd\tau \in C((0,T];\mathscr{Z}).$$

При $\operatorname{Re}\mu > r$ по интегральной формуле Коши получаем, с учетом положительной ориентации используемых контуров,

$$\widehat{Z}(\mu) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{1}{\mu-\lambda}(\lambda\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}d\lambda$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta|=\frac{1}{r}}\frac{1}{\mu-\frac{1}{\eta}}\left(\frac{1}{\eta}\widehat{K}\left(\frac{1}{\eta}\right)-A\right)^{-1}\frac{d\eta}{\eta^2}$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta|=\frac{1}{r}}\frac{1}{\mu\eta(\eta-\frac{1}{\mu})}\left(\frac{1}{\eta}\widehat{K}\left(\frac{1}{\eta}\right)-A\right)^{-1}d\eta = (\mu\widehat{K}(\mu)-A)^{-1} - (K(0)-A)^{-1}.$$

Доопределим функцию f непрерывным ограниченным образом при $t > T$ и обозначим $z_f := Z * f$, тогда

$$\widehat{z}_f(\lambda) = \widehat{Z}(\lambda)\widehat{f}(\lambda) = [(\lambda\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1} - (K(0)-A)^{-1}]\widehat{f}(\lambda).$$

Следовательно,

$$\widehat{z}(\lambda) = (K(0)-A)^{-1}\widehat{f}(\lambda) + [(\lambda\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1} - (K(0)-A)^{-1}]\widehat{f}(\lambda) = (\lambda\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}\widehat{f}(\lambda),$$

$$\widehat{D^{1,K}z}(\lambda) - \widehat{Az}(\lambda) = (\lambda\widehat{K}(\lambda)-A)(\lambda\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}\widehat{f}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda).$$

Применив обратное преобразование Лапласа, получим (2).

Единственность решения задачи (1), (2) следует из единственности решения соответствующей задачи типа Коши для однородного уравнения, которая доказана в теореме 1. $\square$

§ 2. Линейная обратная задача с постоянным коэффициентом

Пусть $\mathscr{Z}$, $\mathscr{U}$ — банаховы пространства. Рассмотрим обратную задачу для эволюционного уравнения

$$(D^{1,K}z)(t) = Az(t) + B(t)u + g(t), \quad t \in (0,T], \tag{6}$$

где $K \in C^1([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{Z}))$, $D^{1,K}$ — интегро-дифференциальный оператор типа Римана — Лиувилля, $A \in \mathscr{C}l(\mathscr{Z})$, $B \in C([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{U};\mathscr{Z}))$, $g \in C([0,T];\mathscr{Z})$, с начальным условием

$$(J^K z)(0) = 0 \tag{7}$$

и условием переопределения

$$\int\limits_0^T z(t)\,d\nu(t) = z_T \in D_A, \tag{8}$$

где функция $\nu : (0,T] \to \mathbb{C}$ имеет ограниченную вариацию, в обозначениях $\nu \in BV((0,T];\mathbb{C})$. При этом дополнительный неизвестный элемент u в уравнении (6) требуется найти с использованием дополнительного условия (8).

Назовем элемент $u \in \mathscr{U}$ *решением задачи* (6)–(8), если соответствующее решение задачи типа Коши (6), (7) удовлетворяет условию (8). Задачу (6)–(8) назовем *корректной*, если для любых $z_T \in D_A$, $g \in C([0,T];\mathscr{Z})$ существует единственное решение $u \in \mathscr{U}$ задачи, при этом удовлетворяющее оценке

$$\|u\|_{\mathscr{U}} \le C(\|z_T\|_{D_A} + \|g\|_{C([0,T];\mathscr{Z})}),$$

где $C > 0$ не зависит от z_T, g.

В силу представления решения (5) элемент u является решением задачи (6)–(8) тогда и только тогда, когда он удовлетворяет уравнению

$$\chi u = \psi, \tag{9}$$

где χ и ψ определяются формулами

$$\chi := \int\limits_0^T (K(0) - A)^{-1}B(t)\,d\nu(t) + \int\limits_0^T \int\limits_0^t Z(t-s)B(s)\,dsd\nu(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{U};\mathscr{Z}),$$

$$\psi := z_T - \int\limits_0^T (K(0) - A)^{-1}g(t)\,d\nu(t) - \int\limits_0^T \int\limits_0^t Z(t-s)g(s)\,dsd\nu(t) \in \mathscr{Z}.$$

Теорема 3. *Пусть* $A \in \mathscr{C}l(\mathscr{Z})$, $K \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathscr{L}(\mathscr{Z}))$, $(K(0) - A)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Z})$, *выполняется условие* $(\widehat{K})$,

$$g \in C([0,T];\mathscr{Z}), \quad B \in C([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{U};\mathscr{Z})), \quad \nu \in BV((0,T];\mathbb{C}), \quad z_T \in D_A.$$

Тогда обратная задача (6)–(8) корректна в том и только в том случае, когда существует обратный оператор $\chi^{-1} \in \mathscr{L}(D_A;\mathscr{U})$. При этом решение задачи имеет вид $u = \chi^{-1}\psi$.

Доказательство. По теореме 2 существует решение задачи типа Коши (6), (7) с известным элементом $u \in \mathscr{U}$, и оно имеет вид

$$z(t) = (K(0) - A)^{-1}(B(t)u + g(t)) + \int\limits_0^t Z(t-s)(B(s)u + g(s))\,ds.$$

Подставим это решение в условие переопределения (8) и получим (9). При этом

$$\begin{aligned} A\chi &= \int\limits_0^T (A - K(0) + K(0))(K(0)-A)^{-1}B(t)\,d\nu(t) + \int\limits_0^T\int\limits_0^t AZ(t-s)B(s)\,ds d\nu(t) \\ &= \int\limits_0^T K(0)(K(0)-A)^{-1}B(t)\,d\nu(t) - \int\limits_0^T B(t)\,d\nu(t) \\ &\quad + \int\limits_0^T\int\limits_0^t AZ(t-s)B(s)\,ds d\nu(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{U};\mathscr{Z}) \end{aligned}$$

в силу леммы 1, поэтому $\chi \in \mathscr{L}(\mathscr{U};D_A)$. Аналогично доказывается, что

$$\int\limits_0^T (K(0)-A)^{-1}g(t)\,d\nu(t), \int\limits_0^T\int\limits_0^t Z(t-s)g(s)\,ds d\nu(t) \in D_A.$$

Отсюда получаем, что корректность обратной задачи (6)–(8) равносильна существованию оператора $\chi^{-1} \in \mathscr{L}(D_A;\mathscr{U})$. В таком случае

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathscr{U}} &\le \|\chi^{-1}\|_{\mathscr{L}(D_A;\mathscr{U})}\|\psi\|_{D_A} \\ &\le \|\chi^{-1}\|_{\mathscr{L}(D_A;\mathscr{U})}(\|z_T\|_{D_A} + T^2V_0^T(\nu)\|Z\|_{C([0,T];D_A)}\|g\|_{C([0,T];\mathscr{Z})} \\ &\quad + TV_0^T(\nu)(\|K(0)(K(0)-A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} + 2)\|g\|_{C([0,T];\mathscr{Z})}) \\ &\le C(\|z_T\|_{D_A} + \|g\|_{C([0,T];\mathscr{Z})}) \end{aligned}$$

при некотором $C > 0$. Здесь $V_0^T(\nu)$ — вариация функции ν на полуинтервале $(0,T]$. $\square$

§ 3. Обратная задача с переменным коэффициентом

Рассмотрим уравнение

$$(D^{1,K}z)(t) = Az(t) + B(t)u(t) + g(t), \quad t \in (0,T], \tag{10}$$

где $K \in C^1([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{Z}))$, $A \in \mathscr{C}l(\mathscr{Z})$, $B \in C([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{U};\mathscr{Z}))$, $g \in C([0,T];\mathscr{Z})$. В отличие от предыдущего параграфа здесь неизвестный элемент u зависит от t. Снабдим уравнение (10) начальным условием

$$(J^K z)(0) = 0 \tag{11}$$

и условием переопределения

$$\Phi z(t) = \Psi(t), \quad t \in (0, T], \tag{12}$$

где $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{Z}; \mathscr{U})$, $\Psi \in C((0, T]; \mathscr{U})$.

Назовем $u \in C([0, T]; \mathscr{U})$ *решением задачи* (10)–(12), если соответствующее решение задачи типа Коши (10), (11) удовлетворяет условию (12).

Теорема 4. *Пусть $A \in \mathscr{L}(\mathscr{Z})$, $K \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathscr{L}(\mathscr{Z}))$, $(K(0) - A)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Z})$, выполняется условие $(\widehat{K})$, $B \in C([0, T]; \mathscr{L}(\mathscr{U}; \mathscr{Z}))$, $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{Z}; \mathscr{U})$, для всех $t \in [0, T]$ существует обратный оператор $(\Phi K(0)(K(0) - A)^{-1}B(t))^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{U})$, при этом $(\Phi K(0)(K(0) - A)^{-1}B(t))^{-1} \in C([0, T]; \mathscr{L}(\mathscr{U}))$, $\Psi \in C((0, T]; \mathscr{U})$, $D^{1,K}\Psi \in C([0, T]; \mathscr{U})$. Тогда задача* (10)–(12) *имеет единственное решение, при этом выполняется оценка*

$$\|u\|_{C([0,T];\mathscr{U})} \leq C(\|g\|_{C([0,T];\mathscr{Z})} + \|D^{1,K}\Psi\|_{C([0,T];\mathscr{U})}),$$

где $C > 0$ не зависит от g, Ψ.

Доказательство. Имеем

$$(D^{1,K}\Psi)(t) = (D^{1,K}\Phi z)(t) = \Phi(D^{1,K}z)(t) = \Phi(Az(t) + B(t)u(t) + g(t))$$
$$= \Phi A(K(0) - A)^{-1}(B(t)u(t) + g(t)) + \Phi A \int_0^t Z(t - s)(B(s)u(s) + g(s))\, ds$$
$$+ \Phi B(t)u(t) + \Phi g(t) = \Phi K(0)(K(0) - A)^{-1}B(t)u(t) + \Phi K(0)(K(0) - A)^{-1}g(t)$$
$$+ \Phi A \int_0^t Z(t - s)(B(s)u(s) + g(s))\, ds.$$

Отсюда получаем уравнение Вольтерры

$$u(t) = \int_0^t N(t, s)u(s)\, ds + h(t), \tag{13}$$

где

$$N(t, s) = (\Phi K(0)(K(0) - A)^{-1}B(t))^{-1}\Phi A Z(t - s)B(s),$$

$$h(t) = (\Phi K(0)(K(0) - A)^{-1}B(t))^{-1}(D^{1,K}\Psi)(t)$$
$$-(\Phi K(0)(K(0)-A)^{-1}B(t))^{-1}\left(\Phi K(0)(K(0) - A)^{-1}g(t) + \Phi A \int_0^t Z(t - s)g(s)\, ds\right).$$

По условиям теоремы и в силу леммы 1 имеем $h \in C([0, T]; \mathscr{U})$, $N \in C(\widetilde{\Delta}; \mathscr{L}(\mathscr{U}))$, где $\widetilde{\Delta} := \{(t, s) : t \in [0, T],\ s \in [0, t]\}$. Поэтому по теореме 5.1.17 из [2] уравнение Вольтерры (13) имеет единственное решение, причем

$$\|u\|_{C([0,T];\mathscr{U})} \leq C(N)\|h\|_{C([0,T];\mathscr{U})} \leq C(\|g\|_{C([0,T];\mathscr{Z})} + \|D^{1,K}\Psi\|_{C([0,T];\mathscr{U})}). \quad \square$$

§ 4. Приложение к обратным задачам для одного класса уравнений в частных производных

Пусть $P_n(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i\lambda^i$, $Q_n(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{n} d_j\lambda^j$, $c_i, d_j \in \mathbb{C}$, $i = 1,2,\dots,n$, $j = 1,2,\dots,n$, $d_n \neq 0$. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, операторный пучок $\Lambda, B_1, B_2, \dots, B_r$ регулярно эллиптичен [37], где

$$(\Lambda w)(\xi) = \sum_{|q|\le 2r} \frac{a_q(\xi)\partial^{|q|}w(\xi)}{\partial\xi_1^{q_1}\partial\xi_2^{q_2}\dots\partial\xi_d^{q_d}}, \quad a_q \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$(B_l w)(\xi) = \sum_{|q|\le r_l} \frac{b_{lq}(\xi)\partial^{|q|}w(\xi)}{\partial\xi_1^{q_1}\partial\xi_2^{q_2}\dots\partial\xi_d^{q_d}}, \quad b_{lq} \in C^\infty(\partial\Omega),\ l = 1,2,\dots,r,$$

$q = (q_1, q_2, \dots, q_d) \in \mathbb{N}_0^d$, $|q| = q_1 + \dots + q_d$. Положим

$$\mathscr{X} = \{w \in H^{2rn}(\Omega) : B_l\Lambda^k w(\xi) = 0, \quad k = 0,1,\dots,n-1,\ l = 1,2,\dots,r,\ \xi \in \partial\Omega\}.$$

Зададим оператор $\Lambda_1 : D_{\Lambda_1} \to L_2(\Omega)$ с областью определения [37]:

$$D_{\Lambda_1} = H^{2r}_{\{B_l\}}(\Omega) := \{w \in H^{2r}(\Omega) : B_l w(\xi) = 0,\ l = 1,2,\dots,r,\ \xi \in \partial\Omega\},$$

действующий по правилу $\Lambda_1 u = \Lambda u$. Предположим, что оператор Λ_1 самосопряженный и имеет ограниченный справа спектр. Тогда спектр $\sigma(\Lambda_1)$ оператора Λ_1 является действительным, дискретным, конечнократным и сгущается только на $-\infty$ [37]. Пусть $0 \notin \sigma(\Lambda_1)$, $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ — ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система собственных функций оператора Λ_1, занумерованных по невозрастанию соответствующих собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности.

Возьмем $K(t) := ae^{bt}I$, $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, определим оператор свертки и интегро-дифференциальный оператор типа Римана — Лиувилля

$$(J^K h)(t) := a\int_0^t e^{b(t-s)}h(s)\,ds, \quad (D^{1,K}h)(t) := aD^1\int_0^t e^{b(t-s)}h(s)\,ds,$$

тогда преобразование Лапласа $\widehat{K}(\lambda) = \frac{a}{\lambda-b}$ является аналитическим в $\Omega_{|b|}$, а значит, выполняется условие $(\widehat{K})$.

Рассмотрим обратную задачу с не зависящим от времени элементом u

$$\lim_{t\to 0+}\int_0^t e^{b(t-s)}v(\xi,s)\,ds = 0, \quad \xi \in \Omega, \tag{14}$$

$$B_l\Lambda^k v(\xi,t) = 0, \quad k = 0,1,\dots,n-1,\ l = 1,2,\dots,r,\ (\xi,t) \in \partial\Omega\times(0,T], \tag{15}$$

$$\begin{gathered} aP_n(\Lambda)D^1\int_0^t e^{b(t-s)}v(\xi,s)\,ds = Q_n(\Lambda)v(\xi,t) + c(t)u(\xi), \\ (\xi,t)\in\Omega\times(0,T], \quad v(\xi,T) = v_T(\xi), \quad \xi\in\Omega, \end{gathered} \tag{16}$$

где $v_T : \Omega \to \mathbb{R}$, $c : [0,T] \to \mathbb{R}$ — заданные функции.

Пусть $n_0 := \max\{j \in \{0,1,\ldots,n\} : c_j \neq 0\}$, $\mathscr{X} := \{w \in H^{2rn_0}(\Omega) : B_l A^k w(\xi) = 0,\ k = 0,1,\ldots,n_0,\ l = 1,2,\ldots,r,\ \xi \in \partial\Omega\}$. Оператор $P_n(\Lambda) \in \mathscr{L}(\mathscr{X}; L_2(\Omega))$ непрерывно обратим тогда и только тогда, когда $P_n(\lambda_k) \neq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. В этом случае определим на банаховом пространстве $\mathscr{X}$ линейный оператор $A = P_n(\Lambda)^{-1} Q_n(\Lambda)$, который ограничен в $\mathscr{X}$, если $n_0 = n$, т. е. $c_n \neq 0$. Если же $c_n = 0$ и $n_0 < n$, имеем оператор $A \in \mathscr{C}l(\mathscr{X})$ с областью определения $D_A := \{w \in H^{2rn}(\Omega) : B_l A^k w(\xi) = 0,\ k = 0,1,\ldots,n,\ l = 1,2,\ldots,r,\ \xi \in \partial\Omega\} \subset \mathscr{X}$. Задача (14)–(16) таким образом редуцирована к задаче (6), (7).

Теорема 5. *Пусть $P_n(\lambda_k) \neq 0$, $Q_n(\lambda_k) \neq aP_n(\lambda_k)$ при всех $k \in \mathbb{N}$, $c \in C((0,T];\mathbb{R}) \cap L_1(0,T;\mathbb{R})$, $u \in L_2(\Omega)$. Тогда задача* (14)–(16) *имеет единственное решение*

$$v(\xi,t) = c(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle u, \varphi_k \rangle \varphi_k(\xi)}{aP_n(\lambda_k) - Q_n(\lambda_k)} - ab \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_n(\lambda_k) \langle u, \varphi_k \rangle \varphi_k(\xi)}{(Q_n(\lambda_k) - aP_n(\lambda_k))^2} \exp\left(\frac{b(t-s)\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}}{\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)} - a} \right) c(s)\, ds.$$

Здесь и далее символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ будем обозначать скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$.

Доказательство. Нетрудно показать, что спектр оператора

$$A = P_n(\Lambda_1)^{-1} Q_n(\Lambda_1)$$

есть множество $\sigma(A) = \{Q_n(\lambda_k)/P_n(\lambda_k),\ k \in \mathbb{N}\}$. Следовательно, неравенство $Q_n(\lambda_k) \neq aP_n(\lambda_k)$ для всех $k \in \mathbb{N}$ означает существование обратного оператора $(K(0) - A)^{-1} = (aI - A)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$.

Заметим, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{b\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}}{\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)} - a} = b,$$

поэтому существует

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left| \frac{b\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}}{\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)} - a} \right|.$$

Рассмотрим равенство при $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{\frac{a\lambda}{\lambda - b} - \frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{(\lambda - b) e^{\lambda t} d\lambda}{\left(a - \frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}\right)\left(\lambda - \frac{b\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}}{\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)} - a}\right)}$$

$$= \frac{-ab}{\left(\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)} - a\right)^2} \exp\left(\frac{bt\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}}{\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)} - a} \right), \quad r > \sup_{k\in\mathbb{N}} \left| \frac{b\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}}{\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)} - a} \right|,$$

отсюда

$$Z(t) = -ab\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{\left(\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}-a\right)^2}\exp\left(\frac{bt\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}}{\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}-a}\right), \quad t\in\mathbb{R}.$$

Возьмем $f(t) = c(t)P_n(\Lambda_1)^{-1}u(\cdot)$ в теореме 2 и получим требуемое утверждение. □

Теорема 6. *Пусть $P_n(\lambda_k)\neq 0$, $Q_n(\lambda_k)\neq aP_n(\lambda_k)$ для всех $k\in\mathbb{N}$, $c\in C([0,T];\mathbb{R})$, $v_T\in D_A$. Тогда обратная задача (14)–(17) корректна, если и только если существует такое $d>0$, что при всех $k\in\mathbb{N}$*

$$\left|\frac{c(T)}{aP_n(\lambda_k)-Q_n(\lambda_k)} - \frac{abP_n(\lambda_k)}{(Q_n(\lambda_k)-aP_n(\lambda_k))^2}\int_0^T\exp\left(\frac{b(T-s)\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}}{\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}-a}\right)c(s)\,ds\right|\geq d$$

или

$$\left|\frac{c(T)\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}}{aP_n(\lambda_k)-Q_n(\lambda_k)} - \frac{abQ_n(\lambda_k)}{(Q_n(\lambda_k)-aP_n(\lambda_k))^2}\int_0^T\exp\left(\frac{b(T-s)\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}}{\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}-a}\right)c(s)\,ds\right|\geq d.$$

При этом

$$u(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\langle v_T,\varphi_k\rangle\varphi_k(\xi)}{\frac{c(T)}{aP_n(\lambda_k)-Q_n(\lambda_k)} - \frac{abP_n(\lambda_k)}{(Q_n(\lambda_k)-aP_n(\lambda_k))^2}\int_0^T\exp\left(\frac{b(T-s)\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}}{\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}-a}\right)c(s)\,ds}.$$

Доказательство. Здесь ν — функция единичного скачка в точке $t=T$. Возьмем пространство $\mathscr{U}=L_2(\Omega)$ и оператор-функцию $B(t)=c(t)P_n(\Lambda_1)^{-1}\in C([0,T];\mathscr{L}(L_2(\Omega);\mathscr{X}))$. Таким образом, задача (14)–(17) редуцирована к обратной задаче (6)–(8). Для данной задачи получаем оператор

$$\chi := c(T)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{aP_n(\lambda_k)-Q_n(\lambda_k)} - ab\sum_{k=1}^{\infty}\frac{P_n(\lambda_k)\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k(\xi)}{(Q_n(\lambda_k)-aP_n(\lambda_k))^2}\int_0^T\exp\left(\frac{b(T-s)\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}}{\frac{Q_n(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}-a}\right)c(s)\,ds.$$

Из условий данной теоремы следует, что $\|\chi^{-1}\|_{\mathscr{L}(D_A;L_2(\Omega))}\leq d^{-1}$, и по теореме 3 $u=\chi^{-1}v_T$. □

Пусть теперь уравнение имеет вид

$$aP_n(\Lambda)D^1\int_0^t e^{b(t-s)}v(\xi,s)\,ds = Q_n(\Lambda)v(\xi,t)+c(\xi)u(t), \quad (\xi,t)\in\Omega\times(0,T], \tag{18}$$

и снабжено условиями

$$v(\xi_0,t)=\psi(t), \quad t\in(0,T], \tag{19}$$

где $c:\Omega\to\mathbb{R}$, $\psi:(0,T]\to\mathbb{R}$ — заданные функции, $\xi_0\in\Omega$ — фиксированная точка.

Рассмотрим задачу (14), (15), (18), (19).

Теорема 7. *Пусть* $P_n(\lambda_k) \neq 0$, $Q_n(\lambda_k) \neq aP_n(\lambda_k)$ *для всех* $k \in \mathbb{N}$, $c \in L_2(\Omega)$, $\xi_0 \in \Omega$, $\psi \in C((0,T];\mathbb{R})$, $D^{1,K}\psi \in C([0,T];\mathbb{R})$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle c, \varphi_k\rangle \varphi_k(\xi_0)}{aP_n(\lambda_k) - Q_n(\lambda_k)} \neq 0. \tag{20}$$

Тогда задача (14), (15), (18), (19) *имеет единственное решение, при этом выполняется оценка*

$$\|u\|_{C([0,T];\mathbb{R})} \leq C\|D^{1,K}\psi\|_{C([0,T];\mathbb{R})},$$

где $C > 0$ *не зависит от* ψ.

Доказательство. Возьмем пространство $\mathscr{U} = \mathbb{R}$ и оператор-функцию B в виде функции умножения на $P_n(\Lambda_1)^{-1}c \in C([0,T];\mathscr{Z})$. Задача (14), (15), (18), (19) редуцирована к обратной задаче (10)–(12). Условие (20) означает, что существует $(\Phi K(0)(K(0)-A)^{-1}B)^{-1} \in \mathbb{R}$. По теореме 4 получим требуемое. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kozhanov A. I.* Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
2. *Prilepko A. I., Orlovskii D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York; Basel: Marcel Dekker, Inc., 2000.
3. *Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С.* Обратная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве и распределение нулей целой функции типа Миттаг-Леффлера // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 5. С. 637–644.
4. *Abasheeva N. L.* Some inverse problems for parabolic equations with changing time direction // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2004. V. 12, N 4. P. 337–348.
5. *Fedorov V. E., Urazaeva A. V.* An inverse problem for linear Sobolev type equations // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2004. V. 12, N 4. P. 387–395.
6. *Favini A., Lorenzi A.* Differential equations. Inverse and direct problems. New York: Chapman and Hall/CRC, 2006.
7. *Фалалеев М. В.* Абстрактная задача прогноз-управление с вырождением в банаховых пространствах // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2010. Т. 3, № 1. С. 126–132.
8. *Пятков С. Г., Самков М. Л.* О некоторых классах коэффициентных обратных задач для параболических систем уравнений // Мат. тр. 2012. Т. 15, № 1. С. 155–177.
9. *Al Horani M., Favini A.* Degenerate first-order inverse problems in Banach spaces // Nonlinear Anal. 2012. V. 75, N 1. P. 68–77.
10. *Глушак А. В.* Об одной обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения дробного порядка // Мат. заметки. 2010. Т. 87, вып. 5. С. 684–693.
11. *Orlovsky D. G.* Parameter determination in a differential equation of fractional order with Riemann–Liouville fractional derivative in a Hilbert space // Журн. Сиб. федер. ун-та. Математика и физика. 2015. Т. 8, № 1. P. 55–63.
12. *Fedorov V. E., Nazhimov R. R.* Inverse problems for a class of degenerate evolution equations with Riemann–Liouville derivative // Fract. Calc. Appl. Anal. 2019. V. 22, N 2. P. 271–286.
13. *Fedorov V. E., Nagumanova A. V., Avilovich A. S.* A class of inverse problems for evolution equations with the Riemann–Liouville derivative in the sectorial case // Math. Methods Appl. Sci. 2021. V. 44, N 15. P. 11961–11969.
14. *Fedorov V. E., Ivanova N. D.* Identification problem for degenerate evolution equations of fractional order // Fract. Calc. Appl. Anal. 2017. V. 20, N 3. P. 706–721.
15. *Orlovsky D. G.* Determination of the parameter of the differential equation of fractional order with the Caputo derivative in Hilbert space // J. Phys. Conf. Ser. 2019. V. 1205, N 1. 012042.
16. *Федоров В. Е., Костич М.* Задача идентификации для сильно вырожденных эволюционных уравнений с производной Герасимова — Капуто // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57, № 1. С. 100–113.

17. *Fedorov V. E., Nagumanova A. V., Kostić M.* A class of inverse problems for fractional order degenerate evolution equations // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2021. V. 29, N 2. P. 173–184.

18. *Ашуров Р. Р., Файзиев Ю. Э.* Обратная задача по определению порядка дробной производной в волновом уравнении // Мат. заметки. 2021. Т. 110, № 6. С. 824–836.

19. *Kostin A. B., Piskarev S. I.* Inverse source problem for the abstract fractional differential equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2021. V. 29, N 2. P. 267–281.

20. *Fedorov V. E., Ivanova N. D., Borel L. V., Avilovich A. S.* Nonlinear inverse problems for fractional differential equations with sectorial operators // Lobachevskii J. Math. 2022. V. 43, N 11. P. 3125–3141.

21. *Fedorov V. E., Nagumanova A. V.* Inverse linear problems for a certain class of degenerate fractional evolution equations // J. Math. Sci. 2022. V. 260, N 3. P. 371–386.

22. *Федоров В. Е., Плеханова М. В., Иванова Н. Д., Шуклина А. Ф., Филин Н. В.* Нелинейные обратные задачи для некоторых уравнений с дробными производными // Челяб. физ.-мат. журн. 2023. Т. 8, вып. 2. С. 190–202.

23. *Fedorov V. E., Plekhanova M. V., Melekhina D. V.* Nonlinear inverse problems for equations with Dzhrbashyan–Nersesyan derivatives // Fractal and Fractional. 2023. V. 7, N 6. P. 464.

24. *Fedorov V. E., Plekhanova M. V., Melekhina D. V.* On local unique solvability for a class of nonlinear identification problems // Axioms. 2023. V. 12, N 11. P. 1013.

25. *Федоров В. Е., Плеханова М. В., Сагимбаева А. О.* Нелинейные обратные задачи со стационарным неизвестным элементом для уравнений с производными Джрбашяна — Нерсесяна // Мат. заметки СВФУ. 2024. Т. 31, № 3. С. 53–72.

26. *Plekhanova M. V., Izhberdeeva E. M., Melekhina D. V., Sagimbaeva A. O.* Global solvability of nonlinear inverse problems with Dzhrbashyan–Nersesyan derivatives and sectorial operators // J. Math. Sci. 2025. Publ. 15 Feb. 2025. https://doi.org/10.1007/s10958-025-07570-1

27. *Fedorov V. E., Godova A. D., Kien B. T.* Integro-differential equations with bounded operators in Banach spaces // Bull. Karaganda Univ. Math. Ser. 2024. N 2. P. 93–107.

28. *Федоров В. Е., Годова А. Д.* Интегро-дифференциальные уравнения в банаховых пространствах и аналитические разрешающие семейства операторов // Современная математика. Фундаментальные направления. 2023. Т. 69, вып. 1. С. 166–184.

29. *Федоров В. Е., Годова А. Д.* Интегро-дифференциальные уравнения типа Герасимова с секториальными операторами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2024. Т. 30, № 2. С. 243–258.

30. *Федоров В. Е., Годова А. Д.* Линейные обратные задачи для интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах с ограниченным оператором // Современная математика. Фундаментальные направления. 2024. Т. 70, вып. 4. С. 79–90.

31. *Федоров В. Е., Мелехина Д. В.* Линейные задачи идентификации для сингулярных интегро-дифференциальных уравнений типа Герасимова // Мат. заметки СВФУ. 2025. Т. 32, № 1. С. 46–64.

32. *Caputo M., Fabrizio M.* A new definition of fractional derivative without singular kernel // Progr. Fract. Differ. Appl. 2015. V. 1, N 2. P. 73–85.

33. *Atangana A., Baleanu D.* New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model // Thermal Sci. 2016. V. 20. P. 763–769.

34. *Нагуманова А. В., Федоров В. Е.* Прямые и обратные задачи для линейных уравнений с производной Капуто — Фабрицио и ограниченным оператором // Челяб. физ.-мат. журн. 2024. Т. 9, вып. 3. С. 389–406.

35. *Fedorov V. E., Nagumanova A. V.* Direct and inverse problems for evolution equations with regular integrodifferential operators // J. Math. Sci. 2024. V. 286, N 2. P. 278–289.

36. *LePage W. R.* Complex variables and the Laplace transforn for engineers. New York: Dover Publ., 1961.

37. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.

Поступила в редакцию 7 августа 2025 г.
После доработки 19 августа 2025 г.
Принята к публикации 29 августа 2025 г.

Федоров Владимир Евгеньевич,
Нагуманова Анна Викторовна,
Сагимбаева Ангелина Олеговна,
Челябинский государственный университет,
кафедра математического анализа,
ул. Бр. Кашириных, 129, комн. 447, Челябинск 454001
kar@csu.ru, urazaeva_anna@mail.ru angsag@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Июль—сентябрь, 2025. Том 32, № 3

UDC 517.9

A CAUCHY TYPE PROBLEM AND INVERSE PROBLEMS FOR EQUATIONS WITH A RIEMANN—LIOUVILLE TYPE REGULAR INTEGRO–DIFFERENTIAL OPERATOR AND A CLOSED OPERATOR

V. E. Fedorov, A. V. Nagumanova, and A. O. Sagimbaeva

Abstract: The unique solvability of a Cauchy-type problem and linear inverse coefficient problems for an evolution equation in a Banach space with a first-order Riemann–Liouville integro-differential operator with a regular kernel is investigated. The operator at the unknown function in the equation is assumed to be closed. The conditions for the existence and uniqueness of a solution of the Cauchy type problem for a linear inhomogeneous equation are obtained. A criterion of correct solvability is found for the inverse problem with a stationary unknown coefficient and with an integral overdetermination condition in the Riemann–Stieltjes sense, which includes the condition of final overdetermination as a special case. The conditions for the solvability and stability of a solution of the inverse problem with a nonstationary unknown coefficient and an abstract overdetermination condition on the interval are found. The abstract results obtained are used in the study of linear inverse initial boundary value problems for equations with a first-order Riemann–Liouville type regular integro-differential operator in a time variable, with polynomials with respect to a self-adjoint elliptic differential operator in spatial variables and with an unknown coefficient.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-3-95-112

Keywords: Riemann–Liouville type regular integro-differential operator, linear evolution equation in a Banach space, Cauchy type problem, linear inverse coefficient problem, initial boundary value problem.

REFERENCES

1. *Kozhanov A. I.*, Composite Type Equations and Inverse Problems, Utrecht, VSP (1999).
2. *Prilepko A. I., Orlovskii D. G., and Vasin I. A.*, Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics, Marcel Dekker, New York; Basel (2000).
3. *Tikhonov I. V. and Eidelman Yu. S.*, “An inverse problem for a differential equation in a Banach space and the distribution of zeros of an entire Mittag-Leffler function,” Differ. Equ., **38**, No. 5, 669–677 (2002).
4. *Abasheeva N. L.*, “Some inverse problems for parabolic equations with changing time direction,” J. Inverse Ill-Posed Probl., **12**, No. 4, 337–348 (2004).
5. *Fedorov V. E. and Urazaeva A. V.*, “An inverse problem for linear Sobolev type equations,” J. Inverse Ill-Posed Probl., **12**, No. 4, 387–395 (2004).
6. *Favini A. and Lorenzi A.*, Differential Equations, Inverse and Direct Problems, Chapman and Hall/CRC, New York (2006).

7. *Falaleev M. V.*, “Abstract problem of prediction-control with degeneration in Banach spaces [in Russian],” Izv. Irkut. Gos. Univ., Ser. Mat., **3**, No. 1, 126–132 (2010).

8. *Pyatkov S. G. and Samkov M. L.*, “On some classes of coefficient inverse problems for parabolic systems of equations,” Sib. Adv. Math., **22**, No. 4, 155–177 (2012).

9. *Al Horani M. and Favini A.*, “Degenerate first-order inverse problems in Banach spaces,” Nonlinear Anal., **75**, No. 1, 68–77 (2012).

10. *Glushak A. V.*, “On an inverse problem for an abstract differential equation of fractional order,” Math. Notes, **87**, No. 5, 654–662 (2010).

11. *Orlovsky D. G.*, “Parameter determination in a differentia equation of fractional order with Riemann–Liouville fractional derivative in a Hilbert space,” J. Sib. Fed. Univ., Ser. Math. Phys., **8**, No. 1, 55–63 (2015).

12. *Fedorov V. E. and Nazhimov R. R.*, “Inverse problems for a class of degenerate evolution equations with Riemann–Liouville derivative,” Fract. Calc. Appl. Anal., **22**, No. 2, 271–286 (2019).

13. *Fedorov V. E., Nagumanova A. V., and Avilovich A. S.*, “A class of inverse problems for evolution equations with the Riemann–Liouville derivative in the sectorial case,” Math. Methods Appl. Sci., **44**, No. 15, 11961–11969 (2021).

14. *Fedorov V. E. and Ivanova N. D.*, “Identification problem for degenerate evolution equations of fractional order,” Fract. Calc. Appl. Anal., **20**, No. 3, 706–721 (2017).

15. *Orlovsky D. G.*, “Determination of the parameter of the differential equation of fractional order with the Caputo derivative in Hilbert space,” J. Phys. Conf. Ser., **1205**, No. 1, article ID 012042 (2019).

16. *Fedorov V. E. and Kostic M.*, “Identification problem for strongly degenerate evolution equations with the Gerasimov–Caputo derivative,” Differ. Equ., **56**, No. 12, 1613–1627 (2020).

17. *Fedorov V. E., Nagumanova A. V., and Kostić M.*, “A class of inverse problems for fractional order degenerate evolution equations,” J. Inverse Ill-Posed Probl., **29**, No. 2, 173–184 (2021).

18. *Ashurov R. R. and Fayziev Yu. E.*, “Inverse problem for finding the order of the fractional derivative in the wave equation,” Math. Notes, **110**, No. 6, 842–852 (2021).

19. *Kostin A. B. and Piskarev S. I.*, “Inverse source problem for the abstract fractional differential equation,” J. Inverse Ill-Posed Probl., **29**, No. 2, 267–281 (2021).

20. *Fedorov V. E., Ivanova N. D., Borel L. V., and Avilovich A. S.*, “Nonlinear inverse problems for fractional differential equations with sectorial operators,” Lobachevskii J. Math., **43**, No. 11, 3125–3141 (2022).

21. *Fedorov V. E. and Nagumanova A. V.*, “Inverse linear problems for a certain class of degenerate fractional evolution equations,” J. Math. Sci., **260**, No. 3, 371–386 (2022).

22. *Fedorov V. E., Plekhanova M. V., Ivanova N. D., Shuklina A. F., and Filin N. V.*, “Nonlinear inverse problems for some equations with fractional derivatives,” Chelyab. Phys. Math. J., **8**, No. 2, 190–202 (2023).

23. *Fedorov V. E., Plekhanova M. V., and Melekhina D. V.*, “Nonlinear inverse problems for equations with Dzhrbashyan–Nersesyan derivatives,” Fractal Fract., **7**, No. 6, article ID 464 (2023).

24. *Fedorov V. E., Plekhanova M. V., and Melekhina D. V.*, “On local unique solvability for a class of nonlinear identification problems,” Axioms, **12**, No. 11, article ID 1013 (2023).

25. *Fedorov V. E., Plekhanova M. V., and Sagimbaeva A. O.*, “Nonlinear inverse problems with a stationary unknown element for equations with Dzhrbashyan–Nersesyan derivatives,” Mat. Zamet. SVFU, **31**, No. 3, 53–72 (2024).

26. *Plekhanova M. V., Izhberdeeva E. M., Melekhina D. V., and Sagimbaeva A. O.*, “Global solvability of nonlinear inverse problems with Dzhrbashyan–Nersesyan derivatives and sectorial operators,” J. Math. Sci. (publ. 15 Feb. 2025) (2025). https://doi.org/10.1007/s10958-025-07570-1

27. *Fedorov V. E., Godova A. D., and Kien B. T.*, “Integro-differential equations with bounded operators in Banach spaces,” Bull. Karaganda Univ. Math. Ser., No. 2, 93–107 (2024).

28. *Fedorov V. E. and Godova A. D.*, “Integro-differential equations in Banach spaces and analytic resolving families of operators,” J. Math. Sci., **283**, No. 2, 317–334 (2024).

29. *Fedorov V. E. and Godova A. D.*, “Integro-differential equations of Gerasimov type with sectorial operators,” Proc. Steklov Inst. Math., **325**, suppl. 1, S99–S113 (2024).

30. *Fedorov V. E. and Godova A. D.*, “Linear inverse problems for integro-differential equations in Banach spaces with a bounded operator [in Russian],” Contemp. Math., Fund. Directions, **70**, No. 4, 79–90 (2024)

31. *Fedorov V. E. and Melekhina D. V.*, “Linear identifications problems for singular integro-differential equations of Gerasimov type,” Mat. Zamet. SVFU, **32**, No. 1, 46–64 (2025).

32. *Caputo M., Fabrizio M.*, “A new definition of fractional derivative without singular kernel,” Progr. Fract. Differ. Appl., **1**, No. 2, 73–85 (2015).

33. *Atangana A. and Baleanu D.*, “New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model,” Thermal Sci., **20**, 763–769 (2016).

34. *Nagumanova A. V. and Fedorov V. E.*, “Direct and inverse problems for linear equations with Caputo–Fibrizio derivative and a bounded operator,” Chelyab. Phys. Math. J., **9**, No. 3, 389–406 (2024).

35. *Fedorov V. E. and Nagumanova A. V.*, “Direct and inverse problems for evolution equations with regular integrodifferential operators,” J. Math. Sci., **286**, No. 2, 278–289 (2024).

36. *LePage W. R.*, Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers, Dover Publ., New York (1961).

37. *Triebel H.*, Interpolation Theory, Functional Spaces, Differential Operators, VEB Deutsch. Verl. Wiss., Berlin (1978).

Submitted August 7, 2025
Revised August 19, 2025
Accepted August 29, 2025

Vladimir E. Fedorov, Anna V. Nagumanova, and Angelina O. Sagimbaeva
Mathematical Analysis Department,
Chelyabinsk State University,
129 Kashirin Brothers Street, Chelyabinsk 454001, Russia
kar@csu.ru, urazaeva_anna@mail.ru angsag@mail.ru