

ПЕРЕХОД ОТ КИНЕТИЧЕСКОЙ К ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЫ: ВОПРОСЫ ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЯ

О. С. Розанова

Аннотация. На простейшем одномерном примере анализируется переход от кинетической модели холодной плазмы (Ландау, Иорданский) к гидродинамической модели. В процессе перехода сужается класс начальных данных Коши, соответствующих глобально гладкому решению. Построены моментные цепочки, удовлетворяющие однотипным уравнениям первого порядка, и предложено объяснение того, почему их обрезание на каждом следующем шаге расширяет класс начальных данных, соответствующих гладкому решению.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-2-106-107

Ключевые слова: модель холодной плазмы, возникновение особенностей.

Уравнение одномерного движения электронной плазмы без столкновений в безразмерном виде имеет вид [1]

$$F_t + vF_x - E(t, x)F_v = 0, \quad E_x = 1 - n.$$

Здесь $F(t, x, v) > 0$ — плотность электронов в фазовом пространстве, $n(t, x) = \int_{\mathbb{R}} F dv$ — плотность электронов в физическом пространстве, E — напряженность электрического поля. С. В. Иорданским [2] доказана теорема о том, что для непрерывных начальных данных $F_0(x, v) > 0$ (удовлетворяющих достаточно общим предположениям) существует единственное в классе непрерывных функций решение $E(t, x)$ с ограниченной производной E_x , обращающееся в нуль при $x \rightarrow \pm\infty$.

С другой стороны, из гидродинамической модели холодной плазмы может быть получена гиперболическая система для скорости V и электрического поля E

$$V_t + VV_x = -E, \quad E_t + VE_x = V.$$

Плотность $n(t, x) > 0$ находится из условия $E_x = 1 - n$. В [3] было показано, что решение сохраняет гладкость тогда и только тогда, когда для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$ начальные данные Коши (V_0, E_0) удовлетворяют условию

$$(V'_0(x_0))^2 + 2E'_0(x_0) - 1 < 0.$$

Работа поддержана грантом РНФ 23-11-00056.

Таким образом, для задачи в кинетической постановке непрерывное решение существует при любых начальных данных $E'_0(x_0) < 1$ (естественное ограничение, связанное с положительностью плотности), а для задачи в гидродинамической постановке непрерывного решения нет, если хотя бы в одной точке $x_0 \in \mathbb{R}$ имеет место $E'_0(x_0) \geq \frac{1}{2}$.

Мы переходим от кинетической постановки к гидродинамической при помощи специально конструируемых моментных цепочек, что помогает объяснить, почему в процессе перехода сужается класс начальных данных, обеспечивающих гладкость решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. О колебаниях электронной плазмы // ЖЭТФ. 1946. Т. 16, № 7. С. 574–586.
2. Иорданский С. В. О задаче Коши для кинетического уравнения плазмы // Тр. МИАН СССР. 1961. Т. 60. С. 181–194.
3. Rozanova O. S, Chizhonkov E. V. On the conditions for the breaking of oscillations in a cold plasma // ZAMP. 2021. V. 72, N 1. Article 13.

Розанова Ольга Сергеевна
 Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
 Механико-математический факультет,
 Ленинские горы, 1, Москва 119191
 rozanova@mech.math.msu.su

TRANSITION FROM A KINETIC TO A HYDRODYNAMIC MODEL OF COLD PLASMA: ISSUES OF SMOOTHNESS OF THE SOLUTION

O. S. Rozanova

Abstract: Using the simplest one-dimensional example, we analyze the transition from the kinetic model of cold plasma (Landau, Iordansky) to the hydrodynamic model. During the transition, the class of initial Cauchy data corresponding to a globally smooth solution is narrowed. We construct moment chains that satisfy similar first-order equations and offer an explanation of why cutting them off at each next step expands the class of initial data corresponding to a smooth solution.

Keywords: cold plasma model, emergence of singularities.

Olga S. Rozanova
 Lomonosov Moscow State University,
 Mathematics and Mechanics Faculty,
 1 Leninskie Gory, Moscow 119191, Russia