

УДК 517.97

ЗАДАЧИ О КОНТАКТЕ ПЛАСТИНЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ ВКЛЮЧЕНИЕ, С ОБЪЕМНЫМИ И ТОЧЕЧНЫМИ НЕПОДВИЖНЫМИ ПРЕПЯТСТВИЯМИ

Н. П. Лазарев,
Д. Я. Никифоров, С. В. Сафонов

Аннотация. Исследованы две нелинейные математические модели о равновесии пластин, контактирующих с препятствиями двух видов. Предполагается, что пластина содержит объемное жесткое включение, соприкасающееся с препятствием в исходном состоянии. Первый вид препятствий ограничивает перемещения пластин на лицевой поверхности на участке квадратной формы. Другой вид препятствия также задается на лицевой поверхности, но имеет точечный характер, т. е. условия типа Синьорини задаются в одной заданной точке. Доказана сходимости решений семейства вариационных задач при стремлении к нулю параметра, задающего площадь контактной поверхности к нулю. При этом показано, что предельной функцией является решение задачи, описывающей точечный контакт пластины.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-3-15-27

Ключевые слова: вариационная задача, препятствие, пластина, контактная задача, предельный переход.

Введение. Контактные задачи механики упругих тел с односторонними ограничениями в рамках известного подхода Синьорини представляют собой класс нелинейных задач с граничными условиями в виде неравенств рассмотрены в [1–5]. Отметим работу [6], где исследована динамическая задача для упругого тела с учетом сил трения и с условием типа Синьорини на трещине, а также приведен обзор по динамическим задачам в рамках соответствующей тематики. Контактные задачи для пластин, учитывающие механическое взаимодействие с другими твердыми телами на лицевой поверхности, изучены в широком круге работ, например, в статьях [7–10] изучены модели о контакте с тонкими упругими балками, в [11–13] исследовано контактное взаимодействие двух упругих пластин. В недавних работах были предложены математические модели для пластин, где описывается контакт с наклонными препятствиями [14], контакт на боковой грани изучен в [15, 16]. Наличие жесткого включения в

Раздел 1 выполнен при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания проект № FSRG–2023–0025. Раздел 2 выполнен при поддержке Минобрнауки РФ (Соглашение от 11.03.2025 г., проект 075–02–2025–1792).

© 2025 Лазарев Н. П., Никифоров Д. Я., Сафонов С. В.

упругом теле предполагает аффинную структуру перемещений на соответствующем множестве [17–19]. Это свойство делает возможным исследование контактного взаимодействия точечного характера для моделей неоднородных тел с жесткими включениями [20, 21]. Численная реализация для моделей упругих тел с односторонними ограничениями предложена, например, в [22–24].

В [25] исследована задача оптимального управления для вариационного неравенства относительно бигармонического оператора, в которой препятствие принимается за управление. При этом наряду с доказательством разрешимости задачи управления была установлена непрерывная зависимость решений от функций из класса H^2 , задающих препятствие. Кроме того, в [25] можно найти краткий обзор по задачам оптимального управления с управлением, задаваемым препятствиями. Асимптотический анализ для контактных задач представляет собой весьма актуальное направление (см., например, [26–30]). Поскольку для ряда прикладных задач зоны контакта (в которых искомые перемещения соответствуют соприкосновению контактирующих поверхностей или кривых) заранее неизвестны, оценки ее положения и размеров представляют интерес при изучении свойств решений, см., например, работы, посвященные выявлению свойств зоны контакта относительно задачи Синьорини для уравнения Пуассона [31, 32], в частности, в [32] нахождение зон контакта было сведено к решению нелинейной алгебраической задачи.

В работе изучены две нелинейные математические модели о равновесии упругих пластин Кирхгофа — Лява, контактирующих с препятствиями двух видов. Предполагается, что пластина содержит жесткое включение, посредством которого происходит контакт с препятствием. Для первого вида препятствий прогибы пластины ограничиваются сверху нулем на заданном множестве в форме квадрата со стороной $\delta \in (0, 1]$. Для второго вида препятствия также задаются условия неположительности прогибов в одной точке $(0, 0)$. Доказана сильная сходимость в энергетической норме решений семейства вариационных задач при $\delta \rightarrow 0$. При этом показано, что предельной функцией является решение задачи, описывающей точечный контакт пластины.

1. Вариационная постановка. Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ , которая состоит из двух кривых $\Gamma = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\gamma}$, $\Gamma_0 \cap \gamma = \emptyset$, $\text{meas}(\Gamma_0) > 0$. Обозначим через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ внешнюю нормаль к границе Γ области Ω . Для простоты предположим, что пластина имеет равномерную толщину $2h$. Зададим трехмерное декартово пространство $\{x_1, x_2, z\}$ так, чтобы пластина соответствовала множеству $\Omega \times [-h, h] \subset \mathbf{R}^3$. Пусть односвязная подобласть $\omega \subset \Omega$ и Ω таковы, что $[-1, 1] \times [-1, 1] \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, граница $\partial\omega$ области ω принадлежит классу $C^{1,1}$. При этом лицевые поверхности пластины в исходном состоянии задаются множествами $\Omega \times \{-h\}$, $\Omega \times \{h\}$, для определенности будем изучать задачу о возможном контакте с верхней лицевой поверхностью, т. е. заданной множеством $\Omega \times \{h\}$.

Обозначим через $\chi = \chi(x) = (W(x), w(x))$ вектор перемещений точек срединной поверхности ($x = (x_1, x_2) \in \Omega$), через $W = (w_1, w_2)$ — перемещения в

плоскости $\{x_1, x_2\}$, а через w — перемещения вдоль оси z (прогибы). Тензоры деформаций и усилий обозначаются через $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(W)$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(W)$ соответственно [33, 34]:

$$\varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_j}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right), \quad \sigma_{ij}(W) = a_{ijrl} \varepsilon_{rl}(W), \quad i, j = 1, 2,$$

где $\{a_{ijrl}\}$ — заданный тензор упругости, который предполагается симметричным и положительно определенным:

$$a_{ijrl} = a_{rlji} = a_{jir l}, \quad i, j, r, l = 1, 2, \quad a_{ijrl} \in L^\infty(\Omega), \\ a_{ijrl} \xi_{ij} \xi_{rl} \geq c_0 |\xi|^2 \quad \forall \xi, \quad \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \quad c_0 = \text{const} > 0.$$

Здесь и далее используется соглашение о суммировании по повторяющимся индексам. Введем изгибающие моменты следующими формулами [33]:

$$m_{ij}(w) = -d_{ijrl} w_{,rl}, \quad i, j = 1, 2 \quad \left(w_{,rl} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_r \partial x_l} \right),$$

где тензор $\{d_{ijrl}\}$ имеет те же характеристики симметрии, ограниченности и положительной определенности, что и тензор $\{a_{ijrl}\}$. Пусть $B(\cdot, \cdot)$ — билинейная форма, определенная равенством

$$B(\chi, \bar{\chi}) = \int_{\Omega} \{ \sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(\bar{W}) - m_{ij}(w) \bar{w}_{,ij} \} dx,$$

где $\chi = (W, w)$, $\bar{\chi} = (\bar{W}, \bar{w})$.

Введем следующие пространства Соболева:

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ на } \Gamma_0\},$$

$$H_{\Gamma_0}^2(\Omega) = \left\{ v \in H^2(\Omega) \mid v = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Gamma_0 \right\},$$

$$H(\Omega) = H_{\Gamma_0}^1(\Omega)^2 \times H_{\Gamma_0}^2(\Omega), \quad \|\chi\| = \|\chi\|_{H(\Omega)} = (\|W\|_{H^1(\Omega)^2}^2 + \|w\|_{H^2(\Omega)}^2)^{1/2}.$$

Функционал потенциальной энергии пластинки Кирхгофа — Лява имеет следующий вид:

$$\Pi(\chi) = \frac{1}{2} B(\chi, \chi) - \int_{\Omega} F \chi dx, \quad \chi = (W, w),$$

где вектор $F = (f_1, f_2, f_3) \in L_2(\Omega)^3$ описывает внешние силы [33]. Заметим, что в силу условий на Γ_0 имеет место следующее неравенство, обеспечивающее коэрцитивность функционала Π :

$$B(\chi, \chi) \geq c \|\chi\|^2 \quad \forall \chi \in H(\Omega), \quad (1)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от χ [33].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Неравенство (1) означает, что норма в пространстве $H(\Omega)$ эквивалентна норме, определенной с помощью билинейной формы $B(\cdot, \cdot)$.

В исходном состоянии пластины жесткое включение соответствует множеству $\omega \times [-h, h]$, перемещения точек которого принадлежат следующему пространству инфинитезимальных жестких перемещений:

$$R(\omega) = \{\zeta \mid \zeta(x) = (bx_2 + c_1, -bx_1 + c_2, a_0 + a_1x_1 + a_2x_2); x = (x_1, x_2) \in \omega\},$$

где $b, c_1, c_2, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, [34–37].

Перейдем к описанию недеформируемого препятствия и ограничений на перемещения для точек пластины, которые соприкасаются с контактной поверхностью препятствия в исходном состоянии. Сначала отметим, что для пластины Кирхгофа — Лява прогибы или вертикальные перемещения по всей толщине пластины совпадают с прогибами точек срединной плоскости (см. [34]), т. е.

$$w^z(x) = w(x), \quad z \in [-h, h],$$

где $w^z(x)$ — вертикальные перемещения точек пластины, имеющих координаты (x, z) в исходном состоянии. Для фиксированного $\delta \in (0, 1]$ рассмотрим модель с недеформируемым препятствием, задаваемым множеством

$$(-\delta, \delta) \times (-\delta, \delta) \times \{h\},$$

которое ограничивает перемещения пластины со стороны верхней лицевой поверхности. Предположим, что для точек множества $O_\delta = (-\delta, \delta) \times (-\delta, \delta)$ имеет место неравенство

$$w(x) \leq 0, \quad x \in O_\delta,$$

или в силу линейной структуры в области O_δ

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 \leq 0, \quad x = (x_1, x_2) \in O_\delta. \quad (2)$$

Таким образом, для фиксированного значения $\delta \in (0, 1]$ с учетом ограничений на перемещения множество допустимых перемещений запишем в виде

$$K_\delta = \{\chi = (W, w) \in H(\Omega) \mid \chi \text{ удовлетворяет (2), } \chi|_\omega = \zeta, \zeta \in R(\omega)\}.$$

Сформулируем вариационную постановку задачи равновесия. Требуется найти функцию $\xi^\delta = (U^\delta, u^\delta) \in K_\delta$ такую, что

$$\Pi(\xi^\delta) = \inf_{\chi \in K_\delta} \Pi(\chi). \quad (3)$$

Теорема 1. Для каждого фиксированного $\delta \in (0, 1]$ задача (3) имеет единственное решение ξ^δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 1 не требует каких-либо новых по-существу рассуждений. Для этого достаточно заметить, что множество K_δ является выпуклым и замкнутым, а также применить с незначительными видоизменениями рассуждения, приведенные в [36]. Функционал выпуклый и дифференцируемый, поэтому задача (3) эквивалентна следующему вариационному неравенству:

$$\xi^\delta \in K_\delta, \quad B(\xi^\delta, \chi - \xi^\delta) \geq \int_{\Omega} F(\chi - \xi^\delta) dx \quad \forall \chi \in K_\delta. \quad (4)$$

Стандартным способом, от противного (см. [36]), можно доказать, что существуют единственное решение задачи (3).

Наряду с семейством вариационных задач, зависящих от $\delta \in (0, 1]$, рассмотрим предельный случай, соответствующий $\delta = 0$. При этом контакт может происходить только в одной точке $(0, 0)$. Поскольку $x_1 = x_2 = 0$, для функции прогибов $w(x_1, x_2) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$ в области ω имеем

$$a_0 \leq 0. \quad (5)$$

Соответствующее множество допустимых перемещений примет вид

$$K_0 = \{\chi = (W, w) \in H(\Omega) \mid \chi \text{ удовлетворяет (5), } \chi|_\omega = \zeta, \zeta \in R(\omega)\}.$$

Задача о точечном контакте пластины запишется в следующем виде. Требуется найти функцию $\xi^0 = (U^0, u^0) \in K_0$ такую, что

$$\Pi(\xi^0) = \inf_{\chi \in K_0} \Pi(\chi). \quad (6)$$

Теорема 2. *Задача (6) имеет единственное решение ξ^0 .*

Несмотря на относительную новизну постановки задачи, доказательство теоремы 2 также не представляет значительных трудностей. Заинтересованный читатель может найти доказательства аналогичных результатов в [36]. Как и выше, задача (6) эквивалентна следующему вариационному неравенству:

$$\xi^0 \in K_0, \quad B(\xi^0, \chi - \xi^0) \geq \int_{\Omega} F(\chi - \xi^0) dx \quad \forall \chi \in K_0. \quad (7)$$

Методом от противного (см. [36]), можно установить, что решение задачи (6) будет единственным.

2. Предельный переход при $\delta \rightarrow 0$. Установим, что задача (6) является предельной для семейства задач (3) при $\delta \rightarrow 0$. А именно имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Семейство решений $\{\xi^\delta\}_{\delta \in (0, 1]}$ задач (3) сходится сильно к решению задачи (6) ξ^0 в пространстве $H(\Omega)$ при $\delta \rightarrow 0$.*

Доказательство. Подставляя последовательно тестовые функции $\chi = (0, 0, 0)$, $\chi = 2\xi^\delta$ в (4), нетрудно убедиться в справедливости равенств

$$B(\xi^\delta, \xi^\delta) = \int_{\Omega} F\xi^\delta dx \quad \forall \delta \in (0, 1]. \quad (8)$$

Отсюда следует равномерная оценка

$$\|\xi^\delta\| \leq C \quad (9)$$

для всех $\delta \in (0, 1]$. Рефлексивность пространства Соболева и неравенство (9) позволяют утверждать, что при $\delta \rightarrow 0$ найдутся некоторая функция $\tilde{\xi} \in H(\Omega)$ и последовательность (обозначенная прежним образом) $\{\xi^\delta\}$ такие, что $\xi^\delta \rightarrow \tilde{\xi}$

слабо в $H(\Omega)$. Покажем, что $\tilde{\xi} \in K_0$. В самом деле, ограниченность норм (9) влечет, в свою очередь, ограниченность числовых последовательностей $\{a_0^\delta\}$, $\{a_1^\delta\}$, $\{a_2^\delta\}$, определяющих структуру соответствующих функций последовательности $\{\xi^\delta\}$, $\xi^\delta = (U^\delta, u^\delta)$, в области ω :

$$u^\delta(x_1, x_2)|_\omega = a_0^\delta + a_1^\delta x_1 + a_2^\delta x_2, \quad (x_1, x_2) \in \omega.$$

Ограниченность каждой последовательности $\{a_0^\delta\}$, $\{a_1^\delta\}$, $\{a_2^\delta\}$ означает, что можно выделить подпоследовательности (сохранив обозначения), сходящиеся соответственно к числам a_0^0 , a_1^0 , a_2^0 . Рассмотрим выражения

$$a_0^\delta + a_1^\delta x_1 + a_2^\delta x_2 \leq 0, \quad x \in O_\delta,$$

для выбранных указанным образом последовательностей чисел. Поскольку имеют место неравенства

$$a_0^\delta - |a_1^\delta|\delta - |a_2^\delta|\delta \leq 0$$

для сходящихся числовых последовательностей $\{a_0^\delta\}$, $\{a_1^\delta\}$, $\{a_2^\delta\}$, получим, что при $\delta \rightarrow 0$

$$a_0^0 \leq 0.$$

Таким образом, $\tilde{\xi} \in K_0$.

Пусть $\chi_0 \in K_0$ — произвольная тестовая функция. Построим последовательность $\{\chi^\delta\}$, сходящуюся сильно к χ_0 в пространстве $H(\Omega)$ при $\delta \rightarrow 0$. По условию

$$\chi_0|_\omega = \zeta_0(x_1, x_2) = (bx_2 + c_1, -bx_1 + c_2, a_0 + a_1x_1 + a_2x_2), \quad (x_1, x_2) \in \omega,$$

$a_0 \leq 0$, для некоторых постоянных b , c_1 , c_2 , a_0 , a_1 , a_2 . Возьмем функцию, построенную следующим образом:

$$j_\delta(x) = a_0 - |a_1|\delta - |a_2|\delta + a_1x_1 + a_2x_2, \quad x = (x_1, x_2) \in \omega,$$

для фиксированного $\delta \in (0, 1]$. Очевидно, что она удовлетворяет

$$j_\delta(x) \leq 0 \quad \text{для всех } x = (x_1, x_2) \in O_\delta.$$

Для каждого фиксированного $\delta \in (0, 1]$ с помощью оператора поднятия $L : H^{3/2}(\partial\omega \cup \Gamma) \times H^{1/2}(\partial\omega \cup \Gamma) \rightarrow H^2(\Omega \setminus \overline{\omega})$ (граница области $\Omega \setminus \overline{\omega}$ принадлежит классу $C^{1,1}$) построим следующую функцию g_δ , определенную в $H^2(\Omega \setminus \overline{\omega})$, такую, что $g_\delta = L(q_\delta^1, q_\delta^2)$, где

$$q_\delta^1(x_1, x_2) = |a_1|\delta + |a_2|\delta, \quad (x_1, x_2) \in \partial\omega,$$

$$q_\delta^1(x_1, x_2) = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma,$$

$$q_\delta^2(x_1, x_2) = 0, \quad (x_1, x_2) \in \partial\omega \cup \Gamma.$$

Отметим, что функции $\{\tilde{\chi}_\delta\}$, $\delta \in (0, 1]$, определенные с помощью равенств

$$\tilde{\chi}_\delta = \begin{cases} (0, 0, |a_1|\delta + |a_2|\delta), & (x_1, x_2) \in \overline{\omega}, \\ (0, 0, g_\delta), & (x_1, x_2) \in \Omega \setminus \overline{\omega}, \end{cases}$$

в силу непрерывности оператора L сходятся к нулю в пространстве $H(\Omega)$ при $\delta \rightarrow 0$. Остается положить

$$\chi_\delta = \chi_0 - \tilde{\chi}_\delta$$

для каждого $\delta \in (0, 1]$. Поскольку для любого $\delta \in (0, 1]$ построенная функция χ_δ принадлежит K_δ , ее можно подставить в вариационное неравенство (4) и получить

$$B(\xi^\delta, \chi_\delta - \xi^\delta) \geq \int_{\Omega} F(\chi_\delta - \xi^\delta) dx. \quad (10)$$

На основании сильной сходимости $\chi_\delta \rightarrow \chi_0$ в пространстве $H(\Omega)$ при $\delta \rightarrow 0$ и слабой сходимости $\xi^\delta \rightarrow \tilde{\xi}$ можно перейти к пределу в неравенстве (10) при $\delta \rightarrow 0$. В результате имеем неравенство

$$B(\tilde{\xi}, \chi_0 - \tilde{\xi}) \geq \int_{\Omega} F(\chi_0 - \tilde{\xi}) dx, \quad (11)$$

выполненное для произвольной функции $\chi_0 \in K_0$. Последнее вместе с тем фактом, что $\tilde{\xi}$ принадлежит K_0 , означает, что (11) является вариационным неравенством. Следовательно, ввиду единственности решения заключаем, что $\tilde{\xi} = \xi^0$.

Итак, $\xi^\delta \rightarrow \xi^0$ слабо в $H(\Omega)$ для некоторой числовой последовательности $\{\delta\} \subset (0, 1]$, $\delta \rightarrow 0$. Установим, что для этой же последовательности имеет место сильная сходимость. Для этого вспомним равенства (8) и аналогичное равенство, справедливое при $\delta = 0$:

$$B(\xi^0, \xi^0) = \int_{\Omega} F\xi^0 dx.$$

Слабая сходимость гарантирует выполнение равенства

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega} F\xi^\delta dx = \int_{\Omega} F\xi^0 dx,$$

откуда следует, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} B(\xi^\delta, \xi^\delta) = B(\xi^0, \xi^0).$$

Последнее согласно замечанию 1 влечет, что $\|\xi^\delta\| \rightarrow \|\xi^0\|$ при $\delta \rightarrow 0$. На основании сходимости норм и слабой сходимости $\xi^\delta \rightarrow \xi^0$ в пространстве Соболева $H(\Omega)$ при $\delta \rightarrow 0$ делаем вывод о наличии сильной сходимости $\xi^\delta \rightarrow \xi^0$ в пространстве $H(\Omega)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Очевидно, что в случае препятствия, расположенного со стороны нижней лицевой поверхности, можно рассматривать условия вида

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 \geq 0, \quad x = (x_1, x_2) \in O_\delta,$$

аналогичные неравенствам (2). При этом в соответствующем точечном неравенстве знак также поменяется на обратный. В этом случае результаты, аналогичные полученным, также могут быть установлены с некоторыми несущественными изменениями. Кроме того, выбрав подходящую систему координат,

также нетрудно обосновать выполнение аналогичного результата для препятствий, расположенных с нижней стороны, при $z = -h$.

Исходя из рассуждений доказательств, схожие утверждения можно получить и для других семейств областей, задающих множества точек возможного контакта, например, для семейства кругов радиуса δ и т. д.

Заключение. В работе изучена связь двух математических моделей о равновесии пластин, контактирующих с препятствиями специальной формы. Препятствия обуславливают ограничения на прогибы в виде неравенств (2), заданных на квадратных множествах $O_\delta = (-\delta, \delta) \times (-\delta, \delta)$, а также неравенства (5), заданного в одной точке $(0, 0)$. Доказано, что вариационные задачи для упругих пластин с жесткими включениями (3) и (6) имеют единственные решения. Доказана сильная сходимость в $H(\Omega)$ решений ξ^δ семейства вариационных задач (3) при $\delta \rightarrow 0$. При этом показано, что предельной функцией является решение задачи ξ^0 , описывающей точечный контакт пластины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fichera G. Boundary value problems of elasticity with unilateral constraints. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1972. (Handb. Phys.; Band 6a/2).
2. Dal Maso G., Paderni G. Variational inequalities for the biharmonic operator with variable obstacles // Ann. Mat. Pura Appl. 1988. V. 153. P. 203–227.
3. Kovtunen V. A., Itou H., Khludnev A. M., Rudoy E. M. Non-smooth variational problems and applications // Philos. Trans. A. 2022. V. 380. 20210364.
4. Байокки К., Капело А. Вариационные и квазивариационные неравенства. М.: Наука, 1988.
5. Kovtunen V. A. Poroelastic medium with non-penetrating crack driven by hydraulic fracture: Variational inequality and its semidiscretization // J. Comput. Appl. Math. 2022. V. 405. 113953.
6. Kashiwabara T., Itou H. Unique solvability of a crack problem with Signorini-type and Tresca friction conditions in a linearized elastodynamic body // Philos. Trans. R. Soc. A. 2022. V. 380. 20220225.
7. Рудой Е. М., Хлуднев А. М. Односторонний контакт пластины с тонким упругим препятствием // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12, № 2. С. 120–130.
8. Фурцев А. И. Задача об одностороннем контакте пластины Тимошенко и тонкого упругого препятствия // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 364–379.
9. Фурцев А. И. О контакте тонкого препятствия и пластины, содержащей тонкое включение // Сиб. журн. чистой и прикл. математики. 2017. Т. 17, № 4. С. 94–111.
10. Попова Т. С. Задача о контакте вязкоупругой пластины с упругой балкой // Сиб. журн. индустр. математики. 2016. Т. 19, № 3. С. 41–54.
11. Pyatkina E. V. A contact of two elastic plates connected along a thin rigid inclusion // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 1797–1815.
12. Хлуднев А. М. О контакте двух пластин, одна из которых содержит трещину // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, № 5. С. 882–894.
13. Хлуднев А. М. Об одностороннем контакте двух пластин, расположенных под углом друг к другу // Прикл. механика техн. физика. 2008. Т. 49, № 4. С. 42–58.
14. Lazarev N. P., Semenova G. M., Fedotov E. D. An equilibrium problem for a Kirchhoff–Love plate, contacting an obstacle by top and bottom edges // Lobachevskii J. Math. 2023. V. 44, N 2. P. 614–619.
15. Lazarev N. P., Rudoy E. M., Nikiforov D. Ya. Equilibrium problem for a Kirchhoff–Love plate contacting by the side edge and the bottom boundary // Журн. СФУ. Сер. Математика и физика. 2024. Т. 17, № 3. С. 355–364.

16. Лазарев Н. П., Никифоров Д. Я., Романова Н. А. Задача о равновесии для пластины Тимошенко, контактирующей боковой и лицевой поверхностями // Челяб. физ.-мат. журн. 2023. Т. 8, № 4. С. 528–541.
17. Фурцев А. И. Задача о равновесии гиперупругого тела с жестким включением и трещиной с условиями непроникания // Сиб. электрон. мат. изв. 2024. Т. 21, № 1. С. 17–40.
18. Попова Т. С. Задача о Т-образном сопряжении тонкого жесткого включения и включения Тимошенко в двумерном упругом теле // Сиб. электрон. мат. изв. 2024. Т. 21, № 2, С. 1578–1593.
19. Khludnev A., Fankina I. Equilibrium problem for elastic plate with thin rigid inclusion crossing an external boundary // Z. Angew. Math. Phys. 2021. V. 72. 121.
20. Lazarev N. P., Kovtunen V. A. Signorini-type problems over non-convex sets for composite bodies contacting by sharp edges of rigid inclusions // Math. 2022. V. 10, N 2. 250.
21. Lazarev N., Singh A. Contact problem for an inhomogeneous Timoshenko plate interacting with an inclined obstacle // Z. Angew. Math. Mech. 2025. V. 105. e70097.
22. Kovtunen V. A., Renard Y. Convergence analysis of semi-smooth Newton method for mixed FEM approximations of dynamic two-body contact and crack problems // J. Comput. Appl. Math. 2026. V. 471. 116722.
23. Казаринов Н. А., Рудой Е. М., Слесаренко В. Ю., Щербаков В. В. Математическое и численное моделирование равновесия упругого тела, армированного тонким упругим включением // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2018. Т. 58, № 5. С. 790–805.
24. Попова Т. С. Численное решение задачи о Т-образном сопряжении двух тонких включений Тимошенко в двумерном упругом теле // Мат. заметки СВФУ. 2024. Т. 31, № 3. С. 93–120.
25. Adams D. R., Hryniv V., Lenhart S. Optimal control of a biharmonic obstacle problem. Around the Research of Vladimir Maz'ya, III (A. Laptev, ed.). New York, NY: Springer, 2010. (Int. Math. Ser.; vol. 13).
26. Ciarlet P. G., Mardare C., Piersanti P. An obstacle problem for elliptic membrane shells // Math. Mech. Solids. 2018. V. 24, N 5. P. 1503–1529.
27. Аргатов И. И., Назаров С. А. Асимптотическое решение задачи Синьорини с препятствием на тонком продолговатом множестве // Мат. сб. 1996. Т. 187, № 10. С. 3–32.
28. Caffarelli L., Friedman A. The obstacle problem for the biharmonic operator // Ann. Sco. Norm. Sup. Pisa 1979. V. 6, N 1. P. 151–184.
29. Хлуднев А. М. Асимптотика анизотропных слабо искривленных включений в упругом теле // Сиб. журн. индустр. математики. 2017. Т. 20, № 1. С. 93–104.
30. Лазарев Н. П., Ковтуненко В. А. Асимптотический анализ задачи о равновесии неоднородного тела с шарнирно соединенными жесткими включениями различной ширины // Прикл. механика и техн. физика. 2023. Т. 64, № 5. С. 205–215.
31. De Benito Delgado M., Diaz J. I. Some remarks on the coincidence set for the Signorini problem // Opusc. Math. 2019. V. 39. P. 145–157.
32. Аргатов И. И., Назаров С. А. Асимптотическое решение задачи Синьорини с малыми участками свободной границы // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 2. С. 258–277.
33. Khludnev A. M., Kovtunen V. A. Analysis of cracks in solids. Southampton: WIT-Press, 2000.
34. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.
35. Khludnev A. M. Problem of a crack on the boundary of a rigid inclusion in an elastic plate // Mech. Solids. 2010. V. 45, N 5. P. 733–742.
36. Хлуднев А. М. Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
37. Намм Р. В., Цой Г. И. Решение контактной задачи теории упругости с жестким включе-

нием // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2019. Т. 59, № 4. С. 699–706.

Поступила в редакцию 3 июня 2025 г.

После доработки 21 июля 2025 г.

Принята к публикации 29 августа 2025 г.

Лазарев Нюргун Петрович
Северо-Восточный федеральный университет,
Научно-исследовательский институт математики,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
`nyurgunlazarev@yandex.ru`

Никифоров Дьулустан Яковлевич
Северо-Восточный федеральный университет,
Институт математики и информатики,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
`dju92@mail.ru`

Сафонов Степан Васильевич
Республиканский лицей-интернат,
ул. Ойунского, 37, Якутск 677000
`rl_ssv@mail.ru`

PROBLEMS FOR PLATES WITH RIGID INCLUSIONS
CONTACTING WITH FLAT AND POINTWISE
OBSTACLES ON THE FRONT SURFACES

N. P. Lazarev, D. Ya. Nikiforov,
and S. V. Safonov

Abstract: Two nonlinear mathematical models on equilibrium of plates in contact with obstacles of two types are studied. It is assumed that the plate contains a bulk rigid inclusion that touches the obstacle in the initial state. The first type of obstacle limits displacements of the plates to a square-shaped section lying on the front surface. The second type of obstacle also restricts displacements on the front surface, but has a pointwise character, i.e. Signorini-type conditions are specified at one given point. The convergence of solutions of a family of variational problems is proved as the parameter that determines the area of the contact zone tends to zero. It is shown that a limit function is the solution to the problem describing the pointwise contact of the plate.

DOI: 10.25587/2411-9326-2025-3-15-27

Keywords: variational problem, obstacle, plate, contact problem, limit passage.

REFERENCES

1. Fichera G., Boundary Value Problems of Elasticity with Unilateral Constraints, in: Handbook der Physik, Band 6a/2, Springer, Berlin; Heidelberg; New York (1972).
2. Dal Maso G. and Paderni G., “Variational inequalities for the biharmonic operator with variable obstacles,” *Ann. Mat. Pura Appl.*, **153**, 203–227 (1988).
3. Kovtunen V. A., Itou H., Khudnev A. M., and Rudoy E. M., “Non-smooth variational problems and applications,” *Philos. Trans. R. Soc. A*, **380**, article ID 20210364 (2022).
4. Baiocchi C. and Capello A., *Variational and Quasivariational Inequalities: Application to Free Boundary Problems*, Wiley, New York (1984).
5. Kovtunen V. A., “Poroelastic medium with non-penetrating crack driven by hydraulic fracture: Variational inequality and its semidiscretization,” *J. Comput. Appl. Math.*, **405**, article ID 113953 (2022).
6. Kashiwabara T. and Itou H., “Unique solvability of a crack problem with Signorini-type and Tresca friction conditions in a linearized elastodynamic body,” *Philos. Trans. R. Soc. A*, **380**, article ID 20220225 (2022).
7. Rudoi E. M. and Khudnev A. M., “Unilateral contact of a plate with a thin elastic obstacle,” *J. Appl. Ind. Math.*, **4**, 389–398 (2010).
8. Furtsev A. I., “The unilateral contact problem for a Timoshenko plate and a thin elastic obstacle,” *Sib. Electron. Math. Rep.*, **17**, 364–379 (2020).
9. Furtsev A. I., “On contact between a thin obstacle and a plate containing a thin inclusion,” *J. Math. Sci.*, **237**, No. 4, 530–545 (2019).
10. Popova T. S., “A contact problem for a viscoelastic plate and an elastic beam,” *J. Appl. Ind. Math.*, **10**, No. 3, 404–416 (2016).
11. Pyatkina E. V., “A contact of two elastic plates connected along a thin rigid inclusion,” *Sib. Electron. Math. Rep.*, **17**, 1797–1815 (2020).

12. Khludnev A. M., "The contact between two plates, one of which contains a crack," J. Appl. Math. Mech., **61**, No. 5, 851–862 (1997).
13. Khludnev A. M., "On unilateral contact of two plates aligned at an angle to each other," J. Appl. Mech. Tech. Phys., **49**, 553–567 (2008).
14. Lazarev N. P., Semenova G. M., and Fedotov E. D., "An equilibrium problem for a Kirchhoff–Love plate, contacting an obstacle by top and bottom edges," Lobachevskii J. Math., **44**, No. 2, 614–619 (2023).
15. Lazarev N. P., Rudoy E. M., and Nikiforov D. Ya., "Equilibrium problem for a Kirchhoff–Love plate contacting by the side edge and the bottom boundary," J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., **17**, No. 3, 355–364 (2024).
16. Lazarev N. P., Nikiforov D. Y., and Romanova N. A., "Equilibrium problem for a Timoshenko plate contacting by the side and face surfaces," Chelyab. Fiz.-Mat. Zh., **8**, No. 4, 528–541 (2023).
17. Furtsev A. I., "Problem of equilibrium for hyperelastic body with rigid inclusion and non-penetrating crack," Sib. Electron. Math. Rep., **21**, No. 1, 17–40 (2024).
18. Popova T. S., "The problem on T -shape junction of thin inclusion," Sib. Electron. Math. Rep., **21**, No. 2, 1578–1593 (2024).
19. Khludnev A. and Fankina I., "Equilibrium problem for elastic plate with thin rigid inclusion crossing an external boundary," Z. Angew. Math. Phys., **72**, article ID 121 (2021).
20. Lazarev N. P. and Kovtunenkov V. A., "Signorini-type problems over non-convex sets for composite bodies contacting by sharp edges of rigid inclusions," Math., **10**, No. 2, article ID 250 (2022).
21. Lazarev N. and Singh A., "Contact problem for an inhomogeneous Timoshenko plate interacting with an inclined obstacle," Z. Angew. Math. Mech., **105**, article ID e70097 (2025).
22. Kovtunenkov V. A. and Renard Y., "Convergence analysis of semi-smooth Newton method for mixed FEM approximations of dynamic two-body contact and crack problems," J. Comput. Appl. Math., **471**, article ID 116722 (2026).
23. Kazarinov N. A., Rudoy E. M., Slesarenko V. Y., and Shcherbakov V. V., "Mathematical and numerical simulation of equilibrium of an elastic body reinforced by a thin elastic inclusion," Comput. Math. Math. Phys., **58**, 761–774 (2018).
24. Popova T., "Numerical solution of the problem of T -shaped junction of two thin Timoshenko inclusions in a two-dimensional elastic body," Mat. Zamet. SVFU, **31**, No. 3, 93–120 (2024).
25. Adams D. R., Hryniv V., and Lenhart S., Optimal Control of a Biharmonic Obstacle Problem, in: Around the Research of Vladimir Maz'ya, III (A. Laptev, ed.), Springer, New York (2010) (Int. Math. Ser.; vol. 13).
26. Ciarlet P. G., Mardare C., and Piersanti P., "An obstacle problem for elliptic membrane shells," Math. Mech. Solids, **24**, No. 5, 1503–1529 (2018).
27. Argatov I. I. and Nazarov S. A., "Asymptotic solution of the Signorini problem with an obstacle on a thin elongated set," Sb. Math., **187**, No. 10, 1411–1442 (1996).
28. Caffarelli L. and Friedman A., "The obstacle problem for the biharmonic operator," Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **6**, No. 1, 151–184 (1979).
29. Khludnev A. M., "Asymptotics of anisotropic weakly curved inclusions in an elastic body," J. Appl. Ind. Math., **11**, 88–98 (2017).
30. Lazarev N. P. and Kovtunenkov V. A., "Asymptotic analysis of the problem of equilibrium of an inhomogeneous body with hinged rigid inclusions of various widths," J. Appl. Mech. Tech. Phys., **64**, No. 5, 911–920 (2024).
31. De Benito Delgado M. and Diaz J. I., "Some remarks on the coincidence set for the Signorini problem," Opusc. Math., **39**, 145–157 (2019).
32. Argatov I. I. and Nazarov S. A., "Asymptotic solution to the Signorini problem with small parts of the free boundary," Sib. Math. J., **35**, 231–249 (1994).
33. Khludnev A. M. and Kovtunenkov V. A., Analysis of Cracks in Solids, WIT-Press, Southampton (2000).
34. Volmir A. S., Nonlinear Dynamics of Plates and Shells [in Russian], Nauka, Moscow (1972).
35. Khludnev A. M., "Problem of a crack on the boundary of a rigid inclusion in an elastic plate," Mech. Solids, **45**, No. 5, 733–742 (2010).

-
- 36.** *Khudnev A. M.*, Elasticity Problems in Nonsmooth Domains [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2010).
- 37.** *Namm R. V. and Tsoy G. I.*, “Solution of a contact elasticity problem with a rigid inclusion,” *Comput. Math. Math. Phys.*, **59**, 659–666 (2019).

Submitted June 3, 2025

Revised July 21, 2025

Accepted August 29, 2025

Nyurgun P. Lazarev
North-Eastern Federal University (NEFU),
Scientific Research Institute of Mathematics,
58 Belinsky Street, Yakutsk 677891, Russia
nyurgunlazarev@yandex.ru

Djulustan Ya. Nikiforov
Institute of Mathematics and Information Science,
North-Eastern Federal University
58 Belinsky Street, Yakutsk 677000, Russia
dju92@mail.ru

Stepan V. Safonov
Republican Lyceum Boarding School,
37 Oyunsky Street, Yakutsk 677891, Russia
rl_ssv@mail.ru