

ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА ГАЛЁРКИНА К УРАВНЕНИЮ СМЕШАННОГО ТИПА

И. Е. Егоров, И. М. Тихонова

Аннотация. Рассматривается частный случай краевой задачи В. Н. Врагова, когда уравнение смешанного типа принадлежит гиперболическому типу вблизи нижнего основания и гиперголо-параболическому типу на верхнем основании цилиндрической области. Для исследования краевой задачи используется модифицированный (нестационарный) метод Галёркина с привлечением метода регуляризации. Для данной краевой задачи построено приближенное решение с помощью решения системы ОДУ третьего порядка. При этом получена оценка погрешности модифицированного метода Галёркина через параметр регуляризации и собственные числа задачи Дирихле для оператора Лапласа по переменным $x \in \mathbb{R}^N$.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, априорная оценка, метод Галёркина, неравенство, регуляризация.

Исследования краевых задач для неклассических уравнений физики начались с работ Трикоми и Геллерстедта [1–3] в 1920–30 гг. Тогда впервые были поставлены и исследованы краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа: в одной части области определения — эллиптического типа, а в другой — гиперболического. Такие задачи называются задачами Трикоми и Геллерстедта [4]. Следующим этапом развития теории краевых задач для уравнений математической физики стали работы М. А. Лаврентьева, И. Н. Векуа, С. А. Христиановича, С. А. Чаплыгина, К. Г. Гудерлей [5] и др. В этих работах указана важность изучения проблемы неклассических уравнений математической физики при решении задач, возникающих в трансзвуковой газовой динамике, а также в безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака и во многих других прикладных задачах механики. В 1970-х гг. В. Н. Врагов [6, 7] начал построение общей теории краевых задач для уравнения смешанного типа второго порядка с произвольным многообразием изменения типа. К исследованию краевых задач для уравнений смешанного типа применялись теория сингулярных интегральных уравнений [1, 2, 4, 5, 8, 9], функциональные методы, метод регуляризации, нестационарный метод Галёркина [6, 7, 10–13]. Метод Галёркина широко применяется к решению краевых задач для уравнений математической физики (см. [14–17] и др.). В [16, 17] получены оценки погрешности метода Галёркина для эллиптических и параболических уравнений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках базовой части государственного задания (проект № 3047).

В [18] стационарный метод Галёркина применен к решению первой краевой задачи для уравнения смешанного типа, когда уравнение принадлежит эллиптическому типу вблизи оснований цилиндрической области. В [19] получена оценка погрешности стационарного метода Галёркина через собственные числа оператора Лапласа по переменным $x \in \mathbb{R}^n$ и t .

В данной работе рассматривается частный случай краевой задачи В. Н. Врагова, когда уравнение смешанного типа принадлежит гиперболическому типу вблизи нижнего основания и гиперболо-параболическому типу на верхнем основании цилиндрической области. Для исследования краевой задачи будем использовать модифицированный (нестационарный) метод Галёркина [20] с привлечением метода регуляризации. Для данной краевой задачи построим приближенное решение с помощью решения системы ОДУ третьего порядка, получив при этом оценку погрешности модифицированного метода Галёркина через параметр регуляризации и собственные числа задачи Дирихле для оператора Лапласа по переменным $x \in \mathbb{R}^N$.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей S , $Q = \Omega \times (0, T)$, $S_T = S \times (0, T)$, $\Omega_t = \Omega \times \{t\}$, $0 \leq t \leq T$.

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu \equiv k(x, t)u_{tt} - \Delta u + a(x, t)u_t + c(x)u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

коэффициенты которого являются достаточно гладкими функциями.

Положим

$$P_0^\pm = \{(x, 0) : k(x, 0) \gtrless 0, x \in \Omega\}, \quad P_T^\pm = \{(x, T) : k(x, T) \gtrless 0, x \in \Omega\}.$$

Краевая задача. Найти решение уравнения (1) в области Q такое, что

$$u|_{S_T} = 0, \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{\overline{P}_0^+} = 0, \quad u_t|_{\overline{P}_T^-} = 0. \quad (3)$$

Отметим, что краевая задача (1)–(3) впервые была изучена В. Н. Враговым [7] с помощью метода регуляризации.

Для целого $k \geq 1$ через $\|\cdot\|_k$ будем обозначать норму пространства Соболева $W_2^k(Q)$, при этом

$$(u, v) = \int_Q u(x, t)v(x, t) dQ, \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)}, \quad u, v \in L_2(Q).$$

Пусть C_L — класс гладких функций, удовлетворяющих краевым условиям (2), (3).

Лемма 1 [6, 7]. Пусть выполнены условия $c(x) \geq c_0 > 0$, $a - \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0$. Тогда существует константа $\lambda > 0$ такая, что имеет место неравенство

$$(Lu, e^{-2\lambda t}u_t) \geq C_1\|u\|_1^2, \quad C_1 = e^{-2\lambda T} \min\{\delta/2, \lambda, \lambda c_0\},$$

для всех функций $u \in C_L$.

Теорема 1. Пусть $c(x) \geq c_0 > 0$ и выполнены условия

$$\begin{aligned} k(x, 0) > 0, \quad k(x, T) \geq 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \\ a + \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0, \quad a - \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0, \quad f, f_t \in L_2(Q), \quad f(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

Тогда краевая задача (1)–(3) имеет единственное решение $u(x, t)$ из $W_2^2(Q)$ и справедлива оценка

$$\|u\|_2 \leq C_2(\|f\| + \|f_t\|), \quad C_2 > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\varepsilon > 0$ положим $L_\varepsilon u = -\varepsilon u_{ttt} + Lu$. В качестве базисных функций берем $\varphi_k(x)$, являющиеся решением спектральной задачи

$$-\Delta \varphi = \lambda \varphi, \quad x \in \Omega, \quad \varphi|_s = 0.$$

При этом функции $\varphi_k(x)$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$, а соответствующие собственные числа таковы, что $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ и $\lambda_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$.

Рассмотрим случай $k(x, 0) > 0, k(x, T) \geq 0$. Приближенное решение $u^{N, \varepsilon}(x, t)$ краевой задачи (1)–(3) ищем в виде

$$u^{N, \varepsilon}(x, t) = \sum_{k=1}^N c_k^{N, \varepsilon}(t) \varphi_k(x), \quad N \geq 1, \quad \varepsilon > 0,$$

в котором $c_k^{N, \varepsilon}(t)$ определяются как решение следующей краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка:

$$(L_\varepsilon u^{N, \varepsilon}, \varphi_l)_0 = (f, \varphi_l)_0, \quad (4)$$

$$c_l^{N, \varepsilon}|_{t=0} = 0, \quad D_t c_l^{N, \varepsilon}|_{t=0} = 0, \quad D_t^2 c_l^{N, \varepsilon}|_{t=T} = 0, \quad l = \overline{1, N}. \quad (5)$$

Умножим (4) на $e^{-2\lambda t} c_{kt}^{N, \varepsilon}$ и просуммируем полученное равенство по k от 1 до N :

$$-\varepsilon \int_Q u_{ttt}^{N, \varepsilon} u_t^{N, \varepsilon} e^{-2\lambda t} dQ + (Lu^{N, \varepsilon}, e^{-2\lambda t} u_t^{N, \varepsilon}) = \int_Q f u_t^{N, \varepsilon} e^{-2\lambda t} dQ. \quad (6)$$

Из (6) в силу леммы 1 вытекает неравенство

$$\varepsilon \int_Q e^{-2\lambda t} (u_{tt}^{N, \varepsilon})^2 dQ - 2\lambda \varepsilon \left| \int_Q e^{-2\lambda t} u_{tt}^{N, \varepsilon} u_t^{N, \varepsilon} dQ \right| + C_1 \|u^{N, \varepsilon}\|_1^2 \leq \left| \int_Q f u_t^{N, \varepsilon} e^{-2\lambda t} dQ \right|, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \|u^{N, \varepsilon}\|_1^2 &= \int_Q \left[(u_t^{N, \varepsilon})^2 + \sum_{i=1}^N (u_{x_i}^{N, \varepsilon})^2 + (u^{N, \varepsilon})^2 \right] dQ, \\ C_1 &= e^{-2\lambda T} \min\{\delta/2, \lambda, \lambda c_0\}. \end{aligned}$$

Используя неравенство Коши $|ab| \leq \gamma_1 a^2 + \frac{1}{4\gamma_1} b^2$, $a, b, \gamma_1 > 0$, из (7) получаем

$$\begin{aligned} &\frac{\varepsilon}{2} \int_Q e^{-2\lambda t} (u_{tt}^{N, \varepsilon})^2 dQ + (C_1 - 2\lambda^2 \varepsilon) \int_Q (u_t^{N, \varepsilon})^2 dQ \\ &+ C_1 \int_Q \left[\sum_{i=1}^N (u_{x_i}^{N, \varepsilon})^2 + (u^{N, \varepsilon})^2 \right] dQ \leq \left| \int_Q e^{-2\lambda t} f u_t^{N, \varepsilon} dQ \right|, \quad \gamma_1 = (4\lambda)^{-1}, \quad (8) \end{aligned}$$

откуда с помощью неравенства Коши при $\gamma_1 = \frac{C_1}{4}$ имеем

$$\varepsilon \|u_{tt}^{N,\varepsilon}\|^2 + \|u^{N,\varepsilon}\|_1^2 \leq C_2 \|f\|^2, \quad C_2 > 0, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 = \frac{C_1}{4\lambda^2}. \quad (9)$$

Оценка (9) гарантирует существование единственного решения краевой задачи (4), (5). Следовательно, приближенные решения $u^{N,\varepsilon}$ однозначно определяются задачей (4), (5) и $c_k^{N,\varepsilon} \in W_2^3(0, T)$.

Умножим (4) на $-D_t^3 c_k^{N,\varepsilon}$ и просуммируем полученное равенство по k от 1 до N :

$$\varepsilon \int_Q (u_{ttt}^{N,\varepsilon})^2 dQ - (Lu^{N,\varepsilon}, u_{ttt}^{N,\varepsilon}) = - \int_Q f u_{ttt}^{N,\varepsilon} dQ. \quad (10)$$

Проинтегрируем по частям левую часть полученного равенства:

$$\begin{aligned} - (Lu^{N,\varepsilon}, u_{ttt}^{N,\varepsilon}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} k(x, 0) (u_{tt}^{N,\varepsilon})^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_T} \left(\sum_{k=1}^n (u_{tx_i})^2 \right) dx \\ &\quad + \int_Q \left[\left(a + \frac{1}{2} k_t \right) (u_{tt}^{N,\varepsilon})^2 + a_t u_t^{N,\varepsilon} u_{tt}^{N,\varepsilon} \right] dQ. \end{aligned}$$

Преобразуем правую часть равенства (10) с учетом условий теоремы 1:

$$(f, -u_{ttt}^{N,\varepsilon}) = \int_Q f_t u_{tt}^{N,\varepsilon} dQ.$$

В силу неравенства Коши из (10) следует оценка

$$\varepsilon \|u_{ttt}^{N,\varepsilon}\|^2 + \|u_{tt}^{N,\varepsilon}\|^2 \leq C_3 (\|f_t\|^2 + \|f\|^2), \quad C_3 > 0. \quad (11)$$

Умножим (4) на $\lambda_k c_k^{N,\varepsilon}$ и просуммируем полученное равенство по k от 1 до N :

$$(\varepsilon u_{ttt}^{N,\varepsilon}, \Delta u^{N,\varepsilon}) - (Lu^{N,\varepsilon}, \Delta u^{N,\varepsilon}) = -(f, \Delta u^{N,\varepsilon}).$$

Интегрируя по частям в последнем равенстве, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega_T} \sum_{i=1}^n (u_{tx_i}^{N,\varepsilon})^2 dx + \int_Q [(\Delta u^{N,\varepsilon})^2 dQ - (k u_{tt}^{N,\varepsilon} + a u_t^{N,\varepsilon} + c u^{N,\varepsilon}) \Delta u^{N,\varepsilon}] dQ \\ = - \int_Q f \Delta u^{N,\varepsilon} dQ, \end{aligned}$$

откуда с учетом неравенств (9), (11) получаем

$$\varepsilon \int_Q (u_{ttt}^{N,\varepsilon})^2 + \int_Q (\Delta u^{N,\varepsilon})^2 dQ \leq C_4 (\|f_t\|^2 + \|f\|^2), \quad C_4 > 0. \quad (12)$$

В силу неравенств (9), (11), (12) и второго основного неравенства для оператора Лапласа [14] для приближенных решений справедлива оценка

$$\varepsilon \|u_{ttt}^{N,\varepsilon}\|^2 + \|u^{N,\varepsilon}\|_2^2 \leq C_5 (\|f_t\|^2 + \|f\|^2), \quad C_5 > 0. \quad (13)$$

Из оценки (13) следует утверждение теоремы 1, так как единственность решения краевой задачи (1)–(3) обеспечивается леммой 1 из [7].

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда для погрешности модифицированного метода Галёркина справедлива оценка

$$\|u - u^{N,\varepsilon}\|_1 \leq C_6(\|f\| + \|f_t\|)(\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \lambda_{N+1}^{-1/4}), \quad C_6 > 0. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В пространстве $L_2(Q)$ введем линейное многообразие

$$H_N = \left\{ \eta(x, t) = \sum_{l=1}^N a_l(t) \varphi_l(x) : a_l \in W_2^2(0, T), \quad a_l(0) = a'_l(0) = 0, \quad l = \overline{1, N} \right\}.$$

Из равенств (4) нетрудно получить соотношения

$$(L_\varepsilon u^{N,\varepsilon}, e^{-2\lambda t} \eta_t) = (f, e^{-2\lambda t} \eta_t), \quad (Lu, e^{-2\lambda t} \eta_t) = (f, e^{-2\lambda t} \eta_t), \quad \eta \in H_N.$$

Отсюда

$$(L(u - u^{N,\varepsilon}), e^{-2\lambda t} \eta_t) = -(\varepsilon u_{ttt}^{N,\varepsilon}, e^{-2\lambda t} \eta_t), \quad \eta \in H_N.$$

Положим $\eta = w - u^{N,\varepsilon}$ с произвольной функцией w из H_N :

$$\begin{aligned} \int_Q L(u - u^{N,\varepsilon}) e^{-2\lambda t} (u_t - u_t^{N,\varepsilon}) dQ &= -\varepsilon \int_Q e^{-2\lambda t} u_{ttt}^{N,\varepsilon} (\omega_t - u_t^{N,\varepsilon}) dQ \\ + \int_Q (f - Lu^{N,\varepsilon}) e^{-2\lambda t} (u_t - w_t) dQ &= \varepsilon \int_Q e^{-2\lambda t} u_{tt}^{N,\varepsilon} [(\omega_{tt} - u_{tt}^{N,\varepsilon}) - 2\lambda(\omega_t - u_t^{N,\varepsilon})] dQ \\ &\quad + \int_Q (f - Lu^{N,\varepsilon}) e^{-2\lambda t} (u_t - w_t) dQ. \end{aligned} \quad (15)$$

В силу теоремы 1 краевая задача (1)–(3) имеет единственное решение из $W_2^2(Q)$ такое, что

$$u_t \in W_2^1(Q), \quad u_t = \sum_{k=1}^{\infty} c'_k \varphi_k, \quad c_k = (u, \varphi_k)_0,$$

и имеет место оценка

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \int_0^T |c'_k(t)|^2 dt = \int_Q \sum_{k=1}^n (u_{tx_k})^2 dQ \leq C_7(\|f_t\|^2 + \|f\|^2), \quad C_7 > 0. \quad (16)$$

При $\omega = P_N u = \sum_{k=1}^N c_k(t) \varphi_k(x)$ справедливо равенство

$$\int_{\Omega} |u_t - w_t|^2 dx = \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} c'_k(t) \varphi_k \right\|^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} |c'_k(t)|^2.$$

Тогда

$$\|u_t - w_t\|^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} \int_0^T |c'_k(t)|^2 dt \leq \frac{1}{\lambda_{N+1}} \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_k \int_0^T |c'_k(t)|^2 dt. \quad (17)$$

В силу леммы 1 с учетом неравенств (16), (17) из равенства (15) получаем оценку (14) погрешности модифицированного метода Галёркина. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. М.: Гостехиздат, 1947.
2. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1957.
3. Gellerstedt S. Sur un probleme aux limites pour une équation lineaire aux derivées partielles du second ordre de tipe mixte. Uppsala: These, 1935.
4. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
5. Гудерлей К. Г. Теория околозвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
6. Врагов В. Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1983.
7. Врагов В. Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 6. С. 1098–1105.
8. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970.
9. Салахитдинов М. С. Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент: Фан, 1974.
10. Егоров И. Е., Федоров В. Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995.
11. Егоров И. Е., Федоров В. Е. Введение в теорию уравнений смешанного типа второго порядка. Якутск: Изд-во Якут. ун-та, 1998.
12. Моисеев Е. И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: Изд-во МГУ, 1988.
13. Ларькин Н. А. Об одном классе нелинейных уравнений смешанного типа // Сиб. мат. журн. 1978. Т. 19, № 6. С. 1308–1314.
14. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.
15. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
16. Джишкарини А. В. О скорости сходимости метода Бубнова — Галёркина // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1964. Т. 4, № 2. С. 343–348.
17. Виноградова П. В., Зарубин А. Г. Оценка погрешности метода Галёркина для нестационарных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 9. С. 1643–1651.
18. Егоров И. Е., Тихонова И. М. О стационарном методе Галёркина для уравнения смешанного типа второго порядка // Мат. заметки ЯГУ. 2010. Т. 17, № 2. С. 41–47.
19. Егоров И. Е., Тихонова И. М. Применение стационарного метода Галёркина для уравнения смешанного типа // Мат. заметки ЯГУ. 2012. Т. 19, № 2. С. 20–28.
20. Егоров И. Е. О модифицированном методе Галёркина для параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Узбек. мат. журн. 2013. № 3. С. 33–40.

Статья поступила 15 ноября 2014 г.

Егоров Иван Егорович, Тихонова Ирина Михайловна
Научно-исследовательский институт математики
Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000, Республика Саха (Якутия)
ivanegorov51@mail.ru, IrinaMikh3007@mail.ru