

ПОЛУГРУППЫ С ФИНИТНО АППРОКСИМИРУЕМЫМИ ПОЛИГОНАМИ

И. Б. Кожухов, А. Р. Халиуллина

Аннотация. Изучаются полугруппы, над которыми все правые полигоны финитно аппроксимируемы. Охарактеризованы группы с этим свойством. Доказано, что если все полигоны над полугруппой аппроксимируются конечными, порядки которых ограничены, то полугруппа равномерно локально конечна, т. е. существует функция $f(n)$ такая, что порядок любой n -порожденной подполугруппы меньше $f(n)$.

Ключевые слова: полигон над полугруппой, финитно аппроксимируемый полигон, равномерно локально конечная алгебра.

Хорошо известно, что категория полигонов над полугруппой несет большую информацию о строении полугруппы (см., например, [1, гл. 6]). В [2–4] исследовались полугруппы S , удовлетворяющие следующим условиям на полигоны:

- (*) все правые S -полигоны финитно аппроксимируемы,
- (**) все правые S -полигоны аппроксимируются полигонами из n или меньшего числа элементов.

Напомним, что финитно аппроксимируемый полигон — это то же, что резидуально конечный. В [2] доказано, что все полигоны над полугруппой S аппроксимируются полигонами, содержащими не более двух элементов, в том и только том случае, если S — полурешетка (коммутативная полугруппа идемпотентов). В [3] была установлена периодичность полугрупп, удовлетворяющих условию (**). В [3, 4] исследовались коммутативные и нильполугруппы с условиями (*) и (**). Цель данной работы — продолжить исследования полугрупп с этими условиями. Мы докажем, что у полугруппы с условием (*) любая правая конгруэнция является пересечением правых конгруэнций конечного индекса. Для групп это условие оказывается и достаточным, т. е. группа удовлетворяет условию (*) в том и только том случае, если любая ее подгруппа является пересечением подгрупп конечного индекса.

Следуя А. Г. Пинусу [5], назовем универсальную алгебру *равномерно локально конечной*, если существует функция $h(t)$ такая, что порядки t -порожденных подалгебр не превышают $h(t)$. Аналогично этому полугруппу можно назвать *равномерно периодической*, если она удовлетворяет тождеству $x^{p+q} = x^p$. В [3] доказана равномерная периодичность полугрупп с условием (**), а именно, в них выполняется тождество $x^{2n!} = x^{n!}$. На самом деле рассуждения из [3] позволяют доказать более сильное тождество: $x^{2^m} = x^m$, где $m = \text{НОК}(1, 2, \dots, n)$

(наименьшее общее кратное). Кроме того, этот результат можно усилить, установив равномерную локальную конечность полугрупп с условием (**). Это выводится из доказанного в работе общего утверждения: универсальная алгебра конечной сигнатуры, аппроксимируемая конечными алгебрами ограниченных в совокупности порядков, равномерно локально конечна.

Основные сведения из теории полугрупп можно найти в [6], теории полигонов — в [1], универсальной алгебры — в [7]. Приведем некоторые из определений и обозначений. Если ρ — отношение эквивалентности на множестве X , то X/ρ обозначает множество ρ -классов (фактор-множество). Если $a \in X$, то через $a\rho$ обозначим ρ -класс, содержащий a . Таким образом, $X/\rho = \{a\rho \mid a \in X\}$. Далее, $\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ — отношение равенства на X . Если ρ, σ — отношения эквивалентности на множестве, то $\rho \vee \sigma$ обозначает точную верхнюю грань (супремум) элементов ρ, σ в решетке отношений эквивалентности. Известно, что если ρ, σ — конгруэнции универсальной алгебры, то супремум ρ, σ в решетке конгруэнций совпадает с супремумом в решетке отношений эквивалентности.

Пусть $\mathcal{K}$ — класс универсальных алгебр. Будем говорить, что алгебра A аппроксимируется алгебрами из $\mathcal{K}$, если существует множество конгруэнций $\{\rho_i \mid i \in I\}$ алгебры A такое, что $A/\rho_i \in \mathcal{K}$ для всех $i \in I$ и $\bigcap \{\rho_i \mid i \in I\} = \Delta_A$. Известно, что это равносильно тому, что алгебра A является подпрямым произведением алгебр из $\mathcal{K}$ (см. [7, следствие 7.2]).

Правым полигоном над полугруппой S (или *правым S -полигоном*) называется множество X , на котором действует полугруппа S , т. е. определено отображение $X \times S \rightarrow X$, $(x, s) \mapsto xs$, удовлетворяющее условию $x(st) = (xs)t$ при всех $x \in X$, $s, t \in S$ (см. [1]). Чтобы подчеркнуть, что X является правым S -полигоном, будем писать X_S . Так как левые полигоны рассматриваться не будут, вместо слов «правый полигон» будем писать просто «полигон». Сама полугруппа S является правым S -полигоном. Нетрудно видеть, что конгруэнции полигона S_S — это в точности правые конгруэнции полугруппы S . Пусть S — полугруппа с единицей e . Тогда S -полигон X называется *унитарным*, если $xe = x$ для всех $x \in X$. Если S -полигон X представим в виде дизъюнктного объединения подполигонов X_i , т. е. $X = \bigcup \{X_i \mid i \in I\}$ и $X_i \cap X_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то X будем называть *копроизведением* полигонов X_i и писать $X = \coprod \{X_i \mid i \in I\}$.

Если G — группа и H — ее подгруппа (не обязательно нормальная), то через G/H будем обозначать множество правых смежных классов Hg . Множество G/H является унитарным правым G -полигоном относительно действия $Hg \cdot g' = Hgg'$. Нетрудно проверить, что любой циклический унитарный G -полигон изоморфен одному из полигонов G/H .

Если S — полугруппа, то $S^1 = S \cup \{1\}$ — полугруппа, полученная присоединением единицы к полугруппе S (даже если S уже имела единицу).

Универсальная алгебра называется *подпрямо неразложимой*, если она не разлагается в нетривиальное подпрямое произведение алгебр. Интерес к подпрямо неразложимым алгебрам объясняется известной теоремой Биркгофа о том, что любая алгебра является подпрямым произведением подпрямо неразложимых алгебр (см. [7, теорема 7.3]). Ввиду этой теоремы можем утверждать, что для любой полугруппы S условие (*) эквивалентно следующему условию:

(*) все подпрямо неразложимые S -полигоны конечны,

а условие (**) равносильно условию

(**') $|X| \leq n$ для любого подпрямо неразложимого S -полигона X .

Следующая теорема показывает, что теорему 2 из [3] можно усилить, заменив $n!$ на $\text{НОК}(1, 2, \dots, n)$, при этом доказательство из [3] сохраняется почти дословно.

Теорема 1. Если S — полугруппа, удовлетворяющая условию (**), то в полугруппе S выполняется тождество $x^{2m} = x^m$, где $m = \text{НОК}(1, 2, \dots, n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что в полугруппе S тождество $x^{2m} = x^m$ не выполняется. Тогда существует такое $a \in S$, что $a^{2m} \neq a^m$. Используя лемму Цорна, нетрудно показать, что существует конгруэнция ρ полигона $(S^1)_S$, максимальная относительно условия $(a^{2m}, a^m) \notin \rho$. Стандартные рассуждения показывают, что S^1/ρ — подпрямо неразложимый S -полигон. Тогда ввиду (**') $|S^1/\rho| \leq n$. Покажем, что элементы $1, a, a^2, \dots, a^n$ лежат в разных ρ -классах. Действительно, если $(a^i, a^j) \in \rho$ при каких-нибудь $i < j \leq n$, то $(a^i, a^{i+k}) \in \rho$ при некотором $k \leq n$, а значит, $(a^i, a^{i+kl}) \in \rho$ при всех $l \in \mathbb{N}$. Так как $m = \text{НОК}(1, 2, \dots, n)$, то $m = kt$ при некотором $t \in \mathbb{N}$. Отсюда $(a^i, a^{i+m}) \in \rho$. Умножив справа на a^{m-i} , получим $(a^m, a^{2m}) \in \rho$, что противоречит выбору элемента a . $\square$

В теории групп широко известно утверждение о том, что всякая подгруппа конечного индекса содержит нормальную подгруппу конечного индекса. В теории полугрупп аналогичное утверждение также имеет место.

Лемма 2 [2, лемма 7]. Если ρ — правая конгруэнция полугруппы S , имеющая конечный индекс, то существует двусторонняя конгруэнция $\rho' \subseteq \rho$, также имеющая конечный индекс. При этом если $|S/\rho| = n$, то ρ' может быть выбрана так, что $|S/\rho'| \leq n^{n+1}$.

Лемма 3. Если полугруппа S удовлетворяет условию (*), то любая ее правая конгруэнция является пересечением правых конгруэнций конечного индекса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ρ — правая конгруэнция полугруппы S . Ввиду (*) полигон S/ρ финитно аппроксимируем. Отсюда вытекает, что отношение равенства $\Delta_{S/\rho}$ является пересечением конгруэнций конечного индекса полигона S/ρ . А это означает, что ρ является пересечением правых конгруэнций конечного индекса полугруппы S .

Следующее утверждение отмечено в [2]. Приведем его доказательство для полноты изложения.

Лемма 4. Если полугруппа S удовлетворяет условию (*), то все ее гомоморфные образы финитно аппроксимируемы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ρ — конгруэнция полугруппы S . Рассмотрим фактор-полугруппу $T = S/\rho$ как правый S -полигон. Ввиду условия (*) полигон T финитно аппроксимируем. Стало быть, существуют конгруэнции ρ_i этого полигона такие, что $|T/\rho_i| < \infty$ и $\bigcap_i \rho_i = \Delta_T$. Отсюда следует, что полугруппа S

имеет правые конгруэнции σ_i конечного индекса такие, что $\bigcap_i \sigma_i = \rho$. По лемме 2 существуют двусторонние конгруэнции конечного индекса $\sigma'_i \subseteq \sigma_i$. Имеем

$$\rho \subseteq \bigcap_i (\rho \vee \sigma'_i) \subseteq \bigcap_i (\rho \vee \sigma_i) = \bigcap_i \sigma_i = \rho.$$

Отсюда

$$\rho = \bigcap_i (\rho \vee \sigma'_i).$$

Так как конгруэнции $\rho \vee \sigma'_i$ имеют конечные индексы, полугруппа S/ρ финитно аппроксимируема. $\square$

Для дальнейшего нам понадобится описание подпрямо неразложимых полигонов над группой. Докажем вначале одну лемму о подпрямо неразложимых полигонах над моноидом.

Лемма 5. Пусть S — моноид с единицей e . Всякий подпрямо неразложимый неунитарный S -полигон X представим в виде $X = Y \cup \{a\}$, где $Y = Xe$ — унитарный подпрямо неразложимый S -полигон и $aS \subseteq Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть полигон X удовлетворяет условию леммы. Очевидно, $Y = Xe = XS$ — унитарный подполигон. Докажем, что Y подпрямо неразложим. Пусть это не так. Тогда существует семейство $\{\rho_i \mid i \in I\}$ конгруэнций полигона Y таких, что $\rho_i \neq \Delta_X$ и $\bigcap \{\rho_i \mid i \in I\} = \Delta_X$. Положим $\rho'_i = \rho_i \cup \Delta_X$. Тогда ρ'_i — конгруэнция полигона X и $\bigcap \{\rho'_i \mid i \in I\} = \Delta_X$. Однако это противоречит неразложимости X в подпрямое произведение. Осталось доказать, что $|X \setminus Y| = 1$.

Пусть $a, b \in X \setminus Y$ и $a \neq b$. Тогда $ae \neq a$ и $be \neq b$. Очевидно, отношения $\rho_a = \{(a, ae), (ae, a)\} \cup \Delta_X$ и $\rho_b = \{(b, be), (be, b)\} \cup \Delta_X$ являются конгруэнциями полигона X и $\rho_a \cap \rho_b = \Delta_X$. Это противоречит тому факту, что X подпрямо неразложим. $\square$

Пусть X — полигон над группой G с единицей e . Тогда $X = Xe \cup (X \setminus Xe)$, где Xe — (максимальный) унитарный подполигон, а $A = X \setminus Xe$ — «неунитарная часть». Унитарный подполигон Xe является объединением попарно не пересекающихся орбит: $Xe = \coprod_{i \in I} x_i G$, при этом $x_i G \cong G/H_i$, где $H_i = \{g \mid x_i g = x_i\}$.

Таким образом,

$$X \cong \coprod_{i \in I} (G/H_i) \coprod A,$$

где $AG \subseteq Xe$.

Теорема 6. Правый полигон X над группой G подпрямо неразложим в том и только том случае, если $|X| = 1$ или X изоморфен одному из следующих полигонов:

- (1) $\{x, a\}$, где $xG = aG = \{x\}$;
- (2) G/H , при этом группа G имеет наименьшую подгруппу $H' \supset H$;
- (3) $(G/H) \coprod \{z\}$, где H — такая, как в (2), и $zG = \{z\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тот факт, что полигоны вида (1)–(3) подпрямо неразложимы, проверяется непосредственно.

Пусть X — подпрямо неразложимый G -полигон и $|X| \geq 2$. Предположим вначале, что X унитарный. Тогда $X = \bigcup \{x_i G \mid i \in I\}$, где $x_i G \cong G/H_i$ — орбиты. Покажем, что $|I| \leq 2$. Пусть $|I| \geq 3$. Выберем различные элементы $i_1, i_2, i_3 \in I$. Множества

$$P = x_{i_1} G, \quad Q = x_{i_2} G, \quad R = \bigcup \{x_i G \mid i \neq i_1, i_2\}$$

непусты. Положим

$$\begin{aligned} \rho_1 &= ((P \cup Q) \times (P \cup Q)) \cup \Delta_X, & \rho_2 &= ((R \cup Q) \times (R \cup Q)) \cup \Delta_X, \\ \rho_3 &= ((P \cup R) \times (P \cup R)) \cup \Delta_X. \end{aligned}$$

Тогда ρ_1, ρ_2, ρ_3 — нетривиальные конгруэнции полигона X и $\rho_1 \cap \rho_2 \cap \rho_3 = \Delta_X$, что невозможно для подпрямо неразложимого полигона.

Таким образом, имеем $X = xG$ или $X = x_1 G \cup x_2 G$. Если $X = xG$, то $X \cong G/H$, а так как нетривиальный подпрямо неразложимый полигон должен содержать наименьшую нетривиальную конгруэнцию, существует наименьшая подгруппа $H' \supset H$. Это означает, что X имеет вид (2). Пусть теперь $X = x_1 G \cup x_2 G$. Если $|x_1 G|, |x_2 G| \geq 2$, то $\rho_1 = (x_1 G \times x_1 G) \cup \Delta_X$ и $\rho_2 = (x_2 G \times x_2 G) \cup \Delta_X$ — нетривиальные конгруэнции такие, что $\rho_1 \cap \rho_2 = \Delta_X$; противоречие. Таким образом, можем считать, что $|x_2 G| = 1$. Следовательно,

$$X = x_1 G \cup \{z\} \cong (G/H) \coprod \{z\}.$$

Нетрудно проверить, что получили полигон вида (3).

Пусть X неунитарный. Тогда по лемме 5 $X = Xe \cup \{a\}$. Покажем, что $|Xe| = 1$. Действительно, пусть $|Xe| > 1$. Тогда $\rho_1 = \{(a, ae), (ae, a)\} \cup \Delta_X$ и $\rho_2 = (Xe \times Xe) \cup \Delta_X$ — нетривиальные конгруэнции полигона X и $\rho_1 \cap \rho_2 = \Delta_X$, и также получаем противоречие. Если $|Xe| = 1$, то X имеет вид (1). $\square$

Если S — бесконечная циклическая полугруппа, то все ее гомоморфные образы финитно аппроксимируемы (вообще, нетривиальные гомоморфные образы конечны). Однако, как показывает пример из [2], над S существует бесконечный подпрямо неразложимый полигон. Следовательно, обратное к утверждению леммы 4 неверно. Данный пример показывает также, что и обратное к утверждению леммы 3 неверно. Однако в случае, когда S — группа, лемма 3 допускает обращение.

Теорема 7. *Группа G удовлетворяет условию (*) в том и только том случае, если каждая ее подгруппа является пересечением подгрупп конечного индекса.*

Доказательство. НЕОБХОДИМОСТЬ следует из леммы 3. Докажем достаточность. Ввиду эквивалентности условий (*) и (*)' достаточно доказать (*'). Пусть X — подпрямо неразложимый G -полигон. По теореме 5 он имеет вид (1), (2) или (3). Полигон вида (1) конечен. Докажем конечность полигона X , если он имеет вид (2). Итак, $X \cong G/H$ и существует наименьшая подгруппа $H' \supset H$. По условию H является пересечением подгрупп конечного индекса, т. е. $H = \bigcap_{\alpha} H_{\alpha}$ и $[G : H_{\alpha}] < \infty$ при всех α . Кроме того, для любого α или

$H_\alpha \supseteq H'$, или $H_\alpha = H$. Следовательно, $H_\alpha = H$ при некотором α , а значит, H конечного индекса. Таким образом, X — конечный полигон. Если X имеет вид (3), то аналогично устанавливаем, что подгруппа H конечного индекса, а значит, $X \cong (G/H) \cup \{z\}$ — конечный полигон. $\square$

Перейдем к условию (**). Докажем равномерную локальную конечность полугрупп, удовлетворяющих этому условию. Для этого понадобится одно утверждение общего характера. Следующая теорема может быть выведена из теоремы 0.1 в [8]. Приведем доказательство, так как оценка сверху порядков t -порождающих подалгебр в нашем случае может быть несколько уменьшена.

Теорема 8. Пусть A — универсальная алгебра конечной сигнатуры. Если A аппроксимируется алгебрами A_i , $i \in I$, конечных ограниченных в совокупности порядков, то A равномерно локально конечна. При этом если $|A_i| \leq n$ при всех $i \in I$, то подалгебра, порожденная t элементами, имеет не более $\exp(\psi(n) \cdot n^t \cdot \ln n)$ элементов, где $\psi(n)$ — количество неизоморфных алгебр данной сигнатуры порядков, не превосходящих n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Sigma = \{f_1, \dots, f_k\}$ — сигнатура алгебры A . По условию алгебра A является подпрямым произведением алгебр A_i сигнатуры Σ таких, что $|A_i| \leq n$. Следовательно, алгебра A изоморфна подалгебре алгебры $\bar{A} = \prod_{i \in I} A_i$ (прямого произведения). Поэтому достаточно доказать равномерную локальную конечность алгебры $\bar{A}$.

Так как сигнатура Σ конечна, имеется лишь конечное число $\psi(n)$ попарно не изоморфных алгебр из n или меньшего числа элементов. Поэтому

$$\bar{A} \cong B_1 \times B_2 \times \dots \times B_{\psi(n)}, \quad (\circ)$$

где $B_\alpha = \prod_{I_\alpha} (C_\alpha)$, C_α — алгебры мощности не более n , $\alpha = 1, 2, \dots, \psi(n)$. Так как прямое произведение конечного числа равномерно локально конечных алгебр является равномерно локально конечной алгеброй, достаточно доказать равномерную локальную конечность каждой из алгебр B_α . Для упрощения обозначений индексы будем опускать.

Итак, нужно показать, что алгебра $B = \prod_{j \in J} C$ равномерно локально конечна, если C — конечная алгебра конечной сигнатуры.

Пусть $b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(t)} \in B$. Рассмотрим подалгебру $\langle b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(t)} \rangle$, порожденную этими элементами. Имеем $b^{(s)} = (b_{sj})_{j \in J}$, $s = 1, 2, \dots, t$, где $b_{sj} \in C$. Для каждого набора $\xi = (c_1, \dots, c_t) \in C^t$ положим $J_\xi = \{j \in J \mid b_{1j} = c_1, \dots, b_{tj} = c_t\}$. Некоторые из этих множеств могут быть пустыми. Очевидно, что $J_\xi \cap J_\eta = \emptyset$ при $\xi \neq \eta$. Следовательно, те из множеств J_ξ , которые непусты, образуют разбиение множества J , т. е. $J = \bigcup \{J_\xi \mid \xi \in C^t\}$. Пусть θ — соответствующее этому разбиению отношение эквивалентности на множестве J .

Пусть $B' = \{(c_j)_{j \in J} \mid c_j = c_{j'}, (j, j') \in \theta\}$. Очевидно, что B' — конечная подалгебра, ее порядок равен $|C|^p$, где $p = |J/\theta|$. Кроме того, $b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(t)} \in B'$. Следовательно, подалгебра $\langle b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(t)} \rangle$ конечна.

Оценим сверху порядок этой подалгебры. Так как $p \leq |C^t| \leq n^t$, то

$$|\langle b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(t)} \rangle| \leq |B'| = |C|^p \leq \exp(n^t \ln n).$$

Итак, в каждом B_α подалгебра, порожденная t элементами, имеет не более $\exp(n^t \ln n)$ элементов. Учитывая формулу (о), получим, что в алгебре A любая t -порожденная подалгебра имеет порядок, не превосходящий числа $\exp(\psi(n) \cdot n^t \cdot \ln n)$. $\square$

С помощью только что доказанной теоремы можно доказать равномерную локальную конечность одного класса полугрупп, содержащего полугруппы, удовлетворяющие условию (**).

Теорема 9. Пусть S — полугруппа такая, что полигон S_S аппроксимируется S -полигонами порядков, ограниченных сверху одним и тем же натуральным числом. Тогда S равномерно локально конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию

$$\Delta_S = \bigcap \{\rho_i \mid i \in I\},$$

где ρ_i — правые конгруэнции такие, что S/ρ_i — подпрямо неразложимый полигон и $|S/\rho_i| \leq n$. По лемме 2 ρ_i содержит двустороннюю конгруэнцию ρ'_i индекса, не превосходящего n^{n+1} . Таким образом,

$$\Delta_S = \bigcap \{\rho'_i \mid i \in I\},$$

где $|S/\rho'_i| \leq n^{n+1}$. Так как ρ'_i — двусторонняя конгруэнция, S/ρ'_i — полугруппа. Следовательно, полугруппа S аппроксимируется полугруппами из n^{n+1} или меньшего числа элементов. По теореме 8 она равномерно локально конечна. Порядок t -порожденной подполугруппы не превосходит $\exp(\psi(n^{n+1}) \cdot n^{t(n+1)} \cdot (n+1) \cdot \ln n)$, где $\psi(k)$ — количество неизоморфных полугрупп из k или меньшего числа элементов. $\square$

Следствие 10. Полугруппа, удовлетворяющая условию (**), равномерно локально конечна.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из равномерной локальной конечности следует равномерная периодичность полугруппы. Однако оценка порядка циклической подполугруппы, получающаяся с помощью теоремы 9, хуже, чем в теореме 1. Действительно, если в формуле, полученной в теореме 9, взять $t = 1$, то получим для любого элемента a данной полугруппы неравенство

$$|\langle a \rangle| \leq \exp(\psi(n^{n+1}) \cdot n^{n+1} \cdot (n+1) \cdot \ln n).$$

Между тем по теореме 1 получаем $|\langle a \rangle| \leq 2 \cdot \text{НОК}(1, 2, \dots, n) - 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V. Monoids, acts and categories. New York; Berlin: W. de Gruyter, 2000.
2. Kozhukhov I. B. One characteristical property of semilattices // Commun. Algebra. 1997. V. 25, N 8. P. 2569–2577.
3. Кожухов И. Б. Условия конечности для подпрямо неразложимых полигонов и модулей // Фундамент. и прикл. математика. 1998. Т. 4, № 2. С. 763–767.
4. Кожухов И. Б. Полугруппы, над которыми все полигоны резидуально конечны // Фундамент. и прикл. математика. 1998. Т. 4, № 4. С. 1335–1344.

5. Пинус А. Г. Внутренние гомоморфизмы и позитивно-условные термы // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 2. С. 158–173.
6. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. М.: Мир, 1972. Т. 1.
7. Кон П. Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968.
8. Хобби Д., Маккензи Р. Строение конечных алгебр. М.: Мир, 1993.

Статья поступила 15 сентября 2014 г.

Кожухов Игорь Борисович, Халиуллина Айгуль Римзиловна
Национальный исследовательский университет МИЭТ, Москва
Зеленоград, проезд 4806, дом 5, Москва 124498
kozuhov_i.b@mail.ru, haliullinaar@gmail.com