

УДК 512.643.5

ПОЧТИ ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ

В. М. Гордиенко

Аннотация. Доказано, что для произвольной матрицы инвариантное подпространство, отвечающее локализованной группе собственных чисел, близких по модулю к норме матрицы, состоит из почти собственных векторов и это пространство почти ортогонально другим инвариантным подпространствам матрицы.

Аналогично для диссипативной матрицы инвариантное подпространство, отвечающее локализованной группе собственных чисел, близких к вещественным числам, состоит из почти собственных векторов, и это подпространство почти ортогонально другим инвариантным подпространствам матрицы.

Ключевые слова: собственные числа, подпространства, близкие к ортогональным, диссипативные матрицы.

Эта статья состоит из двух параграфов, изложенных независимо друг от друга. В § 1 доказывается, что для произвольной матрицы инвариантное подпространство, отвечающее локализованной группе собственных чисел, близких по модулю к норме матрицы, состоит из почти собственных векторов и почти ортогонально другим инвариантным подпространствам этой матрицы.

В § 2 доказывается, что для диссипативной матрицы инвариантное подпространство, отвечающее локализованной группе собственных чисел, близких к вещественным числам, состоит из почти собственных векторов и почти ортогонально другим инвариантным подпространствам этой матрицы.

§ 1. Почти ортогональность инвариантных подпространств произвольной матрицы

Пусть B — матрица размера $n \times n$ и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ — группа собственных чисел (перечисленных с учетом кратности), близких друг к другу

$$|\lambda_i - \lambda_j| \leq \delta \|B\|,$$

модуль которых близок к максимально возможному значению:

$$\|B\| - |\lambda_j| \leq \varrho \|B\|,$$

причем $0 < \delta < \varrho$. Пусть L — инвариантное подпространство, отвечающее собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Мы докажем, что при малых ϱ действие оператора B на L подчиняется трем особенностям:

Работа выполнена при финансовой поддержке СО РАН (междисциплинарный интеграционный проект № 80).

1) матрица $\|B\|^{-1}B$ почти унитарна на L :

$$\|(\|B\|^2 I_n - B^* B)\varphi\| \leq 2k\varrho \|B\|^2 \|\varphi\| \quad \text{для } \varphi \in L; \quad (1)$$

2) каждый вектор $\varphi \in L$ — почти собственный:

$$\|(B - \lambda_j I_n)\varphi\| \leq \sqrt{3(k-1)}\sqrt{\varrho} \|B\| \cdot \|\varphi\|; \quad (2)$$

3) подпространство L почти ортогонально другим инвариантным подпространствам, а именно, если M — инвариантное подпространство матрицы B , $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ — соответствующие собственные числа, $|\lambda_i - \mu_j| \geq d\|B\|$ ($d \geq \varrho$) и $\varphi \in L$, $\psi \in M$, то

$$|\langle \varphi, \psi \rangle| \leq \frac{8k\sqrt{\varrho}}{d} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\frac{2}{d}\right)^j \|\varphi\| \cdot \|\psi\|. \quad (3)$$

Приступаем к доказательству оценки (1). Приведем матрицу B к треугольной форме Шура с помощью унитарной матрицы U : $U^*U = I_n$. Пусть первые k столбцов матрицы U задают базис инвариантного подпространства L , тогда

$$B = U^* \begin{pmatrix} B_1 & B_{12} \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} U,$$

где B_1 , и B_2 — треугольные матрицы:

$$B_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1k} \\ & \lambda_2 & b_{23} & \cdots & b_{2k} \\ & & \ddots & \cdots & \vdots \\ & & & \lambda_{k-1} & b_{k-1,k} \\ & & & & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

Пусть $\varphi \in L$, тогда $U\varphi = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$, $u \in \mathbb{C}^k$,

$$\begin{aligned} \langle (\|B\|^2 I_n - B^* B)\varphi, \varphi \rangle &= \langle (\|B\|^2 I_n - B_1^* B_1)u, u \rangle \\ &\leq \|(\|B\|^2 I_k - B_1^* B_1)\| \cdot \|u\|^2 = \|(\|B\|^2 I_k - B_1^* B_1)\| \cdot \|\varphi\|^2. \end{aligned}$$

Так как $\|B\|^2 I_k - B_1^* B_1 \geq 0$, имеем

$$\begin{aligned} \|(\|B\|^2 I_n - B_1^* B_1)\| &\leq \text{tr}(\|B\|^2 I_n - B_1^* B_1) \\ &= (\|B\|^2 - |\lambda_1|^2) + (\|B\|^2 - |\lambda_2|^2 - |b_{12}|^2) + \\ &\quad \cdots + (\|B\|^2 - |\lambda_k|^2 - |b_{k-1,k}|^2 - \cdots - |b_{1,k}|^2) \\ &\leq \sum_{j=1}^k (\|B\|^2 - |\lambda_j|^2) = \sum_{j=1}^k (\|B\| + |\lambda_j|)(\|B\| - |\lambda_j|) \leq 2k\|B\|^2 \varrho. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\langle (\|B\|^2 I_n - B^* B)\varphi, \varphi \rangle \leq 2k\varrho \|B\|^2 \|\varphi\|^2 \quad \text{для } \varphi \in L,$$

отсюда

$$\|(\|B\|^2 I_n - B^* B)\varphi\| \leq 2k\varrho \|B\|^2 \|\varphi\| \quad \text{для } \varphi \in L.$$

Докажем оценку (2). Очевидно, что для $\varphi \in L$

$$\|(B - \lambda_j I_n)\varphi\| \leq \|B_1 - \lambda_j I_k\| \cdot \|\varphi\|.$$

Норму матрицы $B_1 - \lambda_j I_k$ оценим через корень квадратный из суммы квадратов модулей всех ее элементов. Так как $\|B_1\|^2 I_k - B_1^* B_1 \geq 0$, диагональные элементы матрицы $\|B_1\|^2 I_k - B_1^* B_1$ неотрицательны:

$$\|B_1\|^2 - (|b_{1,j}|^2 + |b_{2,j}|^2 + \dots + |b_{j-1,j}|^2 + |\lambda_j|^2) \geq 0.$$

Следовательно,

$$|b_{1,j}|^2 + |b_{2,j}|^2 + \dots + |b_{j-1,j}|^2 \leq \|B_1\|^2 - |\lambda_j|^2 \leq \|B\|^2 - |\lambda_j|^2 \leq 2\varrho\|B\|^2.$$

Значит, сумма квадратов всех внедиагональных элементов матрицы B_1 (и матрицы $B_1 - \lambda_j I_k$) не превышает $2(k-1)\varrho\|B\|^2$. Поэтому

$$\|B - \lambda_j I_k\| \leq \sqrt{(k-1)\delta^2\|B\|^2 + 2(k-1)\varrho\|B\|^2} \leq \sqrt{3(k-1)\varrho} \cdot \|B\|.$$

Отсюда

$$\|(B - \lambda_j I_n)\varphi\| \leq \sqrt{3(k-1)}\sqrt{\varrho}\|B\| \cdot \|\varphi\| \quad \text{для } \varphi \in L.$$

Переходим к доказательству неравенства (3). Пусть $\varphi \in L$, $\psi \in M$, обозначим

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (B - \lambda_1 I_n)\varphi, \\ \psi_1 &= (B - \mu_1 I_n)\psi, \quad \psi_2 = (B - \mu_2 I_n)\psi_1, \quad \dots, \quad \psi_j = (B - \mu_j I_n)\psi_{j-1}, \\ &\dots, \quad \psi_m = (B - \mu_m I_n)\psi_{m-1} = 0. \end{aligned}$$

Легко проверить равенство

$$\begin{aligned} \langle (\|B\|^2 I_n - B^* B)\varphi, \psi_{j-1} \rangle \\ = (\|B\|^2 - \lambda_1 \overline{\mu_j}) \langle \varphi, \psi_{j-1} \rangle - \lambda_1 \langle \varphi, \psi_j \rangle - \overline{\mu_j} \langle \varphi_1, \psi_{j-1} \rangle - \langle \varphi_1, \psi_j \rangle. \end{aligned}$$

Здесь $j = 1, 2, \dots, m$; по договоренности $\psi_0 = \psi$. Следовательно,

$$\begin{aligned} &|(\|B\|^2 - \lambda_1 \overline{\mu_j}) \cdot \langle \varphi, \psi_{j-1} \rangle| \\ &\leq |\langle (\|B\|^2 I_n - B^* B)\varphi, \psi_{j-1} \rangle| + |\lambda_1| \cdot |\langle \varphi, \psi_j \rangle| + |\mu_j| \cdot |\langle \varphi_1, \psi_{j-1} \rangle| + |\langle \varphi_1, \psi_j \rangle|. \end{aligned}$$

Используя неравенства $|\lambda_j| \leq \|B\|$, $|\mu_j| \leq \|B\|$ и оценки (1), (2), получаем

$$\begin{aligned} &|(\|B\|^2 - \lambda_1 \overline{\mu_j}) \cdot \langle \varphi, \psi_{j-1} \rangle| \\ &\leq 2k\varrho\|B\|^2\|\varphi\| \cdot \|\psi_{j-1}\| + \|B\| \cdot |\langle \varphi, \psi_j \rangle| + 3\sqrt{3(k-1)}\sqrt{\varrho}\|B\|^2\|\varphi\| \cdot \|\psi_{j-1}\| \\ &\leq 8k\sqrt{\varrho}\|B\|^2\|\varphi\| \cdot \|\psi_{j-1}\| + \|B\| \cdot |\langle \varphi, \psi_j \rangle|. \end{aligned}$$

Легко проверить равенство

$$\|\|B\|^2 - \lambda_1 \overline{\mu_j}\|^2 = \|B\|^2 |\lambda_1 - \mu_j|^2 + (\|B\|^2 - |\lambda_1|^2)(\|B\|^2 - |\mu_j|^2),$$

поэтому

$$\|\|B\| - \lambda_1 \overline{\mu_j}\| \geq \|B\| \cdot |\lambda_1 - \mu_j| \geq d\|B\|^2.$$

Таким образом, доказано неравенство

$$|\langle \varphi, \psi_{j-1} \rangle| \leq \frac{8k\sqrt{\varrho}}{d} \|\varphi\| \cdot \|\psi_{j-1}\| + \frac{1}{\|B\|d} |\langle \varphi, \psi_j \rangle|.$$

Выпишем последнее неравенство при $j = 1, 2, \dots, m-1, m$, напомним, что $\psi_0 = \psi$, $\psi_m = 0$.

$$\begin{aligned} |\langle \varphi, \psi \rangle| &\leq \frac{8k\sqrt{\varrho}}{d} \|\varphi\| \cdot \|\psi\| + \frac{1}{\|B\|d} |\langle \varphi, \psi_1 \rangle|, \\ |\langle \varphi, \psi_1 \rangle| &\leq \frac{8k\sqrt{\varrho}}{d} \|\varphi\| \cdot \|\psi_1\| + \frac{1}{\|B\|d} |\langle \varphi, \psi_2 \rangle|, \\ &\dots\dots\dots \\ |\langle \varphi, \psi_{m-2} \rangle| &\leq \frac{8k\sqrt{\varrho}}{d} \|\varphi\| \cdot \|\psi_{m-2}\| + \frac{1}{\|B\|d} |\langle \varphi, \psi_{m-1} \rangle|, \\ |\langle \varphi, \psi_{m-1} \rangle| &\leq \frac{8k\sqrt{\varrho}}{d} \|\varphi\| \cdot \|\psi_{m-1}\|. \end{aligned}$$

Последовательно исключая члены $|\langle \varphi, \psi_j \rangle|$ и используя оценки $\|\psi_j\| \leq \|B\|^j \|\psi\|$, приходим к неравенству (3).

§ 2. Почти ортогональность инвариантных подпространств диссипативной матрицы

Пусть A — матрица размера $n \times n$ диссипативна, т. е. $\operatorname{Im} A \equiv \frac{1}{2i}[A - A^*] \geq 0$. Как известно, у такой матрицы все собственные числа лежат в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ — группа собственных чисел (перечисленных с учетом кратности), близких друг к другу

$$|\lambda_i - \lambda_j| \leq \delta \|A\|$$

и близких к вещественной оси:

$$\operatorname{Im} \lambda_j \leq h \|A\|,$$

причем $0 < \delta < h$.

Пусть L — инвариантное подпространство, отвечающее собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Докажем, что при малых h действие оператора A на L подчиняется трем особенностям:

1) матрица A почти самосопряжена на L :

$$\frac{1}{2} \|(A - A^*)\varphi\| = \|\operatorname{Im} A\varphi\| \leq kh \|A\| \cdot \|\varphi\| \quad \text{для } \varphi \in L; \quad (4)$$

2) каждый вектор $\varphi \in L$ — почти собственный:

$$\|(A - \lambda_j I_n)\varphi\| \leq \sqrt{2}kh \|A\| \cdot \|\varphi\|; \quad (5)$$

3) подпространство L почти ортогонально другим инвариантным подпространствам, а именно, если M — инвариантное подпространство матрицы A , $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ — соответствующие собственные числа, $|\lambda_i - \mu_j| \geq d \|A\|$ ($d \geq h$) и $\varphi \in L$, $\psi \in M$, то

$$|\langle \varphi, \psi \rangle| \leq \frac{(2 + \sqrt{2})kh}{d} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\frac{2}{d}\right)^j \|\varphi\| \cdot \|\psi\|. \quad (6)$$

Приступаем к доказательству оценки (4). Приведем матрицу A к треугольному виду Шура с помощью унитарной матрицы U : $U^*U = I_n$. Пусть первые k столбцов матрицы U задают базис инвариантного подпространства L , тогда

$$A = U^* \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} U,$$

где A_1 , и A_2 — треугольные матрицы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ & \lambda_2 & a_{23} & \cdots & a_{2k} \\ & & \ddots & \cdots & \vdots \\ & & & \lambda_{k-1} & a_{k-1,k} \\ & & & & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

Пусть $\varphi \in L$, тогда $U\varphi = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$, $u \in \mathbb{C}^k$,

$$\langle \operatorname{Im} A\varphi, \varphi \rangle = \langle \operatorname{Im} A_1 u, u \rangle \leq \|\operatorname{Im} A_1\| \cdot \|u\|^2 = \|\operatorname{Im} A_1\| \cdot \|\varphi\|^2.$$

Так как $\operatorname{Im} A \geq 0$, то $\operatorname{Im} A_1 \geq 0$, поэтому

$$\|\operatorname{Im} A_1\| \leq \operatorname{tr} \operatorname{Im} A_1 = \sum_{j=1}^k \operatorname{Im} \lambda_j \leq kh\|A\|.$$

Таким образом,

$$\langle \operatorname{Im} A\varphi, \varphi \rangle \leq kh\|A\|\|\varphi\|^2 \quad \text{для } \varphi \in L,$$

отсюда вытекает, что

$$\|\operatorname{Im} A\varphi\| \leq kh\|A\|\|\varphi\| \quad \text{для } \varphi \in L.$$

Докажем оценку (5). Очевидно, что для $\varphi \in L$

$$\|(A - \lambda_j I_n)\varphi\| \leq \|A_1 - \lambda_j I_k\| \cdot \|\varphi\|.$$

Норму матрицы $A_1 - \lambda_j I_k$ оценим через корень квадратный из суммы квадратов модулей всех ее элементов. Из того, что $\operatorname{Im} A_1 \geq 0$, следует, что все центральные миноры второго порядка матрицы $\operatorname{Im} A_1$ неотрицательны, т. е. $|a_{ij}|^2 \leq 4 \operatorname{Im} \lambda_i \operatorname{Im} \lambda_j$. Поэтому

$$\begin{aligned} \|A_1 - \lambda_j I_k\| &\leq \sqrt{(k-1)\delta^2\|A\|^2 + \frac{(k-1)k}{2}4h^2\|A\|^2} \\ &\leq \sqrt{(k-1)(2k+1)h}\|A\| \leq \sqrt{2kh}\|A\|. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|(A - \lambda_j I_n)\varphi\| \leq \sqrt{2kh}\|A\| \cdot \|\varphi\| \quad \text{для } \varphi \in L.$$

Приступаем к доказательству неравенства (6). Пусть $\varphi \in L$, $\psi \in M$, обозначим

$$\varphi_1 = (A - \lambda_1 I_n)\varphi,$$

$$\psi_1 = (A - \mu_1 I_n)\psi, \quad \psi_2 = (A - \mu_2 I_n)\psi_1, \dots,$$

$$\psi_j = (A - \mu_j I_n) \psi_{j-1}, \dots, \quad \psi_m = (A - \mu_m I_n) \psi_{m-1} = 0.$$

Легко проверить равенство

$$\langle \operatorname{Im} A \varphi, \psi_{j-1} \rangle = \frac{1}{2i} [(\lambda_1 - \overline{\mu_j}) \langle \varphi, \psi_{j-1} \rangle + \langle \varphi_1, \psi_{j-1} \rangle - \langle \varphi, \psi_j \rangle].$$

Здесь $j = 1, 2, \dots, m$; по договоренности $\psi_0 = \psi$. Следовательно,

$$|\lambda_1 - \overline{\mu_j}| \cdot |\langle \varphi, \psi_{j-1} \rangle| \leq 2 |\langle \operatorname{Im} A \varphi, \psi_{j-1} \rangle| + |\langle \varphi_1, \psi_{j-1} \rangle| + |\langle \varphi, \psi_j \rangle|.$$

Используя оценки (4) и (5), получаем

$$|\lambda_1 - \overline{\mu_j}| \cdot |\langle \varphi, \psi_{j-1} \rangle| \leq (2 + \sqrt{2})kh \|A\| \cdot \|\varphi\| \cdot \|\psi_{j-1}\| + |\langle \varphi, \psi_j \rangle|.$$

Легко проверить равенство $|\lambda_1 - \overline{\mu_j}|^2 - |\lambda_1 - \mu_j|^2 = 4 \operatorname{Im} \lambda_1 \operatorname{Im} \mu_j$, поэтому

$$|\lambda_1 - \overline{\mu_j}| \geq |\lambda_1 - \mu_j| \geq d \|A\|.$$

Таким образом, доказано неравенство

$$|\langle \varphi, \psi_{j-1} \rangle| \leq \frac{(2 + \sqrt{2})kh}{d} \|\varphi\| \cdot \|\psi_{j-1}\| + \frac{1}{\|A\|d} |\langle \varphi, \psi_1 \rangle|.$$

Выпишем последнее неравенство при $j = 1, 2, \dots, m-1, m$, напомним, что $\psi_0 = \psi$, $\psi_m = 0$.

$$\begin{aligned} |\langle \varphi, \psi \rangle| &\leq \frac{(2 + \sqrt{2})kh}{d} \|\varphi\| \cdot \|\psi\| + \frac{1}{\|B\|d} |\langle \varphi, \psi_1 \rangle|, \\ |\langle \varphi, \psi_1 \rangle| &\leq \frac{(2 + \sqrt{2})kh}{d} \|\varphi\| \cdot \|\psi_1\| + \frac{1}{\|B\|d} |\langle \varphi, \psi_2 \rangle|, \\ &\dots\dots\dots \\ |\langle \varphi, \psi_{m-2} \rangle| &\leq \frac{(2 + \sqrt{2})kh}{d} \|\varphi\| \cdot \|\psi_{m-2}\| + \frac{1}{\|B\|d} |\langle \varphi, \psi_{m-1} \rangle|, \\ |\langle \varphi, \psi_{m-1} \rangle| &\leq \frac{(2 + \sqrt{2})kh}{d} \|\varphi\| \cdot \|\psi_{m-1}\|. \end{aligned}$$

Последовательно исключая члены $|\langle \varphi, \psi_j \rangle|$ и используя оценки $\|\psi_j\| \leq \|B\|^j \|\psi\|$, приходим к неравенству (6).

В заключение отметим, что вариант неравенства (6) для случая, когда все λ_j и все μ_j совпадают между собой, доказан в [1, с. 419].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.

Статья поступила 1 декабря 2014 г.

Гордиенко Валерий Михайлович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
gordienk@math.nsc.ru