

УДК 517.957

О РАЗРЕШИМОСТИ ВАРИАЦИОННОЙ
ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО
КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ
М. Г. Гадоев, Т. П. Константинова

Аннотация. Исследуется однозначная разрешимость вариационной задачи Дирихле для эллиптического оператора высшего порядка в ограниченной области со степенным вырождением на границе, порожденного некоэрцитивной формой. Краевые задачи для вырождающихся эллиптических операторов, порожденных с помощью некоэрцитивных форм, ранее рассматривались в [1–3]. В отличие от этих работ мы предполагаем выполнение более слабого условия эллиптичности (см. условие (5)).

Ключевые слова: вариационная задача Дирихле, эллиптический оператор, некоэрцитивная форма.

Пусть Ω — ограниченная область в n -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой $(n-1)$ -мерной границей $\partial\Omega$. Пусть число r натуральное, α вещественное и $1 \leq p < \infty$. Символом $V_{p,\alpha}^r(\Omega)$ обозначим пространство функций $u(x)$, определенных на Ω , имеющих все обобщенные в смысле С. Л. Соболева производные с конечной нормой

$$\|u; V_{p,\alpha}^r(\Omega)\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int_{\Omega} \rho^{p\alpha}(x) |u^{(k)}(x)|^p dx + \int_{\Omega} \rho^{p(\alpha-r)}(x) |u(x)|^p dx \right\}^{1/p}.$$

Здесь и далее $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ — мультииндекс, $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ — длина мультииндекса k ,

$$u^{(k)}(x) = \frac{\partial^{|k|} u(x)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}}$$

— обобщенная в смысле С. Л. Соболева производная функции $u(x)$ мультииндекса k , $\rho(x)$ — регуляризованное расстояние от точки $x \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$ области Ω , т. е. бесконечно дифференцируемая положительная функция, удовлетворяющая неравенствам

$$\rho(x) \leq \text{dist}\{x, \partial\Omega\} \leq M\rho(x), \quad |\rho^{(k)}(x)| \leq M_k \rho^{1-|k|}(x)$$

для любого $x \in \Omega$ и любого мультииндекса k , M , M_k — положительные постоянные.

Символом $(V_{q,\alpha}^r(\Omega))'$ обозначим пространство антилинейных непрерывных функционалов, определенных на $V_{p,\alpha}^r(\Omega)$, $1/p + 1/q = 1$, наделенное нормой сопряженного пространства.

Основные свойства пространств $V_{p;\alpha}^r(\Omega)$ и $(V_{q;\alpha}^r(\Omega))'$ изучены в работах С. М. Никольского, П. И. Лизоркина и Н. В. Мирошина [4], К. Х. Бойматова [5], С. А. Искокова [6]. Из результатов этих работ, в частности, следует, что множество $C_0^\infty(\Omega)$ бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями в Ω плотно в пространстве $V_{p;\alpha}^r(\Omega)$ при всех вещественных α и p , $1 \leq p < \infty$.

Пусть λ — вещественное число. Рассмотрим интегродифференциальную полуторалинейную форму

$$B_\lambda[u, v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx + \lambda \int_{\Omega} \rho^{2(\alpha-r)}(x) u(x) \overline{v(x)} dx, \quad (1)$$

коэффициенты $a_{kl}(x)$ которой являются непрерывными в замкнутой области $\overline{\Omega}$ комплекснозначными функциями, и связанную с ней вариационную задачу Дирихле.

Задача D_λ . Для заданного функционала $F \in (V_{2;\alpha}^r(\Omega))'$ требуется найти решение $U(x)$ уравнения

$$B_\lambda[U, v] = \langle F, v \rangle, \quad v \in C_0^\infty(\Omega),$$

принадлежащее пространству $V_{2;\alpha}^r(\Omega)$.

Можно исследовать разрешимость задачи D_λ , применяя метод из работы [7], если предположить, что коэффициенты $a_{kl}(x)$ удовлетворяют условиям

$$\left| \arg \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x) \zeta_k \overline{\zeta_l} \right| < \varphi, \quad (2)$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \gamma(x) \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x) \zeta_k \overline{\zeta_l} \right\} \geq c \sum_{|k|=r} |\zeta_k|^2 \quad (3)$$

для всех $x \in \Omega$ и любого набора комплексных чисел $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|=r}$. Здесь и далее функция $\arg z$ принимает значения на отрезке $(-\pi, \pi]$, φ — некоторое положительное число, меньшее π , $\gamma(x)$ — некоторая непрерывная в $\overline{\Omega}$ функция, которая не обращается в нуль.

В отличие от условий (2), (3) здесь предполагаем, что

$$\left| \arg \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x) \xi^k \xi^l \right| < \varphi, \quad (4)$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \gamma(x) \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x) \xi^k \xi^l \right\} \geq c |\xi|^{2r} \quad (5)$$

для всех $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, где использованы обозначения

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \xi^k = \xi_1^{k_1} \xi_2^{k_2} \dots \xi_n^{k_n}, \quad |\xi| = \{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2\}^{1/2}.$$

Следует отметить, что для получения вспомогательных интегральных неравенств в [7] используют условия (2), (3) при $\zeta_k = u^{(k)}(x)$ и затем интегрируют полученное неравенство по $x \in \Omega$. В нашем случае этого сделать нельзя, так как в условиях (4), (5) вместо комплексного числа ζ_k используется вещественное число ξ^k .

Теорема. Пусть $\alpha < r$ и выполнены условия (4), (5). Тогда найдется число $\lambda_0 \geq 0$ такое, что при $\lambda \geq \lambda_0$ для любого заданного функционала $F \in (V_{2;\alpha}^r(\Omega))'$ существует единственное решение $U(x)$ задачи D_λ и при этом справедлива оценка

$$\|U; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\| \leq M \|F; (V_{2;\alpha}^r(\Omega))'\|, \quad (6)$$

где число M не зависит от $\lambda \in [\lambda_0, \infty)$ и от функционала F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ν — достаточно малое положительное число и $\varphi_j(x), \eta_j(x) \in C^\infty(\Omega)$, $j = \overline{1, N}$, такие, что

- а) $\varphi_1^2(x) + \varphi_2^2(x) + \dots + \varphi_N^2(x) \equiv 1$, $x \in \overline{\Omega}$;
- б) функция $\eta_j(x)$ обращается в единицу в некоторой окрестности множества $\text{supp } \varphi_j(x)$ и $0 \leq \eta_j \leq 1$ для всех $x \in \overline{\Omega}$;
- в) $|\gamma(x) - \gamma(y)| < \nu$ для всех $x, y \in \text{supp } \eta_j$, $j = \overline{1, N}$.

Рассмотрим полуторалинейную форму

$$B_{\lambda j}^{(0)}[u, v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) a_{klj}^{(0)}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx + \lambda \int_{\Omega} \rho^{2(\alpha-r)} u(x) \overline{v(x)} dx, \quad (7)$$

где

$$a_{klj}^{(0)}(x) = (1 - \eta_j(x)) \gamma(x_j) a_{kl}(x_j) + \eta_j(x) \gamma(x) a_{kl}(x). \quad (8)$$

Так как коэффициенты $a_{kl}(x)$ непрерывны в замкнутой области $\overline{\Omega}$, они ограничены. Отсюда следует ограниченность коэффициентов $a_{klj}^{(0)}(x)$. Применяя неравенство Коши — Буняковского, имеем

$$|B_{\lambda j}^{(0)}[u, v]| \leq (M_0 + |\lambda|) \|u; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\| \cdot \|v; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\| \quad (9)$$

для всех $u, v \in V_{2;\alpha,\varphi}^r(\Omega)$.

Из условия (5) следует, что

$$\text{Re} \left\{ \gamma(x_j) \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x_j) \xi^k \xi^l \right\} \geq c |\xi|^{2r},$$

$$\text{Re} \left\{ \gamma(x) \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x) \xi^k \xi^l \right\} \geq c |\xi|^{2r}$$

для всех $j = \overline{1, N}$, $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. В силу этих неравенств из (8) получаем

$$\text{Re} \left\{ \sum_{|k|=|l|=r} a_{klj}^{(0)}(x) \xi^k \xi^l \right\} \geq c |\xi|^{2r}$$

для всех $j = \overline{1, N}$, $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Это неравенство позволяет применить теорему 3.1 из [8], в силу которой существует число $\lambda_j \geq 0$ такое, что при $\lambda \geq \lambda_j$

$$\text{Re } B_{\lambda j}^{(0)}[u, u] \geq C_0 \|u; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\|^2 \quad (10)$$

для всех $j = \overline{1, N}$, $u \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)$.

Рассмотрим полуторалинейную форму

$$\mathcal{B}_{\lambda j}^{(0)}[u, v] = \sum_{|k|, |l|=r} \int_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) \hat{a}_{klj}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx + \lambda \int_{\Omega} \rho^{2(\alpha-r)} u(x) \overline{v(x)} dx,$$

где $\hat{a}_{klj}(x) = [(1 - \eta_j(x))a_{kl}(x_j) + \eta_j(x)a_{kl}(x)]\gamma(x_j)$. Так как

$$a_{klj}^{(0)}(x) - \hat{a}_{klj}(x) = \eta_j(x)(\gamma(x) - \gamma(x_j))a_{kl}(x)$$

и коэффициенты $a_{kl}(x)$ ограничены, действуя как при доказательстве неравенства (9), с помощью неравенства Коши — Буняковского получим

$$|B_{\lambda_j}^{(0)}[u, v] - \mathcal{B}_{\lambda_j}^{(0)}[u, v]| \leq M\Lambda \|u; L_{2;\alpha}^r(\Omega)\| \cdot \|v; L_{2;\alpha}^r(\Omega)\|$$

для всех $u, v \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)$. Здесь $\Lambda = \sup |\eta_j(x)(\gamma_j(x) - \gamma(x_j))|$, где супремум берется по всем $x \in \Omega$ и всем $j = \overline{1, N}$.

Применяя это неравенство, из (10) находим

$$\begin{aligned} C_0 \|u; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\|^2 &\leq \operatorname{Re} (B_{\lambda_j}^{(0)}[u, u] - \mathcal{B}_{\lambda_j}^{(0)}[u, u]) + \operatorname{Re} \mathcal{B}_{\lambda_j}^{(0)}[u, u] \\ &\leq \operatorname{Re} \mathcal{B}_{\lambda_j}^{(0)}[u, u] + M\Lambda \|u; L_{2;\alpha}^r(\Omega)\|^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Поскольку $|\eta_j(x)(\gamma(x) - \gamma(x_j))| < \nu$, $j = \overline{1, N}$, и ν — достаточно малое положительное число, из (11) следует, что

$$c_0 \|u; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\|^2 \leq \operatorname{Re} \mathcal{B}_{\lambda_j}^{(0)}[u, u] \quad (12)$$

для всех $u \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)$.

Введем полуторалинейную форму

$$\mathcal{B}_{\lambda_j}[u, v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) a_{klj}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx + \lambda \int_{\Omega} \rho^{2(\alpha-r)}(x) u(x) \overline{v(x)} dx, \quad (13)$$

где $a_{klj}(x) = (1 - \eta_j(x))a_{kl}(x_j) + \eta_j(x)a_{kl}(x)$.

Заметим, что $\mathcal{B}_{\lambda_j}^{(0)}[u, v] = \gamma(x_j)\mathcal{B}_{\lambda_j j}[u, v]$, где $\lambda_j = \lambda\gamma^{-1}(x_j)$. Поэтому из неравенства (12) следует, что при достаточно больших λ

$$c_0 \|u; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\|^2 \leq \operatorname{Re}\{\gamma(x_j)\mathcal{B}_{\lambda_j j}[u, u]\} \quad (14)$$

для всех $u \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)$.

Не нарушая общности, можно считать, что в условии (4) $\varphi > \pi/2$. В силу (4) неравенство (5) будет выполняться также и в том случае, если $\gamma(x)$ заменить на $\exp(i\theta(x))$, где $\theta(x) = \min\{\varphi - \pi/2, |\arg \gamma(x)|\}(\operatorname{sign} \gamma(x))$. Поэтому из (14) имеем

$$c_0 \|u; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\|^2 \leq \operatorname{Re}\{\exp(i\theta_j)\mathcal{B}_{\lambda_j j}[u, u]\} \quad (15)$$

для всех $u \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)$. Здесь и далее $\theta_j = \theta(x_j)$, $j = \overline{1, N}$.

Поступая так же, как при доказательстве неравенства (9), находим

$$|\mathcal{B}_{\lambda_j j}[u, v]| \leq (M_0 + |\lambda|) \|u; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\| \cdot \|v; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\| \quad (16)$$

для всех $u, v \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)$.

На основе неравенств (15), (16), применяя теорему Лакса — Мильграма (см. [4, теорема 2.0.1]), построим оператор

$$\mathcal{R}_j(\lambda) : (V_{2;\alpha}^r(\Omega))' \rightarrow V_{2;\alpha}^r(\Omega)$$

такой, что

$$\exp(i\theta_j)\mathcal{B}_{\lambda_j j}[\mathcal{R}_j(\lambda)F, v] = \langle F, v \rangle \quad (17)$$

для всех $F \in (V_{2;\alpha}^r(\Omega))'$ и всех $v \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)$;

$$\|\mathcal{R}_j(\lambda)F; V_{2;\alpha,\varphi}^r(\Omega)\| \leq M_1 \|F; (V_{2;\alpha}^r(\Omega))'\| \quad (18)$$

для всех $F \in (V_{2;\alpha}^r(\Omega))'$. Здесь число M_1 не зависит от F и от λ , $\lambda \geq \lambda_0 = \max_{j=1,\overline{N}} \lambda_j$ и числа λ_j такие же, как в (10).

Символом Φ_j обозначим оператор умножения на функцию $\varphi_j(x)$ и введем оператор

$$\mathcal{R}(\lambda) = \sum_{j=1}^N \exp(i\theta_j) \Phi_j \mathcal{R}_j(\lambda) \Phi_j, \quad (19)$$

который действует из $(V_{2;\alpha}^r(\Omega))'$ в $V_{2;\alpha}^r(\Omega)$.

Так как коэффициенты $a_{kl}(x)$ ($|k| = |l| = r$) ограничены, с помощью неравенства Коши — Буняковского доказывается, что

$$\left| \sum_{|k|,|l|=r} \int_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx \right| \leq M_0 \|u; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\| \cdot \|v; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\|$$

для всех $u, v \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)$. Отсюда

$$\|B_\lambda[u, v]\| \leq (M_0 + \lambda) \|u; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\| \cdot \|v; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\|$$

для всех $u, v \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)$. Следовательно, оператор $\mathbb{R}(\lambda)$, определенный равенством

$$\langle \mathbb{R}(\lambda)F, v \rangle = B_\lambda[\mathcal{R}(\lambda)F, v], \quad v \in V_{2;\alpha}^r(\Omega), \quad (20)$$

действует из $(V_{2;\alpha}^r(\Omega))'$ в $(V_{2;\alpha}^r(\Omega))'$.

Согласно нашим построениям функции $\varphi_j^2(x)$, $j = \overline{1, N}$, образуют разбиение единицы области Ω . Поэтому для всех $F \in L_2(\Omega)$ и $v \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)$ выполняются равенства

$$\langle F, v \rangle = (F, v) = \int_{\Omega} F(x) \overline{v(x)} dx = \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \varphi_j^2(x) F(x) \overline{v(x)} dx = \sum_{j=1}^N (\varphi_j F, \varphi_j). \quad (21)$$

Здесь и далее символом $(\cdot, \cdot)$ обозначено скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$.

Поскольку $a_{klj}(x) = (1 - \eta_j(x))a_{kl}(x_j) + \eta_j(x)a_{kl}(x)$ и функция $\eta_j(x)$ обращается в единицу в некоторой окрестности множества $\text{supp } \varphi_j$, функции $a_{klj}(x)$ и $a_{kl}(x)$ на множестве $\text{supp } \varphi_j$ совпадают. Поэтому из (1), (19) и (20) следует, что

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{R}(\lambda)F, v \rangle = \sum_{j=1}^N \exp(i\theta_j) \left\{ \sum_{|k|,|l|=r} \int_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) a_{klj}(x) D^k (\varphi_j \mathcal{R}_j(\lambda) \Phi_j F)(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx \right. \\ \left. + \lambda \int_{\Omega} \rho^{2\alpha-2r}(x) (\mathcal{R}_j(\lambda) \Phi_j F)(x) \overline{\varphi_j(x) v(x)} dx \right\}. \quad (22) \end{aligned}$$

Здесь и далее символ D^k обозначает дифференцирование мультииндекса k .

Пусть $F \in L_2(\Omega)$. В равенстве (17) заменим F на $\varphi_j F$, а v — на $\varphi_j v$:

$$\exp(i\theta_j) \mathcal{B}_{\lambda j}[\mathcal{R}_j(\lambda) \Phi_j F, \varphi_j v] = (\varphi_j F, \varphi_j v),$$

откуда с учетом равенства (13) вытекает, что

$$\begin{aligned} & (\varphi_j F, \varphi_j v) \\ &= \exp(i\theta_j) \left\{ \sum_{|k|, |l|=r} \int_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) a_{klj}(x) D^k(\mathcal{R}_j(\lambda) \Phi_j F)(x) \overline{D^l(\varphi_j(x) v(x))} dx \right. \\ & \quad \left. + \lambda \int_{\Omega} \rho^{2(\alpha-r)}(x) (\mathcal{R}_j(\lambda) \Phi_j F)(x) \overline{\varphi_j(x) v(x)} dx \right\}. \end{aligned}$$

Суммируя это равенство по j от 1 до N , в силу (21) имеем

$$\begin{aligned} \langle F, v \rangle &= (F, v) \\ &= \sum_{j=1}^N \exp(i\theta_j) \left\{ \sum_{|k|, |l|=r} \int_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) a_{klj}(x) D^k(\mathcal{R}_j(\lambda) \Phi_j F)(x) \overline{D^l(\varphi_j(x) v(x))} dx \right. \\ & \quad \left. + \lambda \int_{\Omega} \rho^{2(\alpha-r)}(x) (\mathcal{R}_j(\lambda) \Phi_j F)(x) \overline{\varphi_j(x) v(x)} dx \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (22) следует, что

$$\langle \mathbb{R}(\lambda) F, v \rangle - \langle F, v \rangle = \mathbb{K}_{\lambda}[F, v] + \mathbb{L}_{\lambda}[F, v], \quad (23)$$

где

$$\mathbb{K}_{\lambda}[F, v] = \sum_{j=1}^N \exp(i\theta_j) \sum^{(1)} C_{k'}^{k''} \int_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) a_{klj}(x) \varphi_j^{(k')}(x) U_{j,\lambda}^{(k'')}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx, \quad (24)$$

$$\mathbb{L}_{\lambda}[F, v] = \sum_{j=1}^N \exp(i\theta_j) \sum^{(2)} C_{l'}^{l''} \int_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) a_{klj}(x) U_{j,\lambda}^{(k)}(x) \overline{\varphi_j^{(l')}(x) v^{(l'')}(x)} dx, \quad (25)$$

$$U_{j,\lambda}(x) = (\mathcal{R}_j(\lambda) \Phi_j F)(x), \quad j = \overline{1, N}.$$

Здесь символ $\sum^{(1)}$ обозначает суммирование по мультииндексам k, l, k', k'' таким, что $k = k' + k''$, $k' \neq 0$, $|k| = |l| = r$, а символ $\sum^{(2)}$ обозначает суммирование по мультииндексам k, l, l', l'' таким, что $l = l' + l''$, $l' \neq 0$, $|k| = |l| = r$.

Дальнейшая часть доказательства основной теоремы состоит из оценки правой части равенства (23). Эту оценку сформулируем в виде двух вспомогательных утверждений.

Утверждение 1. Существует положительная функция $\omega_1(\lambda)$, $\lambda > 0$, такая, что

$$\|\mathbb{K}_{\lambda}[F, v]\| \leq \omega_1(\lambda) \|F; (V_{2;\alpha}^r(\Omega))'\| \cdot \|v; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\| \quad (26)$$

для всех $F \in L_2(\Omega)$, $v \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)$, и $\omega_1(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Доказательство. Прежде чем приступить к доказательству утверждения 1, докажем лемму 1.

Лемма 1. Пусть $B_{\lambda j}$ — самосопряженный оператор в пространстве $L_2(\Omega)$, порожденный симметричной формой

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{\lambda j}[u, v] = \frac{1}{2} \{ \exp(i\theta_j) \mathcal{B}_{\lambda j}[u, v] + \exp(-i\theta_j) \overline{\mathcal{B}_{\lambda j}[v, u]} \}, \quad (27)$$

$$D(\tilde{\mathcal{B}}_{\lambda_j}) = V_{2;\alpha}^r(\Omega).$$

Тогда при $\lambda \geq \lambda_0$, где $\lambda_0 = \max_{j=\overline{1,N}} \lambda_j$ и λ_j — такие же конечные положительные числа, как в (10), для любого мультииндекса k такого, что $|k| = r$, и любого $j = \overline{1,N}$ оператор $\rho^\alpha D^k B_{\lambda_j}^{-1/2}$ ограничен в $L_2(\Omega)$, а если мультииндекс $\tilde{k}$ такой, что $|\tilde{k}| < r$, то существует положительная функция $q(\lambda)$ такая, что $q(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$ и

$$\|\rho^\alpha D^{\tilde{k}} u; L_2(\Omega)\| \leq q(\lambda) \|B_{\lambda_j}^{1/2} u; L_2(\Omega)\| \quad (28)$$

для всех $u \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению оператора B_{λ_j} для всех $u, v \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)$ выполняется равенство

$$(B_{\lambda_j}^{1/2} u, B_{\lambda_j}^{1/2} v) = \tilde{\mathcal{B}}_{\lambda_j}[u, v]. \quad (29)$$

Следовательно,

$$\|B_{\lambda_j}^{1/2} u; L_2(\Omega)\|^2 = \operatorname{Re}\{\exp(i\theta_j) \tilde{\mathcal{B}}_{\lambda_j}[u, u]\} \quad (30)$$

и в силу неравенства (15)

$$\|B_{\lambda_j}^{1/2} u; L_2(\Omega)\| \geq c_0 \|u; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\|, \quad \lambda \geq \lambda_0, \quad (31)$$

для всех $u \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)$. Тем самым

$$\|\rho^\alpha D^k u; L_2(\Omega)\| \leq M_0 \|B_{\lambda_j}^{1/2} u; L_2(\Omega)\|, \quad |k| = r, \quad j = \overline{1,N}, \quad u \in V_{2;\alpha}^r(\Omega),$$

что влечет ограниченность оператора $\rho^\alpha D^k B_{\lambda_j}^{-1/2}$.

Рассмотрим случай $|\tilde{k}| < r$. Из леммы 2.2 в [8], в частности, следует, что для любого $\tau > 0$ и всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|\rho^{\beta-r+m} D^{\tilde{k}} u; L_2(\Omega)\| \leq \tau \|u; L_{2;\beta}^r(\Omega)\| + c_0 \tau^{-\mu} \|\rho^{\beta-r} u; L_2(\Omega)\|,$$

где $m = |\tilde{k}|$, $\mu = m/(r-m)$. Обозначая в этом неравенстве $\beta - r + m$ через α , приходим к неравенству

$$\|\rho^\alpha D^{\tilde{k}} u; L_2(\Omega)\| \leq \tau \|u; L_{2;\alpha+r-m}^r(\Omega)\| + c_0 \tau^{-\mu} \|\rho^{\alpha-m} u; L_2(\Omega)\|.$$

Так как $r - m \geq 1$ и Ω — ограниченная область, то $\rho^{r-m}(x) \leq C_1$ для всех $x \in \Omega$. Поэтому из полученного неравенства в силу (31) для всех $u \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)$ следует, что

$$\|\rho^\alpha D^{\tilde{k}} u; L_2(\Omega)\| \leq \tau \|B_{\lambda_j}^{1/2} u; L_2(\Omega)\| + c_0 \tau^{-\mu} \|\rho^{\alpha-m} u; L_2(\Omega)\|,$$

где $m = |\tilde{k}| < r$, $\mu = |\tilde{k}|/(r - |\tilde{k}|) > 0$ и τ — произвольное положительное число.

Отсюда в силу равенства (30) вытекает, что

$$\|\rho^\alpha D^{\tilde{k}} u; L_2(\Omega)\|^2 \leq \tau^2 \operatorname{Re}\{\exp(i\theta_j) \tilde{\mathcal{B}}_{\lambda_j}[u, u]\} + c_1 \tau^{-2\mu} \|\rho^{\alpha-m} u; L_2(\Omega)\|^2.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
& \tau^2 \operatorname{Re}\{\exp(i\theta_j) \mathcal{B}_{\lambda j}[u, u]\} + c_1 \tau^{-2\mu} \|\rho^{\alpha-m} u; L_2(\Omega)\|^2 \\
&= \tau^2 \operatorname{Re} \left\{ \exp(i\theta_j) \left(\sum_{|k|, |l|=r} \int_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) a_{klj}(x) u^{(k)}(x) \overline{u^{(l)}(x)} dx \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \lambda \int_{\Omega} \rho^{2(\alpha-r)}(x) |u(x)|^2 dx \right) \right\} + c_1 \tau^{-2\mu} \int_{\Omega} \rho^{2(\alpha-m)}(x) |u(x)|^2 dx \\
&\leq \tau^2 \operatorname{Re} \left\{ \exp(i\theta_j) \left(\sum_{|k|, |l|=r} \int_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) a_{klj}(x) u^{(k)}(x) \overline{u^{(l)}(x)} dx \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + K_0(\lambda, \tau) \int_{\Omega} \rho^{2(\alpha-r)}(x) |u(x)|^2 dx \right) \right\},
\end{aligned}$$

где $K_0(\lambda, \tau)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию $\lambda + c_1 \tau^{-2\mu-2} \leq K_0(\lambda, \tau)$. Поскольку $\mu + 1 = r/(r - m)$, то $K_0(\lambda, \tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$ или $\lambda \rightarrow \infty$. Поэтому из полученных выше неравенств при $\lambda = 1/\tau$ следует, что

$$\begin{aligned}
& \|\rho^{\alpha} D^{k''} u; L_2(\Omega)\|^2 \\
&\leq \tau^2 \operatorname{Re} \left\{ \exp(i\theta_j) \left(\sum_{|k|, |l|=r} \int_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) a_{klj}(x) u^{(k)}(x) \overline{u^{(l)}(x)} dx \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + p(\tau) \int_{\Omega} \rho^{2(\alpha-r)}(x) |u(x)|^2 dx \right) \right\}, \quad (32)
\end{aligned}$$

где непрерывная положительная функция $p(\tau)$ такова, что $p(\tau) \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow 0$. Обратную к $p(\tau)$ функцию обозначим через q и, положив $\tau = q(\lambda)$ в равенстве (32), получим

$$\begin{aligned}
& \|\rho^{\alpha} D^{k''} u; L_2(\Omega)\|^2 \\
&\leq q(\lambda)^2 \operatorname{Re} \left\{ \exp(i\theta_j) \left(\sum_{|k|, |l|=r} \int_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) a_{klj}(x) u^{(k)}(x) \overline{u^{(l)}(x)} dx \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \lambda \int_{\Omega} \rho^{2(\alpha-r)}(x) |u(x)|^2 dx \right) \right\},
\end{aligned}$$

где непрерывная положительная функция $q(\lambda)$ такова, что $q(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Отсюда в силу равенства (30) следует (28).

Лемма 1 доказана.

Билинейная форма $\exp(i\theta_j) \mathcal{B}_{\lambda j}[u, v]$ удовлетворяет неравенствам (см. (15), (16)):

$$c_0 \|u; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\|^2 \leq \operatorname{Re}\{\exp(i\theta_j) \mathcal{B}_{\lambda j}[u, u]\} \quad (33)$$

для всех $u \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)$,

$$|\mathcal{B}_{\lambda j}[u, v]| \leq (M_0 + |\lambda|) \|u; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\| \cdot \|v; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\| \quad (34)$$

для всех $u, v \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)$. Числа $c_0, M_0 > 0$ в этих неравенствах не зависят от $u(x), v(x)$.

Согласно (33), (34) билинейная форма $\exp(i\theta_j)\mathcal{B}_{\lambda_j}[u, v]$ замкнута и секториальна. Поэтому в силу теоремы 2.1 из [9, гл. 6] существует m -секториальный оператор A_{λ_j} такой, что

$$\exp(i\theta_j)\mathcal{B}_{\lambda_j}[u, v] = (A_{\lambda_j}u, v), \quad u \in D(A_{\lambda_j}) \subset V_{2;\alpha}^r(\Omega), \quad v \in V_{2;\alpha}^r(\Omega). \quad (35)$$

Пусть $f \in L_2(\Omega)$. Тогда $\mathcal{B}_j(\lambda)f \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)$ и ввиду равенства (17)

$$\exp(i\theta_j)\mathcal{B}_{\lambda_j}[\mathcal{B}_j(\lambda)f, v] = \langle f, v \rangle$$

для всех $v \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)$. Отсюда и из (35) в силу теоремы 2.1 из [9, гл. 6] следует, что $A_{\lambda_j}\mathcal{B}_j(\lambda)f = f$, $f \in L_2(\Omega)$, т. е.

$$\mathcal{B}_j(\lambda)f = A_{\lambda_j}^{-1}f \quad (36)$$

для всех $f \in L_2(\Omega)$.

Пусть B_{λ_j} — самосопряженный оператор, введенный в лемме 1. Для всех $u, v \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)$ выполняется равенство

$$(B_{\lambda_j}^{1/2}u, B_{\lambda_j}^{1/2}v) = \tilde{\mathcal{B}}_{\lambda_j}[u, v],$$

откуда при $u(x) = v(x)$ с учетом равенства (27) получим

$$\|B_{\lambda_j}^{1/2}u; L_2(\Omega)\|^2 = \operatorname{Re}\{\exp(i\theta_j)\mathcal{B}_{\lambda_j}[u, u]\}, \quad \lambda \geq \lambda_0 > 0.$$

Применяя (15), находим, что

$$\|B_{\lambda_j}^{1/2}u; L_2(\Omega)\| \geq C\|u; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\|, \quad \lambda \geq \lambda_0 > 0,$$

для всех $u \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)$. Отсюда следует обратимость оператора $B_{\lambda_j}^{1/2}$ при $\lambda \geq \lambda_0 > 0$. Применяя теорему 3.2 из [9, гл. 6], получим представление

$$A_{\lambda_j}^{-1} = B_{\lambda_j}^{-1/2}X_j(\lambda)B_{\lambda_j}^{-1/2}, \quad \lambda \geq \lambda_0 > 0, \quad (37)$$

где $X_j(\lambda) : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ — некоторый ограниченный оператор и его норма $\|X_j(\lambda)\|$ не превосходит числа $M_1 > 0$, не зависящего от $\lambda \in [\lambda_0, \infty)$.

Переходим к доказательству оценки (26). Равенство (24) перепишем в виде

$$\mathbb{K}_\lambda[F, v] = \sum_{j=1}^N \exp(i\theta_j) \sum^{(1)} C_{k''}^{k''}(\rho^\alpha a_{klj} \varphi_j^{(k')} U_{j,\lambda}^{(k'')}, \rho^\alpha v^{(l)}), \quad (38)$$

где $U_{j,\lambda}(x) = (\mathcal{B}_j(\lambda)\Phi_j F)(x)$, $j = \overline{1, N}$. Пусть $F \in L_2(\Omega)$. Используя равенства (35)–(38), имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_\lambda[F, v] &= \sum_{j=1}^N \sum^{(1)} \exp(i\theta_j) C_{k''}^{k''}(\rho^\alpha a_{klj} \varphi_j^{(k')} D^{k''} A_{\lambda_j}^{-1} \Phi_j F, \rho^\alpha v^{(l)}) \\ &= \sum_{j=1}^N \sum^{(1)} \exp(i\theta_j) C_{k''}^{k''}(\rho^\alpha a_{klj} \varphi_j^{(k')} D^{k''} B_{\lambda_j}^{-1/2} X_j(\lambda) B_{\lambda_j}^{-1/2} \Phi_j F, \rho^\alpha v^{(l)}). \end{aligned}$$

Применяя неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$|\mathbb{K}_\lambda[F, v]| \ll \sum_{j=1}^N \sum^{(1)} \|\mathbb{T}_{k''j}(\lambda) V_{j,\lambda}; L_2(\Omega)\| \cdot \|\mathbb{S}_{j,l} B_{\lambda_0 j}^{1/2} v; L_2(\Omega)\|, \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{k''j}(\lambda) &= \rho^\alpha D^{k''} B_{\lambda j}^{-1/2}, \quad V_{j,\lambda}(x) = X_j(\lambda) B_{\lambda j}^{-1/2}(\varphi_j F)(x), \\ \mathbb{S}_{j,l} &= \rho^\alpha D^l B_{\lambda_0 j}^{-1/2}. \end{aligned} \quad (40)$$

Докажем неравенство

$$\|V_{j,\lambda}; L_2(\Omega)\| \leq M \|F; (V_{2;\alpha}^r(\Omega))'\|, \quad (41)$$

которое справедливо при $\lambda \geq \lambda_0$. Пусть $\lambda \geq \lambda_0$. Тогда

$$\|B_{\lambda j}^{-1/2}(\varphi_j F); L_2(\Omega)\| \ll \|B_{\lambda_0 j}^{-1/2}(\varphi_j F); L_2(\Omega)\|. \quad (42)$$

Норму в пространстве $L_2(\Omega)$ можно задавать с помощью равенства

$$\|f; L_2(\Omega)\| = \sup |(f, v)|, \quad (43)$$

где супремум берется по всем $v \in L_2(\Omega)$ таким, что $\|v; L_2(\Omega)\| = 1$. Так как $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$, в равенстве (43) можно считать, что супремум берется по всем $v \in C_0^\infty(\Omega)$ таким, что $\|v; L_2(\Omega)\| = 1$.

При $\lambda = \lambda_0$ из (29) имеем $(B_{\lambda_0 j}^{1/2} u, B_{\lambda_0 j}^{1/2} v) = \tilde{\mathcal{B}}_{\lambda_0 j}[u, v]$.

С другой стороны,

$$\mathcal{B}_{\lambda_0 j}[u, u] \gg \|u; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\|^2,$$

$$|\mathcal{B}_{\lambda_0 j}[u, v]| \leq (M_0 + \lambda_0) \|u; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\| \cdot \|v; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\|$$

для всех $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$. Поэтому согласно теореме Лакса — Мильграма уравнение

$$\mathcal{B}_{\lambda_0 j}[u, \hat{v}] = (w, \hat{v}), \quad \hat{v} \in C_0^\infty(\Omega),$$

имеет решение для любого $w \in L_2(\Omega)$. Следовательно, функцию $v \in C_0^\infty(\Omega)$ в (43) можно представить в виде $v = B_{\lambda_0 j}^{1/2} w$, т. е.

$$\|f; L_2(\Omega)\| = \sup |(f, B_{\lambda_0 j}^{1/2} w)|,$$

где супремум берется по всем $w \in C_0^\infty(\Omega)$ таким, что $\|B_{\lambda_0 j}^{1/2} w; L_2(\Omega)\| = 1$. С другой стороны, в классе $C_0^\infty(\Omega)$ нормы $\|v; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\|$ и $\|B_{\lambda_0 j}^{1/2} v; L_2(\Omega)\|$ эквивалентны. Поэтому

$$\begin{aligned} \|B_{\lambda_0 j}^{-1/2}(\varphi_j F); L_2(\Omega)\| &= \sup |(B_{\lambda_0 j}^{-1/2}(\varphi_j F), w)| \\ &= \sup |(B_{\lambda_0 j}^{-1/2}(\varphi_j F), B_{\lambda_0 j}^{1/2} v)| \ll \sup |(\varphi_j F, v)| \\ &\ll \|\varphi_j F; (V_{2;\alpha}^r(\Omega))'\| \ll \|F; (V_{2;\alpha}^r(\Omega))'\|, \end{aligned} \quad (44)$$

где первый супремум в этой цепочке берется по всем $w \in C_0^\infty(\Omega)$, $\|w; L_2(\Omega)\| = 1$, второй супремум — по всем $v \in C_0^\infty(\Omega)$, $\|B_{\lambda_0 j}^{1/2} w; L_2(\Omega)\| = 1$, а третий супремум — по всем $v \in C_0^\infty(\Omega)$, $\|v; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\| = 1$.

Из (42), (44) следует (41).

Согласно лемме 1 оператор $\mathbb{S}_{j,l} = \rho^\alpha D^l B_{\lambda_0 j}^{-1/2}$ (см. (40)) ограничен, и из (16), (29) следует, что

$$\|B_{\lambda_0 j}^{1/2} v; L_2(\Omega)\|^2 = |\tilde{\mathcal{B}}_{\lambda_0 j}[v, v]| \ll \|v; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\|^2$$

для всех $v \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)$. Поэтому

$$\|\mathbb{S}_{j,l} B_{\lambda_0 j}^{1/2} v; L_2(\Omega)\| \ll \|v; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\|. \quad (45)$$

Согласно второй части утверждения леммы 1 существует положительная функция $\varepsilon_1(\lambda)$ такая, что

$$\|\rho^\alpha D^{k''} B_{\lambda j}^{-1/2}\| \leq \varepsilon_1(\lambda)$$

и $\varepsilon_1(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Следовательно, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|\mathbb{T}_{k'',j}(\lambda)\| = 0$ (см. (40)). Ввиду этого равенства из (39), (41), (45) получим оценку (26).

Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. Существует положительная функция $\omega_2(\lambda)$, $\lambda > 0$, такая, что

$$\|\mathbb{L}_\lambda[F, v]\| \leq \omega_2(\lambda) \|F; (V_{2;\alpha}^r(\Omega))'\| \cdot \|v; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\| \quad (46)$$

для всех $F \in L_2(\Omega)$, $v \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)$, и $\omega_2(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для удобства записи интегралы, составляющие форму $\mathbb{L}_\lambda[F, v]$, обозначим через $\mathbb{L}_\lambda[F, v]$.¹⁾

Так как (см. (36), (37))

$$\mathcal{R}_j(\lambda) = A_{\lambda j}^{-1} = B_{\lambda j}^{-1/2} X_j(\lambda) B_{\lambda j}^{-1/2}, \quad \lambda \geq \lambda_0 > 0,$$

форму $\mathbb{L}_\lambda[F, v]$ можно записать в виде

$$\mathbb{L}_\lambda[F, v] = (\rho^\alpha a_{klj} D^k B_{\lambda j}^{-1/2} X_j(\lambda) B_{\lambda j}^{-1/2} \Phi_j F, \rho^\alpha \varphi_j^{(l'')} D^{l''} v).$$

Далее введем обозначение

$$V_{j,\lambda}(x) = X_j(\lambda) B_{\lambda j}^{-1/2} \Phi_j F \quad (47)$$

и, используя равенство $D^{l''} v = D^{l''} B_{\lambda_0 j}^{-1/2} B_{\lambda_0 j}^{1/2} v$, получим

$$\mathbb{L}_\lambda[F, v] = (B_{\lambda_0 j}^{-1/2} D^{l''} \varphi_j^{(l')} \rho^\alpha a_{klj} \rho^\alpha D^k B_{\lambda j}^{-1/2} V_{j,\lambda}, B_{\lambda_0 j}^{1/2} v). \quad (48)$$

Положим

$$\mathbb{T}_{j,\lambda_0,l''} = a_{klj} \rho^\alpha \varphi_j^{(l')} D^{l''} B_{\lambda_0 j}^{-1/2}.$$

Тогда

$$\mathbb{T}_{j,\lambda_0,l''}^* = B_{\lambda_0 j}^{-1/2} D^{l''} \varphi_j^{(l')} \rho^\alpha a_{klj}$$

и равенство (48) примет вид

$$\mathbb{L}_\lambda[F, v] = (\mathbb{T}_{j,\lambda_0,l''}^* \rho^\alpha D^k B_{\lambda j}^{-1/2} V_{j,\lambda}, B_{\lambda_0 j}^{1/2} v).$$

Введем обозначение

$$\mathbb{P}_{j,\lambda_0,k} = \rho^\alpha D^k B_{\lambda_0 j}^{-1/2}.$$

Тогда

$$\mathbb{L}_\lambda[F, v] = (\mathbb{T}_{j,\lambda_0,l''}^* \mathbb{P}_{j,\lambda_0,k} B_{\lambda_0 j}^{1/2} B_{\lambda j}^{-1/2} V_{j,\lambda}, B_{\lambda_0 j}^{1/2} v). \quad (49)$$

¹⁾Зависимость $\mathbb{L}_\lambda[F, v]$ от j, k, l, l', l'' в данном контексте несущественна, поэтому в обозначении эти символы не используются.

Так как B_{λ_j} — самосопряженный оператор, ассоциированный с формой $\tilde{\mathcal{B}}_{\lambda_j}[u, v]$ (см. лемму 1), то

$$\begin{aligned} \|(B_{\lambda_{0j}}^{1/2} + (\lambda - \lambda_0)^{1/2}E)u; L_2(\Omega)\|^2 &\leq 2\{\|B_{\lambda_{0j}}^{1/2}u; L_2(\Omega)\|^2 + (\lambda - \lambda_0)\|u; L_2(\Omega)\|^2\} \\ &\leq M_0\{(B_{\lambda_{0j}}^{1/2}u, B_{\lambda_{0j}}^{1/2}u) + \theta'_j(\lambda - \lambda_0)(\rho^{\alpha-r}u, \rho^{\alpha-r}u)\} \\ &= M_0[\tilde{\mathcal{B}}_{\lambda_{0j}}[u, u] + \theta'_j(\lambda - \lambda_0)(\rho^{2\alpha-2r}u, u)] = M_0\tilde{\mathcal{B}}_{\lambda_j}[u, u] \\ &= M_0(B_{\lambda_j}^{1/2}u, B_{\lambda_j}^{1/2}u) = M_0\|B_{\lambda_j}^{1/2}u; L_2(\Omega)\|^2. \end{aligned}$$

Следовательно, существует число $M_1 > 0$ такое, что

$$\|(B_{\lambda_{0j}}^{1/2} + (\lambda - \lambda_0)^{1/2}E)B_{\lambda_j}^{-1/2}\| \leq M_1 \quad (50)$$

при $\lambda \geq \lambda_0$. Здесь $\theta'_j = \operatorname{Re} \exp(i\theta_j)$.

Используя неравенство (50), из (49) получаем

$$\begin{aligned} |\mathbb{I}_\lambda[F, v]| &\leq M_2 \|\mathbb{T}_{j, \lambda_0, l''}^* \mathbb{P}_{j, \lambda_0, k} B_{\lambda_{0j}}^{1/2} (B_{\lambda_{0j}}^{1/2} + (\lambda - \lambda_0)^{1/2}E)^{-1}\| \\ &\quad \times \|V_{j, \lambda}; L_2(\Omega)\| \cdot \|B_{\lambda_{0j}}^{1/2}v; L_2(\Omega)\|. \quad (51) \end{aligned}$$

Докажем, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|\mathbb{T}_{j, \lambda_0, l''}^* \mathbb{P}_{j, \lambda_0, k} B_{\lambda_{0j}}^{1/2} (B_{\lambda_{0j}}^{1/2} + (\lambda - \lambda_0)^{1/2}E)^{-1}\| = 0. \quad (52)$$

Используя равенство

$$B_{\lambda_{0j}}^{1/2} (B_{\lambda_{0j}}^{1/2} + (\lambda - \lambda_0)^{1/2}E)^{-1} = (E + (\lambda - \lambda_0)^{1/2}B_{\lambda_{0j}}^{-1/2})^{-1},$$

имеем

$$\mathbb{T}_{j, \lambda_0, l''}^* \mathbb{P}_{j, \lambda_0, k} B_{\lambda_{0j}}^{1/2} (B_{\lambda_{0j}}^{1/2} + (\lambda - \lambda_0)^{1/2}E)^{-1} = \mathbb{T}(E + (\lambda - \lambda_0)^{1/2}H)^{-1}, \quad (53)$$

где $\mathbb{T} = \mathbb{T}_{j, \lambda_0, l''}^* \mathbb{P}_{j, \lambda_0, k}$, $H = B_{\lambda_{0j}}^{-1/2}$. Так как $|l''| \leq r - 1$, оператор $\mathbb{T}_{j, \lambda_0, l''}$ вполне непрерывен. Поэтому из ограниченности оператора $\mathbb{P}_{j, \lambda_0, k}$ вытекает вполне непрерывность оператора $\mathbb{T}$. Далее, применяя лемму 7.1 из [10, гл. 5], из (53) получаем (52).

Из (51) в силу (52) следует, что

$$|\mathbb{I}_\lambda[F, v]| \leq \delta_*(\lambda) \|V_{j, \lambda}; L_2(\Omega)\| \cdot \|B_{\lambda_{0j}}^{1/2}v; L_2(\Omega)\|, \quad (54)$$

где $\delta_*(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$.

Заметим, что (см. (47), (34))

$$\begin{aligned} \|V_{j, \lambda}; L_2(\Omega)\| &\leq \|X_j(\lambda)\| \|B_{\lambda_j}^{-1/2}F; L_2(\Omega)\| \ll \|F; (V_{2; \alpha}^r(\Omega))'\|, \\ \|B_{\lambda_{0j}}^{1/2}v; L_2(\Omega)\| &\ll \|v; V_{2; \alpha}^r(\Omega)\|. \end{aligned}$$

В силу этих неравенств из (54) вытекает (46).

Утверждение 2 доказано.

Применяя неравенства (26), (46), установленные в утверждениях 1 и 2 соответственно, из (23) получим

$$|\langle \mathbb{R}(\lambda)F, v \rangle - \langle F, v \rangle| \leq (\omega_1(\lambda) + \omega_2(\lambda)) \|F; (V_{2; \alpha}^r(\Omega))'\| \cdot \|v; V_{2; \alpha}^r(\Omega)\|$$

для всех $F \in L_2(\Omega)$, $v \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)$. Так как $\omega_1(\lambda) \rightarrow 0$, $\omega_2(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$, существует число $\lambda_0 \geq 1$ такое, что

$$|\langle \mathbb{R}(\lambda)F, v \rangle - \langle F, v \rangle| \leq \frac{1}{2} \|F; (V_{2;\alpha}^r(\Omega))'\| \cdot \|v; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\| \quad (55)$$

для любого $\lambda \geq \lambda_0$ и всех $F \in L_2(\Omega)$, $v \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)$. Так как $L_2(\Omega)$ плотно в $(V_{2;\alpha}^r(\Omega))'$, оценка (55) верна для всех $F \in (V_{2;\alpha}^r(\Omega))'$.

Ввиду (55) при $\lambda > \lambda_0$ оператор $\mathbb{R}(\lambda)$ имеет вид $\mathbb{R}(\lambda) = E + \mathbb{G}(\lambda)$, где норма оператора $\mathbb{G}(\lambda) : (V_{2;\alpha}^r(\Omega))' \rightarrow (V_{2;\alpha}^r(\Omega))'$ не превосходит $1/2$. Поэтому оператор $\mathbb{R}(\lambda) : (V_{2;\alpha}^r(\Omega))' \rightarrow (V_{2;\alpha}^r(\Omega))'$ непрерывно обратим и $\mathbb{R}^{-1}(\lambda) = (E + \mathbb{G}(\lambda))^{-1}$.

Оператор $\mathcal{R}_j(\lambda)$, определенный равенством (17), действует из $(\overset{\circ}{W}_{2;\alpha}^r(\Omega))'$ в $\overset{\circ}{W}_{2;\alpha}^r(\Omega)$. Поэтому из (19) следует, что оператор $\mathcal{R}(\lambda)$ также действует из $(V_{2;\alpha}^r(\Omega))'$ в $V_{2;\alpha}^r(\Omega)$. Стало быть, для любого функционала $F \in (V_{2;\alpha}^r(\Omega))'$ функция $U(x)$, определенная равенством

$$U = \mathcal{R}(\lambda)\mathbb{R}^{-1}(\lambda)F, \quad \lambda \geq \lambda_0, \quad (56)$$

принадлежит пространству $V_{2;\alpha}^r(\Omega)$.

Далее будем считать, что $\lambda \geq \lambda_0$ и λ_0 — достаточно большое число. Тогда из (20) следует, что $B_\lambda[\mathcal{R}(\lambda)\mathbb{R}^{-1}(\lambda)F, v] = \langle F, v \rangle$ для всех $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Поэтому при $\lambda \geq \lambda_0$ функция $U(x)$, определенная равенством (56), удовлетворяет равенству $B_\lambda[U, v] = \langle F, v \rangle$, $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Тем самым функция (56) является решением задачи D_λ . Так как при $\lambda \geq \lambda_0$ оператор $\mathbb{R}^{-1}(\lambda)$ ограничен, из (18) и (19) следует, что функция (56) удовлетворяет оценке (6).

Для доказательства единственности решения задачи D_λ рассмотрим сопряженную задачу: для заданного функционала $F \in (V_{2;\alpha}^r(\Omega))'$ найти решение $U_1 \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)$ уравнения

$$\overline{B_\lambda[v, U_1]} = \langle F, v \rangle, \quad v \in V_{2;\alpha,\varphi}^r(\Omega). \quad (57)$$

Так как коэффициенты билинейной формы $\overline{B_\lambda[v, U_1]}$ удовлетворяют условиям теоремы, поступая, как выше, можно построить операторы $\mathcal{R}_*(\lambda)$, $\mathbb{R}_*(\lambda)$ такие, что функция $U_1 = \mathcal{R}_*(\lambda)\mathbb{R}_*(\lambda)^{-1}F$, $\lambda \in [\lambda_0^*, \infty)$, принадлежит пространству $V_{2;\alpha}^r(\Omega)$ и удовлетворяет уравнению (57).

Пусть функция $u \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)$ удовлетворяет равенству

$$B_\lambda[u, v] = 0, \quad v \in V_{2;\alpha}^r(\Omega), \quad (58)$$

где $\lambda \geq \lambda_0' = \max\{\lambda_0^*, \lambda_0\}$. Пусть F — произвольный элемент пространства $(V_{2;\alpha}^r(\Omega))'$. Так как $U_1 = \mathcal{R}_*(\lambda)\mathbb{R}_*(\lambda)^{-1}F$ принадлежит пространству $V_{2;\alpha}^r(\Omega)$, в (58) полагая $v = U_1$, получаем $B_\lambda[u, U_1] = 0$, т. е. $\overline{B_\lambda[u, U_1]} = 0$.

С другой стороны, функция $U_1 = \mathcal{R}_*(\lambda)\mathbb{R}_*(\lambda)^{-1}F$ удовлетворяет (57). Поэтому $\langle F, u \rangle = 0$ для всех $F \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)$. Учитывая вложение $V_{2;\alpha}^r(\Omega) \rightarrow (V_{2;\alpha}^r(\Omega))'$ и полагая $F = u$, имеем $\langle u, u \rangle = 0$, т. е. $u = 0$.

Теорема доказана полностью.

В заключение авторы выражают свою искреннюю признательность профессору С. А. Искокову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Исхоков С. А. О гладкости решений обобщенной задачи Дирихле и задачи на собственные значения для дифференциальных операторов, порожденных некоэрцитивными билинейными формами // Докл. АН. 1995. Т. 342, № 1. С. 20–22.
2. Бойматов К. Х., Исхоков С. А. О разрешимости и спектральных свойствах вариационной задачи Дирихле, связанной с некоэрцитивной билинейной формой // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1997. Т. 214. С. 107–134.
3. Бойматов К. Х., Седдики К. Граничные задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, ассоциированных с некоэрцитивными формами // Докл. АН. 1997. Т. 352, № 3. С. 295–297.
4. Никольский С. М., Лизоркин П. И., Мирошин Н. В. Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений // Изв. вузов. Математика. 1988. № 8. С. 4–30.
5. Бойматов К. Х. О плотности финитных функций в весовых пространствах // Докл. АН СССР. 1989. Т. 307, № 6. С. 1296–1299.
6. Исхоков С. А. О гладкости обобщенного решения эллиптического уравнения с нестепенным вырождением // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 11. С. 536–542.
7. Бойматов К. Х. О базисности по Абелю системы корневых вектор-функций вырожденно-эллиптических дифференциальных операторов с сингулярными матричными коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 1. С. 46–57.
8. Исхоков С. А. Неравенство Гординга для эллиптических операторов с вырождением // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 2. С. 201–216.
9. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
10. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.

Статья поступила 24 апреля 2014 г.

Гадоев Махмадрахим Гафурович, Константинова Туйаара Петровна
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
политехнический институт (филиал) в г. Мирном
ул. Тихонова, 5/1, Мирный 678170, Республика Саха (Якутия)
gadoev@rambler.ru