

УДК 517.927.21

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Н. Н. Шадрина

Аннотация. Исследуется общая краевая задача нахождения решения для линейного эллиптического уравнения. Доказываются теоремы существования и единственности решения при выполнении соответствующих граничных условий и условий сопряжения на границе раздела двух сред.

Ключевые слова: краевая задача, условия сопряжения, уравнения эллиптического типа.

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты, бесконечно дифференцируемой) границей Γ , Q — цилиндр $\Omega \times (-1, 1)$, Q^- и Q^+ — цилиндры $Q^- = \Omega \times (-1, 0)$, $Q^+ = \Omega \times (0, 1)$. Далее, пусть $p(x, y)$, $c(x, y)$, $f(x, y)$, $\alpha_i(x)$, $\beta_i(x)$ ($i = \overline{1, 4}$) — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $y \in [-1, 1]$, при этом $p(x, y)$ строго положительна при $(x, y) \in \overline{Q}$ и может иметь разрыв первого рода при переходе через плоскость $y = 0$, $(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x), \alpha_4(x))$, $(\beta_1(x), \beta_2(x), \beta_3(x), \beta_4(x))$ — некоторые линейно независимые при каждом фиксированном $x \in \overline{\Omega}$ вектор-функции, B_1 и B_2 — линейные операторы, ставящие в соответствие функции $u(x, y)$ функцию $(B_i u)(x)$ (свойства которых будут описаны позже). Пусть L — дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x, y)$ определяется равенством

$$Lv \equiv \Delta_x v + \frac{\partial}{\partial y}(p(x, y)v_y) + c(x, y)v,$$

где $\Delta_x = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

Задача сопряжения. Найти функцию $u(x, y)$, являющуюся в цилиндрах Q^- и Q^+ решением уравнения

$$Lu = f(x, y) \quad (1)$$

и такую, что для нее выполняются граничные условия на боковой поверхности $S = \Gamma \times (-1, 1)$:

$$u(x, y)|_S = 0, \quad (2)$$

на основаниях:

$$u(x, -1) = 0, \quad u(x, 1) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

а также условия сопряжения на границе раздела областей Q^- и Q^+ :

$$\alpha_1(x)u(x, -0) + \alpha_2(x)u(x, +0) + \alpha_3(x)u_y(x, -0) + \alpha_4(x)u_y(x, +0) + B_1 u = 0, \quad (4)$$

$$\beta_1(x)u(x, -0) + \beta_2(x)u(x, +0) + \beta_3(x)u_y(x, -0) + \beta_4(x)u_y(x, +0) + B_2u = 0, \quad (5)$$

где $x \in \Omega$.

Задача (1)–(5) в частном случае совпадает с хорошо изученной классической задачей дифракции (см., например, [1–3]). В общем же виде, рассматриваемом в настоящей работе, ранее такие задачи не изучались. Заметим, что задачи сопряжения (дифракции) возникают при математическом моделировании многих процессов механики, физики, биологии и т. п. в ситуациях, когда те или иные процессы изучаются в двух и более соприкасающихся субстанциях с различными физическими характеристиками (из многочисленных работ последнего времени укажем лишь работы [4, 5]).

Условие линейной независимости векторов $(\alpha_i(x)), (\beta_i(x))$ ($i = \overline{1, 4}$) означает, что в каждой точке x из $\overline{\Omega}$ один из миноров второго порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha_1(x) & \alpha_2(x) & \alpha_3(x) & \alpha_4(x) \\ \beta_1(x) & \beta_2(x) & \beta_3(x) & \beta_4(x) \end{pmatrix}$$

отличен от нуля.

В дальнейшем будем рассматривать случай, когда отличным от нуля является один из миноров

$$\Delta_1(x) = \alpha_3(x)\beta_4(x) - \alpha_4(x)\beta_3(x), \quad \Delta_2(x) = \alpha_1(x)\beta_2(x) - \alpha_2(x)\beta_1(x),$$

$$\Delta_3(x) = \alpha_1(x)\beta_4(x) - \alpha_4(x)\beta_1(x), \quad \Delta_4(x) = \alpha_2(x)\beta_3(x) - \alpha_3(x)\beta_2(x).$$

Более того, будем считать, что выполняется следующее

Условие А. Если существует точка x_0 из Ω такая, что $\Delta_i(x_0) \neq 0$ для одного из чисел $i = 1, 2, 3, 4$, то $\Delta_i(x) \neq 0$ для всех x из $\overline{\Omega}$ и того же числа i .

При выполнении условия А задача сопряжения (1)–(5) может быть переформулирована как одна из следующих задач.

Задача I. Найти функцию $u(x, y)$, являющуюся решением уравнения (1) в цилиндрах Q^- и Q^+ и такую, что выполняются условия (2), (3), а также условия

$$u_y(x, -0) = a_1(x)u(x, -0) + a_2(x)u(x, +0) + a_3(x)B_1u + a_4(x)B_2u, \quad x \in \Omega,$$

$$u_y(x, +0) = b_1(x)u(x, -0) + b_2(x)u(x, +0) + b_3(x)B_1u + b_4(x)B_2u, \quad x \in \Omega.$$

Задача II. Найти функцию $u(x, y)$, являющуюся решением уравнения (1) в цилиндрах Q^- и Q^+ и такую, что выполняются условия (2), (3), а также условия

$$u(x, -0) = a_1(x)u_y(x, -0) + a_2(x)u_y(x, +0) + a_3(x)B_1u + a_4(x)B_2u, \quad x \in \Omega,$$

$$u(x, +0) = b_1(x)u_y(x, -0) + b_2(x)u_y(x, +0) + b_3(x)B_1u + b_4(x)B_2u, \quad x \in \Omega.$$

Задача III. Найти функцию $u(x, y)$, являющуюся решением уравнения (1) в цилиндрах Q^- и Q^+ и такую, что выполняются условия (2), (3), а также условия

$$u(x, -0) = a_1(x)u(x, +0) + a_2(x)u_y(x, -0) + a_3(x)B_1u + a_4(x)B_2u, \quad x \in \Omega,$$

$$u_y(x, +0) = b_1(x)u(x, +0) + b_2(x)u_y(x, -0) + b_3(x)B_1u + b_4(x)B_2u, \quad x \in \Omega.$$

Задача IV. Найти функцию $u(x, y)$, являющуюся решением уравнения (1) в цилиндрах Q^- и Q^+ и такую, что выполняются условия (2), (3), а также условия

$$u(x, +0) = a_1(x)u(x, -0) + a_2(x)u_y(x, +0) + a_3(x)B_1u + a_4(x)B_2u, \quad x \in \Omega,$$

$$u_y(x, -0) = b_1(x)u(x, -0) + b_2(x)u_y(x, +0) + b_3(x)B_1u + b_4(x)B_2u, \quad x \in \Omega.$$

Уточним, что здесь функции $a_1(x)$, $a_2(x)$, $a_3(x)$, $a_4(x)$, $b_1(x)$, $b_2(x)$, $b_3(x)$, $b_4(x)$ для каждой из задач вполне определенно вычисляются через исходные функции $\alpha_i(x)$, $\beta_i(x)$, $i = \overline{1, 4}$. Очевидно, что задачи III и IV однотипные. Далее будет рассмотрена только одна из них, а именно задача III. Кроме того, в данных задачах предполагается, что функция $a_1(x)b_2(x) - a_2(x)b_1(x)$ может обращаться в нуль, в том числе и тождественно, при $x \in \overline{\Omega}$.

В заключение постановки задачи определим требуемое пространство. Именно, обозначим через V следующее множество функций:

$$V = \{v(x, y) : v(x, y) \in W_2^2(Q^-) \cup W_2^2(Q^+)\}.$$

Прежде чем сформулировать теорему 1, введем некоторые дополнительные обозначения. Пусть

$$\bar{a}_3 = \max_{\overline{\Omega}}(p(x, +0)|a_3(x)|), \quad \bar{a}_4 = \max_{\overline{\Omega}}(p(x, -0)|a_4(x)|),$$

$$\bar{b}_3 = \max_{\overline{\Omega}}(p(x, +0)|b_3(x)|), \quad \bar{b}_4 = \max_{\overline{\Omega}}(p(x, -0)|b_4(x)|),$$

$$A_1 = \frac{\gamma_0(m_{11}\bar{b}_3 + m_{12}\bar{b}_4) + m_{11}\bar{a}_3 + m_{12}\bar{a}_4}{2\delta_0^2} + \frac{\delta_0^2\gamma_0(\bar{b}_3 + \bar{b}_4)}{2},$$

$$A_2 = \frac{\gamma_0(m_{21}\bar{b}_3 + m_{22}\bar{b}_4) + m_{21}\bar{a}_3 + m_{22}\bar{a}_4}{2\delta_0^2} + \frac{\delta_0^2(\bar{a}_3 + \bar{a}_4)}{2},$$

$$A_3 = \frac{\gamma_0(m_{31}\bar{b}_3 + m_{32}\bar{b}_4) + m_{31}\bar{a}_3 + m_{32}\bar{a}_4}{2},$$

$$A_4 = \frac{\gamma_0(m_{41}\bar{b}_3 + m_{42}\bar{b}_4) + m_{41}\bar{a}_3 + m_{42}\bar{a}_4}{2},$$

$$\Phi(\xi, \eta) = [\gamma_0 b_2(x)p(x, +0) - A_1]\xi^2 + [\gamma_0 b_1(x)p(x, +0) - a_2(x)p(x, -0)]\xi\eta - [a_1(x)p(x, -0) + A_2]\eta^2$$

(здесь γ_0 и δ_0 — положительные постоянные, точное значение которых будет указано ниже).

Обсудим вначале вопрос единственности решений задач сопряжения I–III.

Теорема 1. Пусть выполняются условия:

$$p(x, y) \in C^1(\overline{Q^-}), \quad p(x, y) \geq p_1 > 0, \quad (x, y) \in \overline{Q^-}, \quad (6)$$

$$p(x, y) \in C^1(\overline{Q^+}), \quad p(x, y) \geq p_2 > 0, \quad (x, y) \in \overline{Q^+}, \quad (7)$$

$$\|B_i v\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq m_{1i}\|v(x, +0)\|_{L_2(\Omega)}^2 + m_{2i}\|v(x, -0)\|_{L_2(\Omega)}^2 + m_{3i}\|v\|_{L_2(Q^-)}^2 + m_{4i}\|v\|_{L_2(Q^+)}^2, \quad v(x, y) \in V, \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

$$c(x, y) \leq -c_0 \leq 0, \quad (x, y) \in \overline{Q}^\pm, \quad (9)$$

$$\exists \gamma_0 > 0 \exists \delta_0 > 0 : \Phi(\xi, \eta) \geq 0, \quad (\eta, \xi) \in \mathbb{R}^2,$$

$$c(x, y) + A_3/\delta_0^2 \leq 0, \quad c(x, y) + A_4/\delta_0^2 \leq 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad y \in [-1, 1]. \quad (10)$$

Тогда задача I в пространстве V не может иметь более одного решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что если правая часть исходного уравнения (1) тождественно равна нулю, то $u(x, y) \equiv 0$.

Рассмотрим равенство

$$-\int_{Q^-} uLu \, dx dy - \gamma_0 \int_{Q^+} uLu \, dx dy = 0$$

и выделим в нем неотрицательно определенные слагаемые.

Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} & -\int_{Q^-} uLu \, dx dy - \gamma_0 \int_{Q^+} uLu \, dx dy \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{Q^-} u_{x_i}^2 \, dx dy + \gamma_0 \sum_{i=1}^n \int_{Q^+} u_{x_i}^2 \, dx dy - \int_{Q^-} c(x, y) u^2 \, dx dy \\ & - \gamma_0 \int_{Q^+} c(x, y) u^2 \, dx dy + \int_{Q^-} p(x, y) u_y^2 \, dx dy + \gamma_0 \int_{Q^+} p(x, y) u_y^2 \, dx dy \\ & + \int_{\partial Q^-} p(x, y) u \cdot u_y \nu_y \, dS + \gamma_0 \int_{\partial Q^+} p(x, y) u \cdot u_y \nu_y \, dS. \quad (11) \end{aligned}$$

Используя условия сопряжения, преобразуем два последних слагаемых равенства (11):

$$\begin{aligned} & \int_{\partial Q^-} p(x, y) u \cdot u_y \nu_y \, dS + \gamma_0 \int_{\partial Q^+} p(x, y) u \cdot u_y \nu_y \, dS \\ &= - \int_{\Omega} p(x, -0) u(x, -0) u_y(x, -0) \, dx + \gamma_0 \int_{\Omega} p(x, +0) u(x, +0) u_y(x, +0) \, dx \\ &= \int_{\Omega} \gamma_0 b_2(x) p(x, +0) u^2(x, +0) \, dx \\ & + \int_{\Omega} [\gamma_0 b_1(x) p(x, +0) - a_2(x) p(x, -0)] u(x, +0) u(x, -0) \, dx \\ & - \int_{\Omega} p(x, -0) a_1(x) u^2(x, -0) \, dx \\ & + \int_{\Omega} [\gamma_0 b_3(x) p(x, +0) u(x, +0) - a_3(x) p(x, -0) u(x, -0)] B_1 u \, dx \\ & + \int_{\Omega} [\gamma_0 b_4(x) p(x, +0) u(x, +0) - a_4(x) p(x, -0) u(x, -0)] B_2 u \, dx. \end{aligned}$$

Применяя введенные ранее обозначения, а также учитывая условие (8), получим

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \int_{Q^-} u_{x_i}^2 dx dy + \gamma_0 \sum_{i=1}^n \int_{Q^+} u_{x_i}^2 dx dy \\
& + \int_{Q^-} p(x, y) u_y^2 dx dy + \gamma_0 \int_{Q^+} p(x, y) u_y^2 dx dy + \int_{\Omega} [\gamma_0 b_2(x) p(x, +0) + A_1] u^2(x, +0) dx \\
& + \int_{\Omega} [\gamma_0 b_1(x) p(x, +0) - a_2(x) p(x, -0)] u(x, +0) u(x, -0) dx \\
& - \int_{\Omega} [p(x, -0) a_1(x) - A_2] u^2(x, -0) dx - \int_{Q^-} [c(x, y) - A_3/\delta_0^2] u^2(x, y) dx dy \\
& - \gamma_0 \int_{Q^+} [c(x, y) - A_4/\delta_0^2] u^2(x, y) dx dy \leq 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, выполняется неравенство

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \int_{Q^-} u_{x_i}^2 dx dy + \gamma_0 \sum_{i=1}^n \int_{Q^+} u_{x_i}^2 dx dy \\
& + \int_{Q^-} p(x, y) u_y^2 dx dy + \gamma_0 \int_{Q^+} p(x, y) u_y^2 dx dy \\
& - \int_{Q^-} c(x, y) u^2 dx dy - \gamma_0 \int_{Q^+} c(x, y) u^2 dx dy \leq 0. \quad (12)
\end{aligned}$$

Отсюда очевидным образом получаем $u(x, y) \equiv 0$ в Q . Теорема доказана.

Для формулировки теоремы 2 введем дополнительные обозначения:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \frac{\gamma_0(\bar{b}_3 + \bar{b}_4)}{2}, \quad A_{21} = \frac{\bar{a}_3 + \bar{a}_4}{2}, \\
A_5 &= \frac{\gamma_0(m_{11}\bar{b}_3 + m_{12}\bar{b}_4) + m_{11}\bar{a}_3 + m_{12}\bar{a}_4}{2}, \\
A_6 &= \frac{\gamma_0(m_{21}\bar{b}_3 + m_{22}\bar{b}_4) + m_{21}\bar{a}_3 + m_{22}\bar{a}_4}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_1(\xi, \eta) &= [\gamma_0 b_2(x) p(x, +0) - A_{11} \delta_1^2] \xi^2 + [\gamma_0 b_1(x) p(x, +0) - a_2(x) p(x, -0)] \xi \eta \\
&\quad - [a_1(x) p(x, -0) + A_{21} \delta_1^2] \eta^2.
\end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия (6)–(9), а также условия

$$\exists \gamma_0 > 0 \exists \delta_1 > 0 : \Phi_1(\eta, \xi) \geq 0, \quad (\eta, \xi) \in \mathbb{R}^2,$$

$$p_1 - A_5/\delta_1^2 > 0, \quad p_2 - A_6/\delta_1^2 > 0,$$

$$c(x, y) + A_3/\delta_1^2 \leq 0, \quad c(x, y) + A_4/\delta_1^2 \leq 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad y \in [-1, 1].$$

Тогда задача II в пространстве V не может иметь более одного решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве теоремы 1, в данном случае достаточно показать, что если правая часть исходного уравнения (1) тождественно равна нулю, то $u(x, y) \equiv 0$. Используя условия сопряжения, учитывая условие (8) и применяя очевидные неравенства

$$\int_{\Omega} u^2(x, -0) dx \leq \int_{Q^-} u_y^2(x, y) dx dy, \quad \int_{\Omega} u^2(x, +0) dx \leq \int_{Q^+} u_y^2(x, y) dx dy, \quad (13)$$

получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \int_{Q^-} u_{x_i}^2 dx dy + \gamma_0 \sum_{i=1}^n \int_{Q^+} u_{x_i}^2 dx dy \\ & + \int_{Q^-} [p(x, y) + A_5/\delta_1^2] u_y^2 dx dy + \gamma_0 \int_{Q^+} [p(x, y) + A_6/\delta_1^2] u_y^2 dx dy \\ & + \int_{\Omega} [\gamma_0 b_2(x) p(x, +0) + A_{11} \delta_1^2] u_y^2(x, +0) dx - \int_{\Omega} [p(x, -0) a_1(x) + A_{21} \delta_1^2] u_y^2(x, -0) dx \\ & - \int_{\Omega} [\gamma_0 b_1(x) p(x, +0) - a_2(x) p(x, -0)] u(x, +0) u_y(x, -0) dx \\ & - \int_{Q^-} [c(x, y) + A_3/\delta_1^2] u^2(x, y) dx dy - \gamma_0 \int_{Q^+} [c(x, y) + A_4/\delta_1^2] u^2(x, y) dx dy \leq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, выполняется неравенство (12). Отсюда очевидным образом получаем $u(x, y) \equiv 0$ в Q . Теорема доказана.

Введем обозначение

$$\begin{aligned} \Phi_2(\xi, \eta) = & [\gamma_0 b_2(x) p(x, +0) - A_{11} \delta_2^2] \xi^2 + [\gamma_0 b_1(x) p(x, +0) - a_2(x) p(x, -0)] \xi \eta \\ & - [a_1(x) p(x, -0) + A_{21} \delta_2^2] \eta^2. \end{aligned}$$

Теорема 3. Пусть выполняются условия (6)–(9), а также условия

$$\exists \gamma_0 > 0 \exists \delta_2 > 0 : \Phi_2(\eta, \xi) \geq 0, \quad (\eta, \xi) \in \mathbb{R}^2,$$

$$p_1 - A_5/\delta_2^2 > 0, \quad p_2 - A_6/\delta_2^2 > 0,$$

$$c(x, y) + A_3/\delta_2^2 \leq 0, \quad c(x, y) + A_4/\delta_2^2 \leq 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad y \in [-1, 1].$$

Тогда задача III в пространстве V не может иметь более одного решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству теоремы 1 с учетом условия (8) получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \int_{Q^-} u_{x_i}^2 dx dy + \gamma_0 \sum_{i=1}^n \int_{Q^+} u_{x_i}^2 dx dy \\ & + \int_{Q^-} [p(x, y) + A_5/\delta_2^2] u_y^2 dx dy + \gamma_0 \int_{Q^+} [p(x, y) + A_6/\delta_2^2] u_y^2 dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega} [\gamma_0 b_2(x) p(x, +0) + A_{11} \delta_2^2] u_y^2(x, +0) dx - \int_{\Omega} [p(x, -0) a_1(x) + A_{21} \delta_2^2] u_y^2(x, -0) dx \\
& - \int_{\Omega} [\gamma_0 b_1(x) p(x, +0) - a_2(x) p(x, -0)] u(x, +0) u_y(x, -0) dx \\
& - \int_{Q^-} [c(x, y) + A_3 / \delta_2^2] u^2(x, y) dx dy - \gamma_0 \int_{Q^+} [c(x, y) + A_4 / \delta_2^2] u^2(x, y) dx dy \leq 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, выполняется неравенство (12). Отсюда очевидным образом получаем $u(x, y) \equiv 0$ в Q . Теорема доказана.

Прежде чем сформулировать следующую теорему, введем дополнительные обозначения:

$$\tilde{a}_3 = \max_{\Omega} (|a_3(x)|), \quad \tilde{a}_4 = \max_{\Omega} (|a_4(x)|), \quad \tilde{b}_3 = \max_{\Omega} (|b_3(x)|), \quad \tilde{b}_4 = \max_{\Omega} (|b_4(x)|).$$

Теорема 4 (теорема существования). Пусть выполняются условия (6)–(10), а также следующие условия:

$$c(x, y) \in (\overline{Q}), \quad a_i(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad i = 1, 2, \quad (14)$$

существуют операторы $\tilde{B}_i$ такие, что для всех $v(x, y) \in V$ выполняется

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (B_i v) = B_i v_{x_j} + \tilde{B}_i v,$$

$$\begin{aligned}
\|\tilde{B}_i v\|_{L_2(\Omega)}^2 & \leq \tilde{m}_{1i} \|v(x, +0)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \tilde{m}_{2i} \|v(x, -0)\|_{L_2(\Omega)}^2 \\
& + \tilde{m}_{3i} \|v\|_{L_2(Q^-)}^2 + \tilde{m}_{4i} \|v\|_{L_2(Q^+)}^2, \quad v(x, y) \in V, \quad i = 1, 2, \quad (15)
\end{aligned}$$

существуют положительные числа $\delta_{01} - \delta_{04}$ такие, что верны неравенства

$$\begin{aligned}
2 - (1 + \tilde{a}_3^2) \delta_{01}^2 - (1 + \tilde{a}_4^2) \delta_{02}^2 - \tilde{m}_{21} \left(\frac{\tilde{a}_3^2}{\delta_{01}^2} + \frac{\gamma_0 \tilde{b}_3^2}{\delta_{03}^2} \right) - \tilde{m}_{32} \left(\frac{\tilde{a}_4^2}{\delta_{02}^2} + \frac{\gamma_0 \tilde{b}_4^2}{\delta_{04}^2} \right) & > 0, \\
2 - (1 + \tilde{b}_3^2) \delta_{03}^2 - (1 + \tilde{b}_4^2) \delta_{04}^2 - \tilde{m}_{12} \left(\frac{\tilde{a}_4^2}{\delta_{02}^2} + \frac{\gamma_0 \tilde{b}_4^2}{\delta_{04}^2} \right) - \tilde{m}_{11} \left(\frac{\tilde{a}_3^2}{\delta_{01}^2} + \frac{\gamma_0 \tilde{b}_3^2}{\delta_{01}^2} \right) & > 0.
\end{aligned} \quad (16)$$

Тогда для любой функции $f(x, y)$ из пространства $L_2(Q)$ существует функция $u(x, y)$, принадлежащая пространству V и являющаяся решением задачи I.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся методом продолжения по параметру. Пусть λ — число из отрезка $[0, 1]$. Рассмотрим семейство краевых задач.

Задача I $_{\lambda}$. Найти функцию $u(x, y)$, являющуюся решением уравнения (1) в цилиндрах Q^- и Q^+ и такую, что выполняются условия (2), (3), а также условия

$$\begin{aligned}
u_y(x, -0) &= \lambda [a_1(x) u(x, -0) + a_2(x) u(x, +0) + a_3(x) B_1 u + a_4(x) B_2 u], \\
u_y(x, +0) &= \lambda [b_1(x) u(x, -0) + b_2(x) u(x, +0) + b_3(x) B_1 u + b_4(x) B_2 u].
\end{aligned} \quad (17)$$

Обозначим через Λ множество тех чисел λ из отрезка $[0, 1]$, для которых задача I $_{\lambda}$ разрешима в пространстве V . Согласно теореме о методе продолжения по параметру [6] множество Λ совпадает со всем отрезком $[0, 1]$, если оно непустое, открытое и замкнутое (в топологии метрического пространства

$X = [0, 1]$). Совпадение множества Λ с отрезком $[0, 1]$ будет означать, что задача I_1 , т. е. исходная задача I , разрешима в пространстве V .

Непустота Λ очевидна, так как число 0 принадлежит ему [7].

Открытость и замкнутость множества Λ имеет место, если для всевозможных решений задачи I_λ из пространства V выполняется априорная оценка

$$\|u\|_V \leq R_0$$

с постоянной K , не зависящей от функции $u(x, y)$ и от λ . Покажем, что требуемая оценка имеет место.

Рассмотрим равенство

$$-\int_{Q^-} uLu \, dx dy - \gamma_0 \int_{Q^+} uLu \, dx dy = -\int_{Q^-} uf(x, y) \, dx dy - \gamma_0 \int_{Q^+} uf(x, y) \, dx dy. \quad (18)$$

Интегрируя по частям, имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n \int_{Q^-} u_{x_i}^2 \, dx dy + \gamma_0 \sum_{i=0}^n \int_{Q^+} u_{x_i}^2 \, dx dy - \int_{Q^-} c(x, y)u^2 \, dx dy - \gamma_0 \int_{Q^+} c(x, y)u^2 \, dx dy \\ & + \int_{Q^-} p(x, y)u_y^2 \, dx dy + \gamma_0 \int_{Q^+} p(x, y)u_y^2 \, dx dy + \int_{\partial Q^-} p(x, y)u \cdot u_y v_y \, dS \\ & + \gamma_0 \int_{\partial Q^+} p(x, y)u \cdot u_y v_y \, dS = -\int_{Q^-} uf(x, y) \, dx dy - \gamma_0 \int_{Q^+} uf(x, y) \, dx dy. \end{aligned}$$

С учетом неравенств

$$\int_{Q^-} u^2(x, y) \, dx dy \leq \int_{Q^-} u_y^2(x, y) \, dx dy, \quad \int_{Q^+} u^2(x, y) \, dx dy \leq \int_{Q^+} u_y^2(x, y) \, dx dy,$$

применяя к правой части неравенство Юнга и используя условия (16) задачи I_λ и условия теоремы, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \int_{Q^-} u_{x_i}^2 \, dx dy + \gamma_0 \sum_{i=1}^n \int_{Q^+} u_{x_i}^2 \, dx dy + \int_{Q^-} p(x, y)u_y^2 \, dx dy \\ & + \gamma_0 \int_{Q^+} p(x, y)u_y^2 \, dx dy + \lambda \int_{\Omega} [\gamma_0 b_2(x)p(x, +0) + A_1]u^2(x, +0) \, dx \\ & + \lambda \int_{\Omega} [\gamma_0 b_1(x)p(x, +0) - a_2(x)p(x, -0)]u(x, +0)u(x, -0) \, dx \\ & - \lambda \int_{\Omega} [p(x, -0)a_1(x) - A_2]u^2(x, -0) \, dx \\ & - \int_{Q^-} [c(x, y) + A_3/\delta_0^2]u^2(x, y) \, dx dy - \gamma_0 \int_{Q^+} [c(x, y) + A_4/\delta_0^2]u^2(x, y) \, dx dy \\ & \leq \frac{1}{2\delta^2} \int_{Q^-} f^2 \, dx dy + \frac{\gamma_0}{2\delta^2} \int_{Q^+} f^2 \, dx dy + \frac{\delta^2}{2} \int_{Q^-} u_y^2 \, dx dy + \frac{\gamma_0 \delta^2}{2} \int_{Q^+} u_y^2 \, dx dy. \end{aligned}$$

Ввиду условий (6)–(9) имеем

$$\begin{aligned} k \left\{ \sum_{i=1}^n \int_{Q^-} u_{x_i}^2 dx dy + \int_{Q^-} u_y^2 dx dy + \sum_{i=1}^n \int_{Q^+} u_{x_i}^2 dx dy + \int_{Q^+} u_y^2 dx dy \right\} \\ \leq K \left(\int_{Q^-} f^2(x, y) dx dy + \int_{Q^+} f^2(x, y) dx dy \right), \end{aligned}$$

в котором $k = \min(1, \frac{p_0}{2}, \gamma, \frac{\gamma_0 p_0}{2}) > 0$, $K = \max(\frac{1}{2p_0}, \frac{\gamma_0}{2p_0})$.

Тем самым первая оценка имеет вид

$$\|u\|_{W_2^1(Q^-)}^2 + \|u\|_{W_2^1(Q^+)}^2 \leq K_1 \left(\int_{Q^-} f^2(x, y) dx dy + \int_{Q^+} f^2(x, y) dx dy \right). \quad (19)$$

Для получения второй априорной оценки рассмотрим равенство

$$\int_{Q^-} u_{yy} Lu dx dy + \gamma_0 \int_{Q^+} u_{yy} Lu dx dy = \int_{Q^-} u_{yy} f(x, y) dx dy + \gamma_0 \int_{Q^+} u_{yy} f(x, y) dx dy. \quad (20)$$

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{Q^-} u_{x_i y}^2 dx dy + \gamma_0 \sum_{i=1}^n \int_{Q^+} u_{x_i y}^2 dx dy - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i y}(x, -0) u_{x_i}(x, -0) dx \\ + \gamma_0 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i y}(x, +0) u_{x_i}(x, +0) dx + \int_{Q^-} p u_{yy}^2 dx dy + \gamma_0 \int_{Q^+} p u_{yy}^2 dx dy \\ = \int_{Q^-} f(x, y) u_{yy} dx dy + \gamma_0 \int_{Q^+} f(x, y) u_{yy} dx dy - \int_{Q^-} p_y u_y u_{yy} dx dy \\ - \gamma_0 \int_{Q^+} p_y u_y u_{yy} dx dy - \int_{Q^-} c(x, y) u u_{yy} dx dy - \gamma_0 \int_{Q^+} c(x, y) u u_{yy} dx dy. \quad (21) \end{aligned}$$

Преобразуем отдельно третье и четвертое слагаемые левой части (21), используя условия сопряжения (17):

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} u_{x_i y}(x, -0) u_{x_i}(x, -0) dx + \gamma_0 \int_{\Omega} u_{x_i y}(x, +0) u_{x_i}(x, +0) dx \\ = \lambda \int_{\Omega} [\gamma_0 b_2(x) u_{x_i}^2(x, +0) + [\gamma_0 b_1(x) - a_2(x)] u_{x_i}(x, -0) u_{x_i}(x, +0) \\ - a_1(x) u_{x_i}^2(x, -0) - (u_{x_i}(x, -0) u(x, -0) a_{1x_i}(x) - u_{x_i}(x, -0) u(x, +0) a_{2x_i}(x))] dx \\ - \lambda \int_{\Omega} \left(u_{x_i}(x, -0) \frac{\partial}{\partial x_i} (B_1 u) a_3(x) - u_{x_i}(x, -0) B_1 u a_{3x_i}(x) \right. \\ \left. - u_{x_i}(x, -0) \frac{\partial}{\partial x_i} (B_2 u) a_4(x) - u_{x_i}(x, -0) B_2 u a_{4x_i}(x) \right. \\ \left. + \gamma_0 \left(u_{x_i}(x, +0) u(x, -0) b_{1x_i}(x) + u_{x_i}(x, +0) u(x, +0) b_{2x_i}(x) \right) \right) \end{aligned}$$

$$+ u_{x_i}(x, +0) \frac{\partial}{\partial x_i} (B_1 u) b_3(x) + u_{x_i}(x, +0) B_1 u b_{3x_i}(x) \\ + u_{x_i}(x, +0) \frac{\partial}{\partial x_i} (B_2 u) b_4(x) + u_{x_i}(x, +0) B_2 u b_{4x_i}(x) \Big) dx.$$

Все слагаемые правой части данного равенства, кроме первого, оцениваются с помощью неравенства Юнга, неравенств (13), примененных для производных $u_{x_i}(x, -0)$, $u_{x_i}(x, +0)$, и условий (8), (15) на операторы B_1, B_2 . Далее, слагаемые в правой части (20) оцениваются сверху с помощью неравенства Юнга и первой оценки. В результате получим

$$\int_{\Omega} (\gamma_0 u_{x_i}^2(x, +0) b_2(x) + u_{x_i}(x, -0) u_{x_i}(x, +0) [\gamma_0 b_1(x) - a_2(x)] - u_{x_i}^2(x, -0) a_1(x)) dx \\ + \frac{p_1}{2} \int_{Q^-} u_{yy}^2 dx dy + \frac{\gamma_0 p_2}{2} \int_{Q^+} u_{yy}^2 dx dy + \sum_{i=1}^n \int_{Q^-} u_{x_i y}^2 \left(1 - \frac{(1 + \tilde{a}_3^2) \delta_{01}^2}{2} - \frac{(1 + \tilde{a}_4^2) \delta_{02}^2}{2} \right. \\ \left. - \tilde{m}_{21} \left[\frac{\tilde{a}_3^2}{\delta_{01}^2} + \frac{\gamma_0 \tilde{b}_3^2}{\delta_{03}^2} \right] - \tilde{m}_{32} \left[\frac{\tilde{a}_4^2}{\delta_{02}^2} + \frac{\gamma_0 \tilde{b}_4^2}{\delta_{04}^2} \right] \right) dx dy + \sum_{i=1}^n \int_{Q^+} u_{x_i y}^2 \left(1 - \frac{(1 + \tilde{b}_3^2) \delta_{03}^2}{2} \right. \\ \left. - \frac{(1 + \tilde{b}_4^2) \delta_{04}^2}{2} - \tilde{m}_{12} \left[\frac{\tilde{a}_4^2}{\delta_{02}^2} + \frac{\gamma_0 \tilde{b}_4^2}{\delta_{04}^2} \right] - \tilde{m}_{11} \left[\frac{\tilde{a}_3^2}{\delta_{01}^2} + \frac{\gamma_0 - \tilde{b}_3^2}{\delta_{01}} \right] \right) dx dy \\ \leq \delta \left[\int_{Q^-} u_{yy}^2 dx dy + \gamma_0 \int_{Q^+} u_{yy}^2 dx dy \right] + M.$$

Отсюда и из условий (16) следует, что

$$\int_{Q^-} u_{yy}^2 dx dy + \sum_{i=1}^n \int_{Q^-} u_{x_i y}^2 dx dy + \gamma_0 \int_{Q^+} u_{yy}^2 dx dy + \gamma_0 \sum_{i=1}^n \int_{Q^+} u_{x_i y}^2 dx dy \leq M_1.$$

Третья априорная оценка

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{Q^-} u_{x_i x_j}^2 dx dy + \gamma_0 \sum_{i,j=1}^n \int_{Q^+} u_{x_i x_j}^2 dx dy \leq M_2$$

очевидным образом вытекает из первых двух и второго основного неравенства для эллиптических операторов [7]. Из полученных трех оценок следует искомая оценка

$$\|u\|_V \leq R_0. \quad (22)$$

Оценка (22) означает, что задача I_λ разрешима в пространстве V для всех λ из отрезка $[0, 1]$, т. е. и для $\lambda = 1$. Но тогда и искомая задача I разрешима в пространстве V . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для решения $u(x, y)$ задачи I имеют место включения $u_{x_i y}(x, -0) \in L_2(\Omega)$, $u_{x_i y}(x, +0) \in L_2(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$. Это следует из выполнения условий сопряжения и того, что в условиях сопряжения каждое слагаемое в правой части имеет обобщенную производную по переменной x_i .

Для x из $\bar{\Omega}$ и переменных ξ и η определим квадратичную по (ξ, η) форму

$$\Phi_3(x, \xi, \eta) = -a_1(x) \xi^2 + [\gamma_1 b_1(x) - a_2(x)] \xi \eta + \gamma_1 b_2(x) \eta^2,$$

где γ_1 — положительное число, роль которого будет пояснена ниже.

Теорема 5 (теорема существования). Пусть выполняются условия (6)–(9), (14), (15), а также следующие условия:

$$a_1(x) \leq 0, \quad b_2(x) \geq 0, \quad a_1(x)b_2(x) - a_2(x)b_1(x) \leq 0, \quad x \in \overline{\Omega},$$

$$\exists \gamma_1 > 0 : \Phi_3(x, \xi, \eta) \geq \varphi_1(x)\xi^2 + \varphi_2(x)\eta^2, \quad \varphi_1(x) \geq 0, \quad \varphi_2(x) \geq 0, \quad x \in \overline{\Omega},$$

$$|a_{2x_i}(x)| \leq C\sqrt{\varphi_1(x)}, \quad |b_{1x_i}(x)| \leq C\sqrt{\varphi_2(x)}, \quad C = \text{const}, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad i = 1, \dots, n,$$

а также существуют положительные числа δ_{01} – δ_{04} такие, что верны неравенства

$$2 - (1 + \tilde{a}_3^2)\delta_{01}^2 - (1 + \tilde{a}_4^2)\delta_{02}^2 - \tilde{m}_{21}\left(\frac{\tilde{a}_3^2}{\delta_{01}^2} + \frac{\gamma_1\tilde{b}_3^2}{\delta_{03}^2}\right) - \tilde{m}_{32}\left(\frac{\tilde{a}_4^2}{\delta_{02}^2} + \frac{\gamma_1\tilde{b}_4^2}{\delta_{04}^2}\right) > 0,$$

$$2 - (1 + \tilde{b}_3^2)\delta_{03}^2 - (1 + \tilde{b}_4^2)\delta_{04}^2 - \tilde{m}_{12}\left(\frac{\tilde{a}_3^2}{\delta_{02}^2} + \frac{\gamma_1\tilde{b}_4^2}{\delta_{04}^2}\right) - \tilde{m}_{11}\left(\frac{\tilde{a}_3^2}{\delta_{01}^2} + \frac{\gamma_1\tilde{b}_3^2}{\delta_{01}^2}\right) > 0.$$

Тогда для любой функции $f(x, y)$ из пространства $L_2(Q)$ существует функция $u(x, y)$, принадлежащая пространству V и являющаяся решением задачи II.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вначале случай $a_j(x) \equiv 0$, $b_j(x) \equiv 0$, $j = 3, 4$. Пусть ε — положительное число. Обозначим

$$a_{1\varepsilon}(x) = a_1(x) - \varepsilon, \quad b_{2\varepsilon}(x) = b_2(x) + \varepsilon.$$

Рассмотрим задачу: найти функцию $u(x, y)$, являющуюся в цилиндрах Q^- и Q^+ решением уравнения (1) и такую, что выполняются условия (2), (3), а также условия

$$\begin{aligned} u(x, -0) &= a_{1\varepsilon}(x)u_y(x, -0) + a_2(x)u_y(x, +0), \quad x \in \Omega, \\ u(x, +0) &= b_1(x)u_y(x, -0) + b_{2\varepsilon}(x)u_y(x, +0), \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (23)$$

Поскольку функция $a_{1\varepsilon}(x)b_{2\varepsilon}(x) - a_2(x)b_1(x)$ строго отрицательна в $\overline{\Omega}$, от (22), (23) можно перейти к соотношениям

$$\begin{aligned} u_y(x, -0) &= \tilde{a}_{1\varepsilon}(x)u(x, -0) + \tilde{a}_{2\varepsilon}(x)u(x, +0), \quad x \in \Omega, \\ u_y(x, +0) &= \tilde{b}_{2\varepsilon}(x)u(x, -0) + \tilde{b}_{2\varepsilon}(x)u(x, +0), \quad x \in \Omega, \end{aligned} \quad (24)$$

т. е. к условиям задачи I. Согласно теореме 4 рассматриваемая задача имеет решение $u^\varepsilon(x, y)$, принадлежащее пространству V . Покажем, что для семейства $\{u^\varepsilon(x, y)\}$ имеют место оценки, которые позволяют перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. При получении оценок индекс ε у решения опустим.

Для решений задачи (1)–(3), (23) имеет место оценка (19) (что показывается дословным повторением доказательства той же оценки в теореме 4). Далее, преобразовав равенство (20) к виду (21), рассмотрим отдельно его третье и четвертое слагаемые. Используя условия сопряжения (23), получим

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i y}(x, -0) u_{x_i}(x, -0) dx + \gamma_1 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i y}(x, +0) u_{x_i}(x, +0) dx \\ & = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} [\gamma_1 b_2(x) u_{x_i, y}^2(x, +0) + [\gamma_1 b_1(x) - a_2(x)] u_{x_i, y}(x, -0) u_{x_i, y}(x, +0) \\ & \quad - a_1(x) u_{x_i, y}^2(x, -0)] dx + \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \Delta a_1(x) u_y^2(x, -0) - \frac{1}{2} \gamma_1 \Delta b_2(x) u_y^2(x, +0) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^n a_{2x_i}(x) u_y(x, +0) u_{x_i y}(x, -0) + \gamma_1 \sum_{i=1}^n b_{1x_i}(x) u_y(x, -0) u_{x_i y}(x, +0) \\
& + \varepsilon \sum_{i=1}^n (u_{x_i y}^2(x, -0) + \gamma_1 u_{x_i y}^2(x, +0)) \Big] dx.
\end{aligned}$$

В результате приходим к равенству

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} [b_2(x) \gamma_1 u_{x_i y}^2(x, +0) + [\gamma_1 b_1(x) - a_2(x)] u_{x_i y}(x, -0) u_{x_i y}(x, +0) \\
& - a_1(x) u_{x_i y}^2(x, -0)] dx + \frac{p_1}{2} \int_{Q^-} u_{yy}^2 dx dy + \frac{\gamma_1 p_2}{2} \int_{Q^+} u_{yy}^2 dx dy \\
& + \sum_{i=1}^n \int_{Q^-} u_{x_i y}^2 dx dy + \gamma_1 \sum_{i=1}^n \int_{Q^+} u_{x_i y}^2 dx dy + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} [u_{x_i y}^2(x, -0) + \gamma_1 u_{x_i y}^2(x, +0)] dx \\
& = \int_{\Omega} \left[-\frac{1}{2} \Delta_x a_1(x) u_y^2(x, -0) + \frac{1}{2} \Delta_x b_1(x) u_y^2(x, +0) \right] dx \\
& + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} [a_{2x_i} u_y(x, +0) u_{x_i y}(x, -0) + \gamma_1 b_{1x_i} u_y(x, +0) u_{x_i y}(x, -0)] dx \\
& + \int_{Q^-} c(x, y) u_{yy} u dx dy - \gamma_1 \int_{Q^+} c(x, y) u_{yy} u dx dy.
\end{aligned}$$

Применяя неравенство Юнга и используя условия теоремы и интегральные неравенства типа (13), получим оценку

$$\begin{aligned}
& \int_{Q^-} u_{yy}^2 dx dy + \sum_{i=1}^n \int_{Q^-} u_{x_i y}^2 dx dy + \int_{Q^+} u_{yy}^2 dx dy + \sum_{i=1}^n \int_{Q^+} u_{x_i y}^2 dx dy \\
& + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (u_{x_i y}^2(x, -0) + u_{x_i y}^2(x, +0)) dx \leq M_3. \quad (25)
\end{aligned}$$

Третья априорная оценка

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{Q^-} u_{x_i x_j}^2 dx dy + \sum_{i,j=1}^n \int_{Q^+} u_{x_i x_j}^2 dx dy \leq M_4 \quad (26)$$

очевидным образом вытекает из первых двух и второго основного неравенства для эллиптических операторов [7].

Из оценок (19), (25) и (26), свойств рефлексивности гильбертова пространства и теорем вложения (см. [7, 8]) следует, что существуют числовая последовательность $\{\varepsilon_m\}$, функциональная последовательность $\{u_m(x, y)\}$ ($u_m(x, y) = u^{\varepsilon_m}(x, y)$) функций из семейства $\{u^{\varepsilon}(x, y)\}$ и функция $u(x, y)$ такие, что при $m \rightarrow \infty$ имеют место сходимости $\varepsilon_m \rightarrow 0$, $u_m(x, y) \rightarrow u(x, y)$ слабо в пространствах $W_2^2(Q^-)$ и $W_2^2(Q^+)$,

$$u_m(x, -0) \rightarrow u(x, -0), \quad u_m(x, +0) \rightarrow u(x, +0), \quad u_{my}(x, -0) \rightarrow u_y(x, -0),$$

$$u_{my}(x, +0) \rightarrow u_y(x, +0), \quad \varepsilon_m u_{my}(x, -0) \rightarrow 0, \\ \varepsilon_m u_{my}(x, +0) \rightarrow 0 \text{ почти всюду в } \Omega.$$

Из этих сходимостей вытекает, что для предельной функции $u(x, y)$ в областях Q^- и Q^+ будут выполняться уравнение (1), условия (2), (3), а также требуемые условия сопряжения задачи II.

В случае ненулевых функций $a_3(x)$, $b_3(x)$, $a_4(x)$ и $b_4(x)$ доказательство проводится вполне аналогично вышеприведенному (лишь с более громоздкими выкладками). Теорема доказана.

Для $x \in \bar{\Omega}$ и переменных ξ , η определим квадратичную по (ξ, η) форму $\Phi_4(x, \xi, \eta)$:

$$\Phi_4(x, \xi, \eta) = -a_2(x)\xi^2 + [\gamma_2 b_2(x) - a_1(x)]\xi\eta + \gamma_2 b_1(x)\eta^2,$$

где γ_2 — положительное число, роль которого будет пояснена ниже.

Теорема 6 (теорема существования). Пусть выполняются условия (6)–(9), (14), (17), а также следующие условия:

$$a_2(x) \leq 0, \quad x \in \bar{\Omega},$$

$$\exists \gamma_2 > 0 : \Phi_4(x, \xi, \eta) \geq \psi_1(x)\xi^2 + \psi_2(x)\eta^2, \quad \psi_1(x) \geq 0, \quad \psi_2(x) \geq 0, \quad x \in \bar{\Omega},$$

$$|a_{1x_i}(x)| \leq C\sqrt{\psi_1(x)}, \quad |b_{1x_i}(x)| \leq C\sqrt{\psi_2(x)}, \quad C = \text{const}, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad i = 1, \dots, n,$$

существуют положительные числа δ_{01} – δ_{04} такие, что верны неравенства

$$2 - (1 + \tilde{a}_3^2)\delta_{01}^2 - (1 + \tilde{a}_4^2)\delta_{02}^2 - \tilde{m}_{21}\left(\frac{\tilde{a}_3^2}{\delta_{01}^2} + \frac{\gamma_2 \tilde{b}_3^2}{\delta_{03}^2}\right) - \tilde{m}_{32}\left(\frac{\tilde{a}_4^2}{\delta_{02}^2} + \frac{\gamma_2 \tilde{b}_4^2}{\delta_{04}^2}\right) > 0,$$

$$2 - (1 + \tilde{b}_3^2)\delta_{03}^2 - (1 + \tilde{b}_4^2)\delta_{04}^2 - \tilde{m}_{12}\left(\frac{\tilde{a}_4^2}{\delta_{02}^2} + \frac{\gamma_2 \tilde{b}_4^2}{\delta_{04}^2}\right) - \tilde{m}_{11}\left(\frac{\tilde{a}_3^2}{\delta_{01}^2} + \frac{\gamma_2 \tilde{b}_3^2}{\delta_{01}^2}\right) > 0.$$

Тогда для любой функции $f(x, y)$ из пространства $L_2(Q)$ существует функция $u(x, y)$, принадлежащая пространству V и являющаяся решением задачи III.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как при доказательстве теоремы 5, сначала изучим случай $a_j(x) \equiv 0$, $b_j(x) \equiv 0$, $j = 3, 4$. Обозначим

$$a_{2\varepsilon}(x) = a_2(x) - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Рассматривая задачу нахождения решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2), (3), а также условиям

$$u(x, -0) = a_1(x)u_y(x, +0) + a_{2\varepsilon}(x)u_y(x, -0), \quad x \in \Omega, \\ u_y(x, +0) = b_1(x)u_y(x, +0) + b_2(x)u_y(x, -0), \quad x \in \Omega, \quad (27)$$

переходим к соотношениям вида (24), выражающим условия задачи I. Данная задача имеет решение $u^\varepsilon(x, y)$, принадлежащее пространству V , и для функций $u^\varepsilon(x, y)$ имеет место первая априорная оценка (19).

Для получения следующих оценок рассмотрим соотношение (21). Используя условия сопряжения (27), получим

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} [\gamma_2 b_1(x) u_{x_i}^2(x, +0) + [\gamma_2 b_2(x) - a_1(x)] u_{x_i y}(x, -0) u_{x_i}(x, +0)]$$

$$\begin{aligned}
& -a_2(x)u_{x_i y}^2(x, -0)] dx + \frac{p_1}{2} \int_{Q^-} u_{yy}^2 dx dy + \frac{\gamma_2 p_2}{2} \int_{Q^+} u_{yy}^2 dx dy \\
& + \sum_{i=1}^n \int_{Q^-} u_{x_i y}^2 dx dy + \sum_{i=1}^n \int_{Q^+} u_{x_i y}^2 dx dy + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i y}^2(x, -0) dx \\
& = \int_{\Omega} \left[-\frac{1}{2} \Delta_x a_2(x) u_y^2(x, -0) + \frac{1}{2} \Delta_x b_1(x) u_y^2(x, +0) \right] dx \\
& + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} [a_{1x_i} u(x, +0) u_{x_i y}(x, -0) + \gamma_2 b_{2x_i} u_y(x, -0) u_{x_i y}(x, +0)] dx \\
& + \int_{Q^-} c(x, y) u_{yy} u dx dy - \gamma_2 \int_{Q^+} c(x, y) u_{yy} u dx dy.
\end{aligned}$$

Применяя неравенство Юнга и используя условия теоремы и интегральные неравенства типа (13), приходим к оценке

$$\begin{aligned}
& \int_{Q^-} u_{yy}^2 dx dy + \sum_{i=1}^n \int_{Q^-} u_{x_i y}^2 dx dy + \int_{Q^+} u_{yy}^2 dx dy + \sum_{i=1}^n \int_{Q^+} u_{x_i y}^2 dx dy \\
& + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i y}^2(x, -0) dx \leq M_5. \quad (28)
\end{aligned}$$

Третья априорная оценка

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{Q^-} u_{x_i x_j}^2 dx dy + \sum_{i,j=1}^n \int_{Q^+} u_{x_i x_j}^2 dx dy \leq M_6 \quad (29)$$

очевидным образом вытекает из первых двух и второго основного неравенства для эллиптических операторов [7].

Из оценок (19), (28), (29) следует, что вновь можно осуществить всю схему выбора сходящихся последовательностей $\{\varepsilon_m\}$ и $\{u_m(x, y)\}$ и что существует функция $u(x, y)$, которая является решением уравнения (1) и удовлетворяет условиям (2), (3) и условиям сопряжения задачи III. Теорема доказана.

Примерами операторов B_1 и B_2 , обладающих нужными свойствами, являются интегральные операторы, действия которых на функции $v(x, y)$ определяются равенствами

$$\begin{aligned}
(B_i v)(x) = & \int_{\Omega} K_{1i}(x, \xi) v(\xi, +0) d\xi + \int_{\Omega} K_{2i}(x, \xi) v(\xi, -0) d\xi \\
& + \int_{Q^-} N_{1i}(x, \xi, \eta) v(\xi, \eta) d\xi d\eta + \int_{Q^+} N_{2i}(x, \xi, \eta) v(\xi, \eta) d\xi d\eta
\end{aligned}$$

с заданными ядрами $K_{1i}(x, \xi)$, $K_{2i}(x, \xi)$, $N_{1i}(x, \xi, \eta)$, $N_{2i}(x, \xi, \eta)$, $i = 1, 2$.

Условия на эти ядра, достаточные для выполнения условий теорем 1–6, нетрудно найти с помощью неравенств Гёльдера.

ЗАМЕЧАНИЕ. Оператор Δ_x , участвующий в рассматриваемой задаче, можно заменить общим эллиптическим оператором порядка $2m$ ($m > 0$ целое), действующим по переменным $x_1, \dots, x_n$ (с соответствующим дополнением граничных условий на S).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ладыженская О. А. О решении общей задачи дифракции // Докл. АН СССР. 1954. Т. 96, № 3. С. 433–436.
2. Олейник О. А. Об одном методе решения общей задачи Стефана // Докл. АН СССР. 1960. Т. 135, № 5. С. 1054–1057.
3. Ильин В. А. О разрешимости задачи Дирихле и Неймана для линейного эллиптического оператора с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137, № 1. С. 28–30.
4. Никольский Д. Н. Эволюция раздела различных жидкостей в неоднородных слоях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2010. Т. 50, № 7. С. 1269.
5. Никольский Д. Н. Трехмерная эволюция границы загрязнения в ограниченной кусочно-однородной пористой среде // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2011. Т. 51, № 5. С. 913–919.
6. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
7. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
8. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

Статья поступила 5 марта 2014 г.

Шадрина Наталья Николаевна
Бурятский гос. университет,
ул. Смолина, 24а, Улан-Удэ 675000
shadrinann8@yandex.ru