

ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА. II

А. И. Кожанов, Е. Ф. Шарин

Аннотация. Данная работа является продолжением работы авторов [1] и посвящена исследованию разрешимости задач сопряжения (обобщенных задач дифракции) для неклассических дифференциальных уравнений составного типа высокого порядка. Для изучаемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение составного типа высокого порядка, задача сопряжения, регулярное решение, существование, единственность.

Введение

В [1] изучались задачи сопряжения (обобщенные задачи дифракции) для дифференциальных уравнений

$$(-1)^{p+1} D_t^{2p} u - h(x) u_{xx} + c(x, t) u = f(x, t) \quad (*)$$

($D_t^{2p} = \frac{\partial^{2p}}{\partial t^{2p}}$, $p \geq 1$) в случае строго положительной функции $h(x)$, непрерывной всюду за исключением, быть может, одной внутренней точки области определения. В настоящей работе будут изучаться аналогичные задачи для уравнения составного типа

$$(-1)^{p+1} D_t^{2p} (u - g(x) u_{xx}) - h(x) u_{xx} + c(x, t) u = f(x, t) \quad (**)$$

в случае строго положительной функции $g(x)$ и функции $h(x)$, уже не обязательно положительной. Уточним, что необходимые краевые условия для уравнений (**) будут аналогичны краевым условиям, предложенным для уравнений (*) в [2–4].

Задачи сопряжения, или обобщенные задачи дифракции, изучаются в математике и в математическом моделировании с давних времен — см., например, работы [5–17]. Заметим также следующее. Задачи с условиями сопряжения (склейки) естественным образом возникают в теории уравнений смешанного типа; их изучению посвящено очень много работ, из которых отметим статьи и монографии [18–33] (хотя на самом деле можно указать гораздо больше статей). Наконец, заметим, что для неклассических дифференциальных уравнений задачи сопряжения, помимо упомянутой выше статьи [1], изучались в работах [34–37].

В [1] вначале предлагалась задача сопряжения в общем виде, однако требования на коэффициенты были такими, что в действительности выделялись четыре специальных случая, и именно эти четыре случая и изучались. В настоящей работе сразу будут рассматриваться специальные случаи.

1. Постановка задач

Пусть Ω — интервал $(-1, 1)$ оси Ox , Q — прямоугольник $\Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$. Далее, пусть $g(x)$, $h(x)$, $c(x, t)$ и $f(x, t)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T]$, причем $g(x)$ строго положительна при $x \in \overline{\Omega}$, a_i , b_i , c_i , d_i , $i = \overline{1, 4}$ — заданные действительные числа. Обозначим $D_t^k = \frac{\partial^k}{\partial t^k}$. Пусть L — дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x, t)$ определяется равенством

$$Lv = (-1)^{p+1} D_t^{2p} (v - g(x)) v_{xx} - h(x) v_{xx} + c(x, t) v$$

(здесь $p \geq 1$ — натуральное число).

Обозначим $Q_1 = (-1, 0) \times (0, T)$, $Q_2 = (0, 1) \times (0, T)$, $Q_0 = Q_1 \cup Q_2$.

Задача сопряжения I. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся на множестве Q_0 решением уравнения

$$Lu = f(x, t) \quad (1)$$

и такую, что для нее выполняются краевые условия

$$D_t^k u(x, t)|_{t=0} = 0, \quad x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \quad k = 0, \dots, p, \quad (2)$$

$$D_t^k u(x, t)|_{t=T} = 0, \quad x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \quad k = 1, \dots, p-1 \quad (3)$$

(в случае $p = 1$ данные условия отсутствуют),

$$u(-1, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (4)$$

а также условия сопряжения

$$u(-0, t) = a_1 u_x(-0, t) + b_1 u_x(+0, t), \quad t \in (0, T), \quad (5)$$

$$u(+0, t) = c_1 u_x(-0, t) + d_1 u_x(+0, t), \quad t \in (0, T). \quad (6)$$

Задача сопряжения II. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся на множестве Q_0 решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются краевые условия (2)–(4), а также условия сопряжения

$$u(-0, t) = a_2 u(+0, t) + b_2 u_x(-0, t), \quad t \in (0, T), \quad (7)$$

$$u_x(+0, t) = c_2 u(+0, t) + d_2 u_x(-0, t), \quad t \in (0, T). \quad (8)$$

Задача сопряжения III. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся на множестве Q_0 решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются краевые условия (2)–(4), а также условия сопряжения

$$u(+0, t) = a_3 u(-0, t) + b_3 u_x(+0, t), \quad t \in (0, T), \quad (9)$$

$$u_x(-0, t) = c_3 u(-0, t) + d_3 u_x(+0, t), \quad t \in (0, T). \quad (10)$$

Задача сопряжения IV. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся на множестве Q_0 решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются краевые условия (2)–(4), а также условия сопряжения

$$u_x(-0, t) = a_4 u(-0, t) + b_4 u(+0, t), \quad t \in (0, T), \quad (11)$$

$$u_x(+0, t) = c_4 u(-0, t) + d_4 u(+0, t), \quad t \in (0, T). \quad (12)$$

Заметим, что задачи II и III соответствуют классическим задачам дифракции, в которых задаются условия сопряжения решения и градиента решения.

Определим пространство, в котором будут изучаться свойства единственности и существования решений задач сопряжения I–IV. Именно, положим

$$V_m = \{v(x, t) : v(x, t) \in W_{2,x,t}^{2,m}(Q_1), v(x, t) \in W_{2,x,t}^{2,m}(Q_2), \\ v_{xx}(x, t) \in W_{2,x,t}^{2,m}(Q_1), v_{xx}(x, t) \in W_{2,x,t}^{2,m}(Q_2)\}.$$

Нормируем пространство V_m :

$$\|v\|_{V_m} = (\|v\|_{W_{2,x,t}^{2,m}(Q_1)}^2 + \|v_{xx}\|_{W_{2,x,t}^{2,m}(Q_1)}^2 + \|v\|_{W_{2,x,t}^{2,m}(Q_2)}^2 + \|v_{xx}\|_{W_{2,x,t}^{2,m}(Q_2)}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что пространство V_m с такой нормой есть банахово пространство.

2. Единственность решений

Всюду ниже будем считать, что для функций $g(x)$ и $h(x)$ существуют конечные значения $g(-0)$, $g(+0)$, $h(-0)$ и $h(+0)$. Положим

$$h_1(x) = \begin{cases} h(x) & \text{при } x \in [-1, 0), \\ h(-0) & \text{при } x = 0, \end{cases} \quad h_2(x) = \begin{cases} h(x) & \text{при } x \in (0, 1), \\ h(+0) & \text{при } x = 0, \end{cases} \\ g_1(x) = \begin{cases} g(x) & \text{при } x \in [-1, 0), \\ g(-0) & \text{при } x = 0, \end{cases} \quad g_2(x) = \begin{cases} g(x) & \text{при } x \in (0, 1), \\ g(+0) & \text{при } x = 0, \end{cases} \\ \varphi_1(x) = \frac{h_1(x)}{g_1(x)}, \quad \varphi_2(x) = \frac{h_2(x)}{g_2(x)}.$$

Пусть функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ представлены в виде

$$\varphi_1(x) = \varphi_{10}(x) + \varphi_{11}(x), \quad \varphi_2(x) = \varphi_{20}(x) + \varphi_{21}(x).$$

Обозначим

$$\bar{g}_{11} = \max_{-1 \leq x \leq 0} g_1(x), \quad \bar{g}_{21} = \max_{0 \leq x \leq 1} g_2(x), \quad C_1 = \min_{Q_1} \frac{c(x, t)}{g_1(x)}, \quad C_2 = \min_{Q_2} \frac{c(x, t)}{g_2(x)}, \\ k_1 = \sup_{-1 \leq x \leq 0} |\varphi_{11}(x)|, \quad k_2 = \sup_{0 \leq x \leq 1} |\varphi_{21}(x)|, \\ m_1 = \sup_{-1 \leq x \leq 0} |\varphi_{11}'(x)|, \quad m_2 = \sup_{0 \leq x \leq 1} |\varphi_{21}'(x)|.$$

Для функций $v(x, t)$, принадлежащих пространству V_{2p} и таких, что для них выполняются условия (2), справедливы неравенства

$$\int_{Q_1} v^2 dx dt \leq M_0 \int_{Q_1} (D_t^p v)^2 dx dt, \quad \int_{Q_2} v^2 dx dt \leq M_0 \int_{Q_2} (D_t^p v)^2 dx dt, \quad (13)$$

$$\int_{Q_1} v_t^2 dxdt \leq M_1 \int_{Q_1} (D_t^p v)^2 dxdt + M_2 \int_{Q_1} v^2 dxdt, \quad (14)$$

$$\int_{Q_2} v_t^2 dxdt \leq N_1 \int_{Q_2} (D_t^p v)^2 dxdt + N_2 \int_{Q_2} v^2 dxdt, \quad (15)$$

в которых число M_0 определяется лишь числом T , числа M_1 и N_1 — либо произвольные положительные числа, и тогда числа M_2 и N_2 определяются числами M_1 и N_1 соответственно, а также числом T , либо же числа M_1 и N_1 суть величины, определяющиеся числом T , и тогда $M_2 = 0$, $N_2 = 0$.

Пусть λ_0 есть фиксированное число из промежутка $[T, +\infty)$. Положим

$$A_1 = 2p - 1 - k_1 M_- (\lambda_0 - T) k_1 M_0 T - m_1 M_0 T,$$

$$A_2 = \frac{2p - 1}{\bar{g}_{11}} - m_1 M_1 T, \quad A_3 = C_1 - \frac{m_1 M_2 T}{2},$$

$$B_1 = 2p - 1 - k_2 M_0 - (\lambda_0 - T) k_2 M_0 T - m_2 M_0 T,$$

$$B_2 = \frac{2p - 1}{\bar{g}_{21}} - m_2 N_1 T, \quad B_3 = C_2 - \frac{m_2 N_2 T}{2}.$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия

$$g_1(x) \in C^1([-1, 0]), \quad g_2(x) \in C^1([0, 1]), \quad 0 < \bar{g}_{01} \leq g_1(x) \leq \bar{g}_{11} \quad (16)$$

при $x \in [-1, 0]$, $0 < \bar{g}_{02} \leq g_2(x) \leq \bar{g}_{21}$ при $x \in [0, 1]$;

$$h_1(x) \in C^1([-1, 0]), \quad h_2(x) \in C^1([0, 1]); \quad (17)$$

$$\varphi_{10}(x) \geq 0 \quad \text{при } x \in [-1, 0], \quad \varphi_2(x) \geq 0 \quad \text{при } x \in [0, 1]; \quad (18)$$

$$c(x, t) \in C^1(\bar{Q}), \quad c(x, t) \geq 0, \quad c_t(x, t) \leq 0 \quad \text{при } (x, t) \in \bar{Q}; \quad (19)$$

$$a_1 \leq 0, \quad b_1 c_1 \leq 0, \quad d_1 \geq 0, \quad a_1 d_1 - b_1 c_1 \leq 0; \quad (20)$$

$$\varphi_1(0) \geq 0, \quad \varphi_2(0) \geq 0, \quad b_1[\varphi_1(0) - \varphi_2(0)] = 0; \quad \text{если } c_1 \neq 0,$$

$$\text{то квадратичная форма } -a_1 \varphi_1(0) \xi^2 - 2b_1 \varphi_2(0) \xi \eta - \frac{b_1 d_1 \varphi_2(0)}{c_1} \eta^2$$

неотрицательно определена при $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$; (21)

$$A_i \geq 0, \quad B_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 > 0, \quad B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 > 0. \quad (22)$$

Тогда задача сопряжения I не может иметь в пространстве V_{2p} более одного решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вначале выполняется $b_1 \neq 0$, $c_1 \neq 0$, и пусть $f(x, t)$ — тождественно нулевая в Q функция. Рассмотрим равенство

$$\int_{Q_1} \frac{\lambda_0 - t}{g(x)} Lu \cdot u_t dxdt + \gamma \int_{Q_2} \frac{\lambda_0 - t}{g(x)} Lu \cdot u_t dxdt = 0, \quad (23)$$

в котором γ — число $-\frac{b_1}{c_1}$, а λ_0 зафиксировано выше. Интегрируя по частям и используя условия (2)–(4), получим следствие из (23):

$$\frac{2p - 1}{2} \int_{Q_1} \frac{1}{g(x)} (D_t^p u)^2 dxdt + \frac{2p - 1}{2} \int_{Q_1} (D_t^p u_x)^2 dxdt$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\gamma(2p-1)}{2} \int_{Q_2} \frac{1}{g(x)} (D_t^p u)^2 dx dt + \frac{\gamma(2p-1)}{2} \int_{Q_2} (D_t^p u_x)^2 dx dt \\
& + \frac{1}{2} \int_{Q_1} \varphi_{10}(x) u_x^2 dx dt + \frac{\gamma}{2} \int_{Q_2} \varphi_{20}(x) u_x^2 dx dt \\
& + \int_{Q_1} \frac{c(x, t) - (\lambda_0 - t)c_t(x, t)}{g(x)} u^2 dx dt + \gamma \int_{Q_2} \frac{c(x, t) - (\lambda_0 - t)c_t(x, t)}{g(x)} u^2 dx dt \\
& + \frac{\lambda_0 - T}{2} \int_{-1}^0 \frac{1}{g(x)} [D_t^p u(x, T)]^2 dx + \frac{\lambda_0 - T}{2} \int_{-1}^0 [D_t^p u_x(x, T)]^2 dx \\
& + \frac{\gamma(\lambda_0 - T)}{2} \int_0^1 \frac{1}{g(x)} [D_t^p u(x, T)]^2 dx + \frac{\gamma(\lambda_0 - T)}{2} \int_0^1 [D_t^p u_x(x, T)]^2 dx \\
& + \frac{\lambda_0 - T}{2} \int_{-1}^0 \frac{c(x, t)}{g(x)} u^2(x, T) dx + \frac{\gamma(\lambda_0 - T)}{2} \int_0^1 \frac{c(x, t)}{g(x)} u^2(x, T) dx \\
& + \int_0^T \left\{ -\frac{a_1}{2} [D_t^p u_x(-0, t)]^2 + \gamma c_1 D_t^p u_x(+0, t) D_t^p u_x(-0, t) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\gamma d_1}{2} [D_t^p u_x(+0, t)]^2 \right\} dt - \frac{a_1(\lambda_0 - T)}{2} [D_t^p u_x(-0, T)]^2 \\
& + \gamma c_1(\lambda_0 - T) D_t^p u_x(+0, T) D_t^p u_x(-0, T) + \frac{\gamma d_1(\lambda_0 - T)}{2} [D_t^p u_x(+0, T)]^2 \\
& + (p-1) \int_0^T \left\{ -a_1 [D_t^p u_x(-0, t)]^2 + (\gamma c_1 - b_1) D_t^p u_x(+0, t) D_t^p u_x(-0, t) \right. \\
& \quad \left. + \gamma d_1 [D_t^p u_x(+0, t)]^2 \right\} dt + \frac{\lambda_0 - T}{2} \int_{-1}^0 \varphi_{10}(x) u_x^2(x, T) dx \\
& + \frac{\gamma(\lambda_0 - T)}{2} \int_0^1 \varphi_{20}(x) u_x^2(x, T) dx + \int_0^T \left\{ -\frac{a_1 \varphi_1(0)}{2} u_x^2(-0, t) \right. \\
& \quad \left. + \gamma c_1 \varphi_2(0) u_x(+0, t) u_x(-0, t) + \frac{\gamma d_1 \varphi_2(0)}{2} u_x^2(+0, t) \right\} dt \\
& - \frac{a_1 \varphi_1(0)}{2} u_x^2(-0, T) + \gamma c_1 \varphi_2(0) u_x(+0, T) u_x(-0, T) + \frac{\gamma d_1 \varphi_2(0)}{2} u_x^2(+0, T) \\
& = -\frac{1}{2} \int_{Q_1} \varphi_{11}(x) u_x^2 dx dt - \frac{\gamma}{2} \int_{Q_2} \varphi_{21}(x) u_x^2 dx dt - \int_{Q_1} (\lambda_0 - t) \varphi_1'(x) u_x u_t dx dt \\
& - \gamma \int_{Q_2} (\lambda_0 - t) \varphi_2'(x) u_x u_t dx dt - \frac{\lambda_0 - T}{2} \int_{-1}^0 \varphi_{11}(x) u_x^2(x, T) dx
\end{aligned}$$

$$- \frac{\gamma(\lambda_0 - T)}{2} \int_0^1 \varphi_{21}(x) u_x^2(x, T) dx. \quad (24)$$

Правая часть (24) с помощью неравенств (13)–(15), элементарных неравенств

$$\int_{-1}^0 u_x^2(x, T) dx \leq T \int_{Q_1} u_{xt}^2 dx dt, \quad \int_0^1 u_x^2(x, T) dx \leq T \int_{Q_2} u_{xt}^2 dx dt,$$

а также неравенства Юнга оценивается величиной

$$\begin{aligned} & \left[\frac{k_1 M_0}{2} + \frac{(\lambda_0 - T) k_1 M_0 T}{2} + \frac{m_1 M_0 T}{2} \right] \int_{Q_1} [D_t^p u_x]^2 dx dt \\ & + \frac{m_1 M_1 T}{2} \int_{Q_1} [D_t^p u]^2 dx dt + \frac{m_1 M_2 T}{2} \int_{Q_1} u^2 dx dt \\ & + \gamma \left[\frac{k_2 M_0}{2} + \frac{(\lambda_0 - T) k_2 M_0 T}{2} + \frac{m_2 M_0 T}{2} \right] \int_{Q_2} [D_t^p u_x]^2 dx dt \\ & + \frac{\gamma m_2 N_1 T}{2} \int_{Q_2} [D_t^p u]^2 dx dt + \frac{\gamma m_2 N_2 T}{2} \int_{Q_2} u^2 dx dt. \end{aligned}$$

Учитывая эту оценку, используя условия (16)–(21), получим, что следствием (23) будет неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{A_1}{2} \int_{Q_1} [D_t^p u_x]^2 dx dt + \frac{A_2}{2} \int_{Q_1} [D_t^p u]^2 dx dt + A_3 \int_{Q_1} u^2 dx dt \\ & + \frac{\gamma B_1}{2} \int_{Q_2} [D_t^p u_x]^2 dx dt + \frac{\gamma B_2}{2} \int_{Q_2} [D_t^p u]^2 dx dt + \gamma B_3 \int_{Q_2} u^2 dx dt \leq 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Согласно (22) из этого неравенства следует, что $u(x, t) \equiv 0$ в Q_1 , $u(x, t) \equiv 0$ в Q_2 .

Пусть теперь выполняется $b_1 = 0$. Тогда задача I в прямоугольнике Q_1 представляет собой самостоятельную задачу; анализируя для решения $u(x, t)$ этой задачи равенство

$$\int_{Q_1} \frac{\lambda_0 - t}{g(x)} Lu \cdot u_t dx dt = 0 \quad (26)$$

и используя условия теоремы, получим $u(x, t) \equiv 0$ в Q_1 . Условие (6) теперь порождает самостоятельную задачу в прямоугольнике Q_2 ; анализируя равенство

$$\int_{Q_2} \frac{\lambda_0 - t}{g(x)} Lu \cdot u_t dx dt = 0 \quad (27)$$

и используя условия теоремы, получим $u(x, t) \equiv 0$ в Q_2 .

В случае $c_1 = 0$ рассуждения аналогичны.

Теорема полностью доказана.

Теорема 2. Пусть выполняются условия (16)–(19), (22) теоремы 1, а также условия

$$b_2 \leq 0, \quad c_2 \geq 0, \quad a_2 d_2 \geq 0; \quad (28)$$

$$\varphi_1(0) \geq 0, \quad \varphi_2(0) \geq 0, \quad a_2[\varphi_1(0) - \varphi_2(0)] = 0. \quad (29)$$

Тогда задача сопряжения II не может иметь в пространстве V_{2p} более одного решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2 проводится вполне аналогично доказательству теоремы 1 — именно с помощью анализа равенства (23), в котором γ есть число $\frac{a_2}{d_2}$ в случае $a_2 \neq 0, d_2 \neq 0$, или же с помощью анализа равенств (26) или (27) в случае $a_2 = 0$ или $d_2 = 0$.

Теорема 3. Пусть выполняются условия (16)–(19), (22) теоремы 1, а также условия

$$b_3 \geq 0, \quad c_3 \leq 0, \quad a_3 d_3 \geq 0; \quad (30)$$

$$\varphi_1(0) \geq 0, \quad \varphi_2(0) \geq 0, \quad d_3[\varphi_1(0) - \varphi_2(0)] = 0. \quad (31)$$

Тогда задача сопряжения III не может иметь в пространстве V_{2p} более одного решения.

При доказательстве этой теоремы используется равенство (23), в котором γ есть число $\frac{a_3}{d_3}$.

Теорема 4. Пусть выполняются условия (16)–(19), (22) теоремы 1, а также условия

$$a_4 \leq 0, \quad b_4 c_4 \leq 0, \quad d_4 \geq 0, \quad b_4 c_4 \leq a_4 d_4; \quad (32)$$

$$\varphi_1(0) \geq 0, \quad \varphi_2(0) \geq 0, \quad b_4[\varphi_1(0) - \varphi_2(0)] = 0. \quad (33)$$

Тогда задача сопряжения IV не может иметь в пространстве V_{2p} более одного решения.

Для доказательства теорем 3 и 4 вновь используется равенство (23) с числами $\gamma = \frac{a_3}{d_3}$ и $-\frac{b_4}{c_4}$ соответственно, либо же по отдельности равенства (26) или (27).

ЗАМЕЧАНИЕ. Условия (28), (30) и (32) можно ослабить, если потребовать выполнения неравенств

$$\varphi_1(x) \geq m_{01} > 0 \quad \text{при } x \in [-1, 0], \quad \varphi_2(x) \geq m_{02} > 0 \quad \text{при } x \in [0, 1]$$

(именно такая ситуация рассматривается в [1]).

3. Существование решений

Для доказательства разрешимости задач сопряжения I–IV, как и в [1], будем использовать метод продолжения по параметру.

Следуя [1], рассмотрим вначале задачу сопряжения II.

Теорема 5. Пусть выполняются условия (16)–(19), (22), (28) и (29). Тогда для любой функции $f(x, t)$ из пространств $L_2(Q)$ задача сопряжения II разрешима в пространстве V_{2p} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть μ — число из отрезка $[0, 1]$. Рассмотрим семейство задач: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся на множестве Q решением уравнения

$$L_\mu u \equiv (-1)^{p+1} D_t^{2p}(u - g(x)u_{xx}) - \mu[h(x)u_{xx} + c(x, t)u] = f \quad (1_\mu)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2)–(4), а также условия

$$u(-0, t) = \mu[a_2 u(+0, t) + b_2 u_x(-0, t)], \quad t \in (0, T), \quad (7_\mu)$$

$$u_x(+0, t) = \mu[c_2 u(+0, t) + d_2 u_x(-0, t)], \quad t \in (0, T). \quad (8_\mu)$$

Заметим, что при $\mu = 0$ данная задача разрешима в пространстве V_{2p} — это следует из того, что задача (1_0) , (2)–(4), (7_0) , (8_0) распадается на две независимые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной t и по переменной x , разрешимость каждой из которых очевидна. Согласно теореме о методе продолжения по параметру [38], задача (1_μ) , (2)–(4), (7_μ) , (8_μ) будет разрешима в пространстве V_{2p} при всех μ из отрезка $[0, 1]$, если для всевозможных решений $u(x, t)$ этой задачи имеет место равномерная по μ априорная оценка

$$\|u\|_{V_{2p}} \leq R_0 \quad (34)$$

с постоянной R_0 , определяющейся лишь коэффициентами оператора L , числом T , а также нормой функции $f(x, t)$ в пространстве $L_2(Q)$.

Покажем наличие искомой оценки.

Пусть выполняется $a_2 \neq 0$, $d_2 \neq 0$. Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} \int_{Q_1} \frac{\lambda_0 - t}{g(x)} Lu \cdot u_t \, dxdt + \gamma \int_{Q_2} \frac{\lambda_0 - t}{g(x)} Lu \cdot u_t \, dxdt \\ = \int_{Q_1} \frac{\lambda_0 - t}{g(x)} f \cdot u_t \, dxdt + \gamma \int_{Q_2} \frac{\lambda_0 - t}{g(x)} f \cdot u_t \, dxdt \end{aligned}$$

(λ_0 и γ определены при доказательстве теоремы 2).

Повторяя выкладки, которые были проделаны при анализе равенства (23), используя условия (2)–(4), (7_μ) , (8_μ) , условия теоремы и применяя неравенство Юнга, нетрудно получить первую априорную оценку для решений $u(x, t)$ задачи (1_μ) , (2)–(4), (7_μ) , (8_μ) :

$$\int_{Q_1} (D_t^p u_x)^2 \, dxdt + \int_{Q_2} (D_t^p u_x)^2 \, dxdt \leq R_1; \quad (35)$$

постоянная R_1 в этой оценке определяется лишь коэффициентами оператора L , числом T , а также нормой функции $f(x, t)$ в пространстве $L_2(Q)$. На следующем шаге рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} \int_{Q_1} \frac{\lambda_0 - t}{g(x)} Lu \cdot u_{xxt} \, dxdt + \gamma \int_{Q_2} \frac{\lambda_0 - t}{g(x)} Lu \cdot u_{xxt} \, dxdt \\ = \int_{Q_1} \frac{\lambda_0 - t}{g(x)} f \cdot u_{xxt} \, dxdt + \gamma \int_{Q_2} \frac{\lambda_0 - t}{g(x)} f \cdot u_{xxt} \, dxdt. \end{aligned}$$

Вновь интегрируя по частям, используя условия (2)–(4), (7_μ) , (8_μ) , условия теоремы и применяя неравенство Юнга, получаем, что для решений $u(x, t)$ задачи (1_μ) , (2)–(4), (7_μ) , (8_μ) будет выполняться оценка

$$\int_{Q_1} (D_t^p u_{xx})^2 \, dxdt + \int_{Q_2} (D_t^p u_{xx})^2 \, dxdt \leq R_2 \quad (36)$$

с постоянной R_2 , определяющейся лишь коэффициентами оператора L , числом T и нормой функции $f(x, t)$ в пространстве $L_2(Q)$.

Анализируя теперь равенство

$$\begin{aligned} \int_{Q_1} Lu \cdot D_t^{2p} u_{xx} dxdt + \gamma \int_{Q_2} Lu \cdot D_t^{2p} u_{xx} dxdt \\ = \int_{Q_1} f \cdot D_t^{2p} u_{xx} dxdt + \gamma \int_{Q_2} f \cdot D_t^{2p} u_{xx} dxdt, \end{aligned}$$

используя условия теоремы, оценки (35) и (36), применяя неравенство Юнга, получим, что имеет место оценка

$$\int_{Q_1} (D_t^{2p} u_{xx})^2 dxdt + \int_{Q_2} (D_t^{2p} u_{xx})^2 dxdt \leq R_3 \quad (37)$$

с постоянной R_3 , вновь определяющейся коэффициентами оператора L , числом T и нормой функции $f(x, t)$ в пространстве $L_2(Q)$.

Из оценок (35)–(37) следует, что имеет место искомая оценка (34). Как уже говорилось выше, справедливость этой оценки означает разрешимость задачи (1_μ) , (2) – (4) , (7_μ) , (8_μ) при всех μ из отрезка $[0, 1]$ — в частности, и при $\mu = 1$.

Итак, в случае $a_2 \neq 0$, $d_2 \neq 0$ требуемое утверждение доказано. Если же $a_2 = 0$ или $d_2 = 0$, то в одном из прямоугольников Q_1 или Q_2 (или же и в Q_1 , и в Q_2) задача сопряжения II становится обычной начально-краевой задачей, разрешимость которой вновь вытекает из априорной оценки (34) и теоремы о методе продолжения по параметру (сама по себе оценка выводится вполне аналогично выводу оценки (34), но вначале в соответствующем прямоугольнике Q_1 или Q_2 , затем в другом).

Из проведенных рассуждений следует, что в случае $a_2 = 0$ или $d_2 = 0$ задача сопряжения II также будет разрешима в пространстве V_{2p} .

Теорема полностью доказана.

Теорема 6. Пусть выполняются условия (16)–(19), (21), (30) и (31). Тогда для любой функции $f(x, t)$ из пространств $L_2(Q)$ задача сопряжения III разрешима в пространстве V_{2p} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ проводится вполне аналогично доказательству теоремы 5 — именно, с помощью теоремы о методе продолжения по параметру и априорных оценок.

Теорема 7. Пусть выполняются условия (16)–(22). Тогда для любой функции $f(x, t)$ из пространства $L_2(Q)$ задача сопряжения I разрешима в пространстве V_{2p} .

Теорема 8. Пусть выполняются условия (16)–(19), (22), (32) и (33). Тогда для любой функции $f(x, t)$ из пространств $L_2(Q)$ задача сопряжения IV разрешима в пространстве V_{2p} .

Доказательство теорем 7 и 8 проводится вполне аналогично доказательству соответствующих теорем в [1] — именно, с помощью теорем 5 и 6 о разрешимости задач сопряжения II и III.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кожанов А. И., Шарин Е. Ф. Задача сопряжения для некоторых неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка // Укр. мат. вісник. 2014. Т. 11, № 2. С. 181–202.
2. Врагов В. Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 6. С. 1098–1105.
3. Врагов В. Н. О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанно-составного типа // Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск, 1978. С 5–13.
4. Егоров И. Е., Федоров В. Е. Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Вычислительный центр СО АН СССР, 1995.
5. Ладыженская О. А. О решении общей задачи дифракции // Докл. АН СССР. 1954. Т. 96, № 3. С. 433–436.
6. Олейник О. А. Краевые задачи для линейных уравнений эллиптического и параболического типов с разрывными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1961. Т. 25, № ????. С. 3–20..
7. Ильин В. А. О разрешимости задач Дирихле и Неймана для линейного эллиптического оператора с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. 161. Т. 137, № 1. С. 28–30.
8. Ильин В. А. Метод Фурье для гиперболического уравнения с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1962. Т. 142, № 1. С. 21–24.
9. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
10. Ильин В. А., Луференко П. В. Смешанные задачи, описывающие продольные колебания стержня, состоящего из двух участков, имеющих разные плотности, разные упругости, но одинаковые импедансы // Докл. АН. 2009. Т. 428, № 1. С. 12–15.
11. Ильин В. А., Луференко П. В. Обобщенные решения смешанных задач для разрывного волнового уравнения при условии равенства импедансов // Докл. АН. 2009. Т. 429, № 3. С. 317–321.
12. Андропова О. А. Спектральные задачи сопряжения с поверхностной диссипацией энергии // Тр. ИПММ НАН Украины. 2009. Т. 19. С. 10–22.
13. Никольский Д. Н. Трехмерная эволюция границы загрязнения в ограниченной кусочно-однородной пористой среде // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2011. Т. 51, № 5. С. 913–919.
14. Рогожников А. М. Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков, при условии совпадения времени прохождения волн по каждому из этих участков // Докл. АН. 2012. Т. 441, № 4. С. 449–451.
15. Кулешов А. А. Смешанные задачи для уравнения продольных колебаний неоднородного стержня со свободным либо закрепленным правым концом, состоящего из двух участков разной плотности и упругости // Докл. АН. 2012. Т. 442, № 4. С. 451–454.
16. Рогожников А. М. Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков с произвольными длинами // Докл. АН. 2012. Т. 444, № 5. С. 488–491.
17. Смирнов И. Н. О колебаниях, описываемых телеграфным уравнением в случае системы, состоящей из нескольких участков разной плотности и упругости // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 49, № 5. С. 643–648.
18. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Из-во АН СССР, 1959.
19. Ладыженская О. А., Ступялис Л. Об уравнениях смешанного типа // Вестник ЛГУ. 1967. № 18. С. 38–46.
20. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа.. М.: Наука, 1970.
21. Ладыженская О. А., Ступялис Л. Краевые задачи для уравнений смешанного типа // Тр. МИАН СССР. 1971. Т. 116. С. 101–136.
22. Ступялис Л. Краевые задачи для эллиптико-гиперболических уравнений // Тр. МИАН СССР. 1973. Т. 125. С. 211–229.
23. Терсенов С. А. Введение в теорию уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Ин-т математики, 1982.
24. Джураев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1986.
25. Моисеев Е. И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.

26. Солдатов А. П. Задача типа Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. I. Теоремы единственности // Докл. РАН. 1993. Т. 332, № 6. С. 696–698; II. Теоремы существования. Докл. РАН. 1993. Т. 333, № 1. С. 16–18.
27. Хачев М. М. Первая краевая задача для линейного уравнения смешанного типа. Нальчик: Эльбрус, 1988.
28. Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В. Неклассические операторно-дифференциальные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.
29. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.
30. Сабитов К. Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // Докл. АН. 2007. Т. 413, № 1. С. 23–26.
31. Маричев О. И., Килбас А. А., Репин О. А. Краевые задачи для уравнений с частными производными с разрывными коэффициентами. Самара: Самарск. гос. экономический ун-т, 2008.
32. Моисеев Е. И., Лихоманенко Т. Н. Об одной нелокальной задаче для уравнения Лаврентьева — Бицадзе // Докл. АН. 2012. Т. 446, № 3. С. 256–258.
33. Сабитов К. Б. Краевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка в прямоугольной области // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 2. С. 488–496.
34. Кожанов А. И. Задача сопряжения для одного класса уравнений составного типа переменного направления // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2002. С. 96–109.
35. Шубин В. В. Краевые задачи для уравнений третьего порядка с разрывным коэффициентом // Вестник НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2012. Т. 12, № 1. С. 126–138.
36. Potapova S. V. Boundary value problems for pseudohyperbolic equations with a variable time direction. TWMS // J. Pure Appl. Math. 2012. V. 3, N 1. P. 73–91.
37. Кожанов А. И., Потапова С. В. Задача Дирихле для одного класса уравнений составного типа с разрывным коэффициентом при старшей производной // Дальневост. мат. журн. 2014. Т. 14, № 1. С. 48–65.
38. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

Статья поступила 20 апреля 2014 г.

Кожанов Александр Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
пр. Академика Коптюга, 4;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
kozhanov@math.nsc.ru

Шарин Евгений Федорович
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
eugene_sharin@mail.ru