

УДК 517.956

О РАЗРЕШИМОСТИ
ПРОСТРАНСТВЕННО-НЕЛОКАЛЬНЫХ
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ
АНАЛОГОВ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА
А. А. Алсыкова

Аннотация. Для аналога уравнения Буссинеска рассматриваются пространственно-нелокальные краевые задачи с условиями Самарского. Для исследуемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений.

Ключевые слова: нелокальная краевая задача, уравнение Буссинеска, существование и единственность регулярных решений.

Пусть Ω — интервал $(0,1)$ оси Ox , Q — прямоугольник $\Omega \times (0, T)$ конечной высоты T , $f(x, t)$, $a(x, t)$, $b(x, t)$, $c(x, t)$, $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ ($i = 1, 2$) — заданные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T]$ функции.

Краевая задача I. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$Lu(x, t) \equiv u_{tt}(x, t) - u_{xxt}(x, t) + a(x, t)u_{xx}(x, t) + b(x, t)u_x(x, t) + c(x, t)u(x, t) = f(x, t) \quad (1)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$\begin{cases} u_x(0, t) = \alpha_1(t)u(0, t) + \alpha_2(t)u(1, t), & 0 < t < 1, \\ u_x(1, t) = \beta_1(t)u(0, t) + \beta_2(t)u(1, t), & 0 < t < 1, \end{cases} \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \quad \text{при } x \in \Omega. \quad (3)$$

Краевая задача II. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняется условие (3), а также условие

$$\begin{cases} u(0, t) = \alpha_1(t)u_x(0, t) + \alpha_2(t)u(1, t), & 0 < t < 1, \\ u_x(1, t) = \beta_1(t)u_x(0, t) + \beta_2(t)u(1, t), & 0 < t < 1. \end{cases} \quad (4)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта БГУ, 2012.

Краевая задача III. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняется условие (3), а также условие

$$\begin{cases} u(0, t) = \alpha_1(t)u_x(0, t) + \alpha_2(t)u_x(1, t), & 0 < t < 1, \\ u(1, t) = \beta_1(t)u_x(0, t) + \beta_2(t)u_x(1, t), & 0 < t < 1. \end{cases} \quad (5)$$

Уравнение (1) представляет собой аналог уравнения Буссинеска, возникающего в теории длинных волн при описании волн в плазме и при описании продольных колебаний в стержне (см., например, [1]). Разрешимость тех или иных краевых и начально-краевых задач для уравнений вида (1) достаточно хорошо изучена (см. [1–5]), в то время как о нелокальных задачах этого не скажешь, можно отметить лишь работу [6], в которой изучались задачи с интегральными условиями весьма специфического вида, и статью [7], в которой рассмотрены задачи с интегральными по пространственным переменным условиями (уточним, что как в [6], так и в [7] доказано существование обобщенных условий).

1. Разрешимость краевой задачи I

Пусть V — следующее пространство функций:

$$V = \{v(x, t) : v(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega)), \ v_t(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega)), \\ v_{tt}(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega))\},$$

норму в этом пространстве определим естественным образом:

$$\|v\|_V = \|v\|_{L_2(0, T; W_2^2(\Omega))} + \|v_t\|_{L_2(0, T; W_2^2(\Omega))} + \|v_{tt}\|_{L_2(0, T; W_2^2(\Omega))}.$$

Введем обозначение

$$F(x, t) = f(x, t) - a(x, t)u_{xx}(x, t) - b(x, t)u_x(x, t) - c(x, t)u(x, t).$$

При доказательстве разрешимости краевых задач будем использовать неравенство

$$v^2(y, \tau) \leq \delta_0^2 \int_0^1 v_x^2(x, \tau) dx + \left(1 + \frac{1}{\delta_0^2}\right) \int_0^1 v^2(x, \tau) dx, \quad (6)$$

справедливое для любого произвольного положительного числа δ_0 и любой точки y из отрезка $[0, 1]$.

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия:

$$a(x, t) \in L_\infty(Q), \quad b(x, t) \in L_\infty(Q), \quad c(x, t) \in L_\infty(Q), \quad (7)$$

$$\alpha_i(t) \in C^2([0, T]), \quad \beta_i(t) \in C^2([0, T]), \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

$$\alpha_1(t)\xi^2 + [\alpha_2(t) - \beta_1(t)]\xi\eta - \beta_2(t)\eta^2 \geq 0, \quad t \in [0, T], \quad (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2, \quad (9)$$

$$\lambda_0[\alpha_2(t) + \beta_2(t)] \neq 2. \quad (10)$$

Тогда для любой функции $f(x, t) \in L_2(Q)$ краевая задача I разрешима в пространстве V , притом единственным образом.

Доказательство. Покажем, что для решения краевой задачи I из пространства V имеют место «хорошие» априорные оценки (в дальнейшем эти

оценки позволят применить метод продолжения по параметру). Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^1 [u_{\tau\tau}(x, \tau) - u_{xx\tau\tau}(x, \tau) + a(x, \tau)u_{xx}(x, \tau) + b(x, \tau)u_x(x, \tau) \\ + c(x, \tau)u(x, \tau)]u_{\tau\tau}(x, \tau) dx d\tau = \int_0^t \int_0^1 f(x, \tau)u_{\tau\tau}(x, \tau) dx d\tau. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, с учетом граничных условий нетрудно перейти от данного равенства к следующему:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^1 u_{\tau\tau}^2(x, \tau) dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 u_{x\tau\tau}^2(x, \tau) dx d\tau \\ + \int_0^t [\alpha_1(\tau)u_{\tau\tau}^2(0, \tau) + (\alpha_2(\tau) - \beta_1(\tau))u_{\tau\tau}(1, \tau)u_{\tau\tau}(0, \tau) - \beta_2(\tau)u_{\tau\tau}^2(1, \tau)] d\tau \\ = \int_0^t [-\alpha_{1\tau\tau}(\tau)u(0, \tau)u_{\tau\tau}(0, \tau) - 2\alpha_{1\tau}(\tau)u_\tau(0, \tau)u_{\tau\tau}(0, \tau) - \alpha_{2\tau\tau}(\tau)u(1, \tau)u_{\tau\tau}(0, \tau) \\ - 2\alpha_{2\tau}(\tau)u_\tau(1, \tau)u_{\tau\tau}(0, \tau) + \beta_{1\tau\tau}(\tau)u(0, \tau)u_{\tau\tau}(1, \tau) + 2\beta_{1\tau}(\tau)u_\tau(0, \tau)u_{\tau\tau}(1, \tau) \\ + \beta_{2\tau\tau}(\tau)u(1, \tau)u_{\tau\tau}(1, \tau) + 2\beta_{2\tau}(\tau)u_\tau(1, \tau)u_{\tau\tau}(1, \tau)] d\tau + \int_0^t \int_0^1 F(x, \tau)u_{\tau\tau}(x, \tau) dx d\tau, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$F(x, \tau) = f(x, \tau) - a(x, \tau)u_{xx}(x, \tau) - b(x, \tau)u_x(x, \tau) - c(x, \tau)u(x, \tau).$$

Оценим правую часть (11). Для первого слагаемого, используя неравенство Юнга, неравенство (6) и условия (7), (8), получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \alpha_{1\tau\tau}(\tau)u(0, \tau)u_{\tau\tau}(0, \tau) d\tau \right| \leq \delta^2 \int_0^t \int_0^1 [u_{x\tau\tau}^2(x, \tau) + u_{\tau\tau}^2(x, \tau)] dx d\tau \\ + \frac{A}{\delta^2} \int_0^t \int_0^1 [u_x^2(x, \tau) + u^2(x, \tau)] dx d\tau. \end{aligned}$$

Здесь δ — произвольное положительное число, A определяется функцией α_1 . С помощью очевидного неравенства

$$\int_0^t \int_0^1 u^2 dx d\tau \leq T^2 \int_0^t \int_0^\tau \int_0^1 u_{\xi\xi}^2 dx d\xi d\tau$$

имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \alpha_{1\tau\tau}(\tau)u(0, \tau)u_{\tau\tau}(0, \tau) d\tau \right| \leq \delta^2 \int_0^t \int_0^1 [u_{x\tau\tau}^2(x, \tau) + u_{\tau\tau}^2(x, \tau)] dx d\tau \\ + \frac{AT^2}{\delta^2} \int_0^t \int_0^1 [u_{x\xi\xi}^2(x, \xi) + u_{\xi\xi}^2(x, \xi)] dx d\xi. \end{aligned}$$

Оценив аналогично остальные слагаемые и проинтегрировав последнее слагаемое по частям, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^1 u_{\tau\tau}^2(x, \xi) dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 u_{x\tau\tau}^2(x, \xi) dx d\tau \\ \leq M_1 \int_0^t \int_0^\tau \int_0^1 [u_{\xi\xi}^2(x, \xi) + u_{x\xi\xi}^2(x, \xi)] dx d\xi d\tau + M_2, \end{aligned}$$

где M_1 и M_2 определяются функциями $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $i = 0, 1$, $a(x, t)$, $b(x, t)$ и $c(x, t)$.

Из леммы Гронуолла вытекает оценка

$$\int_0^t \int_0^1 u_{\tau\tau}^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 u_{x\tau\tau}^2 dx d\tau \leq M_3.$$

Для получения второй оценки умножим уравнение (1), записанное в переменных x и τ , на $-u_{xx\tau\tau}$ и проинтегрируем по переменной x от 0 до 1 и по переменной τ от 0 до t :

$$\int_0^t \int_0^1 u_{xx\tau\tau}^2 dx d\tau = \int_0^t \int_0^1 u_{\tau\tau} u_{xx\tau\tau} dx d\tau - \int_0^t \int_0^1 F u_{xx\tau\tau} dx d\tau,$$

где

$$F(x, \tau) = f(x, \tau) - a(x, \tau)u_{xx}(x, \tau) - b(x, \tau)u_x(x, \tau) - c(x, \tau)u(x, \tau).$$

Используя неравенства Юнга и Гёльдера, а также первую оценку, приходим к следующему неравенству:

$$\int_0^t \int_0^1 u_{xx\tau\tau}^2 dx d\tau \leq M_4 \int_0^t \int_0^\tau \int_0^1 u_{xx\xi\xi}^2 dx d\xi d\tau + M_5.$$

Здесь постоянные M_4 и M_5 определяются функциями $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $i = 0, 1$, $a(x, t)$, $b(x, t)$, $c(x, t)$ и числом T .

Из этого неравенства лемма Гронуолла позволяет вывести вторую априорную оценку:

$$\int_0^t \int_0^1 u_{xx\tau\tau}^2 dx d\tau \leq M_5 e^{M_4} \leq M_6.$$

На основании полученных оценок можно сделать вывод, что норма функции $u(x, t)$ в пространстве V ограничена постоянной:

$$\|u\|_V \leq M_7, \quad (12)$$

где M_7 определяется функциями $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $i = 0, 1$, $a(x, t)$, $b(x, t)$, $c(x, t)$ и числом T .

При доказательстве разрешимости краевой задачи будем использовать метод продолжения по параметру. Пусть λ — число из отрезка $[0, 1]$. Рассмотрим

семейство краевых задач: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняется условие (3), а также условие

$$\begin{cases} u_x(0, t) = \lambda[\alpha_1(t)u(0, t) + \alpha_2(t)u(1, t)], & 0 < t < 1, \\ u_x(1, t) = \lambda[\beta_1(t)u(0, t) + \beta_2(t)u(1, t)], & 0 < t < 1. \end{cases} \quad (2_\lambda)$$

Обозначим через Λ множество тех чисел λ из отрезка $[0, 1]$, для которых задача (1), (2_λ) , (3) разрешима в пространстве V для любой функции $f(x, t)$ из пространства $L_2(Q)$. Известно, что если множество λ непусто, открыто и замкнуто, то оно совпадает со всем отрезком $[0, 1]$ (см. [8]). Совпадение множества Λ с отрезком $[0, 1]$ означает, что краевая задача (1)–(3) имеет решение из пространства V .

Непустота множества Λ очевидна, так как число 0 принадлежит ему. Для доказательства открытости множества Λ достаточно показать, что если $\lambda_0 \in \Lambda$, то при малой величине $|\tilde{\lambda}|$ число $\lambda = \lambda_0 + \tilde{\lambda}$ также принадлежит Λ .

Пусть $v(x, t)$ — произвольно заданная функция из пространства V . Положим

$$\varphi(t) = \tilde{\lambda}[\alpha_1(t)v(0, t) + \alpha_2(t)v(1, t)],$$

$$\psi(t) = \tilde{\lambda}[\beta_1(t)v(0, t) + \beta_2(t)v(1, t)],$$

$$u_0(x, t) = \frac{[(1 - \lambda_0\beta_2(t))x^2 - (2 - \lambda_0\beta_2(t))x]\varphi(t) - [(1 - \lambda_0\alpha_2(t))x^2 + \lambda_0\alpha_2(t)x]\psi(t)}{\lambda_0[\alpha_2(t) + \beta_2(t)] - 2}.$$

Пусть

$$g_v(x, t) = f(x, t) - Lu_0(x, t).$$

Рассмотрим вспомогательную задачу: найти функцию $w(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$Lw(x, t) = g_v(x, t) \quad (1')$$

и такую, что для нее выполняются условия (2_{λ_0}) , (3).

Поскольку $v(x, t)$ — функция из пространства V , имеет место $Lu_0 \in L_2(Q)$, и решение данной задачи также будет из этого пространства. Значит, возможно определить оператор Φ , переводящий пространство V в себя: $\Phi(w) = v$.

Пусть $v_1(x, t)$, $v_2(x, t)$ — две функции из пространства V , $w_1(x, t)$, $w_2(x, t)$ — решения задачи $(1')$, (2_{λ_0}) , (3) с функциями $g_{v_1}(x, t)$ и $g_{v_2}(x, t)$ соответственно. Повторяя доказательство оценки (12), приходим к неравенству

$$\|\Phi(w_1) - \Phi(w_2)\|_V \leq |\tilde{\lambda}|M_8\|v_1 - v_2\|_{L_2(Q)}.$$

Если теперь число $\tilde{\lambda}$ взять настолько малым, что будет выполняться неравенство $|\tilde{\lambda}|M_8 \leq 1$, то оператор Φ будет сжимающим. Неподвижная точка этого оператора и даст функцию $w(x, t)$, являющуюся решением краевой задачи.

Для функции $g_w(x, t)$ определим функцию $u(x, t)$:

$$\begin{aligned} u(x, t) = w(x, t) + & \frac{\tilde{\lambda}[(1 - \lambda_0\beta_2(t))x^2 - (2 - \lambda_0\beta_2(t))x][\alpha_1(t)w(0, t) + \alpha_2(t)w(1, t)]}{\lambda_0[\alpha_2(t) + \beta_2(t)] - 2} \\ & + \frac{\tilde{\lambda}[(1 - \lambda_0\alpha_2(t))x^2 + \lambda_0\alpha_2(t)x][\beta_1(t)w(0, t) + \beta_2(t)w(1, t)]}{\lambda_0[\alpha_2(t) + \beta_2(t)] - 2}. \end{aligned}$$

Функция $u(x, t)$ принадлежит пространству V и будет решением задачи (1), (2 $_{\lambda}$), (3) для $\lambda = \lambda_0 + \tilde{\lambda}$. Это означает, что число $\lambda_0 + \tilde{\lambda}$ принадлежит Λ и множество Λ открыто.

Докажем, что из оценки (12) следует замкнутость множества Λ . Пусть λ_m — последовательность чисел из множества Λ такая, что $\lambda_m \rightarrow \lambda_0$ при $m \rightarrow \infty$, $u_m(x, t)$ — последовательность решений задачи (1), (2 $_{\lambda_m}$), (3). Положим $w_{mk}(x, t) = u_m(x, t) - u_k(x, t)$. Для функции $w_{mk}(x, t)$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} Lw_{mk} &= 0, \\ \begin{cases} w_{mkx}(0, t) &= \lambda_k[\alpha_1(t)w_{mk}(0, t) + \alpha_2(t)w_{mk}(1, t)] \\ &\quad + (\lambda_m - \lambda_k)[\alpha_1(t)u_m(0, t) + \alpha_2(t)u_m(1, t)], \\ w_{mkx}(1, t) &= \lambda_k[\beta_1(t)w_{mk}(0, t) + \beta_2(t)w_{mk}(1, t)] \\ &\quad + (\lambda_m - \lambda_k)[\beta_1(t)u_m(0, t) + \beta_2(t)u_m(1, t)], \end{cases} \\ w_{mk}(x, 0) &= w_{mkt}(x, 0) = 0 \quad \text{при } x \in \Omega. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что последовательность $u_{mk}(x, t)$ фундаментальна в пространстве V . Стало быть, существует $u(x, t) \in V$ такая, что $u_{mk}(x, t) \rightarrow u(x, t)$ при $m \rightarrow \infty$ в пространстве V . Для функции $u(x, t)$ выполняются уравнение (1) и условия (2 $_{\lambda_0}$), (3). Тем самым число λ_0 принадлежит множеству Λ . Принадлежность предельной точки множеству Λ означает, что Λ замкнуто.

Таким образом, множество Λ непусто, открыто и замкнуто. Следовательно, оно совпадает со всем отрезком $[0, 1]$. Значит, краевая задача (1)–(3) разрешима в пространстве V .

2. Разрешимость краевой задачи II

Теорема 2. Пусть выполняются условия (7)–(9) теоремы 1, а также условие

$$\lambda_0^2[\alpha_1(t)\beta_2(t) - \alpha_2(t)\beta_1(t)] + \lambda_0[\alpha_2(t) + \beta_1(t) + \beta_2(t)] \neq 1.$$

Тогда для любой функции $f(x, t) \in L_2(Q)$ краевая задача II разрешима в пространстве V и притом единственным образом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что для решений задачи II справедлива оценка (12) (устанавливается эта оценка дословным повторением соответствующих рассуждений доказательства теоремы 1). Далее вновь воспользуемся методом продолжения по параметру. Пусть по-прежнему λ — число из отрезка $[0, 1]$.

Рассмотрим семейство краевых задач: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняется условие (3), а также условие

$$\begin{cases} u(0, t) = \lambda[\alpha_1(t)u_x(0, t) + \alpha_2(t)u(1, t)], & 0 < t < 1, \\ u_x(1, t) = \lambda[\beta_1(t)u_x(0, t) + \beta_2(t)u(1, t)], & 0 < t < 1. \end{cases} \quad (4_{\lambda})$$

Обозначим через Λ множество тех λ из отрезка $[0, 1]$, для которых задача (1), (4 $_{\lambda}$), (3) разрешима в пространстве V для любой функции $f(x, t)$ из пространства $L_2(Q)$. Как говорилось ранее, если множество Λ непусто, открыто и замкнуто, то оно совпадает со всем отрезком $[0, 1]$. Совпадение Λ с отрезком $[0, 1]$ означает, что краевая задача (1), (3), (4) имеет решение из пространства V .

Непустота Λ очевидна, так как число 0 принадлежит ему. Для доказательства открытости множества Λ достаточно показать, что если $\lambda_0 \in \Lambda$, то при малой величине $|\tilde{\lambda}|$ число $\lambda = \lambda_0 + \tilde{\lambda}$ также принадлежит Λ .

Пусть $v(x, t)$ — произвольно заданная функция из пространства V . Положим

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= \tilde{\lambda}[\alpha_1(t)v_x(0, t) + \alpha_2(t)v(1, t)], \\ \psi_1(t) &= \tilde{\lambda}[\beta_1(t)v_x(0, t) + \beta_2(t)v(1, t)], \\ \bar{u}_0(x, t) &= \frac{[\lambda_0(\beta_1(t) + (1-x)\beta_2(t)) - 1]\varphi_1(t) - [x + \lambda_0[\alpha_1(t) + (1-x)\alpha_2(t)]]\psi_1(t)}{\lambda_0^2[\alpha_1(t)\beta_2(t) - \alpha_2(t)\beta_1(t)] + \lambda_0[\alpha_2(t) + \beta_1(t) + \beta_2(t)] - 1}.\end{aligned}$$

Пусть $\bar{g}_v(x, t) = f(x, t) - L\bar{u}_0(x, t)$. Рассмотрим вспомогательную задачу: найти функцию $\bar{w}(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$L\bar{w}(x, t) = \bar{g}_v(x, t) \quad (1'')$$

и такую, что для нее выполняются условия $(4_{\lambda_0}), (3)$.

Поскольку $v(x, t)$ — функция из пространства V , то $L\bar{u}_0 \in L_2(Q)$ и решение данной задачи также будет из этого пространства. Следовательно, возможно определить оператор Φ , переводящий пространство V в себя: $\Phi(\bar{w}) = v$.

Пусть $v_1(x, t), v_2(x, t)$ — две функции из пространства V , $\bar{w}_1(x, t), \bar{w}_2(x, t)$ — решения задачи $(1''), (4_{\lambda_0}), (3)$ с функциями $\bar{g}_{v_1}(x, t)$ и $\bar{g}_{v_2}(x, t)$ соответственно. Повторяя доказательство оценки (12), приходим к неравенству

$$\|\Phi(\bar{w}_1) - \Phi(\bar{w}_2)\|_V \leq |\tilde{\lambda}|M_9\|v_1 - v_2\|_{L_2(Q)}.$$

Если теперь число $\tilde{\lambda}$ взять настолько малым, что $|\tilde{\lambda}|M_9 \leq 1$, то оператор Φ будет сжимающим. Неподвижная точка этого оператора и даст функцию $\bar{w}(x, t)$, являющуюся решением краевой задачи.

Для функции $\bar{g}_{\bar{w}(x, t)}$ определим функцию $u(x, t)$:

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \bar{w}(x, t) + \frac{\tilde{\lambda}[\lambda_0(\beta_1(t) + (1-x)\beta_2(t)) - 1][\alpha_1(t)w_x(0, t) + \alpha_2(t)w(1, t)]}{\lambda_0^2[\alpha_1(t)\beta_2(t) - \alpha_2(t)\beta_1(t)] + \lambda_0[\alpha_2(t) + \beta_1(t) + \beta_2(t)] - 1} \\ &\quad + \frac{\tilde{\lambda}[x + \lambda_0[\alpha_1(t) + (1-x)\alpha_2(t)]][\beta_1(t)w_x(0, t) + \beta_2(t)w(1, t)]}{\lambda_0^2[\alpha_1(t)\beta_2(t) - \alpha_2(t)\beta_1(t)] + \lambda_0[\alpha_2(t) + \beta_1(t) + \beta_2(t)] - 1}.\end{aligned}$$

Функция $u(x, t)$ принадлежит пространству V и будет решением задачи (1), $(4_\lambda), (3)$ для $\lambda = \lambda_0 + \tilde{\lambda}$. Это означает, что число $\lambda_0 + \tilde{\lambda}$ принадлежит множеству Λ и множество Λ открыто.

Докажем, что из оценки (12) следует замкнутость Λ . Пусть λ_m — последовательность чисел из Λ такая, что $\lambda_m \rightarrow \lambda_0$ при $m \rightarrow \infty$, $u_m(x, t)$ — последовательность решений задачи (1), $(4_{\lambda_m}), (3)$. Положим $\bar{w}_{mk}(x, t) = u_m(x, t) - u_k(x, t)$. Для функции $\bar{w}_{mk}(x, t)$ выполняются равенства

$$\begin{aligned}L\bar{w}_{mk} &= 0, \\ \begin{cases} \bar{w}_{mk}(0, t) &= \lambda_k[\alpha_1(t)\bar{w}_{mkx}(0, t) + \alpha_2(t)\bar{w}_{mk}(1, t)] \\ &\quad + (\lambda_{mx} - \lambda_k)[\alpha_1(t)u_m(0, t) + \alpha_2(t)u_m(1, t)], \\ \bar{w}_{mkx}(1, t) &= \lambda_k[\beta_1(t)\bar{w}_{mkx}(0, t) + \beta_2(t)\bar{w}_{mk}(1, t)] \\ &\quad + (\lambda_m - \lambda_k)[\beta_1(t)u_{mx}(0, t) + \beta_2(t)u_m(1, t)], \end{cases} \\ \bar{w}_{mk}(x, 0) &= \bar{w}_{mkt}(x, 0) = 0 \quad \text{при } x \in \Omega.\end{aligned}$$

Тем самым последовательность $u_{mk}(x, t)$ фундаментальна в пространстве V . Стало быть, существует функция $u(x, t) \in V$ такая, что $u_{mk}(x, t) \rightarrow u(x, t)$ при $m \rightarrow \infty$ в пространстве V . Для $u(x, t)$ выполняются уравнение (1) и условия (4_{λ_0}) , (3). Это означает, что число λ_0 принадлежит Λ . Принадлежность предельной точки множеству Λ означает, что Λ замкнуто.

Таким образом, множество Λ непусто, открыто и замкнуто. Следовательно оно совпадает со всем отрезком $[0, 1]$. Значит, краевая задача (1), (3), (4) разрешима в пространстве V .

3. Разрешимость краевой задачи III

Теорема 3. Пусть выполняются условия (7)–(9) теоремы 1, а также условие

$$\lambda_0[\beta_1(t) + \beta_2(t) - \alpha_1(t) - \alpha_2(t)] \neq 1.$$

Тогда для любой функции $f(x, t) \in L_2(Q)$ краевая задача III разрешима в пространстве V , притом единственным образом.

Доказательство проводится аналогично доказательству теорем 1 и 2, отличие состоит лишь в выборе функций

$$\begin{aligned}\varphi_2(t) &= \tilde{\lambda}[\alpha_1(t)v_x(0, t) + \alpha_2(t)v_x(1, t)], \\ \psi_2(t) &= \tilde{\lambda}[\beta_1(t)v_x(0, t) + \beta_2(t)v_x(1, t)], \\ \tilde{u}_0(x, t) &= \frac{[x - 1 + \lambda_0(\beta_1(t) + \beta_2(t))]\varphi_2(t) - [1 + \lambda_0(\alpha_1(t) + \alpha_2(t))]\psi_2(t)}{\lambda_0[\beta_1(t) + \beta_2(t) - \alpha_1(t) - \alpha_2(t)] - 1},\end{aligned}$$

с помощью которых доказывается открытость соответствующего множества Λ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998.
2. Kiguradze T. On the correctness of the Dirichlet problem in a characteristic rectangle for fourth order linear hyperbolic equations // Georgian Math. J. 1999. V. 6, N 5. P. 447–470.
3. Уткина Е. А. Задача Дирихле для одного уравнения четвертого порядка // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 4. С. 400–404.
4. Уткина Е. А. Характеристические граничные задачи для линейных уравнений высокого порядка со старшими частными производными: Автореф. дис. ... д-ра. физ.-мат. наук. — Казань, 2011.
5. Якубов С. Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985.
6. Пулькина Л. С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений. Самара: Изд-во Самарск. ун-та, 2012.
7. Guezane-Lakoud A., Boumaza N. Galerkin method for the Boussinesq equation with integral condition // J. Nonlinear Evol. Equations Appl. 2012. N 3. P. 29–40.
8. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

Статья поступила 1 марта 2014 г.

Алсыкова Аюна Андреевна
Бурятский гос. университет,
ул. Смолина, 24а, Улан-Удэ 675000
888552@mail.ru