

ФОРМАЛЬНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ
ТИПИЧНЫХ РОСТКОВ
ПОЛУГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ
П. А. Шайхуллина

Аннотация. Рассматриваются ростки полугиперболических отображений, т. е. двумерных голоморфных отображений, один из мультипликаторов которых параболический, а другой — гиперболический. Получена формальная классификация типичных полугиперболических ростков и доказана теорема о полужормальной нормализации.

Ключевые слова: полугиперболический росток, формальная классификация, полужормальная нормализация.

Shaikhullina P. A. Formal normalization of generic germs for semihyperbolic maps.

Abstract: The subject of research are germs of semihyperbolic maps, i. e. of two-dimensional maps such that one of its multiplier is parabolic and another one is hyperbolic. A formal classification of generic semihyperbolic germs is obtained and a theorem on semihyperbolic normalization is proved.

Keywords: semihyperbolic germ, formal classification, semiformal normalization.

Введение

Задача об аналитической классификации ростков векторных полей (отображений) была поставлена в работах Пуанкаре [1–4]. Ее вариантом является так называемая задача о нормализации, т. е. о приведении ростка аналитической заменой координат к простейшему виду — нормальной форме. Обе эти задачи были решены, в основном, в работах Пуанкаре [1–5], Зигеля [6] и Брюно [7]. Неисследованными оставались лишь ростки типа Зигеля при наличии резонансов или патологической близости к резонансам [8]. В 1980-е гг. существенные продвижения были получены и для этих «особых» случаев в работах Йоккоза [9] для «лиувиллевых» ростков, в работах С. М. Воронина [10], Экаля [11], Мартине и Рамиса [12, 13] — для резонансных. Оказалось, что в резонансном случае препятствием к нормализации ростка являются так называемые «функциональные инварианты». Более того, они же содержат полную информацию об «аналитическом» типе ростка.

Функциональные инварианты аналитической классификации были изначально построены для ростков параболических отображений (одномерных голоморфизмов, касательных к тождественному) [10, 11, 14], для резонансных седловых [14] и седлоузловых [15] ростков векторных полей. В дальнейшем функ-

циональные инварианты были обнаружены во многих других задачах аналитической классификации [16–19].

Одним из способов построения функциональных инвариантов является следующий. Проколота окрестность неподвижной (особой) точки покрывается секториальными областями. На каждой из них строится аналитическая замена координат, нормализующая росток. Функции перехода полученного «нормализующего» атласа и доставляют искомые функциональные инварианты. Поэтому задача о секториальной нормализации, т. е. задача о нормализации ростка на области, для которой неподвижная (особая) точка является не внутренней, а граничной — первый и важнейший этап решения задачи об аналитической классификации резонансных ростков.

Как отмечено выше, такую секториальную нормализацию удалось провести для одномерных резонансных отображений, седловых и седлоузловых резонансных векторных полей. Следующими по сложности являются двумерные отображения и трехмерные векторные поля.

Ростки двумерных отображений и трехмерных векторных полей (при чрезвычайно сильных ограничениях, выделяющих в пространстве ростков подмногожества коразмерности бесконечность) рассматривались в [20], для таких ростков намеченная выше программа была реализована полностью. Однако для типичных резонансных случаев сделано пока мало. Единственные, по-видимому, к настоящему моменту результаты о нормализации получены для так называемых полугиперболических ростков, т. е. ростков двумерных отображений, один из мультипликаторов которых гиперболический (по модулю не равен 0 или 1), а второй параболический (равен 1). А именно, в [15] доказана теорема о секториальной нормализации ростков для класса формальной эквивалентности одного конкретного полугиперболического ростка. В дальнейшем предполагалось из функций перехода построенного нормализующего атласа изготовить функциональные инварианты аналитической классификации ростков рассмотренного класса. Следует отметить, что рассмотренный в [15] класс состоял из ростков, струи которых (достаточно высокого порядка) были нормализованы во всех точках их инвариантного гиперболического подмногообразия. Наличие такой «предварительной» нормализации было существенным для построения секториальных нормализующих отображений. Однако возможность такой предварительной нормализации не является прямым следствием формальной приводимости ростка к его нормальной форме.

Частные результаты для ростков полугиперболических отображений о существовании голоморфного («секториального») центрального многообразия получены в работах [21, 22].

В настоящей работе рассматриваются типичные полугиперболические ростки. В перспективе планируется получить их аналитическую классификацию по указанному выше плану. Здесь же в качестве первого шага, необходимого для построения секториальной нормализации, будет получена их формальная классификация и «предварительная» нормализуемость.

§ 1. Классы ростков $\mathcal{SH}$ и $\mathcal{SH}_0$.

Теорема о формальной классификации

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Росток голоморфизма $F : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ будем называть *полугиперболическим*, если один его мультипликатор равен 1, а другой — гиперболический:

$$F(x, y) = (x + \dots, \Lambda y + \dots), \quad \text{где } |\Lambda| \neq 0, 1.$$

Полугиперболический росток будем называть *типичным*, если в разложении

$$F(x, y) = (x + cx^2 + \dots, \Lambda y + \dots)$$

постоянная c не равна нулю.

Класс типичных полугиперболических диффеоморфизмов будем обозначать через $\mathcal{SH}$. Заметим, что росток $F \in \mathcal{SH}$ имеет инвариантное аналитическое подмногообразие, соответствующее гиперболическому мультипликатору (теорема Адамара — Перрона [23]). Его можно выпрямить голоморфной заменой координат. Поэтому без ограничения общности можно считать, что это инвариантное подмногообразие является прямой $\{x = 0\}$. Класс ростков $F \in \mathcal{SH}$, инвариантное многообразие которых совпадает с прямой $\{x = 0\}$, будем обозначать через $\mathcal{SH}_0$.

Заметим, что росток класса $\mathcal{SH}_0$ резонансный. По теореме Пуанкаре — Дюлака [8] формальной заменой координат такой росток можно привести к виду

$$(x, y) \mapsto (f(x), yK(x)).$$

Однако такие ростки допускают и дальнейшую нормализацию. А именно, первая компонента $x \mapsto f(x)$ является параболическим отображением. Формальная классификация параболических ростков хорошо известна [10]: в типичном случае класс формальной эквивалентности такого ростка определяется одним числовым модулем. Удобно использовать в качестве формальной нормальной формы параболического ростка сдвиг за единичное время $g_{v_a}^1$ вдоль векторного поля

$$v_a(x) = \frac{x^2}{1 + ax} \frac{\partial}{\partial x}, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Далее, имеется известная параллельность результатов по классификации отображений и векторных полей. Формальная классификация векторных полей с особой точкой типа седлоузла в двумерном случае получена в [17]. Для типичных векторных полей с такой особой точкой (сдвиг за единичное время вдоль такого векторного поля как раз и есть полугиперболическое отображение) формальная классификация имеет три числовых параметра. Так что в качестве формальной нормальной формы (ФНФ) для типичных полугиперболических отображений можно было бы взять сдвиги за единичное время вдоль ФНФ седлоузловых векторных полей из [17]. Однако для наших целей будет удобно использовать другие ФНФ, которые, впрочем, также будут зависеть от трех

параметров. Кроме того, для того чтобы формальную классификацию ростков полугиперболических отображений получить из классификации седлоузловых векторных полей, надо доказать теорему о формальном включении ростков полугиперболических отображений в поток, что само по себе нетривиально.

Кроме того, как отмечалось выше, для дальнейших исследований полугиперболических ростков нам потребуется нечто большее нежели просто приводимость к формальной нормальной форме. Однако ни теорема Пуанкаре — Дюлака, ни теорема о формальном включении в поток не дают необходимого результата. Поэтому теорема о формальной классификации будет доказана прямыми выкладками, а теорему о формальном включении в поток (и даже в ее усиленном «полуформальном» варианте) получим в качестве простого следствия. При этом мы получим существенно более сильный результат, состоящий в том, что росток класса $\mathcal{SH}_0$ приводится к ФНФ полуформальной заменой.

Теорема 1. Пусть $F \in \mathcal{SH}_0$. Тогда существуют комплексные числа a, λ, β такие, что F формально эквивалентно $F_{a,\lambda,\beta} = g_{\omega_{a,\lambda,\beta}}^1$ — сдвигу за единичное время вдоль векторного поля

$$\omega_{a,\lambda,\beta} = v_a(x) + y(\lambda + \beta v'_a(x)) \frac{\partial}{\partial y}, \quad (a, \lambda, \beta) \in \mathbb{C}^3, \quad (1)$$

где $v_a(x) = \frac{x^2}{1+ax} \frac{\partial}{\partial x}$, $\text{Im } \lambda \in [0; 2\pi)$, $\text{Re } \lambda \neq 0$. Более того, нормализующее преобразование может быть выбрано формальным по переменным x и аналитическим по переменным y . (Преобразования такого типа будем называть полуформальными).

Замечание 1. Будет показано также, что ФНФ единственна, т. е. по заданному ростку $F \in \mathcal{SH}_0$ параметры a, λ, β его ФНФ определяются однозначно, а нормализующая замена единственна с точностью до «суперпозиционного» домножения на сдвиг $g_{\omega_{a,\lambda,\beta}}^t$ за фиксированное время $t \in \mathbb{C}$ и растяжения $(x, y) \mapsto (x, ky)$, $k \neq 0$.

Следствие 1. Пусть $F_{a,\lambda,\beta}$ — формальная нормальная форма ростка $F \in \mathcal{SH}_0$. Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ существует такой росток $\mathcal{G} \in \mathcal{SH}_0$, аналитически эквивалентный ростку F , что

$$\mathcal{G}(x, y) - F_{a,\lambda,\beta}(x, y) = O(x^N) \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

Следствие 2. Для любого ростка $F \in \mathcal{SH}_0$ можно построить такое формальное векторное поле v с особой точкой типа седлоузел, что $F = g_v^1$.

Теорема о полуформальной классификации будет доказана в два этапа. В § 2 (первый этап) стандартным методом последовательных приближений полугиперболический росток будет приведен с помощью полуформальных замен координат к так называемой предварительной формальной нормальной форме (ПФНФ). На втором этапе в § 3 ПФНФ будет приведена к полиномиальному виду, окончание доказательства — в § 4. В § 5 покажем единственность формальной нормальной формы (и «почти единственность» формальной нормализующей замены). Следствия 1 и 2 будут доказаны в § 6 и § 7 соответственно.

§ 2. Предварительная формальная нормальная форма

Пусть росток $\mathcal{F}$ из класса $\mathcal{SH}_0$, F — его представитель. В первую очередь преобразуем отображение F к более простому виду. Фактически это и будет классическая формальная нормальная форма Пуанкаре — Дюлака. Однако мы покажем приводимость к такому виду «полуформальными» заменами координат.

Лемма 1. *Существует формальная замена координат, приводящая типичное полугиперболическое отображение F из $\mathcal{SH}_0$ к некоторому виду, который будем называть предварительная формальная нормальная форма (ПФНФ)*

$$F_0(x, y) = (f(x), yK(x)), \quad \text{где } f(x) = x + x^2 + O(x^3), \quad K(x) = \Lambda + O(x). \quad (2)$$

Нормализующее преобразование при этом может быть выбрано в виде

$$(x, y) \mapsto \left(\sum_i \alpha_i(y)x^i; \sum_j \beta_j(y)x^j \right), \quad i, j = 0, 1, \dots,$$

с α_i, β_j — аналитическими функциями, определенными для всех i, j в некоторой фиксированной окрестности начала координат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 0. Для ростка $\mathcal{F}$ класса $\mathcal{SH}_0$ прямая $\{x = 0\}$ является инвариантной, поэтому $F(\{x = 0\}) = \{x = 0\}$. Представим отображение F в виде ряда Хартогса в полидиске $S_{rR} = \{(x, y) : |x| < r, |y| < R\}$:

$$F(x, y) = (xa_1(y) + x^2a_2(y) + \dots, b_0(y) + b_1(y)x + \dots),$$

в котором функции $a_i(y), b_j(y)$, $i = 1, 2, \dots, j = 0, 1, \dots$, голоморфны. Тогда они удовлетворяют условиям: $a_1(0) = 1, a_2(0) \neq 0, b_0(0) = 0, b'_0(0) = \Lambda, |\Lambda| \neq 0, 1$. Всюду ниже будем использовать такие же разложения в ряды Хартогса и отслеживать лишь значения параметра R (радиус сходимости круга, в котором голоморфны все коэффициенты ряда), не обращая внимания на другой параметр.

Сужение f отображения F на прямую $\{x = 0\}$ — это гиперболическое отображение $y \mapsto b_0(y)$. По теореме Шредера [24] оно может быть линеаризовано аналитической заменой координат. Таким образом, без ограничения общности можем считать, что $b_0(y) = \Lambda y$.

1. Нормализация коэффициента a_1 . Аналитическая на S_{rR} замена координат $H_1(x, y) = (k(y)x, y)$ преобразует F к виду

$$F_1(x, y) = H_1^{-1} \circ F \circ H_1(x, y) = \left(xa_1(y)k(y) \frac{1}{k(\Lambda y + \dots)} + \dots, \Lambda y + \dots \right).$$

Хотим выбрать такое $k(y)$, чтобы было

$$a_1(y) \frac{k(y)}{k(\Lambda y)} = 1. \quad (3)$$

Если $|\Lambda| > 1$, то искомое голоморфное решение уравнения (3) дается формулой

$$k(y) = \prod_{n=1}^{\infty} a_1\left(\frac{y}{\Lambda^n}\right).$$

Если же $0 < |\Lambda| < 1$, то голоморфным решением уравнения (3) будет функция

$$k(y) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_1(\Lambda^n(y))}.$$

Сходимость бесконечных произведений и их голоморфность в круге $\{|y| < R\}$ следует из соответствующих теорем комплексного анализа. Таким образом, голоморфной на S_{rR} заменой координат коэффициент a_1 можно сделать равным 1. Всюду далее будем считать $a_1 \equiv 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что после выполненной замены второй параметр полидиска S_{rR} — радиус сходимости коэффициентов разложения в ряд Хартогса нормализуемого отображения — не изменился.

2. Нормализация коэффициентов a_2 и b_1 . Рассмотрим преобразование

$$H_2(x, y) = (x + \alpha(y)x^2, y + \beta(y)x)$$

и обратное к нему

$$H_2^{-1}(x, y) = (x - \alpha(y)x^2 + O(x^3), y - \beta(y)x + O(x^2)).$$

Тогда при $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} F_2(x, y) &= H_2^{-1} \circ F_1 \circ H_2(x, y) \\ &= (x + x^2(\alpha(y) - \alpha(\Lambda y) + a_2(y)) + O(x^3), \Lambda y + x(\Lambda\beta(y) - \beta(\Lambda y) + b_1(y)) + O(x^2)). \end{aligned}$$

Мы бы хотели решить два уравнения:

$$\alpha(\Lambda y) - \alpha(y) = a_2(y), \quad (4)$$

$$\beta(\Lambda y) - \Lambda\beta(y) = b_1(y). \quad (5)$$

Это позволило бы максимально упростить, т. е. сделать равными нулю соответствующие коэффициенты ряда F_2 . Рассмотрим сначала уравнение (4). Представим функции $a_2(y)$ и $\alpha(y)$ в виде степенных рядов

$$\alpha(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k y^k, \quad a_2(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2,k} y^k.$$

Здесь первый ряд является разложением неизвестной функции α , а второй ряд сходится в круге $\{|y| < R\}$. Подставим эти разложения в уравнение и, сравнивая левую и правую части, получим

$$(\Lambda^k - 1)\alpha_k = a_{2,k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Для любого $k \neq 0$ уравнение (6) разрешимо; при $k = 0$ решение существует только в случае $a_{2,0} = 0$. Повторяя те же рассуждения для (5), получаем для коэффициентов β_k и $b_{1,k}$ разложений

$$\beta(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(y), \quad b_1(y) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{1,k}(y)$$

систему

$$(\Lambda^k - \Lambda)\beta_k = b_{1,k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

уравнения которой разрешимы для всех $k \neq 1$. При $k = 1$ необходимым условием разрешимости является равенство нулю коэффициента $b_{1,1}$. Итак, при замене координат указанного вида коэффициент a_2 можно сделать равным константе, а коэффициент b_1 привести к линейному виду. Отметим, что из условий типичности следует, что $a_2(0) \neq 0$. Поэтому без ограничения общности можем ниже считать, что $a_2(y) = \text{const} \neq 0$, $b_1(y) = b_{1,1}y$. Наконец, используя дополнительное преобразование $(x, y) \mapsto (mx, y)$, можем добиться того, что $a_2(y) = 1$.

Так как функции $a_2(y)$ и $b_1(y)$ аналитические в области $\{|y| < R\}$, ряды $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ также сходятся в круге $\{|y| < R\}$. Поэтому построенное преобразование H голоморфно на S_{rR} и по-прежнему справедливо замечание из предыдущего пункта.

3. Индукция. Пусть на некотором шаге отображение F_{N-1} имеет вид

$$F_{N-1}(x, y) = (x + x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots + \alpha_{N-1} x^{N-1} + \alpha_N(y) x^N + O(x^{N+1}); \\ y(\Lambda + \beta_1 x + \dots + \beta_{N-2} x^{N-2}) + \beta_{N-1}(y) x^{N-1} + O(x^N)),$$

где $\alpha_3, \dots, \alpha_{N-1}, \beta_1, \dots, \beta_{N-2}$ являются константами, функции $\alpha_N(y)$ и $\beta_{N-1}(y)$ голоморфны на $\{|y| < R\}$. Будем использовать преобразование

$$H_N(x, y) = (x + \alpha(y) x^N, y + \beta(y) x^{N-1}).$$

Тогда, как и на предыдущем шаге, можем сделать коэффициент α_N равным константе, а коэффициент β_{N-1} — линейным по переменной y , при этом $H_N(x, y)$ будет голоморфно на S_{rR} и, опять же, будет справедливо замечание 2.

4. Выполняя для любого N замену из предыдущего пункта, построим последовательность замен H_N , каждая из которых «улучшает» по одной паре «мономов» из разложения нормализуемого преобразования в ряд Хартогса. Заметим, что в суперпозиции $\mathcal{H}_N = H_1 \circ H_2 \circ \dots \circ H_N$ происходит стабилизация «мономов» в разложении $\mathcal{H}_N$. То же происходит и с нормализуемым отображением $F_N = \mathcal{H}_N^{-1} \circ F \circ \mathcal{H}_N$. Поэтому бесконечная суперпозиция $\mathcal{H} = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{H}_N$ сходится в пространстве формальных рядов по переменной x с коэффициентами, голоморфными по переменной y в круге $\{|y| < R\}$ и является искомой полуформальной нормализующей заменой координат, поскольку F_N сходятся к ПФНФ (2) в том же пространстве рядов. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из специфики построения замен следует, что бесконечная суперкомпозиция, приводящая F к ПФНФ, является формальным рядом по переменной x с коэффициентами, голоморфными в одной и той же окрестности начала координат.

§ 3. Второй шаг формальной нормализации

Выше типичное полугиперболическое отображение приведено к виду (2). Вторичная нормализация, приводящая его к ФНФ, будет выполнена с помощью замены вида

$$H(x, y) = (p(x), yq(x)), \quad (7)$$

$$p'(0) = 1. \quad (8)$$

Эта замена приводит ПФНФ (2) к виду $\tilde{F} = H^{-1} \circ F_0 \circ H = (\tilde{f}(x), \tilde{K}(x)y)$, где

$$\tilde{f}(x) = p^{-1} \circ f \circ p, \quad \tilde{K}(x) = K \circ p \cdot \frac{q}{q \circ \tilde{f}}. \quad (9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Значения

$$f'''(0) = \tilde{f}'''(0), \quad K(0) = \tilde{K}(0), \quad K'(0) = \tilde{K}'(0) \quad (10)$$

не меняются при действии замены координат (7), (8) (являются инвариантами формальной классификации типичных полугиперболических отображений). Для второго и третьего равенств это очевидно, а первое показано в [10] (но, конечно, легко может быть проверено прямыми выкладками).

Напомним, что f является типичным параболическим отображением и $\tilde{f}$ — сопряженное к нему. Из формальной классификации параболических отображений известно (см. [10]), что существуют константа a и формальная замена координат $p(x)$, приводящая отображение f к $\tilde{f} = g_{v_a}^1(x)$, где $g_{v_a}^1(x)$ является сдвигом за единичное время вдоль векторного поля (1). Более того, если $f(x)$ имеет вид $f(x) = x + x^2 + \dots$ (а для первой компоненты отображения (2) это так), то для замены $p(x)$ будет выполнено условие (8). Далее, положим $\varphi = \ln q$, $k = \ln(\frac{\tilde{K}}{K \circ p})$, тогда второе уравнение из (9) принимает вид

$$-\varphi \circ \tilde{f} + \varphi = k. \quad (11)$$

Лемма 2. Для любого формального параболического отображения $\tilde{f}$ и любой функции $k(x)$ такой, что $k(0) = k'(0) = 0$, существует единственное формальное решение $\varphi(x)$ уравнения (11) такое, что $\varphi(0) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\tilde{f} = x + cx^2 + \dots, \quad c \neq 0, \quad k(x) = \sum_{j=2}^{\infty} k_j x^j; \quad \varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j x^j.$$

Подставляя эти разложения в (11), получим

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j x^j - \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j (x + cx^2 + \dots)^j = \sum_{j=2}^{\infty} k_j x^j.$$

Приравнивая коэффициенты при x^j , $j = 1, 2, \dots$, приходим к бесконечной системе уравнений

$$-c(j-1)\varphi_{j-1} + \dots = k_j, \quad j = 2, 3, \dots,$$

где многоточием обозначены члены, зависящие от φ_s с номерами s , меньшими, чем $j-1$. Так как $c \neq 0$ для типичного параболического отображения, эти уравнения можно решать последовательно. Это дает существование, а так же и единственность формального решения. $\square$

Лемма 3. Для любых параболических диффеоморфизмов $f(x) = x + x^2 + \dots$ и $p(x) = x + \dots$, любых K и $\tilde{K}$, удовлетворяющих (10), существует формальное решение q второго уравнения системы (9), такое что $q(0) = 1$. Это решение является единственным (с точностью до умножения на константу). В частности, любое отображение $F \in \mathcal{SH}_0$ вида (2) может быть приведено формальной заменой вида (7) к форме

$$\tilde{F}_{a,\lambda,b}(x,y) = (g_{v_a}^1(x), y(\Lambda + bx)), \quad \Lambda = e^\lambda.$$

Доказательство. Первое утверждение данной леммы следует из леммы 2, а второе — из первого. $\square$

§ 4. Окончание доказательства теоремы о формальной классификации

Пусть $F_{a,\lambda,\beta} = g_{\omega_{a,\lambda,\beta}}^1(x,y)$ — сдвиг за единичное время вдоль векторного поля $\omega_{a,\lambda,\beta}$. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = v_a(x), \\ \dot{y} = y(\lambda + \beta v'_a(x)). \end{cases}$$

Пусть $(x(t), y(t))$ — ее решение с начальными условиями $(x(0) = x_0, y(0) = y_0)$. Получим

$$x(t) = g_{v_a}^t(x_0), \quad \frac{dy}{dx} = \lambda y \frac{1}{v_a(x)} + y\beta \frac{v'_a(x)}{v_a(x)}.$$

Тогда

$$dy = \lambda y dt + d(y \ln v_a(x)),$$

и

$$y(t) = y_0 e^{\lambda t} \left(\frac{v_a(x_0)}{v_a(x(t))} \right)^\beta.$$

Обозначив $f_a = g_{v_a}^1$, имеем

$$F_{a,\lambda,\beta}(x_0, y_0) = (f_a(x_0), e^\lambda y_0 (f'_a(x_0))^\beta).$$

Наконец, если

$$\Lambda = e^\lambda, \quad \Lambda(x) = \Lambda(f'_a(x))^\beta,$$

то $F_{a,\lambda,\beta} = (f_a(x), y\Lambda(x))$.

Вычислим инварианты (10) для $F_{a,\lambda,\beta}$. Это и будут в точности параметры a , $\Lambda = e^\lambda$, β . Поэтому по лемме 3 $F_{a,\lambda,\beta}$ приводится к $\tilde{F}_{a,\lambda,\beta}$ заменой вида (7). Но и исходное отображение F в соответствии с построением этого и предыдущего пунктов приводится к некоторой форме $\tilde{F}_{a,\lambda,\beta}$ полуформальными заменами. Следовательно, исходное отображение F можно привести к виду $F_{a,\lambda,\beta}$ полуформальными заменами переменных. Теорема о формальной нормализации доказана.

§ 5. Единственность ФНФ и формальной нормализующей замены

Пусть $F = F_{a,\lambda,\beta}$ и $F' = F_{a',\lambda',\beta'}$ — две формальные нормальные формы из теоремы о формальной классификации, и пусть формальная замена координат H сопрягает F и F' :

$$H \circ F = F' \circ H. \quad (12)$$

Заметим, что для формальных нормальных форм прямые $\{x = 0\}$ и $\{y = 0\}$ являются инвариантными (первая из них — их общее инвариантное гиперболическое подмногообразие, вторая — центральное многообразие). Поэтому замена координат H должна их сохранять. Значит, замена H имеет вид

$$H(x, y) = (xa(x, y); yb(x, y)), \quad (13)$$

где $a(x, y)$, $b(x, y)$ — формальные степенные ряды, причем $a(0, 0) \cdot b(0, 0) \neq 0$. Но тогда формальное отображение $h(x) = xa(x, 0)$ сопрягает отображения $f_a(x)$ и $f_{a'}(x)$:

$$h \circ f_a = f_{a'} \circ h. \quad (14)$$

В силу единственности ФНФ параболических отображений [10] отсюда следует совпадение параметров a и a' . Аналогично формальный диффеоморфизм $g(y) = yb(0, y)$ сопрягает сужения F и F' на прямую $\{x = 0\}$:

$$g(\Lambda y) = \Lambda' g(y). \quad (15)$$

Дифференцируя (15) по y и подставляя $y = 0$, получим $\Lambda = \Lambda'$, а из условия $\text{Im } \lambda, \text{Im } \lambda' \in [0; 2\pi)$ вытекает, что $\lambda = \lambda'$. Сравнивая в (14) коэффициенты при x^2 , с учетом того, что $a = a'$, имеем

$$h'(0) = a(0, 0) = 1. \quad (16)$$

Подставляя (13) в (12) и вычисляя коэффициент при xy во второй компоненте полученного равенства, из равенства (16) выводим, что $\beta = \beta'$. Это завершает доказательство единственности ФНФ.

Для изучения вопроса единственности нормализующей замены достаточно рассмотреть формальные замены координат, сохраняющие ФНФ. Таким образом, надо найти все формальные замены $H(x, y)$, удовлетворяющие условию (12) (для случая $F = F'$). Повторяя те же рассуждения, что и выше, и используя те же обозначения, получим опять же равенства (14) и (15), в которых $a = a'$, $\Lambda = \Lambda'$. Из (14) следует, что h коммутирует с f_a . Как показано в [10], все формально коммутирующие с f_a отображения h имеют вид $h = g_{v_a}^t$ для некоторого $t \in \mathbb{C}$. Рассмотрим отображение $H_t = g_{\omega_{a,\lambda,\beta}}^t$; так как $F = g_{\omega_{a,\lambda,\beta}}^1$, то H_t и F коммутируют: $H_t \circ F = F \circ H_t$. Но тогда и $H_t^{-1} \circ H$ коммутирует с F . Поэтому без ограничения общности можем считать, что $h = \text{id}$ (этого можно добиться, заменив H на $H_t^{-1} \circ H$).

Далее, из (15) следует линейность g : $g(y) = ky$, $k \neq 0$. Линейное отображение $L : (x, y) \mapsto (x, ky)$ также коммутирует с ФНФ F . Повторяя те же

выкладки, что и выше, мы можем тем самым считать, что и отображение g тождественно. Наконец, как и выше, подставляя (13) в (12) и используя условие « $H = \text{id}$ на прямых $\{x = 0\}$ и $\{y = 0\}$ », последовательным приравниванием коэффициентов при степенях x^k (т. е. фактически, повторяя все рассуждения из § 2–4 и решая соответствующие, в данном случае однородные, уравнения), получим $H \equiv \text{id}$. С учетом двух сделанных поправок нормализующей замены это и дает ее единственность с точностью до растяжения вдоль y и сдвига вдоль векторного поля $\omega_{a,\lambda,\beta}$.

§ 6. Доказательство следствия 1

Пусть $H(x, y) = (H_1(x, y), H_2(x, y))$ — формальная нормализующая замена, построенная выше в теореме о формальной классификации. Заметим, что каждый из формальных рядов $H_j(x, y)$, $j = 1, 2$, представим в виде

$$H_j(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^j(y) x^k,$$

где функции $c_k^j(y)$ голоморфны в некоторой фиксированной окрестности начала координат. Рассмотрим замену

$$H_N(x, y) = (H_{1N}(x, y), H_{2N}(x, y)),$$

где

$$H_{jN}(x, y) = \sum_{k=0}^N c_k^j(y) x^k.$$

Это голоморфная замена, и она переводит росток F в росток требуемого вида.

§ 7. Доказательство следствия 2

Пусть F — произвольный росток из $\mathcal{SH}_0$, $F_{a,\lambda,\beta} = g_{\omega_{a,\lambda,\beta}}^1$ — его ФНФ, и пусть H — полуформальная замена координат, сопрягающая F и $F_{a,\lambda,\beta}$: $H \circ F = F_{a,\lambda,\beta} \circ H$. Пусть замена H^{-1} переводит векторное поле $\omega_{a,\lambda,\beta}$ в векторное поле ω : $H' \cdot \omega = \omega_{a,\lambda,\beta} \circ H$. Тогда $F = g_{\omega}^1$, что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Так как замена координат, обратная к полуформальной замене, также является полуформальной заменой, векторное поле ω , построенное выше, является «полуформальным»: его компоненты разлагаются в ряды Хартогса (по степеням x) с коэффициентами, аналитическими в некоторой фиксированной окрестности начала координат.

ЛИТЕРАТУРА

1. Poincare H. Memoire sur les courbes definies par une equation differentielle. I // J. Math. Pures Appl. 1881. V. 7. P. 375–422.
2. Poincare H. Memoire sur les courbes definies par une equation differentielle. II // J. Math. Pures Appl. 1882. V. 8. P. 251–286.

3. *Poincare H.* Memoire sur les courbes definies par une equation differentielle. III // J. Math. Pures Appl. 1885. V. 1. P. 167–244.
4. *Poincare H.* Memoire sur les courbes definies par une equation differentielle. IV // J. Math. Pures Appl. 1886. V. 2. P. 151–217.
5. *Poincare H.* Sur le problem des trois corps et les equations de la dinamique // Acta Math. 1890. V. XIII. P. 1–270.
6. *Siegel C. L.* Vorlesungen uber Himmelsmechanik. Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer-Verl., 1957.
7. *Брюно А. Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений // Тр. Моск. мат. о-ва. 1971. Т. 25. С. 199–239.
8. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
9. *Yoccoz J. C.* Linearisation des germes de diffeomorphismes holomorphes de $(\mathbb{C}, 0)$ // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I Math. 1988. V. 306, N 1. P. 55–58.
10. *Воронин С. М.* Аналитическая классификация ростков конформных отображений $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ с тождественной линейной частью // Функцион. анализ. 1981. Т. 15, № 1. С. 1–17.
11. *Ecalte J.* Sur les fonctions resurgentes. Orsay: Publ. Math. d'Orsay, 1981.
12. *Martinet J., Ramis J. P.* Problème de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1982. N 55. P. 63–164.
13. *Martinet J., Ramis J. P.* Classification analytique des équations différentielles non linéaires resonnantes du premier ordre // Ann. Sci. École Norm. Supér. 1983. V. 16, N 4. P. 571–621.
14. *Malgrange B.* Travaux d'Ecalte et de Martinet-Ramis sur les systemes dinamique // Asterisque. 1982. N 582. P. 59–73.
23. *Воронин С. М., Фомина П. А.* Секториальная нормализация полугиперболических отображений // Вестн. Челяб. гос. ун-та Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 16. 2013. № 28. С. 94–114.
16. *Воронин С. М., Мещерякова Ю. И.* Аналитическая классификация типичных вырожденных элементарных особых точек ростков голоморфных векторных полей на комплексной плоскости // Изв. вузов. Математика. 2005. № 1. С. 13–16.
17. *Воронин С. М., Мещерякова Ю. И.* Аналитическая классификация седлоузлов // Тр. Моск. мат. о-ва. 2005. Т. 66. С. 93–113.
18. *Воронин С. М.* Аналитическая классификация пар инволюций и ее приложения // Функцион. анализ и его прил. 1982. Т. 16, № 2. С. 21–29.
19. *Воронин С. М., Ортис-Бобадилла Л., Росалес-Гонсалес Э.* Проблема Тома в задаче об орбитальной аналитической классификации вырожденных особых точек голоморфных векторных полей на плоскости // Докл. АН. 2010. Т. 434, № 4. С. 443–446.
20. *Ueda T.* Local structure of analytic transformations of two complex variables // Int. J. Math. Kyoto Univ. 1986. V. 26, N 2. P. 233–261.
21. *Ueda T.* Local structure of analytic transformations of two complex variables // Int. J. Math. Kyoto Univ. 1991. V. 31, N 3. P. 695–711.
22. *Voronin S. M.* Darboux–Whitney's problem and related questions // Adv. Sov. Math. Non-linear Stokes phenomena. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993. V. 14. P. 139–233.
24. *Арнольд В. И., Ильашенко Ю. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Соврем. проблемы математики. Фундаментальные направления. 1985. Т. 1. С. 7–150.
25. *Schröder E.* Uber iterierte Functionen // Ann. Math. 1871. V. 3. P. 296–322.

Статья поступила 10 октября 2015 г.

Шайхуллина Полина Алексеевна
Челябинский гос. университет,
ул. Бр. Кашириных, 129, Челябинск 454001
fominapa@gmail.com