

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С БОЛЬШОЙ СТЕПЕНЬЮ НЕПРИВОДИМОГО ХАРАКТЕРА

С. С. Поисеева

Аннотация. Изучается конечная неединичная группа G , обладающая неприводимым комплексным характером Θ , для которого $|G| \leq 2\Theta(1)^2$. Доказано, что в случае $\Theta(1) = p^2q$, где $p > q$ и p, q — различные простые числа, группа G является разрешимой группой с абелевой нормальной подгруппой M индекса p^2q . С помощью классификации простых конечных групп доказано, что конечная простая неабелева группа с абелевой силовой p -подгруппой $P \neq 1$ порядка не более p^2 , для которой $2|P|^3 > |G|$, изоморфна группе $L_2(q)$, где q — либо простое число, либо квадрат простого числа.

Ключевые слова: конечная группа, характер конечной группы, степень неприводимого характера конечной группы.

S. S. Poiseeva. Finite groups with an irreducible character large degree.

Abstract: We study a finite nontrivial group G with an irreducible complex character Θ such that $|G| \leq 2\Theta(1)^2$ and $\Theta(1) = p^2q$, where $p > q$ and p, q are different primes. In this case we prove that G is solvable groups with abelian normal subgroup M of index p^2q . We use the classification of finite simple groups and prove that the group with abelian Sylow p -subgroup $P \neq 1$ whose order less than p^2 and $2|P|^3 > |G|$ is isomorphic to $L_2(q)$.

Keywords: finite group, character of a finite group, irreducible character degree of a finite group.

Введение

Пусть G — конечная группа, обладающая неприводимым представлением над полем комплексных чисел с характером Θ .

В общем случае степени неприводимых характеров несут довольно скудную информацию о строении группы. Поэтому естественно изучать группы, у которых степени неприводимых характеров имеют некоторые дополнительные свойства и удовлетворяют определенным ограничениям.

Конечную группу $G \neq 1$, обладающую неприводимым комплексным характером Θ , для которого $2\Theta(1)^2 \geq |G|$, будем называть $LC(\Theta)$ -группой.

Цель настоящей работы — изучение конечных $LC(\Theta)$ -групп с $\Theta(1) = p^2q$, где p и q — различные простые числа и $p > q$.

Так как $|G| \leq 2p^4q^2 < 2p^6$, где $p > q$, p и q — различные простые числа, и силовская p -подгруппа группы G имеет порядок не меньше p^2 , сначала, используя классификацию конечных простых групп, опишем простые неабелевы группы G с абелевой силовой p -подгруппой P порядка p^2 , для которых $|G| < 2|P|^3$.

Е. П. Вдовиным в [1] доказано, что $|A|^3 < |G|$, если G — конечная простая группа, неизоморфная $PSL_2(q)$ и A — ее абелева подгруппа. С использованием классификации конечных простых групп получены следующие результаты.

Теорема 1. Пусть G — конечная простая неабелева группа с абелевой силовой p -подгруппой $P \neq 1$ порядка не более p^2 . Если $2|P|^3 > |G|$, то G изоморфна группе $L_2(q)$, где q — либо простое число, либо квадрат простого числа.

Теорема 2. Пусть G является $LC(\Theta)$ -группой. Если $\Theta(1) = p^2q$, где p и q — различные простые числа, $p > q$, то G — p -разрешимая группа.

В доказательстве теоремы 2 также установлено, что при $|G| \notin \{486, 648\}$ порядок группы $|G|$ равен p^2q^bm , где $(pq, m) = 1$. Следующая теорема дает описание $LC(\Theta)$ -групп.

Теорема 3. Пусть G является $LC(\Theta)$ -группой с $\Theta(1) = p^2q$, где $p > q$ и p, q — простые числа. Тогда G имеет абелеву нормальную подгруппу M индекса p^2q .

Все группы предполагаются конечными. Буквы p и q везде используются для обозначения различных простых чисел. Необходимые сведения, касающиеся обыкновенных и модулярных представлений конечных групп, можно найти в [2, 3]. Скалярное произведение характеров χ и ψ группы G обозначается через $\langle \chi, \psi \rangle$. В частности, если эти характеры неприводимы, то $\langle \chi, \psi \rangle = \delta_{\chi, \psi}$ (δ — символ Кронекера). Множество неприводимых характеров группы G обозначается через $\text{Irr}(G)$.

1. Вспомогательные результаты

Напомним, фундаментальный результат Клиффорда об ограничении неприводимого характера χ группы G на ее нормальную подгруппу N .

Лемма 1 (Клиффорд). Пусть $N \triangleleft G$ и $\chi \in \text{Irr}(G)$, а $\theta \in \text{Irr}(N)$. Тогда из $\langle \chi_N, \theta \rangle_N \neq 0$ следует, что

$$\chi_N = e(\chi) \sum_{i=1}^t \theta_i,$$

где θ_i — характеры, сопряженные θ . Число t различных сопряженных характеров к характеру θ равно индексу подгруппы инерции $I_G(\theta)$ характера θ (состоящей из всех $g \in G$, для которых $\theta^g = \theta$), а число $e = e(\chi)$ делит $|I_G(\theta) : N|$, если G/N — разрешимая группа.

Доказательство. См. теорему 6.2 из [3].

Лемма 2. Пусть $N \triangleleft G$ и $\chi \in \text{Irr}(G)$, а $\theta \in \text{Irr}(N)$. Если $I_G(\theta)/N$ — циклическая группа, то $e(\chi) = 1$, т. е. $\chi_N = \sum_{i=1}^t \theta_i$.

Доказательство. См. 9.12 из [4].

Напомним теорему Ито о степени неприводимого характера (теорема 6.15 в [3]).

Лемма 3 (Ито). Пусть $N \triangleleft G$ и N абелева. Тогда $\chi(1) \mid |G : N|$ для всех $\chi \in \text{Irr}(G)$.

В дальнейшем нам потребуются следующие две теоремы В. И. Зенкова из [5].

Лемма 4. Пусть G — конечная группа с силовской p -подгруппой P . Если $p \neq 2$ и не простое число Мерсенна, то $P \cap P^x = O_p(G)$ для некоторого $x \in G$. Если $O_p(G) = 1$, то $|P|^2 < |G|$.

Лемма 5. Пусть G — конечная группа, p — простое число, P — силовская p -подгруппа из G , $S(G)$ — разрешимый радикал группы G и $|G| = p^a m$, где $(p, m) = 1$. Если $p^a \geq m$, то справедливо одно из следующих утверждений:

- (1) G содержит характеристическую p -подгруппу порядка $> p^a m^{-1}$;
- (2) в фактор-группе $\overline{S(G)} = S(G)/O_p(G)$ выполняются утверждения одного из следующих пунктов:

(2а) $p = 2, q = 2^n + 1$ — простое число Ферма и $\overline{S(G)}$ содержит секцию, изоморфную $(Z_{2^n+1} \rtimes Z_{2^n}) \wr Z_2$, при $n > 2$ и $((Z_3 \rtimes Z_2) \wr Z_2) \wr Z_2, V_9 \rtimes SD_{16}, (V_9 \rtimes Z_8) \wr Z_2, (V_9 \rtimes Q_8) \wr Z_2$ при $n = 1$;

(2б) $p = 2^n - 1$ — простое число Мерсенна и $\overline{S(G)}$ содержит секцию, изоморфную $(Z_{2^n} \rtimes Z_p) \wr Z_p$;

(2в) $p = 2$ и $S(G)$ содержит секцию, изоморфную $((V_{7^2} \rtimes SD_{2^5}) \wr Z_2) \wr Z_2$, причем во всех трех случаях (2а), (2б) и (2в) действие точное;

(3) $p = 2$ и фактор-группа $\tilde{G} = G/S(G)$ содержит секцию L , изоморфную одной из следующих групп: $((S_5 \wr Z_2) \wr Z_2) \wr Z_2, \text{Aut}(A_6) \wr Z_2, \text{Aut}(L_3(2)) \wr Z_2, \text{Aut}(L_3(4)) \wr Z_2$, причем каждая компонента из L является изоморфным образом соответствующей компоненты из $E(\tilde{G})$.

В [6] доказаны два вспомогательных утверждения, которые будут использоваться при изучении $LC(\Theta)$ -групп с $\Theta(1) = p^2 q$.

Лемма 6. Пусть G — $LC(\Theta)$ -группа и M — ее собственная нормальная подгруппа. Тогда характер Θ_M приводим.

Лемма 7. Пусть G — $LC(\Theta)$ -группа и N — ее собственная нормальная подгруппа. Если $\Theta(1) = m$, то $(|G/N|, m) \neq 1$.

Приведем известный результат из [7] о разрешимости группы, обладающей самонормализуемой силовской p -подгруппой ($p > 3$).

Лемма 8. Пусть G — конечная группа с силовской p -подгруппой P , $p > 3$ и $N_G(P) = P$. Тогда G разрешима.

Для оценки порядков абелевых подгрупп простых групп нам потребуется следующий результат Е. П. Вдовина [1].

Лемма 9. Пусть G — неабелева конечная простая группа и $G \not\cong L_2(q)$, где $q = p^t$ для некоторого простого числа p . Пусть A — абелева подгруппа группы G . Тогда $|A|^3 < |G|$.

Лемма 10. Пусть $G = G'$ — не p -разрешимая группа с силовой p -подгруппой P порядка $p > 3$, не имеющая нормальных подгрупп порядка 2. Если $|G| < p^3$, то $G \simeq L_2(r)$, где $r = p$ или $r = 2^a = p - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. следствие 5.2, гл. VIII из [8].

Лемма 11 (Казарин). Пусть G — конечная группа, $x \in G$ — элемент простого порядка q . Если $|G : C_G(x)|$ — степень простого числа p , то $\langle x^G \rangle' = O_p(\langle x^G \rangle)$. В частности, нормальное замыкание x в G имеет коммутант, являющийся p -группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [9].

Предложение 1. Пусть G — конечная группа, и пусть x такой элемент группы G , что $|G : C_G(x)|$ — степень простого числа p . Тогда

$$[x^G, x^G] \subseteq O_p(G).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [10].

2. Доказательство теоремы 1

Согласно теореме классификации конечных простых неабелевых групп (см. [11] для более подробной информации) все простые неабелевы группы принадлежат одному из следующих семейств:

I. Классические простые группы лиева типа: $L_n(q)$, $n \geq 2$, $U_n(q)$, $n \geq 3$, $S_{2n}(q)$, $n \geq 2$, $P\Omega_{2n+1}(q)$, $n \geq 2$, $P\Omega_{2n}^\pm(q)$, $n \geq 4$.

II. Исключительные простые группы лиева типа: $G_2(q)$, $F_4(q)$, $E_6(q)$, $E_7(q)$, $E_8(q)$, ${}^2G_3(q)$, $({}^2F_4(q))'$, ${}^3D_4(q)$, ${}^2B_2(q)$, q — степень простого числа.

III. Спорадические простые группы.

IV. Знакопеременные группы A_n , $n \geq 5$.

Доказательство теоремы 1 будем проводить шаг за шагом для всех перечисленных групп. Напомним, что в теореме 1 силовая p -подгруппа $P \neq 1$ имеет порядок не выше p^2 .

I. Классические простые группы лиева типа.

При изучении групп Шевалле полагаем: $GF(q)$ — поле порядка q , r — его характеристика.

(а) Пусть $G \cong L_n(q)$, $n \geq 2$. Легко видеть, что $|G| > q^{n^2-n}$, а наибольший простой делитель порядка группы не превосходит $q^n - 1 < q^n$. Так как $2p^6 < p^{7n}$, то $q^{7n} > q^{n^2-n}$. Отсюда $n^2 - n < 7n$ и $n^2 - 8n < 0$, значит, $n < 8$.

При $n = 7$ имеем

$$|G| = 1/dq^{21}(q^7 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^4 - 1)(q^3 - 1)(q^2 - 1) > q^{42},$$

где $d = (7, q-1)$. Так как $q^7 - 1 = (q-1)(q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)$, наибольший простой делитель порядка группы не превосходит $q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 < 2q^6$. Если $p^2 | q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$, то $p^2 < q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 < 2q^6$. Значит, $2(2q^6)^3 = 2^4 q^{18} > |G| > q^{42}$, что невозможно.

Если $p^2 \nmid q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$, то $p | q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$, ибо $q^5 - 1 = (q-1)(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)$. Так как $q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 < 2q^4$ и $q^5 - 1$ взаимно просто со всеми делителями вида $q^i - 1$ при $i \neq 5$ порядка группы, то $p^2 < 2q^4$ и $p^2 | q^5 - 1$. Значит, $2p^6 < 2(q^5 - 1)^3 < 2q^{15} < q^{42}$, что исключает этот случай.

Пусть $n = 6$, тогда $|G| > q^{30}$. Так как $q^5 - 1 = (q-1)(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)$, наибольший простой делитель порядка группы не превосходит $q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 < 2q^4$. Если $p^2 | q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$, то $p^2 < q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 < 2q^4$. Значит, $2(2q^4)^3 = 2^4 q^{12} > |G| > q^{30}$, что неверно.

Если $p^2 \nmid q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$, то $p | q^2 + q + 1$, ибо $q^6 - 1 = (q^3 - 1)(q^3 + 1) = (q-1)(q^2 + q + 1)(q+1)(q^2 - q + 1)$. Тогда $p < q^2 + q + 1$, а так как $q^2 + q + 1 < 2q^2$ в разложении порядка группы имеет вторую степень, то $p^2 < (2q^2)^2$. Значит, $2p^6 < 2(2q^2)^6 = 2^7 q^{12} < q^{30}$, что исключает этот случай.

При $n = 5$ наибольший простой делитель порядка группы также не превосходит $q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 < 2q^4$ и $|G| > q^{20}$. Если $p^2 | q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$, то $p^2 < q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 < 2q^4$. Значит, $2(2q^4)^3 = 2^4 q^{12} > |G| > q^{20}$, что неверно.

Если $p^2 \nmid q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$, то $p | q^2 + q + 1$, ибо $q^3 - 1 = (q-1)(q^2 + q + 1)$. А так как $q^2 + q + 1 < 2q^2$ взаимно просто со всеми делителями порядка группы вида $q^i - 1$ при $i \neq 3$, то $p^2 < 2q^2$ и $p^2 | q^3 - 1$. Значит, $2p^6 < 2(q^3 - 1)^3 < q^{20}$, что исключает и этот случай.

Если $n = 4$, то наибольший простой делитель порядка группы не превосходит $q^2 + q + 1 < 2q^2$ и $|G| > q^{12}$. Если $p^2 | q^2 + q + 1$, то $p^2 < q^2 + q + 1 < 2q^2$. Значит, $2(2q^2)^3 > |G| > q^{12}$, что неверно. Если p^2 не делит $q^2 + q + 1$, то $p | q^2 + 1$. Так как $q^2 + 1$ взаимно прост со всеми делителями порядка группы вида $q^i - 1$ при $i \neq 3$, то $p^2 | q^2 + 1$. Значит, $2p^6 < 2(q^2 + 1)^3 < q^{12}$, что исключает и этот случай.

Если $n = 3$, то $|G| = (1/d)q^3(q^3 - 1)(q^2 - 1)$, $d = (3, q-1)$. Поэтому p^2 делит либо $(q-1)^2$, либо $q+1$, либо $q^2 + q + 1$. Непосредственные вычисления показывают, что и этот случай исключен.

Таким образом, если $G \simeq L_n(q)$ удовлетворяет условию теоремы 1, то $n = 2$.

(b) Пусть $G \simeq U_n(q)$, $n \geq 3$. Легко видеть, что $|G| > q^{n^2-n}$, а наибольший простой делитель порядка группы не превосходит q^n . Так как $2p^6 < p^{7n}$, то $q^{7n} > q^{n^2-n}$. Отсюда $n^2 - n < 7n$ и $n^2 - 8n < 0$, поэтому $n < 8$.

Допустим, что $n = 7$. Тогда

$$|G| = 1/dq^{21}(q^7 + 1)(q^6 - 1)(q^5 + 1)(q^4 - 1)(q^3 + 1)(q^2 - 1) > q^{42},$$

где $d = (7, q+1)$. Так как $q^7 + 1 = (q+1)(q^6 - q^5 + q^4 - q^3 + q^2 - q + 1)$, наибольший простой делитель порядка группы не превосходит $q^6 - q^5 + q^4 - q^3 + q^2 - q + 1 < q^6$. Если $p^2 | q^6 - q^5 + q^4 - q^3 + q^2 - q + 1$, то $p^2 < q^6 - q^5 + q^4 - q^3 + q^2 - q + 1 < q^6$.

Значит, $2(q^6)^3 > |G| > q^{42}$, что неверно. Если $p^2 \nmid q^6 - q^5 + q^4 - q^3 + q^2 - q + 1$, то $p \mid q^4 - q^3 + q^2 - q + 1$, ибо $q^5 + 1 = (q + 1)(q^4 - q^3 + q^2 - q + 1)$. Так как $q^4 - q^3 + q^2 - q + 1 < q^4$ взаимно просто со всеми делителями порядка группы вида $q^i - (-1)^i$, то $p^2 < q^4$ и $p^2 \mid q^5 + 1$. Значит, $2p^6 < 2(q^5 + 1)^3 < q^{42}$, что исключает этот случай.

Пусть $n = 6$, тогда $|G| > q^{30}$. Так как $q^5 + 1 = (q + 1)(q^4 - q^3 + q^2 - q + 1)$, наибольший простой делитель порядка группы не превосходит $q^4 - q^3 + q^2 - q + 1 < q^4$. Если $p^2 \mid q^4 - q^3 + q^2 - q + 1$, то $p^2 < q^4 - q^3 + q^2 - q + 1 < q^4$. Значит, $2(q^4)^3 = 2q^{12} > |G| > q^{30}$, что неверно. Если $p^2 \nmid q^4 - q^3 + q^2 - q + 1$, то $p \mid q^2 + q + 1$, ибо $q^3 - 1 = (q - 1)(q^2 + q + 1)$. Поэтому $p < q^2 + q + 1$. Так как $q^2 + q + 1$ взаимно просто со всеми делителями порядка группы вида $q^i - (-1)^i$ при $i \neq 3$, то $p^2 \mid (q^2 + q + 1)$. А значит, $2p^6 < 2(q^2 + q + 1)^3 < q^{30}$, что исключает и этот случай.

При $n = 5$ наибольший простой делитель порядка группы также не превосходит $q^4 - q^3 + q^2 - q + 1 < q^4$. Если $p^2 \mid q^4 - q^3 + q^2 - q + 1$, то $p^2 < q^4 - q^3 + q^2 - q + 1 < q^4$. Значит, $2(q^4)^3 > |G| > q^{20}$, что невозможно. Если p^2 не делит $q^4 - q^3 + q^2 - q + 1$, то $p \mid q^2 + 1$. Так как $q^2 + 1$ взаимно просто со всеми делителями порядка группы, имеем $p^2 \mid q^2 + 1$. Тогда $2p^6 < 2(q^2 + 1)^3 < q^{20}$, что исключено.

Если $n = 4$, то $|G| > q^{12}$ и наибольший простой делитель порядка группы не превосходит $q^2 + 1$. Если $p^2 \mid (q^2 + 1)$, то $p^2 < q^2 + 1$. Значит, $2(q^2 + 1)^3 > |G| > q^{12}$, что неверно. Если p^2 не делит $(q^2 + 1)$, то $p \mid q^2 - q + 1$, ибо $q^3 + 1 = (q + 1)(q^2 - q + 1)$. А так как $q^2 - q + 1 < q^2$ взаимно просто со всеми делителями порядка группы вида $q^i - (-1)^i$, то $p^2 < q^2$ и $p = q$. Потому $2p^6 < q^{12}$, что тоже исключает этот случай.

Если $n = 3$, то $|G| = (1/d)q^3(q^3 + 1)(q^2 - 1)$, $d = (3, q + 1)$. Поэтому p^2 делит либо $q - 1$, либо $(q + 1)^2$, либо $q^2 - q + 1$. Непосредственные вычисления показывают, что и этот случай исключен.

(с) Пусть G изоморфна $S_{2n}(q)$ или $P\Omega_{2n+1}(q)$, $n \geq 2$. Порядок G равен

$$1/dq^{n^2}(q^{2n} - 1) \dots (q^2 - 1),$$

где $d = (2, q - 1)$. Если $n \geq 2$, то $|G| > q^{2n^2}$. Наибольший простой делитель порядка G не превосходит $q^n + 1$. Если $p^2 \mid (q^n + 1)$, то $2(q^n + 1)^3 < q^{3n+2} < q^{2n^2}$ для $n \geq 3$. При $(q, n) = (2, 2)$ группа $G \simeq S_4(2)$ не проста и $S_4(2)' \simeq L_2(9)$.

Если $p^2 \nmid (q^n + 1)$, то $p \mid q^{n-1} + 1$, значит, $p^2 \mid q^{n-1} + 1$. Потому $2p^6 < 2(q^{n-1} + 1)^3 < q^{3n-1} < q^{2n^2}$ для $n \geq 3$, что исключает этот случай.

(d) Пусть $G \simeq P\Omega_{2n}^\pm(q)$, $n \geq 4$. Легко видеть, что $|G| > q^{2n^2-2n}$, а наибольший простой делитель ее порядка не превосходит $q^n + 1$. Если $p^2 \mid (q^n + 1)$, то $2(q^n + 1)^3 < q^{3n+2}$ при $n \geq 4$, то $2p^6 < |G|$.

Если $p^2 \nmid (q^n + 1)$, то $p \mid q^{n-1} + 1$, значит, $p^2 \mid q^{n-1} + 1$. Потому $2p^6 < 2(q^{n-1} + 1)^3 < q^{3n-1} < q^{2n^2-2n}$ для $n \geq 4$, что исключает этот случай.

II. Исключительные простые группы лиева типа.

(а) Пусть $G \simeq G_2(q)$. Порядок G равен $q^6(q^6-1)(q^2-1)$, так что наибольший простой делитель порядка группы не превосходит $q^2+q+1 < 2q^2$. Если $p^2|q^2+q+1$, то $p^2 < q^2+q+1 < 2q^2$. Значит, $2(2q^2)^3 = 2^4q^6 > |G|$. Однако $|G| > q^{13}$, так что этот случай исключен.

Если $p^2 \nmid q^2+q+1$, то $p|q^2-q+1$. Так как q^2-q+1 взаимно просто со всеми делителями порядка группы вида $q^i \pm 1$ для $i \neq 3$, то $p^2|q^2-q+1$. Тогда $p^2 < q^2-q+1 < q^2$, потому $2p^6 < 2q^6 < q^{13}$, что исключает этот случай.

(б) Пусть $G \simeq F_4(q)$ порядка $q^{24}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)$. Наибольший простой делитель порядка G не превосходит q^4+1 . Так как $2(q^4+1)^6 < |G|$, этот случай исключен.

(с) Пусть G — одна из групп $E_6(q), E_7(q), E_8(q)$ или ${}^2E_6(q)$. Порядок любой из этих групп больше q^{72} , а наибольший простой делитель порядка не превосходит q^9 . Так что эти группы также исключены.

(д) Пусть $G \simeq {}^2G_2(q)$. Порядок этой группы равен $q^3(q^3+1)(q-1)$. При этом $q = 3^{2n+1}, n \geq 1$, а наибольший простой делитель p порядка группы не превосходит $q + \sqrt{3q} + 1 < 2q$. Пусть $q > 3$. Если $p^2|q + \sqrt{3q} + 1$, то $p^2 < q + \sqrt{3q} + 1 < 2q$. Значит, $2(2q)^3 = 2^4q^3 < |G|$, что невозможно. Если $p^2 \nmid q + \sqrt{3q} + 1$, то $p = q$ — наибольший простой делитель порядка G . Тогда $2q^6 \geq |G|$, так что $q = 3$ и $G \simeq L_2(8).3$ — не простая группа.

(е) Пусть $G \simeq ({}^2F_4(q))'$. Ее порядок равен $q^{12}(q^6+1)(q^4-1)(q^3+1)(q-1) > 2q^{16}$, где $q = 2^{2n+1}, n \geq 2$, а наибольший простой делитель p порядка группы не превосходит $q^4 - q^2 + 1 < q^4$. Если $p^2|q^4 - q^2 + 1$, то $p^2|q^4 - q^2 + 1 < q^4$. Значит, $2(q^4)^3 = 2q^{12} < 2q^{16} < |G|$. Если $p^2 \nmid q^4 - q^2 + 1$, то $p|q^2 + 1$. Значит, $p < (q^2+1)$, а так как q^2+1 в разложении порядка группы имеет вторую степень, то $p^2 < (q^2+1)^2$. Потому $2p^6 < 2(q^2+1)^6 < |G|$, что исключает и этот случай.

(ф) Пусть $G \simeq {}^3D_4(q)$ порядка $q^{12}(q^8+q^4+1)(q^6-1)(q^2-1) > q^{26}$, а наибольший простой делитель p не превосходит $q^4 - q^2 + 1 < q^4$. Если $p^2|q^4 - q^2 + 1$, то $p^2 < q^4 - q^2 + 1 < q^4$. Значит, $2(q^4)^3 = 2q^{12} < |G|$.

Если $p^2 \nmid q^4 - q^2 + 1$, то $p|q^2 + q + 1$. Значит, $p < (q^2 + q + 1)$, а так как $q^2 + q + 1 < 2q^2$ в разложении порядка группы имеет вторую степень, то $p^2|q^2+q+1$. Поэтому $p^2 < q^2+q+1 < 2q^2$, стало быть, $2p^6 < 2(2q^2)^3 = 2^4q^6 < |G|$, что исключает и этот случай.

(г) Пусть $G \simeq {}^2B_2(q) \simeq Sz(q)$ порядка $q^2(q^2+1)(q-1)$, где $q = 2^{2n+1}, n \geq 1$. Наибольший простой делитель p порядка G не превосходит $q + \sqrt{2q} + 1 < 2q$. Если $p^2|q + \sqrt{2q} + 1$, то $p^2 < q + \sqrt{2q} + 1 < 2q$. Значит, $2(2q)^3 < |G|$. Если $p^2 \nmid q + \sqrt{2q} + 1$, то $p|q - \sqrt{2q} + 1$, откуда $p^2|q - \sqrt{2q} + 1$ и $p^2 < q - \sqrt{2q} + 1 < q$. Потому $2p^6 < 2q^3 < |G|$, что исключает и этот случай.

III. Спорадические простые группы. Все случаи исключены (см. [12]).

IV. Знакопеременные группы $A_n, n \geq 5$.

Так как $|A_n| = n!/2 \leq 2n^6$, то $n! \leq 4n^6$. С другой стороны, известно, что $n! \geq n^{n/2}$. Поэтому $n^{n/2} \leq 4n^6 < n^7$, откуда $n/2 < 7$ и $n < 14$. При $n = 5, 6$ появляются группы A_5, A_6 порядков 60, 360 соответственно, с абелевой силовой p -подгруппой P порядков 4, 9 соответственно. Заметим, что $A_5 \simeq$

$L_2(5)$ и $A_6 \simeq L_2(9)$. Все остальные возможности исключены. Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть G — $LC(\Theta)$ -группа с $\Theta(1) = p^2q$, где p и q — различные простые числа и $p > q$. Зафиксируем данные обозначения.

В силу равенства $\sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi(1)^2 = |G|$ и $2\chi(1)^2 \geq |G|$ характер Θ является единственным неприводимым характером группы G наибольшей степени, причем все значения $\Theta(g)$, $g \in G$, являются целыми рациональными числами.

В [13] доказано, что любой неприводимый характер $LC(\Theta)$ -группы, порядок которой не равен степени числа 2, является конститuentой характера $\Phi = \Theta^2$. Отметим, что $Z(G) = 1$ и Θ — точный характер.

Допустим, что $P \in \text{Syl}_p(G)$. Так как G — $LC(\Theta)$ -группа с $\Theta(1) = p^2q$, где p и q различные простые числа и $p > q$, причем $p^4q^2 < |G| \leq 2p^4q^2$ и $pq \mid |G|$, то $|G| = p^a q^b m$, $a, b, m \in \mathbb{N}$ и $2 \leq a$, т. е. силовская p -подгруппа группы G имеет порядок не меньше p^2 . Заметим, что $|G| \leq 2p^4q^2 < 2p^6$, поскольку $p > q$.

Верхние границы порядка силовской p -подгруппы в $LC(\Theta)$ -группе с $\Theta(1) = p^2q$ сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма 12. Пусть G — $LC(\Theta)$ -группа с $\Theta(1) = p^2q$, где p и q — различные простые числа и $p > q$. Тогда силовская p -подгруппа P группы G имеет порядок не больше p^5 . Если $P \triangleleft G$, то $|G| = 486$. Если P не нормальна в G , то $|P| \leq p^3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G — $LC(\Theta)$ -группа с $\Theta(1) = p^2q$, где $p > q$. Так как $|G| \leq 2p^4q^2 < p^7$, то $|P| \leq p^6$, иначе q не делит $|G|$. Если $|P| = p^6$, то $2p^4q^2 < 2p^6$ ввиду $q < p$. Значит, $|G| = |P| = p^6$ что неверно, ибо в таком случае q не делит $|G|$. Значит, $|P| \leq p^5$.

Допустим, что $|P| = p^5$. Так как $|G| = p^5 q^b m \leq 2p^4 q^2$, где $(m, pq) = 1$, то $b \leq 2$. Однако $p > q \geq 2$. Следовательно, можно считать, что $b = 1$. В этом случае $pm \leq 2q$. Так как при $m = 1$ подгруппа $P \triangleleft G$, то $m \geq 2$ и $p < q$ вопреки предположению. Стало быть, $|P| \triangleleft G$ и $|G| = p^5 q$. При этом $|Z(P)| = p$ и подгруппа Q порядка q из G действует нетривиально на $Z(P)$. Отсюда $q \mid p-1$. Существует $p-1$ сопряженных характеров группы G степени p^2q , исчезающих на $P \setminus Z(P)$. Поэтому группа Q разбивает их на орбиты длины q . Таким образом, имеется $(p-1)/q$ характеров группы G степени p^2q . Так как может быть только один характер степени p^2q , то $q = p-1$. Отсюда $p = 3$, $q = 2$ и $|G| = 486$.

Допустим, что $P \triangleleft G$ и $|P| = p^4$. По лемме 1 имеем

$$\Theta_P = e \sum_{i=1}^s \chi_i,$$

где $e, s \mid |G/P|$ и $\chi_i \in \text{Irr}(P)$. Так как G/P имеет порядок, взаимно простой с p , и $\Theta(1) = p^2q$, то $\chi_i(1) = p^2$, что приводит к противоречию, ибо сумма квадратов степеней неприводимых характеров группы P в этом случае больше p^4 . Стало быть, в случае нормальной P ее порядок равен p^5 . Лемма доказана.

Следующая лемма показывает, что когда $\Theta(1) = 3^2 \cdot 2$, порядок группы G содержится в $\{342, 486, 504, 648\}$.

Лемма 13. Пусть G — $LC(\Theta)$ -группа с $\Theta(1) = p^2q$, где p и q — различные простые числа, $p > q$. Тогда либо $p > 3$, либо $|G| \in \{342, 486, 504, 648\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $p = 3$. Тогда $q = 2$. Поэтому $|G| \leq 3^4 \cdot 2^3 = 648$, при этом порядок группы G делится на $\Theta(1) = 3^2 \cdot 2 = 18$. Учитывая, что

$$\frac{|G|}{|\Theta(1)|} = \frac{2^3 \cdot 3^4}{2 \cdot 3^2} \leq 2^2 \cdot 3^2 = 36,$$

и то, что неразрешимая группа порядка не более $81 \cdot 8 = 648$ имеет неразрешимый композиционный фактор, содержащийся в [12], убеждаемся в том, что таких факторов не должно быть. Отсюда заключаем, что G разрешима и $|G|$ делит одно из чисел: $648 = 2^3 \cdot 3^4$, $342 = 19 \cdot 2 \cdot 3^2$, $486 = 2 \cdot 3^5$ или $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$. Применяя GAP [14], убеждаемся, что каждая из этих возможностей реализуется.

Начиная с этого момента будем считать, что $p > 3$. Покажем, что порядок P может равняться p^3 только при $O_p(G) > 1$.

Лемма 14. Если $O_p(G) = 1$, то либо $P = N_G(P)$ и $|P| = p^3$, либо $|G| = p^2q^bm$, где $(pq, m) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $O_p(G) = 1$. Так как $|G|$ делится на $\Theta(1) = p^2q$, то $|G| = p^aq^bm$, где $(pq, m) = 1$ и $a, b, m \in \mathbb{N}$. По леммам 12 и 13 имеем $p > 3$, $2 \leq a \leq 3$. В силу леммы 4 $p^a < q^bm$ и из $2\Theta(1)^2 \geq |G|$ получаем $q^{b-2}m \leq 2p^{4-a}$.

Пусть $a = 3$ и $|G| = p^3q^bm$, где $p^3q^bm \leq 2p^4q^2$. Тогда $q^{b-2}m \leq 2p$. Так как $O_p(G) = 1$, из леммы 4 получаем $p^3 < q^bm \leq 2pq^2$. Значит, $p^2 \leq 2q^2$.

Пусть $|N_G(P)| = n|P| = np^3$, где $n > 1$. Так как по лемме 4 хотя бы для одного $x \in G$ выполнено $P \cap P^x = 1$, то

$$|G| \geq |N_G(P)| + \frac{n^2|P|^2}{d} = np^3 + \frac{n^2p^6}{d},$$

где $d = |N_G(P) \cap N_G(P)^x|$. Поэтому $p^3q^bm \geq np^3 + np^6$, откуда $q^bm > np^3$. Так как $np^3 < q^bm \leq 2pq^2$, то $np^2 < 2q^2$, где $n > 1$, т. е. $p^2 < q^2$, что невозможно.

Поэтому при $O_p(G) = 1$ имеем $N_G(P) = P$ для $|P| = p^3$ или $|G| = p^2q^bm$, где $(pq, m) = 1$.

Следующая лемма показывает, что для не p -разрешимой группы G случай $O_p(G) \neq 1$ невозможен.

Лемма 15. Если G не p -разрешима, то $O_p(G) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $O_p(G) > 1$. По лемме 3 степень любого неприводимого характера группы G делит $|G : O_p(G)|$, если $O_p(G)$ абелева. Так как G не p -разрешима, P не нормальна в G . Поэтому либо $|O_p(G)| = p$, либо $|O_p(G)| = p^3$. Покажем, что в любом случае G имеет нормальную подгруппу U порядка p . Если $|O_p(G)| = p$ это верно.

По лемме 3 если $|O_p(G)| = p^3$, то P неабелева и потому $|Z(P)| = p$ и $U = Z(P) \triangleleft G$. Пусть $H = C_G(U)$. Так как $U \triangleleft G$, то $H \triangleleft G$ и $G/H \leq \text{Aut}(U)$ и потому изоморфна циклической группе, имеющей порядок, делящий $p - 1$. Так как $Z(G) = 1$, то $G/H \neq 1$ и является циклической группой. По лемме 7 получаем, что $(p - 1)$ — степень числа q . Применяя теорему Клиффорда (лемма 1), имеем

$$\Theta_H = e \sum_{i=1}^s \chi_i,$$

где χ_i — сопряженные неприводимые характеры, e и s делят $|G/H| = q^\lambda$. Отсюда $p^2q = \Theta(1) = es\chi_i(1)$. По лемме 2 $e = 1$ и $\chi_i(1) = p^2$, $s = q$. Таким образом, H имеет q неприводимых характеров χ_i степени p^2 , откуда $|H| > p^4q$ и $|G| > p^4qq^\lambda$. Поэтому $\lambda = 1$. Так как $|G| = |H|q < 2p^4q^2$, то $|P|q^{b-1}m = |H| < 2p^4q$.

Если $|P| = p^4$, то $q^{b-1}m < 2q$. При этом $|H : P| = mq^{b-1} < 2q$. При $b \geq 2$ получаем, что $m \leq 2$ и H , а потому и G разрешима. Если $b = 1$, то $|H : P| = m < 2q$. Напомним, что $q \mid p - 1$. Так как p нечетно, то $q \leq (p - 1)/2$. Поэтому $|H : P| < p$ и $P \triangleleft H \triangleleft G$. В силу характеристичности P имеем $P \triangleleft G$ и G будет p -разрешимой вопреки предположению. Поэтому случай $|P| = p^4$ невозможен.

Теперь $|P| = p^3$ и $|H : P| = q^{b-1}m \leq 2pq$. При $b = 2$ имеем $|H : P| = qm \leq 2qr$ и потому $m \leq p$. Тогда $P \triangleleft H$, откуда $P \triangleleft G$ и G будет p -разрешимой вопреки предположению. Наконец, при $b = 1$ имеем $|H| = p^3m$, где $m \leq 2pq$.

Заметим, что $|O_p(G)| = p$ и $m \leq 2pq \leq p(p - 1)$. Поэтому в группе $\bar{H} = H/O_p(G)$, порядок которой меньше $|P|^2$, подгруппа $O_p(\bar{H})$ нетривиальна по лемме 4; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 16. Если $P = N_G(P)$, то G — p -нильпотентная группа порядка $p^2q^b m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 8 группа G разрешима. Если $|G| = p^2q^b m$, где $(pq, m) = 1$, то G p -нильпотентна по теореме Бернсайда.

По леммам 12 и 13 $|G| = p^a q^b m$, где $(pq, m) = 1$ и $2 \leq a \leq 3$. Предположим, что $a = 3$, причем $q^{b-2}m < 2p$.

Допустим, что $1 \neq m \leq p$. Если $m \mid |O_{p'}(G)|$, то для любого простого делителя r числа m в группе $O_{p'}(G)P$ существует холлова $\{r, p\}$ -подгруппа RP , являющаяся nilпотентной, что противоречит условию. Аналогичным образом, не существует нормальной подгруппы K группы G , порядок которой делится на r , но не делится на $|P|$. Так как G разрешима, она и r -разрешима. Поэтому $O_{r',r}(G)$ содержит P и по аргументу Фраттини $N_G(P) \neq P$; противоречие. Стало быть, либо $m = 1$, либо $m > p$ и является простым числом.

Если $m > p$ — простое число, то $q^{b-2} < 2$, откуда $1 \leq b \leq 2$. При $b = 1$ получаем противоречие аналогично предыдущему случаю. Поэтому $b = 2$. Так как $P = N_G(P)$, то при $m \mid |O_{p'}(G)|$ подгруппа M порядка m будет нормальной в $O_{p'}(G)$, а потому и в G . В этом случае $H = C_G(M) \triangleleft G$ и $|G/H| \mid |\text{Aut}(M)| = m - 1$. Так как $m > p$ и $m < 2p$, то p не делит $|G/H|$. В то же время $H \neq G$, ибо

$Z(G) = 1$; противоречие. Следовательно, m не делит $|O_{p'}(G)|$. Таким образом, либо $O_{p'}(G) = 1$, либо $q^2 = |O_{p'}(G)|$.

Допустим, что $|O_{p'}(G)| = q^2$. Если $Q \in \text{Syl}_q(G)$ циклическая, то $G/C_G(Q)$ имеет порядок, делящий $q - 1$ и отличный от единицы. Как и в предыдущем случае, это приводит к противоречию. Итак, $O_{p'}(G) = 1$.

По теореме 6.3.3 из [2] имеем $C_G(O_p(G)) \subseteq O_p(G)$. Если $|O_p(G)| = p$, то $|G| \mid p(p - 1)$, что противоречиво. Если $|O_p(G)| = p^3$, то $P \triangleleft G$ вопреки условию. Если же $|O_p(G)| = p^2$, то получаем противоречие с леммой 3.

Итак, можно считать, что $m = 1$ и $|G| = p^3 q^b$, где $q^{b-2} \leq 2p$. Из $|P| = |N_G(P)| = p^3$ следует, что случай $|O_p(G)| \neq 1$ ведет к противоречию. По теореме 6.3.3 в [2] и лемме 4 получаем, что $|O_q(G)| = q^b$ и $p^2 < 2q^2$. В частности, G является p -нильпотентной группой. Отметим, что $Q = O_q(G)$ является элементарной абелевой группой ввиду леммы 4 (в противном случае некоторый элемент порядка p индуцирует тривиальный автоморфизм на $Q/\Phi(Q)$). По лемме 3 получаем, что G не имеет неприводимых характеров степени $p^2 q$; противоречие. Все случаи рассмотрены. Лемма доказана.

Далее будем считать, что $|G| = p^2 q^b m$, где m взаимно просто с pq , $b \in \mathbb{N}$.

Лемма 17. Пусть G — не p -разрешимая $LC(\Theta)$ -группа. Тогда G не проста и любая простая не p -разрешимая секция L группы G изоморфна $L_2(r)$, где r — степень простого числа, причем $r = p, p^2$ или $p - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G — простая $LC(\Theta)$ -группа. По лемме 15 имеем $O_p(G) = 1$, а по леммам 14 и 16 порядка $|G| = p^2 q^b m$, где $p > q$, будет $(m, pq) = 1$. Напомним, что $\Theta(1) = p^2 q$. По теореме 1 группа G изоморфна группе $L_2(r)$. Так как порядок силовской p -подгруппы группы G делит p^2 , то r равно p, p^2 или $p - 1$.

Таблицы характеров данных групп имеются в [15]. Ни одна из перечисленных групп не является $LC(\Theta)$ -группой при любом выборе неприводимого характера Θ .

Предположим, что G имеет секцию S , изоморфную простой неабелевой группе. Так как порядок S равен $p^a q^c m'$, где $a \leq 2, m' \leq m, c \leq b$ и $|G| < 2|P|^3$, из теоремы 1 следует, что $S \simeq L_2(r)$, где r — степень простого числа. Лемма доказана.

Перейдем к завершению доказательства теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. В силу леммы 4 и условий, наложенных на группу G , имеем

$$p^4 q^2 < |G| = p^a q^b m \leq 2p^4 q^2,$$

где $a \leq 4$ ввиду леммы 12. Так как G не является p -разрешимой группой, из лемм 15 и 16 следует, что $a = 2$, откуда $q^{b-2} m \leq 2p^2$ и $q^{b-2} m > p^2$.

Покажем, что в композиционном ряде группы G не может содержаться двух не p -разрешимых композиционных факторов. В самом деле, по лемме 17 каждый из факторов будет изоморфен группе $L_2(r)$, где $r = p, p^2$ или $p - 1$.

Допустим, что в G имеется два композиционных фактора, изоморфных $L_2(p)$. Тогда $|G| \geq (1/4)p^2(p^2 - 1)^2$, тогда как $|G| < 2p^4q^2$. Так как $p > 3$, то $q \leq p - 1$. Отсюда

$$\frac{8p^4q^2}{p^2(p^2 - 1)^2} = \frac{8p^2q^2}{(p^2 - 1)^2} \leq \frac{2p^2}{(p + 1)^2} < 8.$$

Учитывая, что $Z(G) = 1$, а внешняя группа автоморфизмов группы $L_2(p)$ имеет порядок 2 для нечетного p , заключаем, что G имеет подгруппу индекса ≤ 4 , изоморфную $L_2(p) \times L_2(p)$.

Так как при $r = p - 1$ и $p > 3$ число r является степенью двойки, имеем $|L_2(p - 1)| = p(p - 1)(p - 2) > |L_2(p)|$. Поэтому случай, когда хотя бы одна из групп $L_2(p)$ заменена на $L_2(p - 1)$, также исключен.

Докажем, что существование в композиционном ряде группы G фактора, изоморфного $L_2(p^2)$ также невозможно. Действительно,

$$|L_2(p^2)| = (1/2)p^2(p^4 - 1) > |L_2(p) \times L_2(p)|.$$

По лемме 15 $O_p(G) = 1$. Пусть $M = O_{p'}(G)$. Если $C_G(M) \subseteq M$, то из леммы 5 следует, что $|M| \geq |P| + 1 = p^2 + 1$. Так как $|P| = p^2$, получаем

$$2p^4q^2 \geq |G| \geq |M||L_2(p)|p = (1/2)(p^2 + 1)p^2(p^2 - 1).$$

Отметим, что q делит $|L_2(p)|$. Поэтому $q \leq (p + 1)/2$ и, стало быть, G совпадает с подгруппой порядка $(1/2)(p^2 + 1)p^2(p^2 - 1)$. Причем в этом случае $|M| = p^2 + 1$. Последнее возможно только в том случае, когда P имеет единственную орбиту на $M \setminus \{1\}$. Тогда MP — группа Фробениуса и P — циклическая группа, что неверно.

Таким образом, $C_G(M) \triangleleft G$ не является p -разрешимой группой, но порядок G делится на $|M|p|L_2(p)|$. Более того, имеется единственный не p -разрешимый фактор группы $C_G(M)$, изоморфный $L_2(p)$. Поэтому $T \simeq L_2(p)$ или $T \simeq SL_2(p)$ нормальна в G . В G имеется фактор, изоморфный C_p , циклической группе порядка p , причем наибольшая нормальная p -разрешимая подгруппа S группы G имеет p -длину один. Легко видеть, что G/S изоморфна $L_2(p)$, группе автоморфизмов $L_2(q)$ порядка $p(p^2 - 1)$. Таким образом, имеются следующие возможности:

- а) $G/S \simeq PGL_2(p)$, $q = 2$ и $|G| \leq 8p^4$;
- б) $G/S \simeq L_2(p)$, S/M — расширение C_p с помощью подгруппы порядка $q^\mu \mid (p - 1)$;
- в) $G/S \simeq L_2(p)$, $|S/M| = p$, $q \mid (p + 1)/2$.

Во всех случаях по теореме 6.3.3 в [2] имеем $C_S(M) \subseteq M$ и потому $|M| \geq p + 1$. Так как $Z(G) = 1$, случай, когда подгруппа, изоморфная $SL_2(p)$, нормальна в G , исключен.

(а) Если $q = 2$, то $|G| \leq 8p^4$, тогда как $|S||L_2(p)| \geq (p + 1)p^2(p^2 - 1)$. Поэтому $p \leq 7$. Так как в этом случае подгруппа $O_{p'}(G)$ должна иметь порядок не более 8, получаем противоречие. Случай (а) невозможен.

(b) В этом случае $q \leq (p-1)/2$ и $G \simeq S \times L$, где $L \simeq L_2(p)$. Непосредственные вычисления дают оценку $|M| \leq 2p - 2$. Поэтому в M имеется не более одной орбиты длины p . В частности, M — элементарная абелева примарная группа. Отсюда степень любого неприводимого характера ψ группы $S = M \rtimes C_p \rtimes C_d$ для d , делящего $p-1$, делит dp . Так как $p^2 > |M|$, то $\psi(1) \leq d$. Согласно [15, с. 262, 263]) степень любого неприводимого характера группы $L_2(p)$ не превосходит $p+1$. По теореме 3.7.1 в [2] любой неприводимый характер группы G есть произведение неприводимых характеров групп S и L . Стало быть, G не имеет характеров степени p^2q .

(c) Группа $G = S \times L$. Так как $|G| \leq 2p^4q^2$, то $|S||L| \leq 2p^4q^2$ и $|S| \leq 4pq^2 + 2q$. Так как L не имеет характеров степени больше, чем $p+1$ (см. [15, с. 262, 263]), а степень любого неприводимого характера группы G является произведением степени неприводимого характера группы L и степени неприводимого характера группы S , то должен существовать неприводимый характер S степени pq . Поэтому $|S| > p^2q^2$, откуда $p < 4q$. Это означает, что $q = (p+1)/2$.

Напомним, что $q^{b-2}m < 2p^2$. Так как $p-1$ делит в этом случае m , то $m = t(p-1)$ для некоторого натурального t . При $b = 4$ получим $(p+1)^2m < 8p^2$. Но тогда $m \leq 7$ и $p \leq 8$. Несложные вычисления исключают эту возможность.

Предположим, что $b = 3$. Тогда $m \leq 4(p-1)$. В этом случае $|M| = q^2m/(p-1) = tq^2$, где $t \leq 4$. Если $t = q = 2$, то $p = 3$, что уже было исключено. Если $t = q = 3$, то $p = 5$. Но тогда $p = 5$ не делит $|Out(M)|$. В остальных случаях группа S имеет абелеву силовскую q -подгруппу. По лемме 3 S не может иметь неприводимого характера степени pq .

Предположим, что $b = 2$. Тогда $p^2 < m < 2p^2$. При этом $m = t(p-1)$ для некоторого натурального t . Порядок M равен $qm/(p-1)$. Если $t = q$ или $t = 2q$, то группа S не имеет неприводимого характера степени pq . В любом другом случае группа S имеет порядок, меньший p^2q^2 , и потому $b \neq 2$.

Теперь $b = 1$, $|G| = p^2qm$, где $p^2q < m < 2p^2q$, $q = (p+1)/2$. В этом случае $|S| = pm/(p-1)$. Поскольку степень неприводимого характера должна делить порядок группы, отсюда следует, что S не имеет характера степени pq , а тогда и G не имеет характера степени p^2q . Все возможности исключены. Теорема 2 доказана.

4. Доказательство теоремы 3

В теореме 2 было установлено, что G является p -разрешимой группой. В лемме 12 (при условии, что $|G| \neq 486$) порядок силовской p -подгруппы P группы G не больше p^3 . В леммах 14 и 16 доказано, что $|P| = p^2$ при $O_p(G) = 1$.

Лемма 18. $O_p(G) = 1$ и $|P| = p^2$.

Доказательство. Допустим, что $U = O_p(G) = 1$. По лемме 12 подгруппа $P \in \text{Syl}_p(G)$ не нормальна в G . Из леммы 3 следует, что $|U| \neq p^2$. Поэтому $|U| = p$. Следовательно, $H = C_G(P)$ содержит коммутант группы G , и в силу

леммы 7 $|G/H| = q^\lambda \neq 1$ и группа G/H циклическая. По леммам 1, 2 и 6 имеем

$$\Theta_H = \sum_{i=1}^q \chi_i,$$

где $\chi_i \in \text{Irr}(P)$. Так как G/H имеет взаимно простой с p порядок и $\Theta(1) = p^2 q$, то $\chi_i(1) = p^2$. Поэтому H имеет q сопряженных неприводимых характеров степени p^2 . Так как $|H| > p^4 q$ и $|G/H| = q^\lambda$, то $\lambda = 1$.

Имеется q -подгруппа Q группы G , не лежащая в H . Она действует сопряжениями на множестве неприводимых характеров степени p^2 группы H . Группа Галуа действует на множестве характеров степени $p^2 q$ группы G . Общее количество неприводимых характеров степени p^2 группы H равно $p - 1$. В орбиту группы Q попадают q таких характеров. Поэтому количество неприводимых характеров степени $p^2 q$ у группы G не меньше $(p - 1)/q$. Так как имеется ровно один характер, сопряженный с Θ , то $p - 1 = q$. Поэтому в данном случае $p = 3, q = 2$, что исключено в замечании перед леммой 14. Итак, $O_p(G) = 1$ и $|P| = p^2$. Лемма доказана.

По теореме 2 группа G является p -разрешимой, а из леммы 18 получили, что силовская p -подгруппа P группы G абелева порядка p^2 . По теореме 6.3.3 в [2] имеем $G = O_{p',p,p'}(G)$, причем $H = O_{p',p}(G) = M \rtimes P$, где $M = O_{p'}(G)$. Эти обозначения зафиксируем до конца доказательства теоремы 3.

Лемма 19. Если $G \neq H$, то $|G : H| = q$ и $\Theta_H = \sum_{i=1}^q \chi_i$, где $\chi_i \in \text{Irr}(H)$ — сопряженные характеры группы H степени p^2 .

Доказательство. По теореме 2 $LC(\Theta)$ -группа G p -разрешима и $|G| = p^2 q^b m$, где $\Theta(1) = p^2 q$, причем $(pq, m) = 1$. Допустим, что $P \in \text{Syl}_p(G)$ и $H = O_{p',p}(G)$. Так как P — абелева группа порядка p^2 , то P изоморфна либо циклической группе C_{p^2} , либо элементарной абелевой $C_p \times C_p$. Тем самым $G/H \leq \text{Out}_G(P)$ является p' -группой. Обозначим $f = |G : H|$. По лемме 7 группа G/H не может иметь нормальных подгрупп простого индекса, отличного от q . Так как p' -группа $\text{Out}_G(P)$ изоморфна либо циклической группе порядка, делящего $p - 1$ (случай $P = C_{p^2}$), либо группе порядка, делящего $(p^2 - 1)(p - 1)$ (случай $P \cong C_p \times C_p$), то q делит $p \pm 1$. По лемме 1 (теория Клиффорда) имеем

$$\Theta_H = e \sum_{i=1}^s \chi_i,$$

где χ_i — сопряженные неприводимые характеры группы H , причем $es\chi_1(1) = p^2 q$, где es делит $|G : H|$. В частности, из $(p, es) = 1$ следует, что $es = q$ и $\chi_i(1) = p^2$. В любом случае имеется нормальная подгруппа $H_1 \geq H$ индекса q в G . Так как Θ_{H_1} приводим ввиду леммы 7, то $\Theta_{H_1} = e \sum_{i=1}^q \chi_i$, где $\chi_i(1) = p^2$. В частности, $|G : I_G(\chi_1)| = q$. Поэтому получаем

$$\chi_1^G = \sum_{i=1}^t e_i \bar{\phi}_i,$$

где один из характеров, скажем $\bar{\phi}_1$, равен Θ и

$$\sum_{i=1}^t e_i^2 = |I_G(\chi_1) : H| = f/g.$$

Понятно, что $H_1 = I_G(\Theta)$. Так как H_1 имеет q неприводимых характеров степени p^2 , то $|H_1| \geq (p^4q + 1)$. С другой стороны, подгруппа $M = O_{p'}(G)$ не централизуется элементом из $P^\#$ ввиду леммы 3 (теорема Ито). Поэтому $|M| > p^2$ и потому $|H| > p^4$. Следовательно, из $|G| = |G : H| < 2p^4q^2$ получаем, что $f = |G : H| < 2q^2$. Таким образом, ввиду леммы 7 имеются следующие возможности:

- (a) $|G : H| = q^2$;
- (b) $|G : H| = q(q+1)$, где либо $q+1$ — степень двойки, либо $q+1 = 3$, $q = 2$;
- (c) $|G : H| = q$.

Однако в случаях (a) и (b) имеется более одного неприводимого характера степени p^2q , что неверно. Значит, $|G : H| = q$ и лемма доказана.

Лемма 20. Если $G \neq H$, то для любого неприводимого характера $\chi = \chi_i$ из разложения Θ_H существует p^2 линейных характеров ψ_j , сопряженных с характером $\psi = \psi_1$, таких, что $\chi_M = \sum_{j=1}^{p^2} \psi_j$. Группа M абелева.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ψ — неприводимый характер группы M , входящий в разложение характера χ_M , где $\chi = \chi_i$ — любой неприводимый характер группы H , определенный в лемме 19. Согласно лемме 1

$$\chi_M = e' \sum_{i=1}^t \psi_i,$$

где ψ_i — характеры, сопряженные с ψ , e' и t делят $|H : M| = p^2$. В частности,

$$p^2 = \chi(1) = e't\psi(1).$$

Так как $(|M|, p) = 1$, то $\psi_i(1)$ не делится на p . Поэтому $e't = p^2$ и $\psi_i(1) = 1$. В частности, $\ker(\psi_i)$ содержит коммутант группы M . Отсюда $\psi_j(y) = 1$ для любого j и $y \in M$. Но тогда $\chi(y) = p^2$ для любого характера χ , сопряженного с χ_1 . Как результат $\Theta(y) = p^2q$. Так как Θ — точный характер, то $y = 1$, т. е. $M' = 1$ и M абелева группа, что и требовалось доказать.

Лемма 21. Пусть $G = H$, $G = M \rtimes P$ и G не содержит нормальных подгрупп индекса q . Тогда $\Theta_M = \sum_{i=1}^{p^2} \alpha_i$, где $\alpha_i \in \text{Irr}(M)$ — сопряженные характеры группы M степени q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha \in \text{Irr}(M)$ — неприводимый характер группы M , входящий в разложение Θ_M , и пусть $I_G(\alpha)$ — его группа инерции. Согласно лемме 1

$$\Theta_M = e \sum_{i=1}^s \alpha_i,$$

где $\alpha_i \in \text{Irr}(M)$, e делит $|I_G(\alpha) : M|$, а s делит $|G : I_G(\alpha)|$. По лемме 6 Θ_M — приводимый характер и потому $s > 1$. Так как $\Theta(1) = p^2 q = e s \alpha(1)$, причем $(\alpha(1), p) = 1$ (порядок M не делится на p), то $e s = p^2$ и $\alpha(1) = q$. Так как $s \neq 1$, то $e = 1$. Поэтому $s = p^2$. Лемма доказана.

Лемма 22. Если r — простой делитель $|M|$, то M содержит силовскую r -подгруппу R , допустимую относительно P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа P действует с помощью сопряжения на множестве силовских r -подгрупп группы M . Их число — это индекс нормализатора силовской подгруппы, который взаимно прост с числом $|P|$. Так как каждая нетривиальная P -орбита группы имеет длину, делящуюся на p , то существует силовская r -подгруппа, допустимая относительно P . Лемма доказана.

Лемма 23. Группа $G = M \rtimes P$ содержит подгруппы QP и RP порядков $q^b p^2$ и $r^\alpha p^2$ соответственно, причем $r^\alpha |m$, где P — силовская p -подгруппа группы G , Q — силовская q -подгруппа G , а R — силовская r -подгруппа G . В частности, M имеет холловы $\{p, q\}$ и $\{p, r\}$ -подгруппы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как сказано выше, $G = M \rtimes P$, где $|M| = q^b m$, $|P| = p^2$ и $(p, qm) = 1$. Так как P действует с помощью сопряжений на множестве силовских q -подгрупп группы M , а их число не делится на p , то имеется силовская q -подгруппа Q группы M , инвариантная относительно P . Таким образом, в G содержится подгруппа $L = QP$, имеющая индекс m в G . По лемме 22 группа G содержит также подгруппу $Y = RP$ индекса $\frac{q^b m}{r^\alpha}$. Лемма доказана.

Лемма 24. Если $G = H$, то верно одно из утверждений:

1. $G = QC_G(P)$, где $|Q| = q^b$, причем $q^b > p^2$.
2. $G = RC_G(P)$, где $|R| = r^\alpha$ делит m .
3. $G = C_G(a)C_G(u)$, где $P = \langle a \rangle \times \langle u \rangle$ порядка p^2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что $|G| = p^2 q^b m$ и $(p, qm) = 1$, причем $q^{b-2} m < 2p^2$.

Допустим, что $R \in \text{Syl}_r(G)$, где $r | m$. Если P нетривиально действует на R , то $|R| \geq p + 1$.

Предположим теперь, что P действует тривиально на всякой силовской подгруппе группы G , кроме R . В силу леммы 11 группа G имеет нормальную подгруппу Y_1 , являющуюся нормальным замыканием подгруппы P , содержащуюся в $Y = RP$. Из теоремы Ито (лемма 3) следует, что $P \neq Y_1$. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $Y_1 = R_1 \rtimes P = \langle P^G \rangle$, где R_1 — подгруппа группы R , на которой P действует нетривиально. В этом случае $G = RC_G(P)$, так что выполнено утверждение 2.

Если P действует нетривиально, кроме $R \in \text{Syl}_r(G)$, и на некоторую $S \in \text{Syl}_s(G)$, где $s | m$, $s \neq r$, то $|S| \geq p + 1$, причем

$$m \geq |S||R| \geq (p + 1)(2p + 1) > 2p^2.$$

Значит, $m > 2p^2$. Так как $q^{b-2} m < 2p^2$, то $b = 1$. Стало быть, $|G| = p^2 q m$, где $(m, pq) = 1$.

Если для любого простого $r \in \pi(M)$ группа P действует тривиально на некоторой $R \in \text{Syl}_r(G)$, то $G = M \times P$, что невозможно.

Пусть для любого $r \neq q$ подгруппа P действует тривиально на некоторой силовой r -подгруппе группы M из $M = O_{p'}(G)$. По лемме 11 группа G имеет нормальную подгруппу L_1 , являющуюся нормальным замыканием подгруппы P , содержащуюся в $L = QP$, порядка, делящегося на p^2 . По лемме 3 $P \neq L_1$, поэтому $L_1 = Q_1 \rtimes P = \langle P^G \rangle$, где $Q_1 \leq Q$. Тогда $G = QC_G(P)$, причем $q^b > p^2$ и верно утверждение 1.

Наконец, возможен случай, когда P действует нетривиально как на R , так и на Q , где $|Q| = q^b$, $|R| = r^\alpha |m|$.

Понятно, что $|R| \geq 1 + p$. Если $|R| \geq p^2$, то $m \geq p^2 + 1$ и из $mq^{b-2} \leq 2p^2$ следует, что $q^{b-2} \leq 1$, так что $b = 1$ или 2.

Однако в этом случае $|P| > |Q|$ и P не может действовать нетривиально на Q за исключением случая, когда $q = 2, p = 3$. Этот случай рассмотрен ранее. Поэтому далее считаем, что $b \geq 3$.

Стало быть, $|R| < p^2$ и потому существует элемент порядка p , действующий тождественно на R . При этом $m \geq |R| \geq p + 1$.

Рассмотрим $L = Q \rtimes P$. Так как по теореме 5.1.4. Бернсайда из [2] элемент порядка p , не централизующий Q , должен действовать нетривиально на $Q/\Phi(Q)$, то $|\Phi(Q)| \leq q$.

Таким образом, имеются следующие возможности:

1) Q экстраспециальная порядка q^b , где p делит $q^{b-1} - 1$, причем $\Phi(Q) = Z(Q) = Q'$ порядка q и $|Q/\Phi(Q)| = q^{b-1}$.

В этом случае $b-1$ — четное число. Пусть $b-1 = 2s$, тогда $q^{2s} - 1$ делится на p и $(q^s - 1)(q^s + 1)$ делится на p . Значит, $p \leq q^{\frac{b-1}{2}} + 1 < q^{b-2}$, однако $q^{b-2}m < 2p^2$. Тогда $m < p$, что невозможно.

2) Q — абелева не элементарная и $|\Phi(Q)| = q$. Тогда $Q = \langle a \rangle \times Q_1$, причем $|\langle a \rangle| = q^2$, $|Q_1| = q^{b-2}$. Понятно, что $\langle a^q \rangle$ централизуется P и $\langle a^q \rangle \times Q_1 = \Omega(Q) \triangleleft L$. По теореме Машке существует $\widetilde{Q}_1$ порядка q^{b-2} и $\langle a^q \rangle \times \widetilde{Q}_1 = \Omega(Q)$, следовательно P действует тривиально на Q , что исключено.

3) Q — элементарная абелева порядка q^b , причем $q^{b-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$. Так как $q^b = q(q^{b-1} - 1) + q = qpt + q$ и $p^2 > q^b > p$, то существует элемент a порядка p , централизующий Q . Также существует элемент u порядка p , централизующий R . При этом $\langle a \rangle \neq \langle u \rangle$, ибо $Z(G) = 1$. Поэтому $C_G(a)C_G(u) \geq G$ и $P = \langle a \rangle \times \langle u \rangle$, где $a^p = u^p = 1$, т. е. верно утверждение 3. Лемма доказана.

Лемма 25. Пусть α — неприводимый характер группы M степени q , входящий в разложение Θ_M . Тогда для $K \triangleleft M$ характер α_K приводим.

Доказательство. Из лемм 11 и 24 следует, что M не простая группа. Это очевидно, если $\pi(m) = 1$. То же верно при $\pi(m) = 2$. В самом деле, если $G = RC_G(P)$ для некоторой силовой подгруппы R группы M , то по лемме 11 имеется нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в M (случаи 1 и 2 леммы 24). Если же ни один неединичный элемент группы P не централизует хотя

бы пару силовских подгрупп группы M , скажем R и S , которые P нормализует, причем одна из них является r -силовской из M , а вторая s -силовская, где $r \neq s \in \pi(m)$, то $m > (p+1)(2p+1) > 2p^2$. Отсюда $b = 1$ и $|G| = p^2 qm$.

В этом случае P централизует $Q \in \text{Syl}_q(M)$. Пусть $|\pi(m)| = 2$. Предположим, что $C_P(R) = \langle a \rangle$. Тогда $|G : C_G(a)|$ — степень числа s . По лемме 11 заключаем, что подгруппа $\langle a^G \rangle$ — разрешимая $\{p, s\}$ -подгруппа, так что M не проста. Если $|\pi(m)| \geq 3$ и если в $P^\#$ нет элементов, у которых индекс централизатора — степень простого числа, то $m \geq 2(p+1)^3$, так что $mq^{-1} > 2p^2$; противоречие. Итак, в любом случае M не проста.

Допустим, что K — наибольшая собственная нормальная подгруппа группы M . По лемме 1 имеем

$$\alpha_K = e \sum_{s=1}^d \lambda_s,$$

где d, e — натуральные числа, делящие $|M : K|$, и λ_s — неприводимые характеры группы K , сопряженные с $\lambda_1 = \lambda$. Отсюда $q = \alpha(1) = ed\lambda(1)$. Если α_K неприводим для любого α , входящего в разложение Θ_M , то подгруппа K имеет p^2 неприводимых характеров степени q . Но тогда ее порядок равен не меньше, чем $q^2 p^2 + 1$, тогда как $|K| \leq |M|/(|M : K|) \leq p^2 q^2 + 1$; противоречие. Значит, $\alpha_K = \sum_{s=1}^q \lambda_s$, где λ_s — линейные характеры. Лемма доказана.

Закончим доказательство теоремы 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Из леммы 25 следует, что пересечение ядер характеров λ_s , входящих в разложение Θ_K , содержит коммутант K и потому тривиально. Поэтому подгруппа K группы G , имеющая индекс $p^2 q$ в G , абелева, что и утверждалось. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вдовин Е. П. Максимальные порядки абелевых подгрупп в конечных простых группах // Алгебра и логика. 1999. Т. 38. С. 131–160.
2. Gorenstein D. Finite group. New York: Harper and Row, 1968.
3. Isaacs I. M. Character theory of finite groups. New York; San Francisco; London: Acad. Press, 1976.
4. Feit W. Characters of finite groups. New York; Amsterdam: Yale University, 1967.
5. Зенков В. И. Пересечения нильпотентных подгрупп в конечных группах // Фундамент. и прикл. математика. 1996. Т. 2, № 1. С. 1–92.
6. Казарин Л. С., Поисеева С. С. О конечных группах с большой степенью неприводимого характера // Моделирование и анализ информационных систем. 2015. Т. 22, № 4. С. 483–499.
7. Guralnick R. M., Malle G., Navarro G. Self-normalizing Sylow subgroups // Proc. Amer. Math. Soc. 2003. V. 132, N 4. P. 973–979.
8. Фейт У. Теория представлений конечных групп. М.: Наука, 1990.
9. Казарин Л. С. О p^α -лемме Бернсайда // Мат. заметки. 1990. Т. 4, № 2. С. 45–48.
10. Camina A. R., Camina R. D. Implications of conjugacy class size // J. Group Theory. 1998. V. 1. P. 257–269.
11. Горенштейн Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985.
12. Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A. ATLAS of finite groups: maximal subgroups and ordinary characters for simple groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.

13. Казарин Л. С., Поисеева С. С. Конечные группы с большим неприводимым характером // Мат. заметки. 2015. Т. 98, № 2. С. 237–246.
14. The GAP Group. GAP — Groups, Algorithms and Programming. Version 4.4.10. (Aachen, St. Andrews, 2008.) <http://www.gap-system.org>
15. Белоногов В. А. Представления и характеры в теории конечных групп. Свердловск: Изд-во УрО АН СССР, 1990.

Статья поступила 15 октября 2015 г.

Поисеева Саргылана Семеновна
Ярославский гос. университет им. П. Г. Демидова,
ул. Советская, 14, Ярославль 150000
`pss.iii@mail.ru`