

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЕВКЛИДОВОЙ СТРУКТУРЫ НА УЗЛЕ ВОСЬМЕРКА С МОСТОМ

А. Д. Медных, Д. Ю. Соколова

Аннотация. Исследуются основные геометрические инварианты евклидова конического многообразия, сингулярным множеством которого является узел «восьмерка» с мостом, а носителем — трехмерная сфера. Получены условия существования указанного многообразия, вычислен его объем и длины сингулярных геодезических.

Ключевые слова: коническое многообразие, евклидова структура, объем, узел «восьмерка».

A. D. Mednykh, D. Yu. Sokolova. On the existence of Euclidean structure on the figure eight knot with a bridge

Abstract: In the present paper the basic geometrical invariants are investigated for the cone-manifold whose underlying space is the three dimensional sphere and the singular set is formed by the figure eight knot with a bridge. The existence of Euclidean structure on the manifold under consideration is established. The volume and the lengths of its singular geodesics are calculated.

Keywords: cone-manifold, Euclidean structure, volume, the figure eight knot.

1. Введение

В классических работах Кебе [1] были доказаны теоремы об униформизации римановых поверхностей с заданной сигнатурой. На современном языке это означает, что все «хорошие» двумерные орбифорды обладают универсальной накрывающей, представляющей собой единичный круг, комплексную плоскость, либо сферу Римана. С точки зрения геометрии последнее равносильно утверждению, что каждый «хороший» двумерный орбифорд обладает либо гиперболической, либо евклидовой, либо сферической структурой. Напомним, что орбифорд является «хорошим», если он не является сферой с одной особой точкой либо сферой с двумя особыми точками различных порядков. Аналогичное утверждение в трехмерном случае формулируется более сложно и носит название Гипотеза Геометризации Терстона. Она была полностью доказана в работах российского математика Г. Перельмана [2–4] и в качестве частного случая повлекла за собой решение знаменитой проблемы Пуанкаре.

Многообразия и орбифорды, обладающие геометрической структурой, можно представить в виде фактор-пространства X/Γ , где X — одна из известных

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15–01–07906), второго автора — при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16–31–00138).

геометрий, а Γ — дискретная группа изометрий, действующая на X в общем случае с неподвижными точками. В малых размерностях все возможные геометрии известны. В частности, в двумерном случае $X = \mathbb{S}^2, \mathbb{E}^2, \mathbb{H}^2$, в трехмерном случае это одна из восьми геометрий Терстона: $X = \mathbb{S}^3, \mathbb{E}^3, \mathbb{H}^3, \mathbb{S}^2 + \mathbb{E}^1, \mathbb{H}^2 + \mathbb{E}^1, Nil, Sol, \mathcal{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Пусть X — одна из перечисленных трехмерных геометрий. Тогда образами неподвижных точек группы Γ при каноническом отображении $X \mapsto X/\Gamma$, как правило, является узел, зацепление или заузленный граф. Проиллюстрируем это лишь на одном примере [5]. Пусть $X = \mathbb{H}^3$, а $\Gamma = \mathbb{F}_{2n}$, $n \geq 4$, — группа Фибоначчи, действующая изометриями на X . Тогда X/Γ — трехмерная сфера, а образом неподвижных точек X в X/Γ является узел «восьмерка».

Однако в общем случае наличие геометрических структур не обязательно связано с дискретными группами. В результате возникают конические многообразия, которые можно рассматривать как непосредственное обобщение орби-фолдов. В свою очередь, в определении конического многообразия, приведенного в следующем параграфе, потребуем лишь локальную униформизацию с помощью указанных выше геометрий.

Цель настоящей работы — изучение евклидовых структур на узлах и зацеплениях. В 1975 г. Райли [6] обнаружил примеры гиперболических структур на некоторых узлах и дополнениях зацеплений в трехмерной сфере. Позднее, весной 1977 г., Терстон представил теорему существования для римановой метрики постоянной отрицательной кривизны на трехмерных многообразиях. На практике оказалось, что дополнения всех простых узлов, исключая торические и сателлитные, допускают гиперболическую структуру. Отметим следующие известные результаты: евклидова структура на узле «восьмерка» 4_1 возникает, когда его конический угол α равен $\frac{2\pi}{3}$. Этот результат был получен Терстоном [7]. Явная конструкция фундаментального множества для конического многообразия $4_1(\alpha)$ в E^3 была предложена в работе А. Д. Медных и А. А. Расказова [8]. Это фундаментальное множество представляет собой невыпуклый двадцатигранник, вершины которого задаются целочисленными координатами. Вопрос существования евклидовой структуры на зацеплении Уайтхеда изучен в работе Р. Н. Шматкова [9]. В [10] было исследовано строение фундаментального многогранника для узла «трилистник» с мостом и даны условия существования евклидовой структуры соответствующего конического многообразия. В данной работе исследуем основные геометрические инварианты евклидова конического многообразия, сингулярным множеством которого является узел «восьмерка» с мостом, а носителем — трехмерная сфера. Мы установим условия существования такого многообразия, вычислим его объем и длины его сингулярных геодезических.

2. Предварительные сведения

Трехмерным коническим многообразием называется метрическое пространство, полученное из набора непересекающихся 3-симплексов в пространстве по-

стоянной секционной кривизны k путем изометрического отождествления их граней. При этом предполагается, что образованное в результате такого отождествления топологическое пространство (пространство-носитель) является многообразием.

Такое многообразие обладает римановой метрикой постоянной секционной кривизны k на объединении клеток размерностей 2 и 3. В случае $k = 0$ будем говорить, что соответствующее коническое многообразие *имеет* (или *допускает*) *евклидову структуру*. Аналогично определяются конические многообразия со сферической ($k = +1$) и гиперболической структурами ($k = -1$).

Метрическая структура вокруг каждой 1-клетки определяется *коническим углом*, который является суммой двугранных углов при ребрах, дающих после отождествления эту клетку.

Сингулярным множеством конического многообразия назовем замыкание всех 1-клеток, конический угол вокруг которых не равен 2π .

Следует отметить также, что точка сингулярного множества с коническим углом α имеет окрестность, изометричную окрестности точки, лежащей на ребре клина с углом раствора α , грани которого попарно отождествлены посредством поворота трехмерного пространства вокруг ребра клина. Наглядно коническое многообразие можно представить как трехмерное многообразие с вложенным в него графом, на котором происходит искажение метрики. При этом если измерить длину окружности бесконечно малого радиуса вокруг компоненты графа, вместо стандартного $2\pi\epsilon$ она будет равна $\alpha\epsilon$, где α — конический угол вдоль компоненты графа.

Дадим определение *группы голономий* для геометрического орбифолда. Пусть $\mathcal{O}$ — геометрический орбифолд, обладающий (G, X) -структурой [7]. Рассмотрим ассоциированное с ним (G, X) -многообразие $M = \mathcal{O} \setminus \Sigma$, где Σ — сингулярное множество орбифолда $\mathcal{O}$. Пусть области $U_1, U_2, \dots$ и отображения $\varphi_i : U_i \rightarrow X$ задают локальные системы координат на M с функциями перехода

$$\gamma_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j).$$

По определению (G, X) -многообразия каждое отображение γ_{ij} локально действует как элемент из G , так что γ_{ij} можно рассматривать как локально постоянное отображение со значениями в G . После композиции с φ_j получаем локально постоянное отображение $U_i \cap U_j \rightarrow G$, которое будем также обозначать через γ_{ij} .

Предположим теперь, что две карты (U_i, φ_i) и (U_j, φ_j) покрывают одну и ту же точку x . Тогда можно так изменить отображение φ_j (рассмотрев ее композицию с γ_{ij}), что оно будет совпадать с отображением φ_i вблизи точки x . На самом деле, если пересечение $U_i \cap U_j$ связно, то эти отображения будут совпадать на всем пересечении, так что получится отображение $U_i \cap U_j \rightarrow X$, продолжающее φ_i . Но, вообще говоря, пытаясь таким образом продолжить координатное отображение на все многообразие, придем к несогласующимся значениям. Для того чтобы избежать несогласованности, надо перейти к универсальной накрывающей.

Выберем отмеченную точку $x_0 \in M$ и карту (U_0, φ_0) , покрывающую эту точку. Пусть $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ — универсальная накрывающая пространства M . Будем представлять $\widetilde{M}$ как пространство гомотопических классов путей в M с началом в отмеченной точке x_0 , и рассмотрим путь α , представляющий гомотопический класс $[\alpha] \in \widetilde{M}$ (так что $\alpha(1) = \pi([\alpha])$). Разобьем путь α промежуточными точками

$$x_0 = \alpha(t_0), x_1 = \alpha(t_1), \dots, x_n = \alpha(t_n)$$

(где $t_0 = 0$ и $t_1 = 1$) таким образом, чтобы каждый из получившихся кусочков пути целиком покрывался какой-то одной картой (U_i, φ_i) . Затем, двигаясь вдоль пути α , подправляем очередное отображение φ_i так, чтобы оно совпало с (уже подправленными) отображением φ_{i-1} в некоторой окрестности $x_i \in U_{i-1} \cap U_i$. Эти согласованные друг с другом карты образуют *аналитическое продолжение* отображения φ_0 вдоль данного пути. Последнее из новых координатных отображений имеет вид

$$\psi = \gamma_{01}(x_1)\gamma_{12}(x_2)\dots\gamma_{n-1,n}(x_n)\varphi_n.$$

Фиксировав базисную точку и начальное отображение φ_n , определим *отображение развертки* $D : \widetilde{M} \rightarrow X$ как отображение, заданное локально с помощью аналитического продолжения φ_0 вдоль каждого пути, т. е. $D = \varphi_0^\sigma \circ \pi$ в некоторой окрестности $\sigma \in \widetilde{M}$. При изменении начальных условий (базисной точки и исходного отображения) образ отображения развертки меняется под действием некоторого элемента из группы G .

Если наделить пространство универсальной накрывающей (G, X) -структурой, индуцированной накрытием π , то отображение развертки является локальным (G, X) -гомеоморфизмом между $\widetilde{M}$ и X .

Хотя в наиболее интересных случаях группа G действует на X транзитивно, это условие не является необходимым для определения отображения D . Например, если группа G тривиальна, а многообразие X замкнуто, то замкнутые (G, X) -многообразия — в точности конечнолистные накрытия над X с проекцией D .

Рассмотрим теперь элемент σ фундаментальной группы пространства M . Аналитическое продолжение вдоль петли σ приводит к ростку φ_0^σ , который уже можно сравнить с φ_0 , так как они оба определены в окрестности базисной точки. Обозначим через g_σ такой элемент группы G , для которого $\varphi_0^\sigma = g_\sigma \varphi_0$; g_σ будем называть *голономией* σ . Из определения отображения развертки легко вывести, что

$$D \circ T_\sigma = g_\sigma \circ D,$$

где $T_\sigma : \tau \rightarrow \sigma\tau$ есть преобразование накрытия, индуцированное элементом σ . Применяя это равенство к произведению петель, получаем, что отображение $H : \sigma \rightarrow g_\sigma$ из $\pi_1(M)$ в G является гомоморфизмом, который будем называть *голономией* M . Его образ называется *группой голономии* пространства M . Заметим, что отображение H зависит от произвола при построении D : при изменении D образ отображения H сопрягается элементом из G .

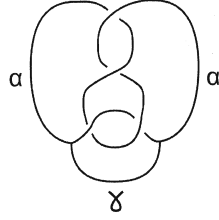


Рис. 1. Узел восьмерка
с мостом

В работе исследуем коническое многообразие $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma)$, носителем которого является трехмерная сфера $\mathbb{S}^3$, а сингулярным множеством Σ — узел восьмерка с одним мостом, который представляет собой граф, изображенный на рис. 1.

Фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus \Sigma)$ дополнения к графу может быть найдена с помощью алгоритма Виртингера и имеет два порождающих элемента. Мы изучаем геометрическую структуру на данном коническом многообразии.

Коническое многообразие является пополнением метрического пространства, на котором введена неполная евклидова метрика. Значение конического угла α вдоль компоненты узла определяется пополнением метрического пространства. Последнее означает, что если g и h — гомеоморфизмы, переводящие окрестность точки многообразия в шары вида $B^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| < 1\}$ с элементом площади поверхности $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, то гомеоморфизм $g \circ h^{-1}$ состоит из движений евклидова пространства. Таким образом, он сохраняет евклидову метрику. Далее, представляя порождающие фундаментальной группы через матрицы вращения в евклидовом пространстве, получим условия существования евклидовой структуры на коническом многообразии. Для этого найдем группу голономий данного многообразия.

Рассмотрим отображение голономии $\varphi : \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus \Sigma) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{E}^3)$, которое переводит порождающие s и t фундаментальной группы узла

$$\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus \Sigma) = \langle s, t : s\ell_s = \ell_s s \rangle, \quad \text{где } \ell_s = stst^{-1}s^{-1}tsts^{-1}t^{-1},$$

в линейные преобразования

$$\mathcal{S}(x) = (x - e_3)S + e_3, \quad \mathcal{T}(x) = (x + e_3)T - e_3 \quad (1)$$

соответственно, где $e_3 = (0, 0, 1)$, S, T — матрицы вращений.

Следуя [9], положим $M = \cot \frac{\alpha}{2}$, тогда матрицы вращений S и T имеют вид

$$S = \frac{1}{M^2 + 1} \begin{pmatrix} M^2 + \cos \theta & \sin \theta & -2M \sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \theta & M^2 - \cos \theta & 2M \cos \frac{\theta}{2} \\ 2M \sin \frac{\theta}{2} & -2M \cos \frac{\theta}{2} & -1 + M^2 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$T = \frac{1}{M^2 + 1} \begin{pmatrix} M^2 + \cos \theta & -\sin \theta & -2M \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \theta & M^2 - \cos \theta & -2M \cos \frac{\theta}{2} \\ 2M \sin \frac{\theta}{2} & 2M \cos \frac{\theta}{2} & -1 + M^2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

соответственно, где θ — угол относительного поворота между сингулярными компонентами.

При этом считаем, что отображение голономии переводит элемент ℓ_s во вращение на угол γ вокруг сингулярной компоненты, соответствующей мосту узла.

Группой голономий исследуемого многообразия называется группа, порожденная вращениями $\mathcal{S}$ и $\mathcal{T}$ вокруг сингулярных компонент фундаментального множества на угол α .

3. Структура фундаментального множества для узла «восьмерка» с мостом

Построим фундаментальное множество для многообразия $\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma)$. Рассмотрим указанный на рис. 2 набор непересекающихся 3-симплексов в пространстве постоянной нулевой кривизны, из которого путем изометрического отождествления граней получается данное коническое многообразие. Фундаментальное множество представляет собой двадцатигранник $\mathcal{F}$, имеющий 12 вершин, который получается склеиванием симплексов вдоль общего ребра Q_0Q_1 .

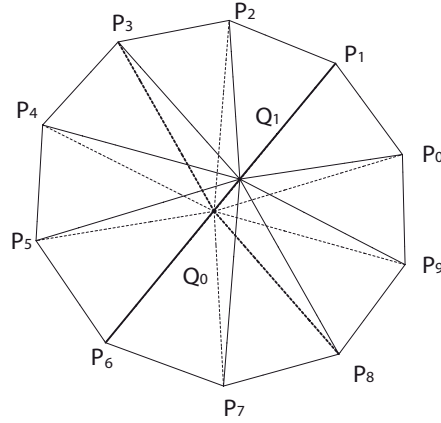


Рис. 2. Фундаментальный двадцатигранник $\mathcal{F}$

Это множество может быть реализовано в любой из трех геометрий: $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{H}^3$ и $\mathbb{E}^3$. Отождествление криволинейных граней многогранника $\mathcal{F}$ осуществляется изометрическими преобразованиями $\mathcal{S}$ и $\mathcal{T}$ по следующим правилам:

$$\mathcal{S} : P_1P_0P_9P_8P_7P_6 \rightarrow P_1P_2P_3P_4P_5P_6, \quad \mathcal{T} : P_4P_5P_6P_7P_8P_9 \rightarrow P_4P_3P_2P_1P_0P_9.$$

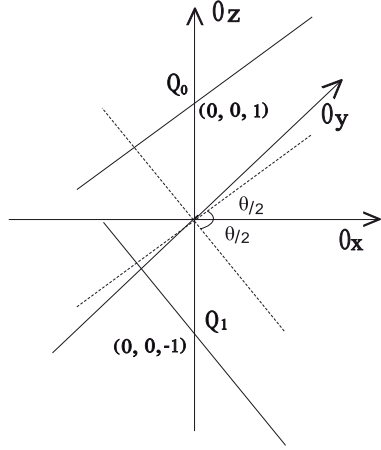
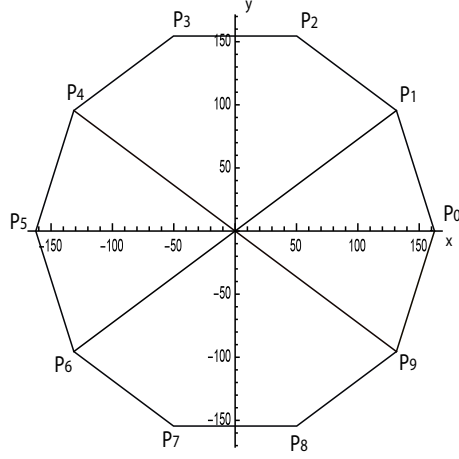
4. Реализация фундаментального множества в евклидовом пространстве

Опишем геометрическую реализацию фундаментального множества $\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma)$ в евклидовом пространстве. Для этого найдем координаты его вершин через некоторые параметры, имеющие геометрический смысл.

Положим $X = \cos \frac{\theta}{2}$, $Y = \sin \frac{\theta}{2}$, где θ — угол относительного поворота между компонентами узла. Тогда неподвижными множествами преобразований $\mathcal{S}$ и $\mathcal{T}$ из (1) будут следующие прямые:

$$\text{Fix}(\mathcal{S}) = (tX, tY, 1), \quad \text{Fix}(\mathcal{T}) = (tX, -tY, -1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

В трехмерном евклидовом пространстве оси вращений $\text{Fix}(\mathcal{S})$ и $\text{Fix}(\mathcal{T})$ расположены как скрещивающиеся прямые с общим перпендикуляром по оси Oz и углом θ между ними (рис. 3).

Рис. 3. Оси вращений $\text{Fix}(\mathcal{S})$ и $\text{Fix}(\mathcal{T})$ Рис. 4. Проекция $\mathcal{F}$ на плоскость Oxy

Для фундаментального двадцатигранника $\mathcal{F}$ (см. рис. 2) пары его вершин P_1, P_6 и P_4, P_9 лежат соответственно на осях $\text{Fix}(\mathcal{S})$, $\text{Fix}(\mathcal{T})$. Узел восьмерка с мостом обладает тремя симметриями второго порядка. На фундаментальном многограннике они реализуются как вращения в осях Ox , Oy , Oz . В частности, вращение второго порядка в оси Ox оставляет фундаментальный многогранник инвариантным. Отсюда следует, что две вершины $\mathcal{F}$ лежат на оси Ox .

Согласно рис. 4 координаты вершин $\mathcal{F}$ могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{aligned} P_0 &= (x, 0, 0), & P_1 &= (tX, tY, 1), & P_2 &= (a, b, c), \\ P_3 &= (-a, b, -c), & P_4 &= (-tX, tY, -1), & P_5 &= (-x, 0, 0), \\ P_6 &= (-tX, -tY, 1), & P_7 &= (-a, -b, c), & P_8 &= (a, -b, -c), \\ P_9 &= (tX, -tY, -1), & Q_0 &= (0, 0, 1), & Q_1 &= (0, 0, -1). \end{aligned} \quad (4)$$

Заметим следующие равенства для вершины P_2 : $P_2 = P_0\mathcal{S} = P_6\mathcal{T}$. Перепишем их в виде

$$\begin{cases} (a, b, c) = (x, 0, 0)\mathcal{S}, \\ (x, 0, 0)\mathcal{S} = (-tX, -tY, 1)\mathcal{T}. \end{cases} \quad (5)$$

Решая второе уравнение системы (5) относительно x и t и учитывая, что $X^2 + Y^2 = 1$, имеем

$$x = \frac{5 + 4M^2 - M^4 - 20X^2 - 4M^2X^2}{2MY(1 + M^2 - 8X^2)}, \quad t = \frac{X(3M^2 - 5)}{MY(1 + M^2 - 8X^2)}. \quad (6)$$

При этом, сравнивая первые координаты векторов $(x, 0, 0)\mathcal{S}$ и $(-tX, -tY, 1)\mathcal{T}$ и еще раз пользуясь равенством $X^2 + Y^2 = 1$, получим, что величины M и X связаны соотношением

$$5 + 6M^2 + M^4 - 60X^2 - 12M^2X^2 + 80X^4 = 0. \quad (7)$$

Подставляя равенства (6) и (7) в первое уравнение системы (5), найдем значения величин a , b и c :

$$\begin{aligned} a &= \frac{4M^2 - 15X^2 - 7M^2X^2 + 20X^4}{MY(1 + M^2 - 8X^2)}, \\ b &= \frac{X(5 + M^2 - 20X^2)}{M(1 + M^2 - 8X^2)}, \quad c = \frac{M^2 + 4X^2 - 3}{1 + M^2 - 8X^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

5. Евклидов объем конического многообразия

Основным результатом настоящей работы являются две следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $\alpha \in [\frac{2\pi}{3}, \pi)$. Тогда для некоторого $\gamma \in (0, 2\pi]$ коническое многообразие $\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma)$ обладает евклидовой структурой. В частности, $\mathcal{O}(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, 2\pi) = 4_1(\frac{2\pi}{3})$ — евклидов орбифолд, носителем которого является трехмерная сфера, а сингулярным множеством — узел «восьмерка» с коническим углом $\frac{2\pi}{3}$.

Доказательство. Доказательство теоремы будет завершено, если установим, что для каждого $\alpha \in [\frac{2\pi}{3}, \pi)$ существует описанный в предыдущем параграфе многогранник $\mathcal{F}$, сумма двугранных углов которого при вписанных ребрах P_iP_{i+1} , $i = 0, \dots, 9$, равна γ , где $\gamma \in (0, 2\pi]$. Для этого положим $M = \cot \frac{\alpha}{2}$ и $X = \cos \frac{\theta}{2}$ и рассмотрим кривую (рис. 5), задаваемую уравнением (5).

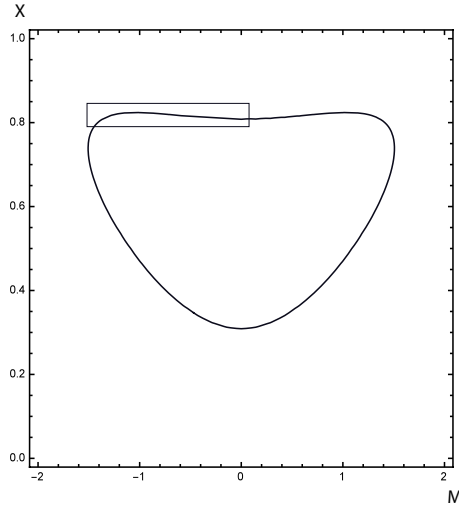


Рис. 5. Кривая существования евклидовой структуры для $\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma)$

Уравнение кривой (7) как основное соотношение, связывающее углы α и θ , получено из системы (5). При этом, как будет видно в дальнейшем, ее выделенная на рис. 5 часть соответствует моделируемой нами ситуации.

Лемма 1. Пусть $M \in (0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$, $X \in (\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}, \sqrt{\frac{2}{3}}]$ и выполнено основное соотношение (7). Тогда существует фундаментальный многогранник $\mathcal{F}$ (рис. 2), заданный параметрами α и θ , где $M = \cot \frac{\alpha}{2}$ и $X = \cos \frac{\theta}{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего проверим, что указанный многогранник существует при $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ и $\theta = 2 \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$. Действительно, в этом случае координаты вершин целочисленные и равны

$$\begin{aligned} P_0 &= (3, 0, 0), & P_1 &= (2, \sqrt{2}, 1), & P_2 &= (1, \sqrt{8}, 0), & P_3 &= (-1, \sqrt{8}, 0), \\ P_4 &= (-2, \sqrt{2}, -1), & P_5 &= (-3, 0, 0), & P_6 &= (-2, -\sqrt{2}, 1), \\ P_7 &= (-1, -2\sqrt{2}, 0), & P_8 &= (1, -\sqrt{8}, 0), & P_9 &= (2, -\sqrt{2}, -1). \end{aligned}$$

При этом $\mathcal{F}$ является фундаментальным для орбифолда $4_1(\frac{2\pi}{3})$ с носителем S^3 и сингулярным множеством — узел «восьмерка» с коническим углом $\frac{2\pi}{3}$. Его структура подробно описана в работе [8]. В частности, ориентированные объемы V_i тетраэдров $Q_0Q_1P_iP_{i+1}$, $i = 0, \dots, 9$, положительны и внутренности этих многогранников не пересекаются.

Напомним, что ориентируемый объем тетраэдра T с вершинами (x_j, y_j, z_j) , $j = 1, 2, 3, 4$, определяется по формуле

$$\text{Vol } T = \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{pmatrix}.$$

Можно выделить следующие три вида формул для объемов V_i :

$$\begin{aligned} V_0 &= V_9 = V_4 = V_5 = \frac{txY}{3}, \\ V_2 &= V_7 = \frac{2}{3}ab, \\ V_1 &= V_3 = V_6 = V_8 = \frac{1}{3}t(Xb - Ya). \end{aligned} \tag{9}$$

Рассмотрим области вырождения объемов V_i , используя соотношения (6), (7) и (8).

При $M \in (0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$, $X \in (\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}, \sqrt{\frac{2}{3}}]$ ориентируемые объемы V_i не меняют знака и остаются положительными, следовательно, в условиях леммы многогранник не вырождается. В результате получим, что условие положительности объемов $V_i > 0$, $i = 0, \dots, 9$, эквивалентно неравенству $a > 0$, где a задано уравнением (8).

Следствие. Пусть многообразие $\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma)$ евклидово. Тогда

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{1}{1953125} \left(\frac{1}{(1+M^2)^{10}} 128M^2(M^2+5)^2(11M^2-25) \right. \\ &\quad \times (3125 - 21875M^2 + 1250M^4 - 9750M^6 - 11175M^8 - 2823M^{10})X^2 \\ &\quad - \frac{169869312}{(1+M^2)^9} + \frac{254803968}{(1+M^2)^8} + \frac{23461888}{(1+M^2)^7} - \frac{136282112}{(1+M^2)^6} - \frac{10575872}{(1+M^2)^5} \\ &\quad \left. + \frac{56000512}{(1+M^2)^4} + \frac{2232832}{(1+M^2)^3} - \frac{14626688}{(1+M^2)^2} - \frac{4716288}{(1+M^2)} + 1524197 \right). \end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим коммутатор $K = STST^{-1}S^{-1}TSTS^{-1}T^{-1}$, соответствующую слову $\ell_s = stst^{-1}s^{-1}tsts^{-1}t^{-1}$. Матрица K представляет собой поворот на угол γ вокруг некоторого ребра вида P_iP_{i+1} , соответствующего мосту между компонентами узла «восьмерка» (см. рис. 1). След ортогональной матрицы K связан с углом поворота следующим образом: $\text{tr } K = 2 \cos \gamma + 1$. Упрощая выражение $\cos \gamma = \frac{1}{2}(\text{tr } K - 1)$, получим исходное равенство.

Теорема 2. Евклидов объем конического многообразия $\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma)$ равен

$$\text{Vol}(\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma)) = \frac{8X\sqrt{1-X^2}(M^4 - 50M^2X^2 + 150X^2 - 25)}{3M^2(1 + M^2 - 8X^2)^2}.$$

Доказательство. Евклидов объем конического многообразия $\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma)$ равен объему фундаментального многогранника $\mathcal{F}$, изображенного на рис. 2. Таким образом, евклидов объем $\text{Vol}(\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma))$ представляет собой сумму объемов V_i тетраэдров $Q_0Q_1P_iP_{i+1}$, где $i = 0, \dots, 9$, и $P_{10} = P_0$, и находится по формулам (6), (8) и (9):

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma)) &= \sum_{i=0}^9 V_i = \frac{4}{3}(ab + t(Y(x-a) + Xb)) \\ &= -\frac{16X\sqrt{1-X^2}(15 + 3M^2 - 105X^2 + 19M^2X^2 + 40X^4)}{3M^2(1 + M^2 - 8X^2)^2}. \end{aligned}$$

Заметим, что остаток от деления полинома $P = 15 + 3M^2 - 105X^2 + 19M^2X^2 + 40X^4$ на полином $Q = 5 + 6M^2 + M^4 - 60X^2 - 12M^2X^2 + 80X^4$ равен $M^4 - 50M^2X^2 + 150X^2 - 25$. Поскольку в нашем случае $Q = Q(M, X) \equiv 0$, окончательный результат можно представить в виде

$$\text{Vol}(\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma)) = \frac{8X\sqrt{1-X^2}(M^4 - 50M^2X^2 + 150X^2 - 25)}{3M^2(1 + M^2 - 8X^2)^2}.$$

Проиллюстрируем полученные результаты на следующих примерах.

6. Примеры

Ниже приведена таблица, в которой представлены результаты численных экспериментов. В ходе которых также были вычислены:

- длины сингулярных геодезических ℓ_α и ℓ_γ , которые равны соответственно $\ell_\alpha = 2t$, где t представлено в (6), и $\ell_\gamma = \sum_{i=0}^9 |P_iP_{i+1}|$.
- приведенный евклидов объем

$$\text{vol}(\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma)) = \frac{\text{Vol}(\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma))}{d\ell_\alpha^2\ell_\gamma},$$

где d — наименьшее расстояние между сингулярными компонентами, в рассматриваемой модели $d = |Q_0Q_1| = 2$.

Данные таблицы расположены в порядке уменьшения приведенного евклидова объема конического многообразия $\mathcal{O}(\alpha, \alpha; \gamma)$.

Таблица 1

Конический угол α многообразия $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\alpha, \alpha, \gamma)$, параметры $X = \cos \frac{\theta}{2}$, $g = \cos \gamma$	Евклидов объем $\text{Vol}(\mathcal{O})$ и приведенный евклидов объем $\text{vol}(\mathcal{O})$	Евклидовы длины ℓ_α и ℓ_γ сингулярных геодезических $\mathcal{O}$
$\alpha = \frac{2\pi}{3}$ $X = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0.8165$, $g = 1$	$\frac{32\sqrt{2}}{3} = 15.0849$ $\frac{1}{45\sqrt{2}} = 0.01571$	$2\sqrt{6} = 4.89898$ 20
$\alpha = \frac{4\pi}{5}$ $X = 0.811618$, $g = -0.6757$	48.5817 0.008185	9.61766 32.0835
$\alpha = \frac{5\pi}{6}$ $X = 0.810809$, $g = -1$	11.6288 0.006679	11.814 38.416
$\alpha = \frac{19\pi}{20}$ $X = 0.809175$, $g = 0.527436$	834.486 0.00192325	41.1951 127.838
$\alpha = \pi - 0.02$ $X = 0.80902$, $g = 0.99163$	51707 0.000243936	324.897 1004.06

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Koebe Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven // Nachr. Akad. Wiss. Gött., II. Math.-Phys. Kl. 1907. P. .
2. Perelman G. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications // arXiv: math.DG/ 0211159[math.DG]. 2002.
3. Perelman G. Ricci flow with surgery on three-manifold // arXiv:math.DG/0303109[math.DG]. 2003.
4. Perelman G. Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds // arXiv:math.DG/0307245[math.DG]. 2003.
5. Веснин А. Ю., Рассказов А. А.. Изометрии гиперболических многообразий Фибоначчи // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 1. С. 14–29.
6. Riley R. An elliptical path from parabolic representations to hyperbolic structure // Topology of Low-Dimension manifolds. : Springer-Verl., 1979. P. 99–133. (Lect. Notes Math.; V. 722).
7. Thurston W. The geometry and topology of 3-manifold. Lecture notes. : Princeton Univ., 1980.
8. Mednykh A., Rasskazov A. Volumes and Degeneration of Cone-structures on the Figure-eight knot // Tokyo J. Math. 2006. V. 29, N 2. P. 445–464.
9. Shmatkov R. N. Properties of Euclidean Whitehead link cone-manifolds // Sib. Adv. Math. 2003. V. 13, N 1. P. 55–86.
10. Соколова Д. Ю. О существовании евклидовой структуры на узле трилистник с мостом // Мат. заметки ЯГУ. 2013. Т. 20, № 1. С. 128–140.

Статья поступила 24 сентября 2015 г.

Медных Александр Дмитриевич, Соколова Дарья Юрьевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
mednykh@math.nsc.ru