

УДК 514.16

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ И МНОГОГРАННИКИ НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ

Т. М. Лавшук

Аннотация. Исследуется вопрос о возможности построения правильных многоугольников и правильных многогранников над конечным полем заданной характеристики. Даны необходимые и достаточные условия для построения исследуемых объектов.

Ключевые слова: правильный многоугольник над F_p , правильный многогранник над F_p .

Lavshuk T. M. Regular polygons and polyhedra over finite field.

Abstract: We establish necessary and sufficient conditions for the existence of regular polygons and polyhedra over finite field of prescribed characteristics.

Keywords: regular polygon, regular polyhedron over finite field.

1. Введение

В данной работе речь пойдет о реализации правильных многоугольников и правильных многогранников над конечным полем F_p , где F_p — это поле вычетов по модулю простого числа p . Например, правильный многоугольник над F_p визуально представляет собой не тот многоугольник, который мы привыкли видеть на плоскости над $\mathbb{R}$. Лишь знание правил, как построить этот объект, задание условий его существования над F_p помогают увидеть общую картину для дальнейших исследований, связанных не только с многоугольником. Проблема построения многоугольников актуальна в теории римановых поверхностей, для построения которых отождествляют стороны фундаментального многоугольника. Для этого требуется реализовать многоугольник в евклидовой, гиперболической или сферической геометриях. Аналогичная проблема возникает в трехмерном случае при построении многообразий. Более общая постановка вопроса — это исследование римановых поверхностей и многообразий над конечным полем.

2. Правильные многоугольники над F_p и их реализация

Определим правильный многоугольник (n -угольник) над F_p с помощью понятия регулярной звезды порядка n [1]. Будем использовать способ построения

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15-01-07906).

его вершин, описанный Кокстером в [1], т. е. поворотом исходной вершины на угол $\frac{2\pi}{n}$. В случае конечного поля поворот заменим отражением точки относительно прямой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если набор прямых $[l_0, l_1, \dots, l_{n-1}]$ является регулярной звездой порядка n с общей точкой пересечения O , то полученное указанным выше способом множество из n точек (назовем их вершинами) с условием, что квадраты расстояний между соседними точками сравнимы по модулю p , и прямых, проходящих через эти точки (назовем их сторонами), называется *правильным многоугольником над конечным полем F_p* .

Покажем, при каких значениях p возможна реализация правильного треугольника над F_p , используя теорему о существовании звезды 3-го порядка (см. [2]).

Теорема (звезда третьего порядка). *Регулярная звезда порядка три существует только тогда, когда число 3 является ненулевым квадратом.*

С доказательством этого результата можно ознакомиться в [2]. Докажем необходимое и достаточное условие существования правильного треугольника над F_p , используя иной подход.

Теорема 2.1. *Правильный треугольник над F_p существует тогда и только тогда, когда число 3 является ненулевым квадратом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ и $\vec{OC}$ — три неколлинеарных между собой вектора на плоскости, расположенных так, как показано на рис. 1(a), где точка O — центр тяжести точек A , B и C . Построим правильный треугольник над $\mathbb{R}$. Не ограничивая общности, будем считать, что точка O имеет координаты $(0; 0)$. Концы заданных векторов и прямые, проходящие через них, образуют правильный треугольник ABC (рис. 1(b)).

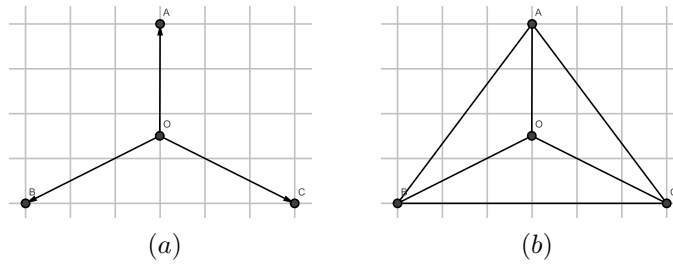


Рис. 1. Построение правильного треугольника ABC

Ясно, что

$$|\vec{OA}|^2 = |\vec{OB}|^2 = |\vec{OC}|^2, \quad \angle AOB = \angle BOC = \angle AOC.$$

Это справедливо и над конечным полем F_p , если под равенством углов понимать равенство соответствующих скалярных произведений. Следовательно,

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OB} \cdot \vec{OC} = \vec{OA} \cdot \vec{OC}.$$

Исходя из написанного выше, составим следующую систему:

$$\begin{cases} (\overrightarrow{OA})^2 = (\overrightarrow{OB})^2 = (\overrightarrow{OC})^2, \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}, \\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Система (1) эквивалентна системе

$$\begin{cases} (\overrightarrow{OA})^2 = (\overrightarrow{OB})^2, \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA})^2. \end{cases} \quad (2)$$

Если векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ имеют координаты (x, y) и (s, t) соответственно, то систему (2) можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = s^2 + t^2, \\ xs + yt = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (3)$$

Решим систему (3), выражая x, y через s и t :

$$\left[\begin{cases} x = \frac{1}{2}(-s - \sqrt{3}t), \\ y = \frac{1}{2}(\sqrt{3}s - t), \\ x = \frac{1}{2}(-s + \sqrt{3}t), \\ y = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}s - t). \end{cases} \right. \quad (4)$$

Для реализации правильного треугольника ABC над F_p необходимо, чтобы существовали координаты каждой его вершины. Согласно (4) для выполнения этого условия требуется существование в поле F_p числа $\sqrt{3}$. Всегда можно определить s и t как элементы поля F_p . Следовательно, выбираем такое p , чтобы 3 являлось ненулевым квадратом. Учитывая то, что два неколлинеарных вектора образуют базис на плоскости, приходим к выводу, что для каждого такого p будет существовать хотя бы один правильный треугольник над F_p .

Для правильного пятиугольника над F_p и правильного семиугольника над F_p можно сделать аналогичные выводы в силу следующих теорем из [2].

Теорема (звезда пятого порядка). *Регулярная звезда порядка пять существует только тогда, когда существует ненулевое число r , удовлетворяющее условиям: (i) $r^2 = 5$, (ii) $2(5 - r)$ является квадратом.*

Теорема (звезда седьмого порядка). *Регулярная звезда порядка семь существует только тогда, когда существует ненулевое число s , для которого*

$$7 - 56s + 112s^2 - 64s^3 = 0$$

и $s(1 - s)$ является квадратом.

Визуально сложно распознать правильные многоугольники над F_p . Возьмем в качестве примера правильный треугольник над F_p и проследим ход его построения.

Пусть $A(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$, $B(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $C(1; 0)$ — вершины правильного треугольника над $\mathbb{R}$. Согласно теореме 2.1 и результатам из [3] выберем в качестве характеристики p последовательность A038874, т. е. простые числа, сравнимые с $\{1, 2, 3, 11\}$ по модулю 12. Пусть $p = 11$, тогда, пересчитав координаты вершин заданного треугольника в F_{11} , получим $A(5; 3)$, $B(5; 8)$, $C(1; 0)$.

Далее составим уравнения прямых, проходящих через его соседние вершины:

$$AB : x = 5, \quad (5)$$

$$AC : 8x + 4y + 3 = 0, \quad (6)$$

$$BC : 3x + 4y + 8 = 0. \quad (7)$$

Найдем все точки, которые будут удовлетворять уравнениям (5)–(7), и вместе с точками A , B , C отметим их на решетке F_{11}^2 .

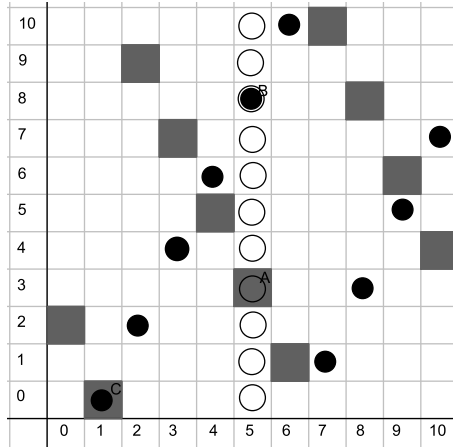


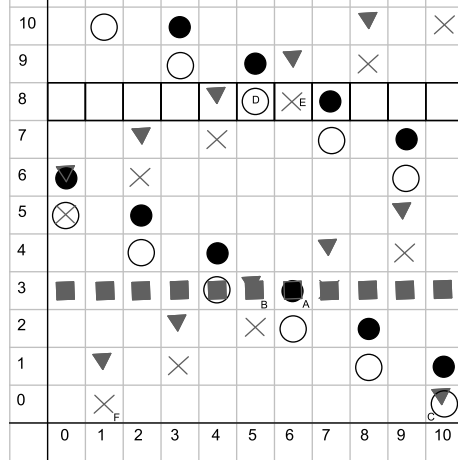
Рис. 2. Правильный $\triangle ABC$ над F_{11}

В поле F_p нет отношения порядка, поэтому для прямых, заданных уравнениями вида $x = a$ или $y = b$, отмечаем на решетке все точки, которые им удовлетворяют. Для каждой прямой удобно выбирать свою маркировку (рис. 2). Согласно определению правильного n -угольника над F_p (в нашем случае $n = 3$), необходимо проверить сравнимость по модулю 11 квадратов длин сторон $\triangle ABC$. Используя определение расстояния между точками, получим

$$|AB|^2 \equiv |AC|^2 \equiv |BC|^2 \equiv 3 \pmod{11}.$$

Итак, реализован правильный треугольник над конечным полем F_{11} .

Аналогичным образом осуществляем реализацию других правильных многоугольников над F_p . Результат такой реализации над F_{11} правильного шестиугольника показан на рис. 3.


 Рис. 3. Правильный шестиугольник над F_{11}

3. Правильные многогранники в F_p^3 и их реализация

В данном пункте будут установлены критерии существования правильных многогранников в F_p^3 , где F_p^3 — трехмерное векторное пространство над F_p . Также будут предложены визуализации соответствующих объектов.

3.1. Правильный тетраэдр в F_p^3 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Правильным тетраэдром* в F_p^3 будем называть множество, состоящее из четырех правильных треугольников, определенных над F_p , попарно пересекающихся по общей стороне.

Покажем, при каких p возможна реализация правильного тетраэдра в F_p^3 .

Теорема 3.1.1. *Правильный тетраэдр реализуется над любым конечным полем F_p .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наша цель — показать, что для каждого простого числа p существует хотя бы один правильный тетраэдр в F_p^3 .

Пусть $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ и $\vec{OC}$ — три базисных вектора трехмерного пространства, длины которых равны единице. Мы хотим получить правильный тетраэдр $ABCD$ над $\mathbb{R}$. Для этого соединим концы базисных векторов A , B и C сначала друг с другом прямыми, получим правильный треугольник ABC , а затем с точкой D , которая имеет координаты (t, t, t) , как показано на рис. 4.

Требуется, чтобы выполнялись равенства

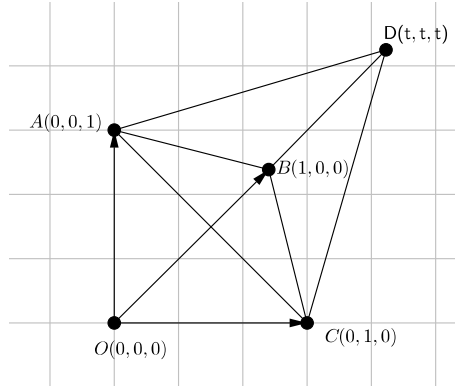
$$|AB|^2 = |BC|^2 = |AC|^2 = |AD|^2 = |BD|^2 = |CD|^2.$$

Используя определение расстояния между точками, получим

$$|AB|^2 = |BC|^2 = |AC|^2 = 2, \quad |AD|^2 = |BD|^2 = |CD|^2 = 3t^2 - 2t + 1.$$

Следовательно,

$$3t^2 - 2t + 1 = 2.$$

Рис. 4. Правильный тетраэдр над $\mathbb{R}$

Решив данное уравнение, получим $t = -\frac{1}{3}$ или $t = 1$. Тогда точка D будет иметь координаты $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ или $(1, 1, 1)$. Для реализации правильного тетраэдра в F_p^3 необходимо, чтобы существовали координаты каждой его вершины. Для $ABCD$ они существуют в любом поле F_p . Таким образом, для любого p всегда найдется хотя бы один правильный тетраэдр, реализуемый в F_p^3 , что и требовалось доказать.

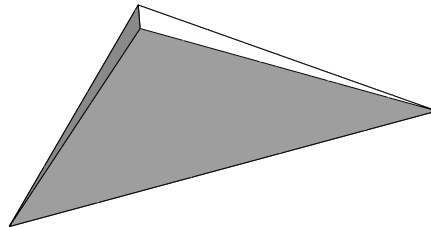
Реализуем в F_p^3 правильный тетраэдр с координатами вершин

$$A\left(0; 0; \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2\sqrt{6}}\right), \quad B\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2\sqrt{6}}\right),$$

$$C\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2\sqrt{6}}\right), \quad D\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; 0; -\frac{1}{2\sqrt{6}}\right).$$

В качестве характеристики p можно выбрать последовательность простых чисел A130063 [3], т. е. простые числа сравнимые с 1 или 23 по модулю 24. Пусть $p = 23$, тогда, пересчитав координаты вершин правильного тетраэдра в поле F_{23} , получим $A(0; 0; 20)$, $B(5; 11; 1)$, $C(5; 12; 1)$, $D(13; 0; 1)$.

С помощью команд пакета Wolfram Mathematica построим правильный тетраэдр в F_{23}^3 (рис. 5).

Рис. 5. Правильный тетраэдр над $\mathbb{R}$

Квадраты расстояний между соседними вершинами построенного тетраэдра сравнимы по модулю 23 с числом 1. Вершины грани правильного тетраэдра $ABCD$ в F_{23}^3 находятся в одной плоскости, что было проверено с помощью критерия компланарности трех векторов. Это распространяется на все его грани, причем для каждой грани своя плоскость. В итоге мы реализовали $ABCD$ в F_{23}^3 .

3.2. Гексаэдр в F_p^3 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Гексаэдром (кубом)* в F_p^3 будем называть множество точек и прямых, образующих шесть квадратов над F_p , любые два из которых пересекаются по общей стороне и двум общим вершинам или не пересекаются. При этом каждая вершина является вершиной двух других.

Приведем доказательство теоремы о реализации гексаэдра в F_p^3 , с помощью которого докажем теоремы о реализации других правильных многогранников в F_p^3 .

Теорема 3.2.1. *Гексаэдр реализуется над любым конечным полем F_p .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим в пространстве три базисных вектора единичной длины, взаимно перпендикулярных друг другу, тогда легко сможем построить гексаэдр над $\mathbb{R}$. Координаты их концов A , B , C и начала O нам известны (рис. 6), тогда координаты других точек будут следующими: $A_1(1; 0; 1)$, $B_1(1; 1; 1)$, $C_1(0; 1; 1)$, $D(1; 1; 0)$.

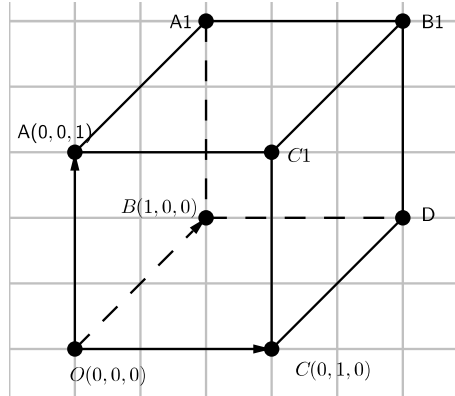


Рис. 6. Гексаэдр над $\mathbb{R}$

Каждая из них существует над любым конечным полем F_p . Следовательно, для любого p всегда сможем построить хотя бы один гексаэдр, который реализуется в F_p^3 .

Заметим, что теорему 3.1.1 также можно доказать с помощью теоремы 3.2.1, вписав правильный тетраэдр в гексаэдр. Визуально гексаэдр в F_p^3 выглядит как обычный куб над $\mathbb{R}$.

3.3. Октаэдр в F_p^3 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Октаэдром* в F_p^3 будем называть множество точек и прямых, образующих 8 правильных треугольников над F_p , любые два из которых пересекаются по общей стороне и двум общим вершинам или не пересекаются. При этом каждая вершина таких треугольников является вершиной трех других.

С помощью теоремы 3.2.1 докажем аналогичный результат для октаэдра.

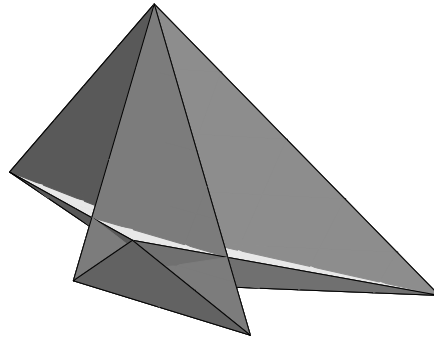


Рис. 7. Октаэдр в F_{17}^3

Теорема 3.3.1. *Октаэдр реализуется над любым конечным полем F_p при $p > 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $OBDCAA_1B_1C_1$ — гексаэдр над $\mathbb{R}$, который построен в доказательстве теоремы 3.2.1 (см. рис. 6). Впишем в него октаэдр над $\mathbb{R}$. Вершинами этого октаэдра будут середины граней гексаэдра, которые будут существовать над любым полем F_p при $p > 2$. Следовательно, октаэдр реализуется над любым полем F_p при $p > 2$.

На рис. 7 показан результат реализации в F_{17}^3 октаэдра со следующими вершинами:

$$\begin{aligned} A_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; 0\right), \quad A_2\left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right), \quad A_3\left(0; 0; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ A_4\left(0; 0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad A_5\left(0; -\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right), \quad A_6\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; 0\right). \end{aligned}$$

3.4. Додекаэдр в F_p^3 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Додекаэдром* в F_p^3 будем называть множество точек и прямых, образующих 12 правильных пятиугольников над F_p , любые два из которых пересекаются по общей стороне и двум общим вершинам или не пересекаются. При этом каждая вершина таких пятиугольников является вершиной двух других.

Теорема 3.4.1. Додекаэдр реализуется над конечным полем F_p при $p \equiv \{0, 1, 4\} \pmod{5}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задан гексаэдр над $\mathbb{R}$ с вершинами

$$\begin{aligned} &A_1\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \quad A_2\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \quad A_3\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \quad A_4\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \\ &A_5\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), \quad A_6\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), \quad A_7\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), \quad A_8\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Опишем около него додекаэдр. Выполнив некоторые вычисления, найдем координаты вершин додекаэдра, которые не совпадают с вершинами гексаэдра:

$$\begin{aligned} &A_9\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}; 0; \frac{\sqrt{5}+1}{4}\right), \quad A_{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}; 0; \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right), \quad A_{11}\left(0; \frac{\sqrt{5}+1}{4}; \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right), \\ &A_{12}\left(0; \frac{\sqrt{5}+1}{4}; \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right), \quad A_{13}\left(0; \frac{-1-\sqrt{5}}{4}; \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right), \quad A_{14}\left(0; \frac{-1-\sqrt{5}}{4}; \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right), \\ &A_{15}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}; 0; \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right), \quad A_{16}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}; 0; \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right), \quad A_{17}\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}; \frac{\sqrt{5}-1}{4}; 0\right), \\ &A_{18}\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}; \frac{1-\sqrt{5}}{4}; 0\right), \quad A_{19}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}; \frac{\sqrt{5}-1}{4}; 0\right), \quad A_{20}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}; \frac{1-\sqrt{5}}{4}; 0\right). \end{aligned}$$

Для реализации додекаэдра в F_p^3 требуется существование координат каждой его вершины в заданном поле. Существование координат точек, совпадающих с вершинами гексаэдра, следует из теоремы 3.2.1.

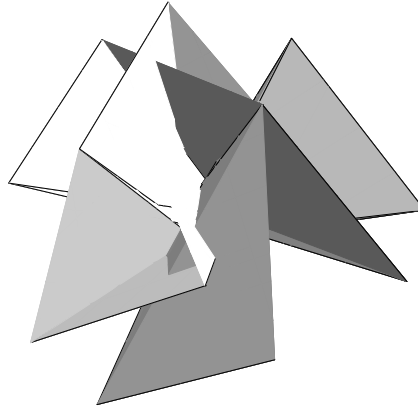


Рис. 8. Додекаэдр в F_{11}^3

Для существования остальных вершин, координаты которых получены выше, требуется, чтобы число 5 являлось квадратом некоторого числа по модулю p . Следовательно, учитывая то, что любые три некопланарных вектора

образуют базис в пространстве, для каждого p , определенного последовательностью A038872 [3], т. е. для каждого простого числа, сравнимого с $\{0, 1, 4\}$ по модулю 5, всегда найдется хотя бы один додекаэдр, который реализуется в F_p^3 .

Результат реализации в F_{11}^3 додекаэдра $A_1 A_2 \dots, A_{20}$, заданного в доказательстве теоремы 3.4.1, показан на рис. 8.

3.5. Икосаэдр в F_p^3 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Икосаэдром* в F_p^3 будем называть множество точек и прямых, образующих 20 правильных треугольников над F_p , любые два из которых либо пересекаются по общей стороне и двум общим вершинам, либо имеют одну общую вершину, либо не пересекаются. При этом каждая вершина таких треугольников является вершиной четырех других.

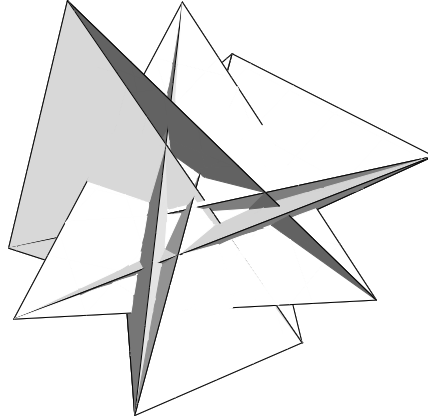


Рис. 9. Икосаэдр в F_{11}^3

Икосаэдр и додекаэдр — двойственные друг другу многогранники. Если вписать икосаэдр в додекаэдр, то вершинами икосаэдра будут являться середины граней додекаэдра. Тогда, исключив случай $p = 5$, можно убедиться, что верна

Теорема 3.5.1. *Икосаэдр реализуется над конечным полем F_p при $p > 5$ и $p \equiv \{0, 1, 4\} \pmod{5}$.*

Построим икосаэдр в F_p^3 . Пусть $A_1 A_2 \dots A_{12}$ — это икосаэдр, заданный над полем $\mathbb{R}$, с координатами вершин

$$\begin{aligned} A_1 \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{20}; 0; \frac{-5-\sqrt{5}}{20} \right), \quad A_2 \left(\frac{-5-3\sqrt{5}}{20}; 0; \frac{5+\sqrt{5}}{20} \right), \quad A_3 \left(\frac{5+\sqrt{5}}{20}; \frac{-5-3\sqrt{5}}{20}; 0 \right), \\ A_4 \left(\frac{-5-\sqrt{5}}{20}; \frac{5+3\sqrt{5}}{20}; 0 \right), \quad A_5 \left(0; \frac{5+\sqrt{5}}{20}; \frac{-5-3\sqrt{5}}{20} \right), \quad A_6 \left(\frac{5+\sqrt{5}}{20}; \frac{5+3\sqrt{5}}{20}; 0 \right), \end{aligned}$$

$$A_7\left(\frac{-5-\sqrt{5}}{20}; \frac{-5-3\sqrt{5}}{20}; 0\right), A_8\left(0; \frac{-5-\sqrt{5}}{20}; \frac{5+3\sqrt{5}}{20}\right), A_9\left(0; \frac{-5-\sqrt{5}}{20}; \frac{-5-3\sqrt{5}}{20}\right), \\ A_{10}\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{20}; 0; \frac{5+\sqrt{5}}{20}\right), A_{11}\left(\frac{-5-3\sqrt{5}}{20}; 0; \frac{-5-\sqrt{5}}{20}\right), A_{12}\left(0; \frac{5+\sqrt{5}}{20}; \frac{5+3\sqrt{5}}{20}\right).$$

В качестве характеристики p можно выбрать последовательность A038872 [3].

Пусть $p = 11$. Тогда, пересчитав координаты вершин икосаэдра в поле F_{11} , получим $A_1(8; 0; 10)$, $A_2(3; 0; 1)$, $A_3(1; 3; 0)$, $A_4(10; 8; 0)$, $A_5(0; 1; 3)$, $A_6(1; 8; 0)$, $A_7(10; 3; 0)$, $A_8(0; 10; 8)$, $A_9(0; 10; 3)$, $A_{10}(8; 0; 1)$, $A_{11}(3; 0; 10)$, $A_{12}(0; 1; 8)$.

С помощью команд пакета Wolfram Mathematica построим икосаэдр в F_{11}^3 (рис. 9).

Аналогичные результаты предполагается получить для полуправильных многогранников.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кокстер Г. С. М. Введение в геометрию. М.: Наука, 1966.
2. Wildberger N. J. Divine proportions: rational trigonometry to universal geometry. Australia: Wild Egg Pty Ltd., 2005.
3. Sloane N. J. A. The on-line encyclopedia of integers sequences. 1964. <http://oeis.org/?language=english>

Статья поступила 12 октября 2015 г.

Лавшук Тамара Михайловна
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
tamara_090391@mail.ru