

О ПСЕВДООБЪЕМЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТЕТРАЭДРА

Е. С. Кудина, А. Д. Медных

Аннотация. Изучаются свойства гиперболического тетраэдра в трехмерном пространстве Лобачевского. Проводится сравнительный анализ двух понятий, характеризующих тетраэдр — это его объем и псевдообъем, определяемый как квадратный корень из модуля определителя матрицы Грама, образованной длинами ребер. В 1877 г. итальянский математик Эрнико д’Овидио предположил, что для гиперболических тетраэдров эти два понятия, с точностью до естественной константы нормирования, совпадают. Позже выяснилось, что это неверно, но, тем не менее, асимптотическое равенство сохраняется для бесконечно малых тетраэдров. Классическая теорема Сервуа утверждает, что объем евклидова тетраэдра равен одной шестой произведения длин скрещивающихся ребер на расстояние и синус угла между ними. Мы покажем, что эта теорема остается справедливой для псевдообъема гиперболического тетраэдра, но перестает быть верной для его неевклидова объема. В качестве следствия будет установлено, что аналогичная ситуация имеет место и для теоремы Штейнера о сохранении евклидова объема тетраэдра при параллельном перемещении его ребер.

Ключевые слова: гиперболическое пространство, объем, псевдообъем, теорема Сервуа, теорема Штейнера, матрица Грама.

E. S. Kudina and A. D. Mednykh. On the pseudo-volume of a hyperbolic tetrahedron

Abstract: The paper is devoted to study of a hyperbolic tetrahedron in the three dimensional Lobachevsky space. The aim is to compare two notions for the hyperbolic tetrahedron: its volume and its pseudo-volume. The latter is defined as the square root of the determinate for Gram matrix formed by the edges. In 1877 Italian mathematician Enrico d’Ovidio suggested that these two notions do coincide. Later it became known that this is not true. In the same time these two volumes are equal for infinitesimal tetrahedra. The classical Servois theorem told that the volume of an Euclidean tetrahedron is one sixth of the product of screw edges times distance and sine of angle between. We show that the theorem is true for the pseudo-volume of a hyperbolic tetrahedron. As a consequence we got a hyperbolic version of the Steiner theorem for the pseudo-volume. We show also that the Steiner theorem for hyperbolic volume is not valid.

Keywords: hyperbolic space, volume, pseudo-volume, Servois theorem, Steiner theorem, Gram matrix.

1. Введение

Вычисление объема многогранника — это классическая задача, известная со времен Евклида и не потерявшая актуальность в наши дни. Во многом

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 16–31–50009 и 15–01–07906).

это связано с тем, что объем трехмерного многообразия является его важным геометрическим инвариантом. В данной работе рассматриваются тетраэдры в гиперболическом пространстве. Сравняются объем и псевдообъем гиперболического тетраэдра в трехмерном пространстве Лобачевского. В 1877 г. итальянским математиком Эрнесто д'Овидио выдвинуто предположение о равенстве, с точностью до константы, этих двух понятий. Однако позже было доказано что эти два понятия различны, асимптотическое равенство сохраняется только для бесконечно малых тетраэдров.

Согласно классической теореме Сервуа [1, с. 98], объем евклидова тетраэдра равен одной шестой произведения длин скрепляющихся ребер на расстояние и синус угла между ними. Важным следствием из этого результата является теорема Штейнера [1, с. 99], которая утверждает, что объем евклидова тетраэдра не изменяется при параллельном переносе его стороны вдоль прямой, ее содержащей. В работе для гиперболического тетраэдра приведено доказательство теоремы Сервуа для псевдообъема и построен контрпример, показывающий, что для объемов эта теорема неверна. В качестве следствия из теоремы Сервуа для гиперболических псевдообъемов получена теорема Штейнера для псевдообъема гиперболического тетраэдра.

2. Предварительные сведения

Рассмотрим в качестве модели гиперболической геометрии $\mathbb{H}^3$ верхнее полупространство $R^3 = \{(x, y, t), x, y, t \in \mathbb{R}, t > 0\}$, снабженное метрикой $ds^2 = (dx^2 + dy^2 + dt^2)/t^2$. Все необходимые нам формулы неевклидовой геометрии можно найти в [2]. Нам потребуются следующие хорошо известные факты.

Теорема 2.1. *Геодезическими в $\mathbb{H}^3$ является либо полупрямые, либо полукружности, ортогональные плоскости xu .*

Теорема 2.2. *Группа сохраняющих ориентацию изометрий пространства Лобачевского $\mathbb{H}^3$ совпадает с $PSL(2, \mathbb{C})$, состоящей из дробно-линейных преобразований вида $z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc = 1$. При этом действие указанных отображений продолжается в $\mathbb{H}^3$ по формуле Пуанкаре*

$$z + tj \rightarrow [a(z + tj) + b][c(z + tj) + d]^{-1}, \quad (1)$$

где $j, j^2 = -1$ — единичный кватернион, $z = x + yi$, а точка $z + tj$ отождествляется с точкой (x, y, t) пространства $\mathbb{H}^3$.

Теорема 2.3. *Функция расстояния ρ в пространстве $\mathbb{H}^3$ удовлетворяет соотношению*

$$\operatorname{ch} \rho(z_1 + t_1 j, z_2 + t_2 j) = 1 + \frac{|z_1 - z_2|^2 + |t_1 - t_2|^2}{2t_1 t_2}. \quad (2)$$

Теорема 2.4. *Дифференциал объема тетраэдра в гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^3$ удовлетворяет формуле Шлефли*

$$dV = -\frac{1}{2} \sum_k l_k d\theta_k, \quad (3)$$

где l_k и θ_k — длина k -го ребра и двугранный угол при этом ребре.

3. Основные результаты

Установим следующий предварительный результат.

Лемма 3.1. Пусть на расширенной комплексной плоскости заданы четыре попарно различные точки z_1, z_2, z_3, z_4 . Тогда существует дробно-линейное преобразование, переводящее указанные точки соответственно в точки $-R, R, -\frac{e^{i\varphi}}{R}, \frac{e^{i\varphi}}{R}$, где $R > 0$, а φ — некоторое вещественное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим дробно-линейное отображение

$$T(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

и обозначим через $Q = T(z_4)$ сложное ангармоническое отношение четырех точек z_1, z_2, z_3, z_4 . Тогда $T(z)$ отображает точки z_1, z_2, z_3, z_4 в точки $0, \infty, 1$ и Q соответственно.

Найдем дробно-линейное отображение L , переводящее точки $0, \infty, 1, Q$ в точки $-k, \frac{1}{k}, k, -\frac{1}{k}$ соответственно, где k — некоторое комплексное число.

Сравним сложное ангармоническое отношение соответствующих четверок, получим

$$Q = \left(\frac{1}{2} \left(k + \frac{1}{k} \right) \right)^2. \quad (4)$$

Решая полученное уравнение относительно k , находим один из его корней. Оставшиеся три корня будут равны $-k, -\frac{1}{k}$ и $\frac{1}{k}$. Непосредственно убеждаемся, что дробно-линейное отображение

$$L(z) = \frac{-2kz + k(1 + k^2)}{2k^2z - (1 + k^2)} \quad (5)$$

обладает указанными свойствами.

Пусть $k = Re^{i\psi}$. Тогда точки $-k, k, -\frac{1}{k}, \frac{1}{k}$ отображением $z \rightarrow e^{-i\psi}z$ перейдут в точки $-R, R, -\frac{1}{Re^{2i\psi}}, \frac{1}{Re^{2i\psi}}$ соответственно.

Таким образом, отображение $e^{-i\psi} \circ L \circ T$ переводит точки z_1, z_2, z_3, z_4 в точки $-R, R, -\frac{1}{Re^{2i\psi}}, \frac{1}{Re^{2i\psi}}$ соответственно. Положим $\varphi = -2\psi$ и получим требуемый результат. $\square$

В следующем параграфе будут получены неевклидовы аналоги теорем Сервуа и Штейнера для псевдообъема гиперболического тетраэдра.

4. Неевклидовы версии теорем Сервуа и Штейнера

Для получения неевклидовых версий теорем Сервуа и Штейнера нам потребуется выразить определитель матрицы Грама гиперболического тетраэдра через длины его скрепляющихся ребер, расстояния и угол между ними. Для того чтобы сделать это наиболее удобным способом, реализуем гиперболические тетраэдры в верхнем полупространстве $\mathbb{H}^3 = \{(x, y, t), x, y, t \in \mathbb{R}, t > 0\}$ таким

образом, что взаимный перпендикуляр между скрещивающимися ребрами совпадает с вертикальной осью Ot .

Рассмотрим произвольный гиперболический тетраэдр $ABCD$. Продолжим сторону AB через вершину A до вершины A' , лежащей на абсолюте, через вершину B — до вершины B' , также лежащей на абсолюте. Аналогично продолжим сторону CD через C до вершины C' и через вершину D — до D' . Выполняя, если потребуется, дробно-линейное отображение, описанное в лемме 3.1, без ограничения общности можем считать, что $A' = -R$, $B' = R$, $C' = -\frac{e^{i\varphi}}{R}$, $D' = \frac{e^{i\varphi}}{R}$.

Обозначим через O начало координат в декартовой системе $Oxyt$. Пусть φ_A — угол, образованный лучами OA и OA' . Введем аналогичные обозначения $\varphi_B, \varphi_C, \varphi_D$ для соответствующих углов $OB, OB', OC, OC', OD, OD'$. Тогда вершины тетраэдра можно задать с помощью следующих декартовых координат:

$$\begin{aligned} A &= (R \cos \varphi_A, 0, R \sin \varphi_A), & B &= (R \cos \varphi_B, 0, R \sin \varphi_B), \\ C &= \left(\frac{1}{R} \cos \varphi_C \cos \varphi, \frac{1}{R} \cos \varphi_C \sin \varphi, \frac{1}{R} \sin \varphi_C \right), \\ D &= \left(\frac{1}{R} \cos \varphi_D \cos \varphi, \frac{1}{R} \cos \varphi_D \sin \varphi, \frac{1}{R} \sin \varphi_D \right). \end{aligned}$$

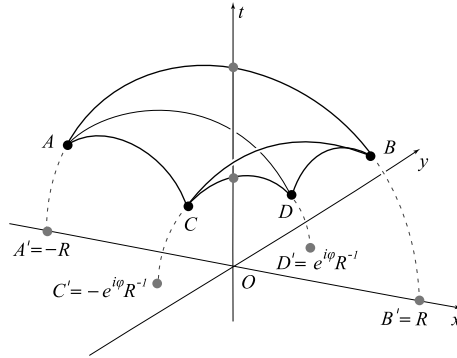


Рис. 1. Гиперболический тетраэдр $ABCD$

Для вычисления гиперболического расстояния между вершинами тетраэдра воспользуемся формулой (2) (см. теорему 2.3):

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \rho(A, B) &= \frac{1 - \cos \varphi_A \cos \varphi_B}{\sin \varphi_A \sin \varphi_B}, & \operatorname{ch} \rho(C, D) &= \frac{1 - \cos \varphi_C \cos \varphi_D}{\sin \varphi_C \sin \varphi_D}, \\ \operatorname{ch} \rho(A, C) &= \frac{R^2 + R^{-2} - 2 \cos \varphi \cos \varphi_A \cos \varphi_C}{2 \sin \varphi_A \sin \varphi_C}, \\ \operatorname{ch} \rho(B, C) &= \frac{R^2 + R^{-2} - 2 \cos \varphi \cos \varphi_B \cos \varphi_C}{2 \sin \varphi_B \sin \varphi_C}, \\ \operatorname{ch} \rho(A, D) &= \frac{R^2 + R^{-2} - 2 \cos \varphi \cos \varphi_A \cos \varphi_D}{2 \sin \varphi_A \sin \varphi_D}, \end{aligned}$$

$$\operatorname{ch} \rho(B, D) = \frac{R^2 + R^{-2} - 2 \cos \varphi \cos \varphi_B \cos \varphi_D}{2 \sin \varphi_B \sin \varphi_D}.$$

Составим матрицу Грама данного тетраэдра:

$$G = \begin{pmatrix} -1 & -\operatorname{ch} \rho(A, B) & -\operatorname{ch} \rho(A, C) & -\operatorname{ch} \rho(A, D) \\ -\operatorname{ch} \rho(A, B) & -1 & -\operatorname{ch} \rho(B, C) & -\operatorname{ch} \rho(B, D) \\ -\operatorname{ch} \rho(A, C) & -\operatorname{ch} \rho(B, C) & -1 & -\operatorname{ch} \rho(C, D) \\ -\operatorname{ch} \rho(A, D) & -\operatorname{ch} \rho(B, D) & -\operatorname{ch} \rho(C, D) & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя определитель матрицы G , имеем

$$\det(G) = -\frac{\sin^2 \varphi (R^4 - 1)^2 (\cos \varphi_A - \cos \varphi_B)^2 (\cos \varphi_C - \cos \varphi_D)^2}{4R^4 \sin^2 \varphi_A \sin^2 \varphi_B \sin^2 \varphi_C \sin^2 \varphi_D}. \quad (6)$$

Воспользовавшись формулой $\operatorname{sh}^2 z = \operatorname{ch}^2 z - 1$, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \rho(A, B) &= \frac{\cos \varphi_A - \cos \varphi_B}{\sin \varphi_A \sin \varphi_B}, \\ \operatorname{sh} \rho(C, D) &= \frac{\cos \varphi_C - \cos \varphi_D}{\sin \varphi_C \sin \varphi_D}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\det(G) = -\frac{(R^4 - 1)^2}{4R^4} \sin^2 \varphi \operatorname{sh}^2 \rho(A, B) \operatorname{sh}^2 \rho(C, D). \quad (7)$$

Учитывая что $R = e^{\frac{\rho}{2}}$, получим $\frac{R^4 - 1}{2R^2} = \operatorname{sh} \rho$. Тогда формула (7) примет вид

$$\det(G) = -\operatorname{sh}^2 \rho \sin^2 \varphi \operatorname{sh}^2 \rho(A, B) \operatorname{sh}^2 \rho(C, D). \quad (8)$$

Отметим, что формулы, эквивалентные формуле (8), но выраженные несколько в других геометрических терминах и доказанные совершенно другой техникой, получены в монографии Фенхеля [3, с. 169, формула (24)] и в неопубликованной рукописи Б. Д. С. МакКоннела [4].

Напомним, что псевдообъем гиперболического тетраэдра следующим образом вычисляется через матрицу Грама $\tilde{V} = \sqrt{-\det(G)}$. Различными авторами используются также следующие названия этой величины: амплитуда, контент, полярный синус и др. Подставляя данное выражение в (8), получим следующий аналог формулы Сервуа для гиперболического тетраэдра.

Теорема 4.1. *Псевдообъем $\tilde{V}$ гиперболического тетраэдра, длины его противоположащих ребер $\rho(A, B)$ и $\rho(C, D)$, а также угол φ и расстояние ρ между этими ребрами связаны между собой следующим соотношением:*

$$\tilde{V} = \operatorname{sh} \rho \sin \varphi \operatorname{sh} \rho(A, B) \operatorname{sh} \rho(C, D). \quad (9)$$

В качестве следствия из формулы (9) получим теорему Штейнера для гиперболического тетраэдра.

Теорема 4.2. *Псевдообъем гиперболического тетраэдра не изменяется, если его противоположные ребра перемещать без изменения длины по прямым, содержащим эти ребра.*

В следующем разделе получена теорема, которая дает контрпример к теореме Штейнера для гиперболического объема тетраэдра.

5. Контрпример к теореме Штейнера

Рассмотрим гиперболический тетраэдр $OABC$ с тремя попарно ортогональными гранями, пересекающимися в вершине O . Из вершины O прямого угла проведем три взаимно ортогональных геодезических, направленных вдоль его ребер, которые условно будем называть осями координат Ox, Oy и Oz . Будем считать, что вершины A, B, C лежат на соответствующих координатных осях.

Пусть $\operatorname{ch} x, \operatorname{ch} y, \operatorname{ch} z$ — косинусы длин сторон тетраэдра, лежащие на соответствующих координатных осях Ox, Oy и Oz . Для удобства построенный тетраэдр (рис. 2) будем обозначать через $T(x, y, z)$.

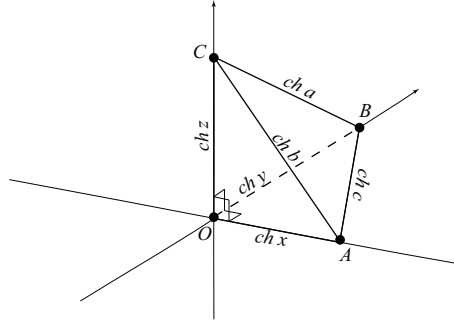


Рис. 2. Гиперболический тетраэдр $OABC$ с тремя попарно ортогональными гранями

Согласно теореме Пифагора для гиперболических прямоугольных треугольников OBC, OAC и OAB имеем

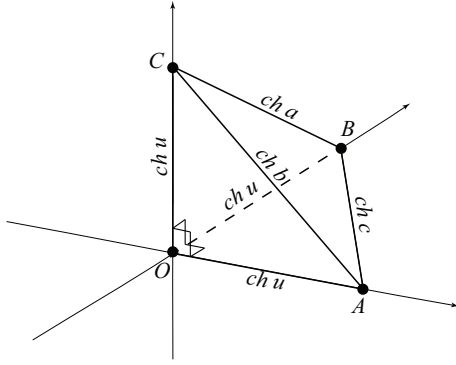
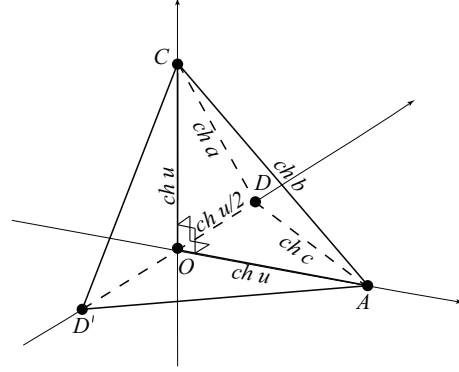
$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} y \operatorname{ch} z, \quad \operatorname{ch} b = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} z, \quad \operatorname{ch} c = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y. \quad (10)$$

В [5, с. 130] для двугранных углов α, β и γ при ребрах BC, AC и AB с длинами a, b и c соответственно были получены следующие формулы:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}^2 \alpha &= \frac{(\operatorname{ch} a \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} b)(\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} c)}{(\operatorname{ch}^2 a - 1)(\operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} a)}, \\ \operatorname{ctg}^2 \beta &= \frac{(\operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} a)(\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} c)}{(\operatorname{ch}^2 b - 1)(\operatorname{ch} a \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} b)}, \\ \operatorname{ctg}^2 \gamma &= \frac{(\operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} a)(\operatorname{ch} a \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} b)}{(\operatorname{ch}^2 c - 1)(\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} c)}. \end{aligned} \quad (11)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В обозначениях работы [5] имеем $\frac{A}{2} = \alpha, \frac{B}{2} = \beta$ и $\frac{C}{2} = \gamma$.

Искомый контрпример строится по следующей схеме. Положим $x = y = z = u$ и рассмотрим тетраэдр $T_1 = T(u, u, u)$ (рис. 3). На оси Oy выберем точки D, D' , зеркально симметричные относительно плоскости OAC и лежащие на расстоянии $\frac{u}{2}$ от точки O . Пусть T_2 — это тетраэдр $ACDD'$ (рис. 4). Тогда T_1 и T_2 имеют общее ребро AC длины b и противолежащие ей ребра OB и DD' длины u . Заметим, что ребро DD' получается из ребра OB параллельным сдвигом вдоль оси Oy . Таким образом, тетраэдры T_1 и T_2 удовлетворяют

Рис. 3. Тетраэдр T_1 Рис. 4. Тетраэдр T_2

условиям теоремы Штейнера. Наша цель — показать, что они имеют разные гиперболические объемы.

Доказательство опирается на следующие две леммы.

Лемма 5.1. Гиперболический объем тетраэдра $\text{Vol}(T_1)$ находится по формуле

$$\text{Vol}(T_1) = \int_1^{\text{ch } u} f(t) dt, \quad (12)$$

где

$$f(t) = \frac{3 \operatorname{arch}(t^2)}{2\sqrt{1+t^2}(1+2t^2)}.$$

Лемма 5.2. Гиперболический объем тетраэдра T_2 находится по формуле

$$\text{Vol}(T_2) = 2 \int_1^{\text{ch } u} g(t) dt, \quad (13)$$

где

$$g(t) = \frac{\operatorname{arch}(\frac{t\sqrt{1+t}}{\sqrt{2}})(2+t)}{2(1+t+t^2)\sqrt{2+2t+t^2}} + \frac{\operatorname{arch}(t^2)(1-t)}{4(1+t+t^2)\sqrt{1+t^2}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.1. Рассмотрим первый тетраэдр $T_1 = T(u, u, u)$. Введем обозначение $t = \text{ch } u$, тогда $\text{ch } \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1+t}{2}}$. Найдем дифференциалы углов α, β и γ . В силу (11) имеем

$$\alpha = \beta = \gamma = \operatorname{arch} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

откуда

$$d(\alpha) = d(\beta) = d(\gamma) = -\frac{dt}{(1+2t^2)\sqrt{1+t^2}}. \quad (14)$$

Вычислим длины соответствующих сторон $l_\alpha = a$, $l_\beta = b$ и $l_\gamma = c$:

$$-\frac{l_\alpha}{2} = -\frac{l_\beta}{2} = -\frac{l_\gamma}{2} = -\frac{1}{2} \operatorname{arch}(t^2). \quad (15)$$

Подставляя формулы (14) и (15) в формулы Шлефли (3), получим формулу (12) для искомого объема тетраэдра T_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.2. Рассмотрим второй тетраэдр $T_2 = T(u, \frac{u}{2}, u)$. Он состоит из двух зеркальных копий тетраэдра $T'_2 = T(u, \frac{u}{2}, u)$.

Найдем дифференциалы углов α, β и γ тетраэдра T'_2 . В силу (11)

$$\alpha = \gamma = \operatorname{arch} \frac{t}{\sqrt{2+2t+t^2}}, \quad \beta = \operatorname{arch} \frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}},$$

откуда

$$\begin{aligned} d(\alpha) &= -\frac{2+t}{2(1+t+t^2)\sqrt{2+2t+t^2}} dt, \\ d(\beta) &= \frac{t-1}{2(1+t+t^2)\sqrt{1+t^2}} dt, \\ d(\gamma) &= -\frac{2+t}{2(1+t+t^2)\sqrt{2+2t+t^2}} dt. \end{aligned} \quad (16)$$

Вычислим длины соответствующих сторон:

$$\begin{aligned} -\frac{l_\alpha}{2} &= -\frac{1}{2} \operatorname{arch} \left(t \sqrt{\frac{1+t}{2}} \right), \quad -\frac{l_\beta}{2} = -\frac{1}{2} \operatorname{arch}(t^2), \\ -\frac{l_\gamma}{2} &= -\frac{1}{2} \operatorname{arch} \left(t \sqrt{\frac{1+t}{2}} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

По формуле Шлефли

$$d \operatorname{Vol}(T'_2) = -\frac{l_\alpha}{2} d\alpha - \frac{l_\beta}{2} d\beta - \frac{l_\gamma}{2} d\gamma = g(t) dt,$$

где $g(t)$ та же, что и в формулировке леммы 5.2. Отсюда, учитывая очевидное равенство $\operatorname{Vol}(T_2) = 2 \operatorname{Vol}(T'_2)$, приходим к (13).

Нетрудно убедиться, что функции, задаваемые интегралами (12) и (13), различны. Таким образом, теорема Штейнера не верна для гиперболических объемов тетраэдров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Понарин Я. П. Элементарная геометрия. Т. 2. Стереометрия, преобразования пространства. М.: МЦНМО, 2006.
2. Волинец И. А., Медных А. Д. Введение в теорию клейновых групп. Уч. пособие. Омск: ОмГУ, 1984.
3. Fenchel W. Elementary geometry in hyperbolic space. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1989.
4. McConnell B. D. S. Hedronometric formulas for a hyperbolic tetrahedron // <http://daylateanddollar.short.com/mathdocs/Hedronometric-Formulas-for-a-Hyperbolic-Tetrahedron.pdf>

5. Абросимов Н. А., Байгонакова Г. А. Гиперболический октаэдр с $mmmm$ -симметрией // Сиб. электрон. мат. изв. 2013. Т. 10. С. 9–14.

Статья поступила 30 сентября 2015 г.

Кудина Екатерина Сергеевна,
Горно-Алтайский гос. университет,
ул. Социалистическая, 32, Горно-Алтайск 649000
eskudina@hotmail.com

Медных Александр Дмитриевич,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
mednykh@math.nsc.ru