

О РАЗРЕШИМОСТИ ВЫРОЖДЕННЫХ НАГРУЖЕННЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Л. В. Борель

Аннотация. Исследуются нагруженные линейные системы дифференциальных уравнений, не разрешимые относительно производной по времени. Рассмотрены случаи систем уравнений в частных производных и обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены достаточные условия однозначной разрешимости начально-краевых (или начальных) задач для таких систем уравнений.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, вырожденное эволюционное уравнение, интегральный оператор, начально-краевая задача, алгебро-дифференциальная система уравнений.

Borel L. V. On solvability of degenerate loaded systems of equations.

Abstract: Loaded linear systems of differential equations not solvable with respect to the time derivative are studied in the paper. The cases of partial and ordinary differential equations systems are considered. Sufficient conditions for the unique solvability of initial boundary value problems (or initial problems) are obtained for the systems of equations.

Keywords: loaded equation, degenerate evolution equation, integral operator, initial boundary value problem, algebraic-differential system of equations.

Введение

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — банаховы пространства, оператор $L : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{V}$ линеен и непрерывен (для краткости обозначим $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$), а оператор $M : D_M \rightarrow \mathfrak{V}$ линеен, замкнут и плотно определен в $\mathfrak{U}$ (коротко, $M \in \mathcal{E}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$). Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0, \quad (1)$$

для интегродифференциального уравнения

$$Lu(t) = Mu(t) + \int_0^T \mathcal{K}(t, s)u(s) d\mu(s), \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

не разрешимого относительно производной, так как предполагается выполнение условия $\ker L \neq \{0\}$. Здесь $T > 0$, $\mathcal{K} : [0, T] \times [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$, $\mu : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ —

Работа выполнена при финансовой поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского гос. университета (грант правительства РФ № 14.Z50.31.0020).

функция ограниченной вариации. Уравнения, содержащие помимо дифференциальной части некоторый функционал от искомой функции (как интеграл Стильеса в уравнении (2)) часто называются *нагруженными* [1–4], они встречаются при поиске приближенных решений дифференциальных уравнений, при исследовании обратных задач для них, при математическом моделировании нелокальных процессов и т. п.

Решением задачи (1), (2) называется функция $u \in C^1([0, T]; \mathfrak{U}) \cap C([0, T]; D_M)$, удовлетворяющая уравнению (2) на отрезке $[0, T]$ и условию (1). В работе [5] получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи Коши (1), а также обобщенной задачи Шоуолтера — Сидорова для вырожденного нагруженного уравнения (2) при условии сильной (L, p) -радиальности оператора M [6–8]. Эффективность полученных результатов была продемонстрирована на примерах начально-краевых задач для нагруженных псевдопараболических уравнений. Отметим ряд работ, посвященных вырожденным эволюционным уравнениям не с интегральным оператором Фредгольма, как в (2), а с интегральным оператором Вольтерра — уравнения с памятью [9–11], а также вырожденным эволюционным уравнениям с интегральным оператором запаздывания [12, 13].

Цель данной работы — используя результаты из [5], исследовать некоторые встречающиеся в приложениях нагруженные системы уравнений, не разрешимые относительно производной по времени. В разд. 1 приведено краткое изложение используемых далее определений и теорем из [5, 7]. В разд. 2 получены достаточные условия однозначной разрешимости начально-краевых задач для вырожденной нагруженной системы уравнений в частных производных. В разд. 3 аналогичные исследования проведены для вырожденной нагруженной системы уравнений для функций одной переменной — нагруженной алгебро-дифференциальной системы [14].

1. Вырожденные нагруженные уравнения в банаховых пространствах

Приведем используемые в основной части работы определения и теоремы, полученные в [5, 7] (см. также [6, 8]).

Введем обозначения:

$$\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}, \quad \overline{\mathbb{R}}_+ = \{0\} \cup \mathbb{R}_+,$$

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})\},$$

$$R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1} L, \quad L_\mu^L = L(\mu L - M)^{-1}.$$

Пусть $p \in \mathbb{N}_0$. Оператор M называется *сильно (L, p) -радиальным*, если

(i) $\exists a \in \mathbb{R} \ (a, +\infty) \subset \rho^L(M)$;

(ii) $\exists K \in \mathbb{R}_+ \ \forall \mu \in (a, +\infty) \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\max \left\{ \| (R_\mu^L(M))^{n(p+1)} \|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \| (L_\mu^L(M))^{n(p+1)} \|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V})} \right\} \leq \frac{K}{(\mu - a)^{n(p+1)}};$$

(iii) существует плотный в $\mathfrak{V}$ линейал $\overset{\circ}{\mathfrak{V}}$ такой, что

$$\|M(\mu L - M)^{-1}(L_\mu^L(M))^{p+1}f\|_{\mathfrak{V}} \leq \frac{\text{const}(f)}{(\mu - a)^{p+2}} \quad \forall f \in \overset{\circ}{\mathfrak{V}};$$

$$\|(R_\mu^L(M))^{p+1}(\mu L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V}; \mathfrak{U})} \leq \frac{K}{(\mu - a)^{p+2}}$$

при любом $\mu \in (a, +\infty)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Эквивалентность условий (ii), (iii) несколько более сложным условиям, используемым в [6–8], показана в [15].

Положим

$$\mathfrak{U}^0 = \ker (R_\mu^L(M))^{p+1}, \quad \mathfrak{V}^0 = \ker (L_\mu^L(M))^{p+1},$$

$\mathfrak{U}^1$ — замыкание образа оператора $\text{im} (R_\mu^L(M))^{p+1}$ в пространстве $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}^1$ — замыкание образа $\text{im} (L_\mu^L(M))^{p+1}$ в пространстве $\mathfrak{V}$. Обозначим через L_k (M_k) сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$ ($D_{M_k} = D_M \cap \mathfrak{U}^k$), $k = 0, 1$.

Теорема 1 [7]. Пусть оператор M сильно (L, p) -радиален. Тогда

- (i) $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}^0 \oplus \mathfrak{V}^1$;
- (ii) $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{V}^k)$, $M_k \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{V}^k)$, $k = 0, 1$;
- (iii) существуют операторы $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^0; \mathfrak{U}^0)$ и $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^1; \mathfrak{U}^1)$;
- (iv) оператор $H = M_0^{-1}L_0$ нильпотентен степени не больше p ;
- (v) существует сильно непрерывная разрешающая полугруппа $\{U(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}) : t \geq 0\}$ ($\{V(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}) : t \geq 0\}$) уравнения $L\dot{u}(t) = Mu(t)$. При этом

$$\forall t > 0 \quad U(t) = s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k(p+1)}{t} R_{\frac{k(p+1)}{t}}^L(M) \right)^{k(p+1)},$$

$$\forall t \geq 0 \quad \|U(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} \leq Ke^{at}.$$

Проектор вдоль подпространства $\mathfrak{U}^0$ на $\mathfrak{U}^1$ (вдоль $\mathfrak{V}^0$ на $\mathfrak{V}^1$) задается формулой

$$P = U(0) = s\text{-}\lim_{\mu \rightarrow +\infty} (\mu R_\mu^L(M))^{p+1} \quad (Q = s\text{-}\lim_{\mu \rightarrow +\infty} (\mu L_\mu^L(M))^{p+1}).$$

В случае сильно (L, p) -радиального оператора M , оператор-функции $\mathcal{K}$ из класса $C^{p+1,0}([0, T] \times [0, T]; \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V}))$ (непрерывной и имеющей непрерывные по совокупности переменных частные производные по первому аргументу до порядка $p+1$) и функции ограниченной вариации $\mu : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ обозначим при $T > 0$, $n = 0, 1, \dots, p+1$

$$\frac{\partial^n \mathcal{K}}{\partial t^n} \equiv \mathcal{K}_t^{(n)}, \quad V_0^T(\mu) \max_{t, s \in [0, T]} \|\mathcal{K}_t^{(n)}(t, s)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})} \equiv K_n(T),$$

$$V_0^T(\mu) \max_{t, s \in [0, T]} s \|\mathcal{K}_t^{(n)}(t, s)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})} \equiv K_{n,1}(T),$$

$$\|L_1^{-1}Q\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V}; \mathfrak{U})} \equiv C_1, \quad \|H^k M_0^{-1}(I - Q)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V}; \mathfrak{U})} \equiv h_k, \quad k = 0, 1, \dots, p,$$

$$F(T) = \max \left\{ C_1 K(T) \sum_{n=0}^{p+1} K_{n,1}(T) + h_0 \sum_{n=0}^{p+1} K_n(T), \right. \\ \left. h_1 \sum_{n=0}^{p+1} K_n(T), \dots, h_p \sum_{n=0}^{p+1} K_n(T) \right\}.$$

Здесь $V_0^T(\mu)$ — вариация функции μ на отрезке $[0, T]$,

$$K(T) = \max\{K, Ke^{aT}\} = \begin{cases} K, & a \leq 0, \\ Ke^{aT}, & a > 0, \end{cases}$$

K, a — константы из определения сильной (L, p) -радиальности. В силу теоремы 1(v) $\|U(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} \leq K(T)$ при всех $t \in [0, T]$.

Теорема 2 [5]. Пусть оператор M сильно (L, p) -радиален, $\mu : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации, $\mathcal{K} \in C^{p+1,0}([0, T] \times [0, T]; \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{W}))$, $\mathcal{K}_t^{(n)}(0, s) \equiv 0$, $n = 0, 1, \dots, p$, $u_0 \in D_M \cap \mathfrak{U}^1$, $F(T) < 1$. Тогда существует единственное решение $u \in C^1([0, T]; \mathfrak{U}) \cap C([0, T]; D_M)$ задачи (1), (2).

В [5] для уравнения (2) рассмотрена также часто встречающаяся для вырожденных эволюционных уравнений задача с начальным условием Шоултера — Сидорова

$$Pu(0) = u_0. \quad (3)$$

Теорема 3 [5]. Пусть оператор M сильно (L, p) -радиален, $\mu : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации, $\mathcal{K} \in C^{p+1,0}([0, T] \times [0, T]; \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{W}))$, $u_0 \in D_M \cap \mathfrak{U}^1$, $F(T) < 1$. Тогда существует единственное решение $u \in C^1([0, T]; \mathfrak{U}) \cap C([0, T]; D_M)$ задачи (2), (3).

2. Вырожденная нагруженная система уравнений в частных производных

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$z_1(x, 0) = z_{10}(x), \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

$$z_i(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \quad i = 1, 2, 3, \quad (5)$$

для модельной интегродифференциальной системы уравнений

$$z_{1t}(x, t) = \Delta z_1(x, t) + \sum_{i=1}^3 \int_0^T k_{1i}(t, s) z_i(x, s) d\mu(s), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \\ z_{3t}(x, t) = \Delta z_2(x, t) + \sum_{i=1}^3 \int_0^T k_{2i}(t, s) z_i(x, s) d\mu(s), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (6) \\ 0 = \Delta z_3(x, t) + \sum_{i=1}^3 \int_0^T k_{3i}(t, s) z_i(x, s) d\mu(s), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T].$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, заданы функции $z_{10} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $k_{ji} : [0, T] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2, 3$.

Положим

$$\begin{aligned} H_0^2(\Omega) &= \{v \in H^2(\Omega) : v(x) = 0, x \in \partial\Omega\}, \\ \mathfrak{U} &= \mathfrak{V} = (L_2(\Omega))^3, \quad D_M = (H_0^2(\Omega))^3, \\ L &= \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix}, \\ \mathcal{K}(t, s) &= \begin{pmatrix} k_{11}(t, s) & k_{12}(t, s) & k_{13}(t, s) \\ k_{21}(t, s) & k_{22}(t, s) & k_{23}(t, s) \\ k_{31}(t, s) & k_{32}(t, s) & k_{33}(t, s) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

при $t, s \in [0, T]$. Тогда $u(t) = \text{col}(z_1(\cdot, t), z_2(\cdot, t), z_3(\cdot, t))$. В [16] показана сильная $(L, 1)$ -радиальность оператора M в данной ситуации и найдены подпространства

$$\mathfrak{U}^0 = \mathfrak{V}^0 = \{0\} \times L_2(\Omega) \times L_2(\Omega), \quad \mathfrak{U}^1 = \mathfrak{V}^1 = L_2(\Omega) \times \{0\} \times \{0\}.$$

и константы $a = 0$, $K = 1$. Поэтому $K(T) \equiv 1$, $L_1^{-1} = I$, $C_1 = 1$,

$$\begin{aligned} M_0^{-1} &= \begin{pmatrix} \Delta^{-1} & 0 \\ 0 & \Delta^{-1} \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & \Delta^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ M_0^{-1}(I - Q) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta^{-1} \end{pmatrix}, \quad HM_0^{-1}(I - Q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta^{-2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ h_k &= \|H^k M_0^{-1}(I - Q)\| = \frac{1}{|\lambda_1|^{k+1}}, \quad k = 0, 1, \end{aligned}$$

где λ_1 — первое, а значит, и наименьшее по модулю собственное значение оператора Лапласа с условием Дирихле на границе,

$$K_n(T) = V_0^T(\mu) \max_{t, s \in [0, T]} \max_{i, j=1, 2, 3} \left| \frac{\partial^n k_{ij}}{\partial t^n}(t, s) \right|, \quad n = 0, 1, 2,$$

$$K_{n,1}(T) = V_0^T(\mu) \max_{t, s \in [0, T]} \left\{ s \max_{i, j=1, 2, 3} \left| \frac{\partial^n k_{ij}}{\partial t^n}(t, s) \right| \right\}, \quad n = 0, 1, 2.$$

Отсюда с помощью теоремы 3 сразу получим следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть $z_{10} \in H_0^2(\Omega)$, $\mu : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации, $k_{ij} \in C^{2,0}([0, T] \times [0, T]; \mathbb{R})$, $i, j = 1, 2, 3$,

$$V_0^T(\mu) \max \left\{ \sum_{n=0}^2 K_{n,1}(T) + \frac{1}{|\lambda_1|} \sum_{n=0}^2 K_n(T), \frac{1}{|\lambda_1|^2} \sum_{n=0}^2 K_n(T) \right\} < 1.$$

Тогда существует единственное решение $z_1, z_2, z_3 \in C^1([0, T]; L_2(\Omega)) \cap C([0, T]; H_0^2(\Omega))$ задачи (4)–(6).

В частном случае получим следующий результат.

Следствие 1. Пусть $z_{10} \in H_0^2(0, \pi)$, $k_{ij} \in C^{2,0}([0, 1] \times [0, 1]; \mathbb{R})$, $i, j = 1, 2, 3$,

$$\sum_{n=0}^2 \max_{t \in [0, 1]} \max_{i, j=1, 2, 3} \left| \frac{\partial^n l_{ij}}{\partial t^n}(t) \right| < 1.$$

Тогда существует единственное решение $z_1, z_2, z_3 \in C^1([0, 1]; L_2(0, \pi)) \cap C([0, T]; H_0^2(0, \pi))$ задачи

$$\begin{aligned} z_1(x, 0) &= z_{10}(x), \quad x \in (0, \pi), \\ z_i(0, t) &= z_i(\pi, t) = 0, \quad t \in [0, 1], \quad i = 1, 2, 3, \\ z_{1t}(x, t) &= \Delta z_1(x, t) + \sum_{i=1}^3 l_{1i}(t) z_i(x, 1), \quad (x, t) \in (0, \pi) \times [0, 1], \\ z_{3t}(x, t) &= \Delta z_3(x, t) + \sum_{i=1}^3 l_{3i}(t) z_i(x, 1), \quad (x, t) \in (0, \pi) \times [0, 1], \\ 0 &= \Delta z_3(x, t) + \sum_{i=1}^3 l_{3i}(t) z_i(x, 1), \quad (x, t) \in (0, \pi) \times [0, 1]. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Здесь $H_0^2(0, \pi) = \{v \in L_2(0, \pi) : v(0) = v(\pi) = 0\}$. Возьмем в предыдущей теореме $d = 1$, $\Omega = (0, \pi)$, $T = 1$, $\mu \equiv 0$ на $[0, 1]$, $\mu(1) = 1$, $k_{ij}(t, s) = l_i(t)$ при $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Тогда $V_0^1(\mu) = 1$, $\lambda_1 = -1$ и по теореме 4 получим требуемое. $\square$

Результат о разрешимости задачи (5), (6) с начальными условиями Коши

$$z_i(x, 0) = z_{i0}(x), \quad x \in \Omega, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7)$$

получим аналогичным образом с помощью теоремы 2.

Теорема 5. Пусть $z_{i0} \in H_0^2(\Omega)$, $i = 1, 2, 3$, $\mu : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации, $k_{ij} \in C^{2,0}([0, T] \times [0, T]; \mathbb{R})$, $i, j = 1, 2, 3$, $k(0, s) \equiv 0$, $\frac{\partial k}{\partial t}(0, s) \equiv 0$ для $s \in [0, T]$,

$$V_0^T(\mu) \max \left\{ \sum_{n=0}^2 K_{n,1}(T) + \frac{1}{|\lambda_1|} \sum_{n=0}^2 K_n(T), \frac{1}{|\lambda_1|^2} \sum_{n=0}^2 K_n(T) \right\} < 1.$$

Тогда существует единственное решение $z_1, z_2, z_3 \in C^1([0, T]; L_2(\Omega))$ задачи (5)–(7).

3. Нагруженная алгебро-дифференциальная система уравнений

Аналогичным образом можно установить достаточные условия разрешимости более простых систем уравнений для функций одной переменной, снабженных начальными условиями. Системы предполагаются алгебро-дифференциальными, т. е. не разрешимыми относительно вектора производных.

Пусть B и C — квадратные матрицы порядка $d \in \mathbb{N}$, $\text{rang } B = k$, $k \in \{0, 1, \dots, d-1\}$, $K(t, s)$ — квадратная матрица порядка $d \in \mathbb{N}$, зависящая от двух параметров $t, s \in [0, T]$. Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \quad (8)$$

для алгебро-дифференциальной системы уравнений для функций одной переменной

$$B\dot{u}(t) = Cu(t) + \int_0^T K(t, s)u(s) d\mu(s), \quad t \in [0, T], \quad (9)$$

где $u(t) = \text{col}(u_1(t), u_2(t), \dots, u_d(t))$, $u_0 = \text{col}(u_{10}, u_{20}, \dots, u_{d0})$, $\mu : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации. Задача (8), (9) совпадает с задачей (1), (2), если положить $\mathfrak{U} = \mathfrak{V} = \mathbb{R}^d$, а действие операторов L , M и $\mathcal{K}(t, s)$ отождествить с действием матриц B , C и $K(t, s)$ соответственно.

Лемма 1 [17, с. 122]. Пусть существует такая точка $\alpha \in \mathbb{C}$, что $\det(\alpha B - C) \neq 0$. Тогда оператор M сильно (L, p) -радиален при некотором $p \in \{0, 1, \dots, d-1\}$.

Для данного случая (см. [17, с. 89, 90]) проектор P может быть вычислен по формуле

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda B - C)^{-1} B d\lambda$$

с помощью теории вычетов. В условиях леммы 1 из теоремы 2 следует, что если начальное значение $u_0 \in \text{im } P$, $\mathcal{K} \in C^{p+1,0}([0, T] \times [0, T]; \mathbb{R}^{d \times d})$, $F(T) < 1$, то существует единственное решение задачи (8), (9).

Рассмотрим для определенности при $d = 3$ задачу

$$u_i(0) = u_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_1(t) &= u_1(t) + \sum_{i=1}^3 \int_0^T k_{1i}(t, s) u_i(s) d\mu(s), \quad t \in [0, T], \\ \dot{u}_3(t) &= u_2(t) + \sum_{i=1}^3 \int_0^T k_{2i}(t, s) u_i(s) d\mu(s), \quad t \in [0, T], \\ 0 &= u_3(t) + \sum_{i=1}^3 \int_0^T k_{3i}(t, s) u_i(s) d\mu(s), \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (11)$$

близкую по форме к задаче (5)–(7). Рассуждая, как в разд. 2, получим

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = I, \quad (\mu L - M)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu-1} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\mu \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$R_\mu^L(M) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (R_\mu^L(M))^2 = (L_\mu^L(M))^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\mu-1)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(R_\mu^L(M))^2(\mu L - M)^{-1} = M(\mu L - M)^{-1}(L_\mu^L(M))^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\mu-1)^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому оператор I сильно $(L, 1)$ -радиален с константами $a = 1$, $K = 1$, $K(T) = e^T$, $\mathfrak{U}^0 = \mathfrak{V}^0 = \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathfrak{U}^1 = \mathfrak{V}^1 = \mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\}$, $L_1^{-1} = I$, $C_1 = h_0 = h_1 = 1$.

Утверждение 1. Пусть $u_{i0} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, $\mu : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации, $k_{ij} \in C^{2,0}([0, T] \times [0, T]; \mathbb{R})$, $i, j = 1, 2, 3$, $k(0, s) \equiv 0$, $\frac{\partial k}{\partial t}(0, s) \equiv 0$ для $s \in [0, T]$,

$$V_0^T(\mu) \sum_{n=0}^2 \max_{t, s \in [0, T]} \max_{i, j=1, 2, 3} \left| \frac{\partial^n k_{ij}}{\partial t^n}(t, s) \right| < 1.$$

Тогда существует единственное решение $u_1, u_2, u_3 \in C^1([0, T]; \mathbb{R})$ задачи (10), (11).

ЛИТЕРАТУРА

1. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С. 86–94.
2. Джаналиев М. Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: Компьютерный центр ИТПМ, 1995.
3. Кожанов А. И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 4. С. 694–716.
4. Кожанов А. И. Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче // Мат. заметки. 2004. Т. 76, № 6. С. 840–853.
5. Федоров В. Е., Борель Л. В. Разрешимость нагруженных линейных эволюционных уравнений с вырожденным оператором при производной // Алгебра и анализ. 2014. Т. 26, № 3. С. 190–205.
6. Федоров В. Е. Линейные уравнения типа Соболева с относительно p -радиальными операторами // Докл. АН. 1996. Т. 351, № 3. С. 316–318.
7. Федоров В. Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12, № 3. С. 173–200.
8. Федоров В. Е. Обобщение теоремы Хилле — Йосиды на случай вырожденных полугрупп в локально выпуклых пространствах // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 426–448.
9. Фалалеев М. В., Орлов С. С. Интегро-дифференциальные уравнения с вырождением в банаховых пространствах и их приложения в математической теории упругости // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2011. Т. 4, № 1. С. 118–134.
10. Фалалеев М. В., Орлов С. С. Вырожденные интегро-дифференциальные операторы в банаховых пространствах и их приложения // Изв. вузов. Математика. 2011. № 10. С. 68–79.
11. Федоров В. Е., Борель Л. В. О разрешимости линейных эволюционных уравнений с эффектами памяти // Изв. Иркут. гос. ун-та. 2014. Т. 10. С. 106–124.
12. Федоров В. Е., Омельченко Е. А. Неоднородные линейные уравнения соболевского типа с запаздыванием // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 2. С. 418–429.
13. Федоров В. Е., Омельченко Е. А. Линейные уравнения соболевского типа с интегральным оператором запаздывания // Изв. вузов. Математика. 2014. № 1. С. 71–81.
14. Чистяков В. Ф., Щеглова А. А. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. Новосибирск: Наука, 2003.

-
15. Федоров В. Е. Свойства псевдорезольвент и условия существования вырожденных полугрупп операторов // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 11. 2009. № 20. С. 12–19.
 16. Рузакова О. А., Федоров В. Е. Об ε -управляемости линейных уравнений, не разрешенных относительно производной в банаховых пространствах // Вычисл. технологии. 2005. Т. 10, № 5. С. 90–102.
 17. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht; Boston: VSP, 2003.

Статья поступила 1 октября 2015 г.

Борель Лидия Викторовна
Челябинский гос. университет,
ул. Бр. Кашириных, 129, Челябинск 454001
lidiya904@mail.ru