

УДК 517.518.87

АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ ПОГРЕШНОСТИ РЕШЕТЧАТЫХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ

Ц. Ж. Юмова

Аннотация. С помощью функционально-аналитического метода теории кубатур минимизирована норма периодического функционала погрешности и улучшено качество построенных формул для целого семейства элементов анизотропного пространства.

Ключевые слова: решетчатые кубатурные формулы, периодический функционал погрешности, анизотропное пространство Соболева.

Ts. Zh. Yumova. The asymptotical optimal error functionals of lattice cubature formulas.

Abstract: With the using of functional analytical method of the theory cubature were minimized the norm of periodic error functional, the quality of the constructed formulas for the family of elements of anisotropic space had been improved.

Keywords: lattice cubature formulas, periodic error functional, anisotropic Sobolev spaces.

Введение. Постановка и основные результаты теории кубатурных формул принадлежат академику С. Л. Соболеву [1], предложившему функционально-аналитический метод для семейства подынтегральных элементов гильбертова пространства. Опубликованные им работы заложили основы и послужили источником интенсивного развития современной теории дифференциальных уравнений с частными производными, функционального анализа и вычислительной математики.

При больших численных расчетах возникает трудность в процессе приближенного вычисления многомерных интегралов, поскольку до сих пор не созданы универсальные методы оптимизации кубатурных формул на классах функций и, в этой связи, исследования задач ведутся с точки зрения разных научных направлений. Одним из таких направлений является «функционально-аналитический» подход, связанный с исследованием оценок погрешностей в классах суммируемых функций и линейных нормированных пространствах, включающих в себя интегрируемые функции.

Основные результаты исследования задач оптимизации кубатурных формул на классах функций анизотропных пространств $W_p^{\overline{m}}(E_n)$, неодинаковых вдоль разных координатных направлений из-за гладкости функций, рассматривались в работах Ц. Б. Шойнжурова [2, 3], М. Д. Рамазанова [4]. В частности, М. Д. Рамазанов исследовал кубатурные формулы на невесовом пространстве

периодических функций с единичным кубом в качестве основного периода. Однако при таком определении нормы функции возникали определенные трудности при периодическом продолжении функции на единичный куб. Ц. Б. Шойнжуров продолжил функции из рассматриваемой области на все пространство, «избавившись» от ограничений, что позволило к периодической на всем пространстве функции применить преобразование Фурье.

В данной работе для построения решетчатых кубатурных формул, асимптотически оптимальных относительно интегрируемых функций, зависящих от их дифференциальных свойств, в явном виде выделен главный член нормы периодического функционала погрешности с конечным значением показателя суммируемости.

Предварительные сведения и обозначения. Пусть $k = 1, \dots, n$, $h_k > 0$ — шаги решетки, x_k — узлы формулы, C_k — коэффициенты формулы, m_k — гладкость функции вдоль выбранных координатных направлений, $\bar{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$, $m^* = n / \left(\sum_{k=1}^n m_k^{-1} \right)$, $\bar{h} = \text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_n)$ — матрица периодов, $\Delta_{\bar{h}} = \{x \in E_n, 0 \leq x_k < h_k, k = 1, 2, \dots, n\}$ — фундаментальный параллелепипед с длинами ребер h_k , $\Delta_{\bar{h}} = h^n = \det \bar{h} \neq 0$, $\Delta = \{x \in E_n, 0 \leq x_k < 1, k = 1, 2, \dots, n\}$ — фундаментальный единичный куб.

В работе исследуются кубатурные формулы на классах периодических функций анизотропного пространства с матрицей периодов $\bar{h}$, у которых каждая обобщенная частная производная обладает свойством гладкости, зависящей от координатных направлений. Построенные формулы будут использованы для целого семейства подынтегральных элементов анизотропного пространства $W_p^{\bar{m}}(E_n)$ с естественной нормой

$$\|\varphi\|_{W_p^{\bar{m}}(E_n)} = \left[\int_{E_n} \left(|\varphi(x)|^p + \sum_{k=1}^n |D^{m_k} \varphi(x)|^p \right) dx \right]^{1/p} < \infty.$$

Разность между интегралом и приближающей его линейной комбинацией значений подынтегральной функции рассматривается как результат действия на эту подынтегральную функцию некоторой обобщенной функции, полностью определяемой исходной кубатурной формулой и называемой функционалом погрешности. Кубатурная же сумма, приближающая интеграл, представляет собой с функциональной точки зрения линейную комбинацию дельта-функций $\delta(x)$ Дирака

$$\sum_{k=1}^N C_k \varphi(x^{(k)}) = \left(\sum_{k=1}^N C_k \delta(x - x^{(k)}), \varphi(x) \right).$$

Дельта-функции имеют смысл при воздействии на непрерывные пробные функции, отсюда требование вложения основного пространства в пространство непрерывных функций $W_p^{\bar{m}}(E_n) \subset C(E_n)$, обеспечиваемое условием вложения $p - \sum_{k=1}^n m_k^{-1} > 0$ [5]. Это вложение непрерывно, т. е. функционал погрешности кубатурной формулы не только линейен, но и ограничен на $W_p^{\bar{m}}(E_n)$. Знание численной мажоранты для его нормы в сопряженном пространстве $W_p^{\bar{m}*}(E_n)$

позволяет получать для произвольной функции из единичной сферы анизотропного пространства гарантированные оценки близости истинного значения интеграла от этой функции к рассматриваемой на ней кубатурной сумме.

Известно [6], что дифференциальные свойства анизотропного пространства не одинаковы по направлениям: оно полное при $1 \leq p \leq \infty$, сепарабельно при $1 \leq p < \infty$ и рефлексивно и равномерно выпукло при $1 < p < \infty$.

Общее представление функционала погрешности и экстремальной функции. При оценке качества той или иной кубатурной формулы предпочтительнее считается та, функционал погрешности которой имеет меньшую норму. Для отыскания нормы функционала погрешности в соответствующем пространстве используется экстремальная функция, которая является обобщенным решением некоторых дифференциальных уравнений в частных производных. Дифференциальный оператор $L(D) = \sum_{k=0}^n (-1)^{m_k} D^{2m_k}$, входящий в такое уравнение, порождается видом нормы функции в основном пространстве. Доказано (см., например, [3]), что любой финитный линейный функционал $l(x)$ из $W_p^{\overline{m}^*}$ представим в виде

$$\langle l, \varphi \rangle = \int_{E_n} \sum_{k=0}^n (-1)^{m_k} D^{m_k} u * D^{m_k} \varphi dx,$$

где $\varphi \in W_p^{\overline{m}}$, $u \in W_{p'}^{\overline{m}}$ и выполняется равенство

$$L(D)u = l(x), \quad l \in W_p^{\overline{m}^*}. \quad (1)$$

Известно [7], что фундаментальное решение $\varepsilon_{2\overline{m}}(x)$ оператора $L(D)$ неединственно, оно определяется с точностью до слагаемого $\varepsilon_{2\overline{m}}^0(x)$, являющегося произвольным решением однородного уравнения $L(D)\varepsilon_{2\overline{m}}^0 = 0$. Для того чтобы функция $\varepsilon_{2\overline{m}}(x) \in W_p^{\overline{m}^*}(E_n)$, удовлетворяющая уравнению

$$L(D)\varepsilon_{2\overline{m}}(x) = \delta(x), \quad (2)$$

была фундаментальным решением уравнения (1), необходимо и достаточно, чтобы ее преобразование Фурье удовлетворяло уравнению

$$L(2\pi i\xi)F[\varepsilon_{2\overline{m}}(x)] = 1,$$

где

$$L(2\pi i\xi) = \sum_{k=1}^n (-1)^{m_k} (2\pi i\xi_k)^{2m_k} + 1 = 1 + \sum_{k=1}^n (2\pi \xi_k)^{2m_k}.$$

Фундаментальное решение оператора $L(D)$, в дальнейшем ядро $\varepsilon_{2\overline{m}}(x)$, представляет собой бесконечно дифференцируемую при $x \neq 0$ суммируемую в E_n функцию и имеет вид

$$\varepsilon_{2\overline{m}}(x) = F^{-1} \left(\frac{1}{\sum_{k=0}^n (-1)^{m_k} |2\pi \xi_k|^{2m_k}} \right).$$

Благодаря введению Ц. Б. Шойнжуровым [2] специальной нормы, для которой соответствующий дифференциальный оператор хорошо изучен и описан в

литературе, в частности, в [5], стало возможным применять свойства его фундаментального решения для нахождения экстремальных функций и норм функционалов погрешности кубатурных формул. Ранее в [8] при выполнении условия вложения $1 - p^{-1} \sum_{k=1}^n m_k^{-1} > 0$ были получены общие представления периодического функционала погрешности $\tilde{l}_0(h^{-1}x) = 1 - \Phi_0(h^{-1}x)$:

$$\langle \tilde{l}_0(h^{-1}x), \varphi(x) \rangle_{\Delta_{\bar{h}}} = \int_{\Delta_{\bar{h}}} \sum_{k=0}^n (D^{m_k} \varphi_0(h^{-1}x) + h_k^{m_k} C_k^{(0)}) D^{m_k} \varphi(x) dx$$

и соответствующей ей экстремальной функции

$$\varphi_0(h^{-1}x) = h^{m^* p'} \sum_{\gamma \neq 0} \frac{e^{2\pi i h^{-1} \gamma(x-y)}}{|2\pi \gamma|^{2m^*}} C_\gamma, \quad (3)$$

$$C_\gamma = \int_{\Delta_{\bar{h}}} \sum_{k=0}^n (-1)^{m_k} \left| C_k^{(0)} \sum_{\beta \neq 0} \frac{D^{m_k} e^{-2\pi i h^{-1} \beta y}}{1 + \sum_{j=1}^n (2\pi i h^{-1} \beta_j)^{2m_j}} + h_k^{m_k} C_k^{(0)} \right|^{\frac{1}{p-1}} \times \operatorname{sgn} \left(C_k^{(0)} \sum_{\beta \neq 0} \frac{D^{m_k} e^{-2\pi i h^{-1} \beta y}}{1 + \sum_{j=1}^n (2\pi i h^{-1} \beta_j)^{2m_j}} + h_k^{m_k} C_k^{(0)} \right) dy,$$

где $C_k^{(0)}$ — решение системы уравнений

$$\int_{\Delta} \sum_{k=1}^n \left| \frac{(-2\pi i \beta_k)^{m_k} e^{-2\pi i \beta_k x_k}}{\sum_{j=0}^n (2\pi i \beta_j)^{2m_j}} + C_k^{(0)} \right|^{\frac{1}{p-1}} \operatorname{sgn} \left(\frac{(-2\pi i \beta_k)^{m_k} e^{-2\pi i \beta_k x_k}}{\sum_{j=0}^n (2\pi i \beta_j)^{2m_j}} + C_k^{(0)} \right) dx = 0. \quad (4)$$

Аналогичный использованному в [2] прием с применением свойств фундаментального решения $\varepsilon_{2\bar{m}}(x)$ позволил найти норму периодического функционала погрешностей кубатурных формул:

$$\begin{aligned} & \|\tilde{l}_0(h^{-1}x)\|_{\widetilde{W}_p^{m^*}(\Delta_{\bar{h}})} \\ &= \left(\int_{\Delta_{\bar{h}}} \sum_{k=0}^n \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{(2\pi i h_k^{-1} \beta_k)^{m_k} e^{-2\pi i h_k^{-1} \beta_k x_k}}{1 + \sum_{j=1}^n (2\pi i h^{-1} \beta_j)^{2m_j}} + h_k^{m_k} C_k^{(0)} \right|^{p'} dx \right)^{1/p'}. \end{aligned} \quad (5)$$

Асимптотическое выражение нормы оптимального функционала погрешности. В пространстве периодических функций выделим главный член нормы функционала погрешности (5), не зависящий от $\bar{h} = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2}$ при стремлении последнего к нулю.

Возникшая трудность [4], характерная для анизотропного пространства, когда дифференциальные свойства функции неодинаковы по выбранным направлениям и все функции должны быть периодически продолженными с одним и тем же основным периодом, требовала, чтобы норма не возрастала при вычитании из функции ее нулевого коэффициента в соответствующих рядах. Для

разрешения упомянутой проблемы в [8] получен критерий асимптотической оптимальности кубатурной формулы по коэффициентам, а именно, порядок сходимости должен согласовываться с шагом решетки и гладкостью функции по координатным направлениям системой соотношений

$$h_1^{m_1} = h_2^{m_2} = \dots = h_n^{m_n} = h^{m^*}. \quad (6)$$

Это позволит установить порядковую оптимальность на всем классе решетчатых кубатурных формул в анизотропном пространстве и найти из (6) зависимость шага решетки от гладкости функции по выбранному направлению, определенную равенством

$$h_k = h^{m^*/m_k}, \quad N_k = N^{m^*/m_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Учитывая требования согласованности порядка сходимости с шагом решетки и гладкостью функции по координатным направлениям из условия (6), преобразуем интеграл в правой части (5):

$$\begin{aligned} J &= \int_{\Delta_{\bar{h}}} \sum_{k=0}^n \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{(-2\pi i h_k \beta_k)^{m_k} e^{-2\pi i h_k \beta_k x_k}}{\sum_{j=0}^n (2\pi i h_k \beta_j)^{2m_j}} + h_k^{m_k} C_k^{(0)} \right|^{p'} dx \\ &= h^{m^* p'} h^n \int_{\Delta} \sum_{k=0}^n \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{(-2\pi i \beta_k)^{m_k} e^{-2\pi i \beta_k x_k}}{\sum_{j=0}^n (2\pi i \beta_j)^{2m_j}} + C_k^{(0)} \right|^{p'} dx. \end{aligned} \quad (7)$$

Равенство

$$(-2\pi i \beta_k)^{m_k} e^{-2\pi i \beta_k x} = h^{m^*} e^{-2\pi i \beta_k x}$$

имеет место при нулевом значении параметра k , и тогда интеграл (7) переписывается в виде

$$\begin{aligned} J &= \int_{\Delta} \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{h^{m^*} e^{-2\pi i \beta_k x_k}}{h^{2m^*} + \sum_{j=1}^n (2\pi i \beta_j)^{2m_j}} \right|^{p'} dx \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{(-2\pi i \beta_k)^{m_k} e^{-2\pi i \beta_k x_k}}{h^{2m^*} + \sum_{j=1}^n (2\pi i \beta_j)^{2m_j}} + C_k^{(0)} \right|^{p'} dx. \end{aligned}$$

Теорема. Если в пространстве $\widetilde{W}_p^{\overline{m}}(\Delta_{\bar{h}})$ выполнены условия (2), (3),

$$\tilde{l}_0(h^{-1}x) \in \widetilde{W}_p^{\overline{m}^*}(\Delta_{\bar{h}}), \quad 1 - p^{-1} \sum_{k=1}^n m_k^{-1} > 0, \quad 1 < p < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

h_k — шаг решетки, норма функционала $\tilde{l}_0(h^{-1}x)$ определяется равенством (5), где параметры $C_k^{(0)}$ — решения системы уравнений (4), то норма оптимального периодического функционала погрешности при $\bar{h} \rightarrow 0$ имеет асимптотическое выражение

$$\begin{aligned} &\|\tilde{l}_0(h^{-1}x)\|_{\widetilde{W}_p^{\overline{m}}(\Delta_{\bar{h}})} \\ &= h^{m^* + n + \frac{n}{p'}} \left(\int_{\Delta} \sum_{k=1}^n \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{(-2\pi i \beta_k)^{m_k} e^{-2\pi i \beta_k x_k}}{h^{2m^*} + \sum_{j=1}^n (2\pi i \beta_j)^{2m_j}} + C_k^{(0)} \right|^{p'} dx \right)^{1/p'} (1 + O(h)). \end{aligned} \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая условия (6) и полагая в интеграле (5) $h_k^{-1}x_k = y_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, получим

$$\begin{aligned} & \|\tilde{l}_0(h^{-1}x)\|_{\widetilde{W}_p^m(\Delta_{\bar{h}})} \\ &= \left(\int_{\Delta_{\bar{h}}} \sum_{k=0}^n \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{(-2\pi i h_k^{-1} \beta_k)^{m_k} e^{-2\pi i h_k^{-1} \beta_k x_k}}{\sum_{j=0}^n (2\pi i h_j^{-1} \beta_j)^{2m_j}} + h_k^{m_k} C_k^{(0)} \right|^{p'} dx \right)^{1/p'} \\ &= \left\langle \begin{array}{l} y = h^{-1}x \quad dx = h^n dy \\ x = hy \quad \Delta_{\bar{h}} \rightarrow \Delta \end{array} \right\rangle \\ &= h^n \left(\int_{\Delta} \sum_{k=0}^n \left(\sum_{\beta \neq 0} \frac{(-2\pi i \beta_k)^{m_k} h_k^{-m_k} e^{-2\pi i h_k^{-1} \beta_k y_k}}{\sum_{k=0}^n (2\pi i h_k^{-1} \beta_k)^{2m_k}} + h_k^{m_k} C_k^{(0)} \right) dy \right)^{1/p'}. \end{aligned}$$

Преобразуем знаменатель:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (2\pi i h_k^{-1} \beta_k)^{2m_k} &= \sum_{k=0}^n |2\pi h_k^{-1} \beta_k|^{2m_k} = \sum_{k=0}^n |2\pi \beta_k|^{2m_k} h_k^{-2m^*} \\ &= h_k^{-2m^*} \sum_{k=0}^n |2\pi \beta_k|^{2m_k} h_k^{2m^* - 2m_k}. \quad (9) \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n |2\pi \beta_k|^{2m_k} h_k^{2m^* - 2m_k} &= h^{2m^*} + |2\pi \beta_1|^{2m_1} h_1^{2m^* - 2m_1} + |2\pi \beta_2|^{2m_2} h_2^{2m^* - 2m_2} \\ &+ \dots + |2\pi \beta_{n-1}|^{2m_{n-1}} h_{n-1}^{2m^* - 2m_{n-1}} + |2\pi \beta_n|^{2m^*} > |2\pi \beta_k|^{2m^*}. \quad (10) \end{aligned}$$

С учетом (9) и (10) имеем

$$\begin{aligned} \|\tilde{l}_0(h^{-1}x)\| &= h^n \left(\int_{\Delta} \sum_{k=0}^n \left(\sum_{\beta \neq 0} \frac{(-2\pi i \beta_k)^{m_k} h_k^{-m_k} e^{-2\pi i \beta_k y_k}}{-h_k^{-2m^*} \sum_{k=0}^n (2\pi i \beta_k)^{2m_k} h_k^{2m^* - 2m_k}} + h_k^{m_k} C_k^{(0)} \right) dy \right)^{1/p'} \\ &= h^n \left(\int_{\Delta} \sum_{k=0}^n \left(\sum_{\beta \neq 0} \frac{(-2\pi i \beta_k)^{m_k} h_k^{2m^* - m_k} e^{-2\pi i \beta_k y_k}}{-\sum_{k=0}^n (2\pi i \beta_k)^{2m_k} h_k^{2m^* - 2m_k}} + h_k^{m_k} C_k^{(0)} \right) dy \right)^{1/p'} \\ &= h^n \left(\int_{\Delta} \sum_{k=0}^n h_k^{(2m^* - m_k)p'} \left(\sum_{\beta \neq 0} \frac{(-2\pi i \beta_k)^{m_k} e^{-2\pi i \beta_k y_k}}{-\sum_{k=0}^n (2\pi i \beta_k)^{2m_k} h_k^{2m^* - 2m_k}} + C_k^{(0)} \right) dy \right)^{1/p'} \\ &\leq K h^n \sum_{k=0}^n h_k^{(2m^* - m_k)p'} \left(\int_{\Delta} \left(\sum_{\beta \neq 0} \frac{(-2\pi i \beta_k)^{m_k} e^{-2\pi i \beta_k y_k}}{-\sum_{k=0}^n (2\pi i \beta_k)^{2m_k} h_k^{2m^* - 2m_k}} + C_k^{(0)} \right) dy \right)^{1/p'}. \quad (11) \end{aligned}$$

Перепишем цепочку (11):

$$\|\tilde{l}_0(h^{-1}x)\|^{p'} \leq K h^n \sum_{k=0}^n \int_{\Delta} \sum_{k=0}^n \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{(-2\pi i \beta_k)^{m_k} e^{-2\pi i \beta_k x_k}}{1 + \sum_{k=1}^n (2\pi \beta_k)^{2m_k}} + C_k \right|^{p'} dy h_k^{(2m^* - m_k)p'}$$

$$\begin{aligned}
&= Kh^n \int_{\Delta_{\bar{h}}} \sum_{k=0}^n h^{2m^*p'} \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{(-2\pi i \beta_0)^{m_0} e^{-2\pi i \beta_0 x_0}}{1 + \sum_{k=1}^n (2\pi \beta_k)^{2m_k}} + C_0 \right|^{p'} dy \\
&+ Kh^n \int_{\Delta_{\bar{h}}} \sum_{k=0}^n h^{(2m^*-m_1)p'} \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{(-2\pi i \beta_1)^{m_1} e^{-2\pi i \beta_1 x_1}}{1 + \sum_{k=1}^n (2\pi \beta_k)^{2m_k}} + C_1 \right|^{p'} dy \\
&+ \dots + Kh^n \int_{\Delta_{\bar{h}}} \sum_{k=0}^n h^{(2m^*-m_n)p'} \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{(-2\pi i \beta_n)^{m_n} e^{-2\pi i \beta_n x_n}}{1 + \sum_{k=1}^n (2\pi \beta_k)^{2m_k}} + C_n \right|^{p'} dy \\
&\leq Kh^n \int_{\Delta} \sum_{k=0}^n h^{m^*p'} \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{(-2\pi i \beta_k)^{m_k} e^{-2\pi i \beta_k x_k}}{1 + \sum_{k=1}^n (2\pi \beta_k)^{2m_k}} + C_k \right|^{p'} dy (1 + K_1 h^{p'}).
\end{aligned}$$

Так как гладкость функций анизотропного пространства неодинаковая по выбранным направлениям с шагом решетки h_k , получаем

$$\begin{aligned}
&\|\tilde{l}_0(h^{-1}x)\|^{p'} \\
&\leq Kh^n \int_{\Delta} \sum_{k=0}^n h^{(m^*+n)p'} \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{(-2\pi i \beta_k)^{m_k} e^{-2\pi i \beta_k x_k}}{1 + \sum_{k=1}^n (2\pi \beta_k)^{2m_k}} + C_k \right|^{p'} dy (1 + O(h^{p'})),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\|\tilde{l}_0(h^{-1}x)\| \\
&\leq Kh^{(m^*+n)} h^{\frac{n}{p'}} \left(\int_{\Delta} \sum_{k=1}^n \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{(-2\pi i \beta_k)^{m_k} e^{-2\pi i \beta_k x}}{\sum_{j=1}^n (2\pi i \beta_j)^{2m_j}} + C_k^{(0)} \right|^{p'} \right)^{1/p'} (1 + O(h)).
\end{aligned}$$

Таким образом, норма (4) при $\bar{h} \rightarrow 0$ имеет асимптотическое выражение (8).

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
2. Шойнжуров Ц. Б. Некоторые вопросы теории кубатурных формул в пространстве $W_p^m(E_n)$ // Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Новосибирск: Наука, 1980. С. 302–306.
3. Шойнжуров Ц. Б. Оценка нормы функционала погрешности кубатурных формул в различных функциональных пространствах. Улан-Удэ: Изд-во БНЦ СО РАН, 2005.
4. Рамазанов М. Д. Лекции по теории приближенного интегрирования. Уфа: Изд-во Башкир. ун-та, 1973.
5. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
6. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
7. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.

-
8. Юмова Ц. Ж. Вычисление параметров функционалов погрешностей кубатурных формул. Saarbrücken: LAMBERT Acad. Publ., 2011.

Статья поступила 20 августа 2015 г.

Юмова Цыренханда Жэмбэевна
Восточно-Сибирский гос. университет технологий и управления,
ул. Ключевская, 40в, Улан-Удэ 670013
syum@mail.ru