

РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКЛАССИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Н. Н. Николаев, С. В. Попов

Аннотация. Рассматривается обратная задача нахождения вместе с решением внешних источников воздействия по временной переменной для уравнения третьего порядка при задании точечных условий переопределения, в частности, рассматриваются случаи восстановления плотностей от одного, а также от двух источников. Доказано существование и единственность решения коэффициентной обратной задачи для уравнения третьего порядка с финальными условиями переопределения.

Ключевые слова: коэффициентная обратная задача, уравнение третьего порядка, условия переопределения, существование решения, единственность, пространство Соболева, метод продолжения по параметру, метод регуляризации, априорные оценки.

Nikolaev N. N., Popov S. V. The solvability of the inverse problem for nonclassical equations of the third order.

Abstract: The inverse problem is considered of finding along with the decision of the external sources of exposure in a temporary variable for equations of the third order when setting point override conditions, in particular, deals with the recovery of densities from one and from two sources. We prove the existence and uniqueness of solution of inverse problems for equations of the third order with the final terms of the override.

Keywords: coefficient inverse problem, equation of the third order, the terms of the override, the existence of solutions, uniqueness, Sobolev space, method of continuation on a parameter, method of regularization, a priori estimates

1. Введение

Задачи определения коэффициентов уравнений и систем в частных производных по некоторой дополнительной информации об их решении имеют большое практическое значение [1–3]. Отметим, что обратные задачи для гиперболических уравнений зачастую относятся к некорректным задачам математической физики, теория которых была заложена в работах А. Н. Тихонова [4–6], В. К. Иванова [7], М. М. Лаврентьева [8, 9].

В теории обратных задач тепло- и массопереноса [10–12] часто возникают проблемы восстановления плотностей неизвестных внешних источников. При этом считают, что имеет место зависимость неизвестной правой части от временной переменной [13], и рассматриваемые обратные задачи формулируют как

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2014–2016 гг. (проект № 3047).

проблемы управления [14]. Исследованию обратных задач для параболических уравнений высокого порядка посвящены работы [15, 16]. Заметим, что прямые пространственно нелокальные краевые задачи для уравнений третьего порядка хорошо изучены (см., например, [17–19]), а обратные задачи для таких уравнений изучены сравнительно мало. Отметим работы, в которых неизвестный параметр зависит от временной переменной, рассматривались в случаях параболических [20, 21] и гиперболических [22–24] уравнений.

В настоящей работе устанавливается разрешимость обратной задачи нахождения вместе с решением внешних источников воздействия для уравнений третьего порядка по временной переменной при задании точечных условий переопределения, в частности, рассматриваются случаи восстановления плотностей от одного, а также от двух источников.

2. Постановка обратных краевых задач

Пусть Ω — интервал $(0, 1)$ оси Ox , Q — прямоугольник $\Omega \times (0, T)$ при $0 < T < +\infty$.

Краевая задача 1. Найти функции $u(x, t)$, $q(t)$, являющиеся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$u_{ttt} + u_{xx} + c(x, t)u = f(x, t) + q(t)h(x, t) \quad (1)$$

и такие, что для них выполняются начальные условия

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = u(x, T) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

краевые условия

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (3)$$

а также условие переопределения

$$u(0, t) = 0, \quad t \in (0, T). \quad (4)$$

Краевая задача 2. Найти функции $u(x, t)$, $q_1(t)$, $q_2(t)$, являющиеся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$u_{ttt} + u_{xx} + c(x, t)u = f(x, t) + q_1(t)h_1(x, t) + q_2(t)h_2(x, t), \quad (5)$$

и такие, что для нее выполняются начальные условия (2), краевые условия (3), а также два условия переопределения

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t \in (0, T). \quad (6)$$

В работе [22] обратная задача восстановления плотностей источников для одномерного волнового уравнения с постоянными коэффициентами изучалась с помощью метода Фурье.

3. Разрешимость краевой задачи 1

Для простоты выкладок положим $c(x, t) = c(t)$ и введем следующие обозначения:

$$f_1(x, t) = f(x, t) - \frac{f(0, t)h(x, t)}{h(0, t)}, \quad h_1(x, t) = \frac{h(x, t)}{h(0, t)},$$

$$\alpha_0(t) = f_{1x}(0, t), \quad \alpha_1(t) = h_{1x}(0, t), \quad \beta_0(t) = f_{1x}(1, t), \quad \beta_1(t) = h_{1x}(1, t).$$

Введем обозначение

$$h_0 = \max_Q |h_{1xx}|. \quad (7)$$

Пусть $V_0 = W_{2,x,t}^{2,3}(Q)$ — линейное анизотропное пространство Соболева, а W_0, W_1 — линейные пространства

$$W_0 = \{v(x, t) : v(x, t) \in V_0, v_{xxxx} \in L_2(Q)\},$$

$$W_1 = \{v(x, t) : v(x, t) \in W_0, v_x \in W_0\}$$

с нормами

$$\|v\|_{W_0} = \|v\|_{V_0} + \|v_{xxxx}\|_{L_2(Q)}, \quad \|v\|_{W_1} = \|v\|_{W_0} + \|v_x\|_{W_0}.$$

Прежде чем доказывать разрешимость краевой задачи 1, заметим, что для функций $v(x, t)$ из пространства V_0 , для которых выполняется условие (2), имеют место следующие неравенства:

$$v^2(0, t) \leq \delta_1 \int_0^1 v_x^2(x, t) dx + C_1(\delta_1) \int_0^1 v^2(x, t) dx, \quad (8)$$

$$v^2(1, t) \leq \delta_1 \int_0^1 v_x^2(x, t) dx + C_1(\delta_1) \int_0^1 v^2(x, t) dx;$$

$$\int_0^T v_t^2(x, t) dt \leq \delta_2 \int_0^T v_{ttt}^2(x, t) dt + C_2(\delta_2, T) \int_0^T v^2(x, t) dt; \quad (9)$$

$$\int_0^T v_{tt}^2(x, t) dt \leq \delta_3 \int_0^T v_{ttt}^2(x, t) dt + C_3(\delta_3, T) \int_0^T v^2(x, t) dt, \quad (10)$$

в которых $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ — произвольные положительные числа, C_1, C_2, C_3 вычисляются вполне определенным образом через $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ и T .

Теорема 1. Пусть выполняются условия

$$c(t) \in C^1[0, T], \quad -c(t) \geq c_0 \gg 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, T], \quad (11)$$

$$h(x, t) \in C^3(\overline{Q}), \quad h_0 < \frac{1}{2T}, \quad h(0, t) \neq 0, \quad \alpha_1^2(t) + \beta_1^2(t) \leq \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad t \in [0, T], \quad (12)$$

$$\alpha_1(t)\xi_1^2 - \beta_1(t)\xi_1\xi_2 + \frac{1}{8}\xi_2^2 \geq 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, T], \quad (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (13)$$

$$f(x, t) \in W_2^3(Q), \quad f_{xxxx}(x, t) \in L_2(Q), \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
f_x(0,0) &= h_x(0,0) = f_x(1,0) = h_x(1,0) = 0, \\
f_x(0,T) &= h_x(0,T) = f_x(1,T) = h_x(1,T) = 0, \\
f_{xt}(0,0) &= h_{xt}(0,0) = f_{xt}(1,0) = h_{xt}(1,0) = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Тогда существует регулярное решение обратной краевой задачи (1)–(4) такое, что $u(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$ принадлежат пространству $W_{2,x,t}^{2,3}(Q)$ и $q(t) \in L_2(0,T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вспомогательную прямую краевую задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$u_{ttt} + u_{xx} + c(t)u = f_{1xx}(x,t) + \lambda h_{1xx}(x,t)u(0,t) \tag{16}$$

и такую, что для нее выполняются нелокальные условия

$$\begin{aligned}
u_x(0,t) &= \alpha_1(t)u(0,t) + \alpha_0(t), \quad 0 < t < T, \\
u_x(1,t) &= \beta_1(t)u(0,t) + \beta_0(t), \quad 0 < t < T,
\end{aligned} \tag{17}$$

а также начальные условия

$$u(x,0) = u_t(x,0) = u(x,T) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{18}$$

где λ — действительный параметр, который будет определен ниже.

Отметим, что пространственно нелокальные краевые задачи вида (16)–(18), но для ненагруженных уравнений (16) (без множителей $h_{1xx}(x,t)u(0,t)$), рассматривались в работах [25, 26].

Для $(x,t) \in \overline{Q}$ положим

$$\gamma(x,t) = \frac{x^2}{2}[\beta_0(t) - \alpha_0(t)] + x\alpha_0(t), \quad v(x,t) = u(x,t) - \gamma(x,t).$$

Тогда вместо краевой задачи (16)–(18) будем рассматривать краевую задачу: найти функцию $v(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$v_{ttt} + v_{xx} + c(t)v = f_2(x,t) + \lambda h_{1xx}(x,t)v(0,t), \tag{19}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$\begin{aligned}
v_x(0,t) &= \alpha_1(t)v(0,t), \quad 0 < t < T, \\
v_x(1,t) &= \beta_1(t)v(0,t), \quad 0 < t < T,
\end{aligned} \tag{20}$$

$$v(x,0) = v_t(x,0) = v(x,T) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{21}$$

где

$$f_2(x,t) = f_{1xx}(x,t) + B_0(x,t), \quad B_0(x,t) = -\gamma_{ttt}(x,t) - \gamma_{xx}(x,t) - c(t)\gamma(x,t).$$

Без ограничения общности считаем, что

$$\beta_0(0) = \beta'_0(0) = 0, \quad \alpha_0(0) = \alpha'_0(0) = 0, \quad \alpha_0(T) = \beta_0(T) = 0.$$

Эти равенства выполняются, например, при выполнении условий согласования (15).

Для $(x,t) \in \overline{Q}$ положим

$$\delta(x,t,\lambda) = \frac{\lambda x^2}{2}[\beta_1(t) - \alpha_1(t)] + \lambda x\alpha_1(t), \quad w(x,t) = v(x,t) - \delta(x,t,\lambda)v(0,t).$$

Зависимость функции $w(x, t)$ от λ опущена для простоты.

Полагая в равенстве, определяющем функцию $w(x, t)$, поочередно $x = 0$, $x = 1$, получаем, что функции $w(0, t)$, $w(1, t)$ можно вычислить через функции $v(0, t)$, $v(1, t)$ по формулам

$$w(0, t) = v(0, t), \quad w(1, t) = -\delta(1, t, \lambda)v(0, t) + v(1, t).$$

Имеет место равенство

$$v(x, t) = w(x, t) + \delta(x, t, \lambda)w(0, t).$$

Пусть $v(x, t)$ есть решение уравнения (19). Тогда для функции $w(x, t)$ будет выполняться равенство

$$w_{ttt} + w_{xx} + c(t)w = f_2(x, t) + \Phi(x, t, \lambda, \overline{w}(t)),$$

где

$$\overline{w}(t) = (w_{ttt}(0, t), w_{tt}(0, t), w_t(0, t), w(0, t)),$$

$$\begin{aligned} \Phi(x, t, \lambda, \overline{w}(t)) = & B_1(x, t, \lambda)w_{ttt}(0, t) + B_2(x, t, \lambda)w_{tt}(0, t) \\ & + B_3(x, t, \lambda)w_t(0, t) + B_4(x, t, \lambda)w(0, t), \end{aligned}$$

$$B_1(x, t, \lambda) = -\delta(x, t, \lambda), \quad B_2(x, t, \lambda) = -3\delta_t(x, t, \lambda), \quad B_3(x, t, \lambda) = -3\delta_{tt}(x, t, \lambda),$$

$$B_4(x, t, \lambda) = \lambda h_{1xx}(x, t) - \delta_{ttt}(x, t, \lambda) - \delta_{xx}(x, t, \lambda) - c(t)\delta(x, t, \lambda).$$

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: найти функцию $w(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$w_{ttt} + w_{xx} + c(t)w = f_2(x, t) + \Phi(x, t, \lambda, \overline{w}(t)) \quad (22)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$\begin{aligned} w_x(0, t) = w_x(1, t) = 0, \quad t \in (0, T), \\ w(x, 0) = w_t(x, 0) = w(x, T) = 0, \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (23)$$

Докажем, что данная задача разрешима в пространстве V_0 . Для этого воспользуемся методами регуляризации и продолжения по параметру.

Пусть ε — положительное число, без ограничения общности $0 < \varepsilon < 1$. Рассмотрим новую краевую задачу: найти функцию $w(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$L_\varepsilon(\lambda)w \equiv w_{ttt} + w_{xx} + c(t)w - \varepsilon w_{xxttt} = f_2(x, t) + \Phi(x, t, \lambda, \overline{w}(t)) \quad (24)$$

и такую, что выполняются условия (23).

Покажем, что краевая задача (24), (23) при фиксированном $\varepsilon > 0$ разрешима в пространстве W_1 для любой функции $f_2(x, t) \in L_2(Q)$ такой, что $f_{2x}(x, t) \in L_2(Q)$.

Согласно методу продолжения по параметру [27] для того, чтобы краевая задача (24), (23) была разрешима в пространстве W_1 при всех $\lambda \in [0, 1]$ и любой функции $f(x, t)$ из пространства $W_{2,x,t}^{1,0}(Q)$, достаточно установить

- 1) непрерывность семейства операторов $\{L_\varepsilon(\lambda)\}$ по λ ;

2) разрешимость краевой задачи (24), (23) при $\lambda = 0$;

3) априорную оценку в пространстве W_0 равномерную по λ всевозможных решений $v(x, t)$ краевой задачи (24), (23).

Непрерывность по λ семейства операторов $\{L_\varepsilon(\lambda)\}$ очевидна. При $\lambda = 0$ краевая задача (24), (23) при фиксированном ε и при выполнении всех условий теоремы 1 разрешима в пространстве W_1 (см. [28]). Покажем, что для всевозможных решений $w(x, t)$ краевой задачи (24), (23) имеет место равномерная по λ априорная оценка в пространстве W_1 .

Пусть $w(x, t)$ — решение краевой задачи (24), (23) из пространства W_1 . Положим $v(x, t) = w(x, t) + \delta(x, t, \lambda)w(0, t)$. Используя неравенство

$$\int_0^T v^2(0, t) dt \leq \int_0^T \int_0^1 v_x^2(x, t) dx dt + 2 \int_0^T \int_0^1 v^2(x, t) dx dt, \quad (25)$$

нетрудно показать, что функция $v(x, t)$, определенная выше, также будет принадлежать W_1 и являться решением краевой задачи

$$L_\varepsilon(\lambda)v \equiv v_{ttt} + v_{xx} + c(t)v - \varepsilon v_{xxtt} = f_2(x, t) + \lambda h_{1xx}(x, t)v(0, t), \quad (26)$$

$$v_x(0, t) = \lambda \alpha_1(t)v(0, t), \quad v_x(1, t) = \lambda \beta_1(t)v(0, t), \quad (27)$$

$$v(x, 0) = v_t(x, 0) = v(x, T) = 0. \quad (28)$$

Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 L_\varepsilon(\lambda)v \cdot [-v + v_{ttt}](\lambda_0 - t) dx dt \\ &= \int_0^T \int_0^1 [f_2(x, t) + \lambda h_{1xx}v(0, t)][-v + v_{ttt}](\lambda_0 - t) dx dt. \end{aligned} \quad (29)$$

Интегрируя по частям и используя указанные выше граничные и начальные условия (27), (28) для функции $v(x, t)$, приходим к равенству

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 [v_x^2 - c(t)v^2](\lambda_0 - t) dx dt + \frac{3}{2} \int_0^T \int_0^1 v_t^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^1 v_t^2(x, T)(\lambda_0 - T) dx \\ &+ \frac{3(1+\varepsilon)}{2} \int_0^T \int_0^1 v_{xt}^2 dx dt + \frac{1+\varepsilon}{2} \int_0^1 v_{xt}^2(x, T)(\lambda_0 - T) dx \\ &+ \int_0^T \int_0^1 v_{ttt}^2(\lambda_0 - t) dx dt + \varepsilon \int_0^T \int_0^1 v_{xxtt}^2(\lambda_0 - t) dx dt \\ &+ \varepsilon \lambda \int_0^T [\alpha_1(t)v_{ttt}^2(0, t) - \beta_1(t)v_{ttt}(0, t)v_{ttt}(1, t)](\lambda_0 - t) dt \\ &= - \int_0^T \int_0^1 c(t)vv_{ttt}(\lambda_0 - t) dx dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon \lambda \int_0^T \{ [3\beta_1'(t)v_{tt}(0,t) + 3\beta_1''(t)v_t(0,t) + \beta_1'''(t)v(0,t)]v_{ttt}(1,t) \\
& - [3\alpha_1'(t)v_{tt}(0,t) + 3\alpha_1''(t)v_t(0,t) + \alpha_1'''(t)v(0,t)]v_{ttt}(0,t) \} (\lambda_0 - t) dt \\
& + \varepsilon \int_0^T \{ [(v_{xtt}v_t)(1,t) - (v_{xtt}v_t)(0,t)](\lambda_0 - t) + (v_{xt}v_t)(1,t) - (v_{xt}v_t)(0,t) \} dt \\
& + \int_0^T \{ [(v_xv + v_{xt}v_{tt})(1,t) - (v_xv + v_{xt}v_{tt})(0,t)](\lambda_0 - t) + v_{xt}v_t(1,t) - v_{xt}v_t(0,t) \} dt \\
& + \int_0^T \int_0^1 [f_2(x,t) + \lambda h_{1xx}(x,t)v(0,t)](-v + v_{ttt})(\lambda_0 - t) dx dt.
\end{aligned}$$

Используя (12), (13) при $\lambda_0 = 2T$ с учетом неравенства Юнга и неравенств (8)–(10), нетрудно перейти к следующему неравенству:

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^1 [v_x^2 - c(t)v^2] dx dt + \int_0^T \int_0^1 v_t^2 dx dt + \int_0^1 v_t^2(x, T) dx + \\
& + (1 + \varepsilon) \left[\int_0^T \int_0^1 v_{xt}^2 dx dt + \int_0^1 v_{xt}^2(x, T) dx \right] + \\
& + \int_0^T \int_0^1 v_{ttt}^2 dx dt + \varepsilon \int_0^T \int_0^1 v_{xttt}^2 dx dt \leq \\
& \leq \frac{\varepsilon \lambda T}{4} \int_0^T v^2(1, t) dt + 2T\delta_0 \int_0^T \int_0^1 (v^2 + v_{ttt}^2) dx dt + \frac{T}{\delta_0} \int_0^T \int_0^1 f_2^2 dx dt + \\
& + 2Th_0 \left[\int_0^T v^2(0, t) dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 (v^2 + v_{ttt}^2) dx dt \right],
\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^1 [v_x^2 - c(t)v^2] dx dt + \int_0^T \int_0^1 v_t^2 dx dt + \int_0^1 v_t^2(x, T) dx + \\
& + (1 + \varepsilon) \left[\int_0^T \int_0^1 v_{xt}^2 dx dt + \int_0^1 v_{xt}^2(x, T) dx \right] + \\
& + \int_0^T \int_0^1 v_{ttt}^2 dx dt + \varepsilon \int_0^T \int_0^1 v_{xttt}^2 dx dt \leq \\
& \leq 2T\delta_0 \int_0^T \int_0^1 (v^2 + v_{ttt}^2) dx dt + \frac{T}{\delta_0} \int_0^T \int_0^1 f_2^2 dx dt +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2T \left(\frac{1}{8} + h_0 \right) \left[\delta_1 \int_0^T \int_0^1 v_x^2 dx dt + C(\delta_1) \int_0^T \int_0^1 v^2 dx dt \right] \\
& + Th_0 \int_0^T \int_0^1 (v^2 + v_{ttt}^2) dx dt, \quad (30)
\end{aligned}$$

в котором δ_1 — произвольное положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$1 - 2T \left(\frac{1}{8} + h_0 \right) \delta_1 > 0.$$

При фиксированном δ_1 и $\delta_0 = \frac{1}{4T}$ по условию теоремы (11) существует достаточно большое $-c_0 > 0$, удовлетворяющее неравенству

$$-c_0 - 2T\delta_0 - T \left(\frac{1}{4} + 2h_0 \right) C(\delta_1) - Th_0 > 0.$$

Таким образом, получаем, что следствием неравенства (30) будет оценка

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^1 [v_x^2 - c(t)v^2] dx dt + \int_0^T \int_0^1 v_t^2 dx dt + \int_0^1 v_t^2(x, T) dx + \\
& + (1 + \varepsilon) \left[\int_0^T \int_0^1 v_{xt}^2 dx dt + \int_0^1 v_{xt}^2(x, T) dx \right] + \\
& + \int_0^T \int_0^1 v_{ttt}^2 dx dt + \varepsilon \int_0^T \int_0^1 v_{xttt}^2 dx dt \leq M_1 \int_0^T \int_0^1 f_2^2 dx dt, \quad (31)
\end{aligned}$$

с постоянной M_1 , определяющейся числом c_0 а также функциями $f(x, t)$ и $h(x, t)$.

Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned}
& \int_0^T L_\varepsilon(\lambda) v \cdot \left[-v_{xttt} + \left(x - \frac{1}{2} \right) v_{xtt} + v_{xx} + v_{ttt} \right] dx dt \\
& = \int_0^T \int_0^1 F \cdot \left[-v_{xttt} + \left(x - \frac{1}{2} \right) v_{xtt} + v_{xx} + v_{ttt} \right] dx dt, \\
& F = f_2(x, t) + \lambda h_{1xx}(x, t) v(0, t).
\end{aligned}$$

Интегрируя по частям и используя граничные и начальные условия (27), (28) для функции $v(x, t)$, от данного равенства переходим к следующему:

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{3\varepsilon}{2} \right) \int_0^T \int_0^1 v_{xttt}^2 dx dt + \int_0^T \int_0^1 \left[v_{xx}^2 + \frac{1}{2} v_{ttt}^2 \right] dx dt + \int_0^1 v_{xt}^2(x, T) dx \\
& + \varepsilon \int_0^T \int_0^1 v_{xttt}^2 dx dt + \frac{1 + \varepsilon}{2} \int_0^1 v_{xtt}^2(x, T) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^T \left\{ \left[\lambda(1+\varepsilon)\alpha_1(t) + \frac{1}{4} - \frac{\lambda\varepsilon}{4}(\alpha_1^2(t) + \beta_1^2(t)) \right] v_{ttt}^2(0, t) - \right. \\
& \quad \left. - \lambda(1+\varepsilon)\beta_1(t)v_{ttt}(0, t)v_{ttt}(1, t) + \frac{1}{4}v_{ttt}^2(1, t) \right\} dt = \\
& = \frac{\lambda\varepsilon}{4} \int_0^T [(\alpha_1'''(t))^2 + (\beta_1'''(t))^2] v^2(0, t) + 9((\alpha_1''(t))^2 + (\beta_1''(t))^2) v_t^2(0, t) \\
& \quad + 9((\alpha_1'(t))^2 + (\beta_1'(t))^2) v_{tt}^2(0, t) + 6(\alpha_1'''(t)\alpha_1''(t) + \beta_1'''(t)\beta_1''(t))v(0, t)v_t(0, t) \\
& \quad + 6(\alpha_1'''(t)\alpha_1'(t) + \beta_1'''(t)\beta_1'(t))v(0, t)v_{tt}(0, t) + 2(\alpha_1'''(t)\alpha_1(t) + \beta_1'''(t)\beta_1(t))v(0, t)v_{ttt}(0, t) \\
& \quad + 18(\alpha_1''(t)\alpha_1'(t) + \beta_1''(t)\beta_1'(t))v_t(0, t)v_{tt}(0, t) + 6(\alpha_1''(t)\alpha_1(t) + \beta_1''(t)\beta_1(t))v_t(0, t)v_{ttt}(0, t) \\
& \quad + 6(\alpha_1'(t)\alpha_1(t) + \beta_1'(t)\beta_1(t))v_{tt}(0, t)v_{ttt}(0, t)] dt \\
& \quad + \int_0^T \int_0^1 \left[-c(t)v_x v_{xttt} - \left(x - \frac{1}{2}\right)v_{xx} v_{xttt} - \left(x - \frac{1}{2}\right)c(t)vv_{xttt} \right. \\
& \quad \left. - c(t)vv_{xx} - c(t)vv_{ttt} + F_x v_{xttt} + \left(x - \frac{1}{2}\right)Fv_{xttt} + Fv_{xx} + Fv_{ttt} \right] dx dt \\
& \quad - \lambda(1+\varepsilon) \int_0^T \{ [3\alpha_1'(t)v_{tt}(0, t) + 3\alpha_1''(t)v_t(0, t) + \alpha_1'''(t)v(0, t)]v_{ttt}(0, t) \\
& \quad - [3\beta_1'(t)v_{tt}(0, t) + 3\beta_1''(t)v_t(0, t) + \beta_1'''(t)v(0, t)]v_{ttt}(1, t) \} dt \\
& \quad + \int_0^T [c(t)v(1, t)v_{xttt}(1, t) - c(t)v(0, t)v_{xttt}(0, t) - 2v_{xt}(0, t)v_{tt}(0, t) \\
& \quad + 2v_{xt}(1, t)v_{tt}(1, t) + F(0, t)v_{xttt}(0, t) - F(1, t)v_{xttt}(1, t)] dt.
\end{aligned}$$

Используя условия (11)–(14), заменяя $v_{xttt}(0, t)$, $v_{xttt}(1, t)$ из условия (27) и оценивая слагаемые правой части с помощью неравенства Юнга, неравенств (8) и оценки (31), получаем априорную оценку

$$\begin{aligned}
& (1+\varepsilon) \int_0^T \int_0^1 v_{xttt}^2 dx dt + \int_0^T \int_0^1 [v_{xx}^2 + v_{ttt}^2] dx dt + \int_0^1 v_{xt}^2(x, T) dx \\
& + \varepsilon \int_0^T \int_0^1 v_{xttt}^2 dx dt + (1+\varepsilon) \int_0^1 v_{xtt}^2(x, T) dx \leq M_2 \int_0^T \int_0^1 [f_2^2 + f_{2x}^2] dx dt, \quad (32)
\end{aligned}$$

с постоянной M_2 , определяющейся числом c_0 , а также функциями $f(x, t)$ и $h(x, t)$.

Рассмотрим равенство

$$\int_0^T L_\varepsilon(\lambda)v_x v_{xxx} dx dt = \int_0^T \int_0^1 [f_{2x}(x, t) + \lambda h_{1xxx}(x, t)v(0, t)]v_{xxx} dx dt.$$

Интегрируя по частям, используя неравенство Юнга, доказанные оценки (31) и

(32), с учетом начальных условий (28) для функции $v(x, t)$ переходим к следующему неравенству:

$$\int_0^T \int_0^1 v_{xxx}^2 dx dt + \varepsilon \int_0^1 v_{xxxt}^2(x, T) dx \leq M_3 \int_0^T \int_0^1 f_{2x}^2 dx dt \quad (33)$$

с постоянной M_3 , определяющейся числом c_0 , а также функциями $f(x, t)$ и $h(x, t)$.

Из оценок (31)–(33) и уравнения (26) получим равномерную по λ априорную оценку

$$\|v\|_{W_1} \leq M_0. \quad (34)$$

Этих оценок достаточно для применения теоремы о методе продолжения по параметру. Следовательно, при выполнении условий теоремы краевая задача (26)–(28) имеет решение $v(x, t) = v_\varepsilon(x, t)$, принадлежащее пространству W_1 , при всех значениях λ , в том числе и при $\lambda = 1$. Покажем, что для полученного семейства решений $\{v_\varepsilon(x, t)\}$ имеется априорная оценка, равномерная по ε , с помощью которой можно осуществить предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Для семейства $\{v_\varepsilon(x, t)\}$ решений краевой задачи (26)–(28) по-прежнему имеют место оценки (31)–(33). Выберем последовательность $\{\varepsilon_n\}$ такую, что $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Используя теорему о слабой замкнутости ограниченного в пространстве $L_2(Q)$ множества, нетрудно показать существование последовательности $\{v_m(x, t)\}$ и функции $v(x, t)$ таких, что при $m \rightarrow \infty$ имеют место сходимости

$$v_m(x, t) \rightarrow v(x, t) \text{ слабо в } W_{2,x,t}^{2,3}(Q),$$

$$v_{mx}(x, t) \rightarrow v_x(x, t) \text{ слабо в } W_{2,x,t}^{2,3}(Q),$$

$$\varepsilon_m w_{mxttt}(x, t) \rightarrow 0 \text{ слабо в } L_2(Q).$$

Очевидно, что для предельной функции $v(x, t)$ выполняется уравнение (19). Положим $w(x, t) = v(x, t) - \delta(x, t, 1)v(0, t)$. Функция $w(x, t)$ принадлежит пространству V_0 и является решением краевой задачи (19)–(21).

Остается показать, что с помощью построенной функции $v(x, t)$ можно найти решение $u(x, t)$, $q(t)$ краевой задачи (1)–(4). В самом деле, имеем

$$u_{xx}(x, t) = v(x, t), \quad (35)$$

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0. \quad (36)$$

Из этих равенств найдем $u(x, t)$. Положим

$$w(x, t) = u_{ttt} + u_{xx} + c(t)u - f_1(x, t) - h_1(x, t)v(0, t). \quad (37)$$

Тогда из равенств (16)–(18) следует, что для функции $w(x, t)$ будут выполняться равенства

$$w_{xx}(x, t) = 0, \quad w_x(0, t) = w_x(1, t) = 0, \quad (38)$$

откуда $w(x, t) \equiv 0$ при любом $t \in [0, T]$.

Таким образом, для функции $u(x, t)$ выполняется уравнение

$$u_{ttt} + u_{xx} + c(t)u - f_1(x, t) - h_1(x, t)v(0, t) = 0. \quad (39)$$

Положив $x = 0$ в уравнении (39), получим

$$u_{ttt}(0, t) + u_{xx}(0, t) + c(t)u(0, t) - f_1(0, t) - h_1(0, t)v(0, t) = 0, \quad (40)$$

откуда имеем краевую задачу

$$u_{ttt}(0, t) + c(t)u(0, t) = 0, \quad (41)$$

$$u(0, 0) = u_t(0, 0) = u(0, T) = 0, \quad (42)$$

которая имеет решение, тождественно равное нулю $u(0, t) \equiv 0$.

При выполнении условия $u(0, t) = 0$ из уравнения (39) получим $u_{xx}(0, t) = v(0, t)$, т. е. для функции $u(x, t)$ выполняются условия (2)–(4). Значит, построенные функции

$$u(x, t), \quad q(t) = \frac{u_{xx}(0, t) - f(0, t)}{h(0, t)}$$

принадлежат требуемым классам, удовлетворяют уравнению (1) и дают решение обратной краевой задачи 1. Теорема доказана.

4. Разрешимость краевой задачи 2

Введем следующие обозначения:

$$\Delta(t) = h_1(0, t)h_2(1, t) - h_2(0, t)h_1(1, t),$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(x, t) &= \frac{h_1(x, t)}{\Delta(t)}(h_2(0, t)f(1, t) - h_2(1, t)f(0, t)) \\ &\quad - \frac{h_2(x, t)}{\Delta(t)}(h_2(0, t)f(1, t) - h_2(1, t)f(0, t)) + f(x, t), \end{aligned}$$

$$\alpha_0(t) = \tilde{f}_{1x}(0, t), \quad \beta_0(t) = \tilde{f}_{1x}(1, t),$$

$$\alpha_1(t) = \frac{1}{\Delta(t)}(h_2(1, t)h_{1x}(0, t) - h_1(1, t)h_{2x}(0, t)),$$

$$\alpha_2(t) = \frac{1}{\Delta(t)}(h_1(0, t)h_{2x}(0, t) - h_2(0, t)h_{1x}(0, t)),$$

$$\beta_1(t) = \frac{1}{\Delta(t)}(h_2(1, t)h_{1x}(1, t) - h_1(1, t)h_{2x}(1, t)),$$

$$\beta_2(t) = \frac{1}{\Delta(t)}(h_1(0, t)h_{2x}(1, t) - h_2(0, t)h_{1x}(1, t)),$$

$$\alpha(x, t) = \frac{1}{\Delta(t)}(h_2(1, t)h_{1xx}(x, t) - h_1(1, t)h_{2xx}(x, t)),$$

$$\beta(x, t) = \frac{1}{\Delta(t)}(h_1(0, t)h_{2xx}(x, t) - h_2(0, t)h_{1xx}(x, t)),$$

Будем предполагать выполнение условий

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{1x}(0, t) + \tilde{f}_{1x}(1, t) &= 0 \quad \text{при } t \in [0, T], \\ \tilde{f}_{1x}(0, 0) &= \tilde{f}_{1x}(0, T) = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия

$$\begin{aligned} c(t) \in C^1[0, T], \quad -c(t) \geq c_0 \gg 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, T], \\ h(x, t) \in C^3(\overline{Q}), \quad h_0 < \frac{1}{2T}, \quad \Delta(t) \neq 0, \\ \alpha_1^2(t) + \beta_1^2(t) < \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\frac{1}{2} + 2(\alpha_2(t)\beta_1(t) - \alpha_1(t)\beta_2(t)) \geq \alpha_1^2(t) + \beta_1^2(t) + \alpha_2^2(t) + \beta_2^2(t) \quad \text{при} \quad t \in [0, T], \quad (45)$$

$$\alpha_1(t)\xi_1^2 + [-\beta_1(t) + \alpha_2(t)]\xi_1\xi_2 - \beta_2(t)\xi_2^2 \geq 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, T], \quad (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (46)$$

$$f(x, t) \in W_2^3(Q), \quad f_{xxttt}(x, t) \in L_2(Q). \quad (47)$$

Тогда существует регулярное решение обратной краевой задачи (5), (2), (3), (6) такое, что $u(x, t)$, $u_{xx}(x, t)$ принадлежит пространству $W_{2,x,t}^{2,3}(Q)$ и $q_1(t), q_2(t) \in L_2(0, T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вспомогательную прямую краевую задачу: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$u_{ttt} + u_{xx} + c(t)u = \tilde{f}_{1xx}(x, t) + \lambda[\alpha(x, t)u(0, t) + \beta(x, t)u(1, t)] \quad (48)$$

и такую, что для нее выполняются нелокальные условия

$$\begin{aligned} u_x(0, t) &= \alpha_1(t)u(0, t) + \alpha_2(t)u(1, t) + \alpha_0(t), \quad 0 < t < T, \\ u_x(1, t) &= \beta_1(t)u(0, t) + \beta_2(t)u(1, t) + \beta_0(t), \quad 0 < t < T, \end{aligned} \quad (49)$$

а также начальные условия

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = u(x, T) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (50)$$

Вместо краевой задачи (48)–(50), как в п. 3, будем рассматривать краевую задачу: найти функцию $v(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$v_{ttt} + v_{xx} + c(t)v = f_2(x, t) + \lambda[\alpha(x, t)v(0, t) + \beta(x, t)v(1, t)] \quad (51)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$\begin{aligned} v_x(0, t) &= \alpha_1(t)v(0, t) + \alpha_2(t)v(1, t), \quad 0 < t < T, \\ v_x(1, t) &= \beta_1(t)v(0, t) + \beta_2(t)v(1, t), \quad 0 < t < T, \end{aligned} \quad (52)$$

$$v(x, 0) = v_t(x, 0) = v(x, T) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (53)$$

где

$$f_2(x, t) = \tilde{f}_{1xx}(x, t) + B_0(x, t),$$

$$B_0(x, t) = \frac{1}{2}\lambda\beta(x, t)(\alpha_0(t) + \beta_0(t)) - \gamma_{ttt}(x, t) - \gamma_{xx}(x, t) - c(t)\gamma(x, t).$$

Без ограничения общности, как в п. 3, рассматриваем однородные начальные условия (53). Для $(x, t) \in \overline{Q}$, $\lambda \in [0, 1]$ положим

$$\gamma_1(x, t, \lambda) = \frac{\lambda x^2}{2}[\beta_1(t) - \alpha_1(t)] + \lambda x \alpha_1(t), \quad \delta_1(x, t, \lambda) = \frac{\lambda x^2}{2}[\beta_2(t) - \alpha_2(t)] + \lambda x \alpha_2(t),$$

$$\begin{aligned}
w(x, t) &= v(x, t) - \gamma_1(x, t, \lambda)v(0, t) - \delta_1(x, t, \lambda)v(1, t), \\
\gamma_{11}(x, t, \lambda) &= \gamma_1(x, t, \lambda) + \frac{\delta_1(x, t, \lambda)\gamma_1(1, t, \lambda)}{1 - \delta_1(1, t, \lambda)}, \quad \delta_{11}(x, t, \lambda) = \frac{\delta_1(x, t, \lambda)}{1 - \delta_1(1, t, \lambda)}, \\
v(x, t) &= w(x, t) + \gamma_{11}(x, t, \lambda)w(0, t) + \delta_{11}(x, t, \lambda)w(1, t).
\end{aligned}$$

Пусть $v(x, t)$ — решение уравнения (51). Тогда для функции $w(x, t)$ будет выполняться равенство

$$w_{ttt} + w_{xx} + c(t)w = f_2(x, t) + \Phi(x, t, \lambda, \overline{w}(t)),$$

где

$$\overline{w}(t) = (w_{ttt}(0, t), w_{ttt}(1, t), w_{tt}(0, t), w_{tt}(1, t), w_t(0, t), w_t(1, t), w(0, t), w(1, t)),$$

$$\begin{aligned}
\Phi(x, t, \lambda, \overline{w}(t)) &= A_1(x, t, \lambda)w_{ttt}(0, t) + A_2(x, t, \lambda)w_{ttt}(1, t) + A_3(x, t, \lambda)w_{tt}(0, t) \\
&+ A_4(x, t, \lambda)w_{tt}(1, t) + A_5(x, t, \lambda)w_t(0, t) + A_6(x, t, \lambda)w_t(1, t) \\
&+ A_7(x, t, \lambda)w(0, t) + A_8(x, t, \lambda)w(1, t),
\end{aligned}$$

$$A_1(x, t, \lambda) = -\gamma_{11}(x, t, \lambda), \quad A_2(x, t, \lambda) = -\delta_{11}(x, t, \lambda),$$

$$A_3(x, t, \lambda) = -3\gamma_{11t}(x, t, \lambda), \quad A_4(x, t, \lambda) = -3\delta_{11t}(x, t, \lambda),$$

$$A_5(x, t, \lambda) = -3\gamma_{11tt}(x, t, \lambda), \quad A_6(x, t, \lambda) = -3\delta_{11tt}(x, t, \lambda),$$

$$A_7(x, t, \lambda) = \lambda\alpha - \gamma_{11ttt}(x, t, \lambda) - \gamma_{11xx}(x, t, \lambda) - c(t)\gamma_{11}(x, t, \lambda),$$

$$A_8(x, t, \lambda) = \lambda\beta - \delta_{11ttt}(x, t, \lambda) - \delta_{11xx}(x, t, \lambda) - c(t)\delta_{11}(x, t, \lambda).$$

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: найти функцию $w(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$w_{ttt} + w_{xx} + c(t)w = f_2(x, t) + \Phi(x, t, \lambda, \overline{w}(t)) \quad (54)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$\begin{aligned}
w_x(0, t) &= w_x(1, t) = 0, \quad t \in (0, T), \\
w(x, 0) &= w_t(x, 0) = w(x, T) = 0, \quad x \in \Omega.
\end{aligned} \quad (55)$$

Как в п. 3, данная задача разрешима в пространстве V_0 . Для обоснования этого надо воспользоваться методами регуляризации и продолжения по параметру. С помощью построенной функции $v(x, t)$ можно найти решение $u(x, t)$, $q(t)$ краевой задачи (5), (2), (3), (6). Теорема доказана.

5. Заключение

1. Условия (12) представляют собой некоторые условия малости обратной краевой задачи 1. Очевидно, что множество входных данных обратной краевой задачи $f(x, t)$, $h(x, t)$, для которых они выполняются, непусто. Аналогично условия малости (44), (45) для обратной задачи 2 также имеют смысл.

2. Отметим, что выполнение неравенств (45) достаточно для выполнения неотрицательной определенности квадратичной формы

$$\left[\frac{1}{2} - \alpha_1^2(t) - \beta_1^2(t) \right] \xi_1^2 - 2[\alpha_1(t)\alpha_2(t) + \beta_1(t)\beta_2(t)] \xi_1\xi_2 + \left[\frac{1}{2} - \alpha_2^2(t) - \beta_2^2(t) \right] \xi_2^2 \geq 0$$

при $t \in [0, T]$, $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Романов В. Г., Кабанихин С. И., Пухначева Т. П. Обратные задачи электродинамики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1984.
2. Кабанихин С. И., Исаков К. Т. Оптимизационные методы решения коэффициентных обратных задач. Новосибирск: НГУ, 2001.
3. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи: Учебник для студентов вузов. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009.
4. Тихонов А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151, № 3. С. 501–504.
5. Тихонов А. Н. Регуляризация некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153, № 1. С. 49–52.
6. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
7. Иванов В. К. О некорректно поставленных задачах // Мат. сб. 1963. Т. 61, № 2. С. 211–223.
8. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Наука, 1962.
9. Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я. Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука, 1999.
10. Кожанов А. И. Параболические уравнения с неизвестным коэффициентом поглощения // Докл. АН. 2006. Т. 409, № 6. С. 740–743.
11. Кожанов А. И. Обратная задача определения коэффициента поглощения в одномерном уравнении нелинейной диффузии // Мат. заметки ЯГУ. 2008. Т. 15, вып. 2. С. 31–47.
12. Самарский А. А., Вабищевич П. Н., Васильев В. И. Итерационное решение ретроспективной обратной задачи теплопроводности // Мат. моделирование. 1997. Т. 9, № 5. С. 119–127.
13. Калинина Е. А. Численное исследование обратной задачи восстановления плотности источника двумерного нестационарного уравнения конвекции-диффузии // Дальневост. мат. журн. 2004. Т. 5, № 1. С. 89–99.
14. Алексеев Г. В. Обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений тепломассопереноса // Докл. АН. 2000. Т. 375, № 3. С. 315–319.
15. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York; Basel: Marcel Dekker, Inc. 1999.
16. Ivanchov M. Inverse problems for equations of parabolic type. Lviv: WNTL Publishers, 2003. (Math. Stud. Monogr. Ser.; V. 10).
17. Belov Yu. Ya. Inverse problems for partial differential equations. Utrecht: VSP, 2002.
18. Кожанов А. И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 4. С. 722–744.
19. Кожанов А. И. Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче // Мат. заметки. 2004. Т. 76, вып. 6. С. 840–853.
20. Телешева Л. А. О разрешимости обратной задачи для параболического уравнения высокого порядка с неизвестным коэффициентом при производной по времени // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, вып. 2. С. 180–201.
21. Телешева Л. А. О разрешимости линейной обратной задачи для параболического уравнения высокого порядка // Мат. заметки ЯГУ. 2013. Т. 20, вып. 2. С. 186–196.
22. Павлов С. С. Исследование обратной задачи восстановления плотностей источников одномерного волнового уравнения // Мат. заметки ЯГУ. 2010. Т. 17, вып. 1. С. 93–99.
23. Павлов С. С. Обратная задача восстановления внешнего воздействия в многомерном волновом уравнении с интегральным переопределением // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, вып. 1. С. 81–93.
24. Павлов С. С. Нелинейные обратные задачи для многомерных гиперболических уравнений с интегральным переопределением // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 19, вып. 2. С. 128–154.
25. Лукина Г. А. О разрешимости пространственно нелокальных краевых задач для уравнения третьего порядка // Мат. заметки ЯГУ. 2010. Т. 17, вып. 1. С. 35–46.
26. Лукина Г. А. Краевые задачи с интегральными граничными условиями по времени для уравнений третьего порядка // Мат. заметки ЯГУ. 2010. Т. 17, вып. 2. С. 75–97.
27. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

28. Якубов С. Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: ЭЛМ, 1985.

Статья поступила 14 сентября 2015 г.

Николаев Николай Николаевич
Нюрбинский технический лицей имени А. Н. Чусовского
`nike1987@mail.ru`

Попов Сергей Вячеславович
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики,
кафедра математического анализа,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
`madu@ysu.ru`