

ПОСТРОЕНИЕ ПОЧТИ–ПЕРИОДИЧЕСКИХ
РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М. Ф. Кулагина, Е. А. Микишанина

Аннотация. Указан метод построения почти-периодических в смысле Бора решений краевых задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных, которые возникают при решении некоторых задач для гетерогенных сред.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, краевая задача, обобщенное дискретное преобразование Фурье, ряды Фурье.

M. F. Kulagina, E. A. Mikishanina Constructing almost periodic solutions for some systems of differential equations.

Abstract: A method for constructing almost periodic Bohr solutions of boundary value problems for systems of differential equations in partial derivatives that arise in the solution of certain problems for heterogeneous environments .

Keywords: differential equations, boundary value problem, generalized discrete Fourier transform, Fourier series .

Рассматриваются краевые задачи для систем дифференциальных уравнений, которые получаются при решении плоских задач теории гетерогенных сред в теории упругости, теории фильтрации, теории диффузии, теплопроводности, электро- и магнитодинамике в случае, когда область представляет собой двухслойную (или l -слойную) полосу. Граничные условия задаются как на границе полосы, так и на линии склейки.

В общем случае задача выглядит следующим образом: найти функции $u_{km}(x, y)$ такие, что в каждой из m полос, $-\infty < x < +\infty$, $a_m < y < b_m$, они удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=1}^n \left(a_{kj}^{(m)} \frac{\partial^2 u_{km}(x, y)}{\partial x^2} + b_{kj}^{(m)} \frac{\partial^2 u_{km}(x, y)}{\partial y^2} + c_{kj}^{(m)} \frac{\partial u_{km}(x, y)}{\partial x} + d_{kj}^{(m)} \frac{\partial u_{km}(x, y)}{\partial y} + e_{kj}^{(m)} u_{km}(x, y) \right) = F_{jm}(x, y), \quad j = \overline{1, n}, \quad m = \overline{1, l}. \quad (1)$$

Граничные условия задаются на границе полосы, а на линиях раздела задаются условия склейки. Например, для двухслойной полосы $-\infty < x < +\infty$, $-1 < y < 0$, $0 < y < 1$ эти условия могут выглядеть так ($k = \overline{1, n}$, $m = \overline{1, 2}$):

$$u_{km}(x, 1) = \Phi_{km}(x),$$

$$u_{km}(x, -1) = \Psi_{km}(x),$$

$$u_{k1}(x, 0) = u_{k2}(x, 0),$$

$$\frac{\partial u_{k1}(x, 0)}{\partial y} = \frac{\partial u_{k2}(x, 0)}{\partial y},$$

Количество условий зависит от порядка системы (максимальный порядок системы $2n$).

Будем искать почти-периодические в смысле Бора решения на каждой прямой $y = \text{const}$. Эти решения будем строить с помощью обобщенного дискретного преобразования Фурье, введенного и изученного в работах [1–3].

Напомним основные понятия, относящиеся к почти-периодическим функциям. *Почти-периодическим* (п.-п.) *полиномом* называется функция $p(t)$, $-\infty < t < \infty$, являющаяся линейной комбинацией функций вида $e^{i\lambda t}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$. Обозначим через Π_C замыкание по норме $L_\infty(-\infty, +\infty)$ множества всех п.-п. полиномов. Множество Π_C является подалгеброй $L_\infty(-\infty, +\infty)$, состоящей из всех п.-п. функций по Бору. Через Π_W обозначим множество Π_C , состоящее из функций $A(t)$ вида

$$A(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t}, \quad (1.1)$$

удовлетворяющих условию $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Множество Π_W является банаховой алгеброй.

Каждой функции $A(t)$ из Π_W поставим в соответствие функцию

$$a(\lambda) = M \{A(t)e^{-i\lambda t}\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A(t)e^{-i\lambda t} dt. \quad (1.2)$$

Такая функция существует и может быть отличной от нуля не более чем для счетного множества ограничений λ : λ_1, λ_2, K : $a(\lambda_n) = a_n \neq 0$. Таким образом, каждой функции из Π_W поставим в соответствие функцию $a(\lambda)$ или последовательность пар $a(\lambda) = \{(a_1, \lambda_1), (a_2, \lambda_2), K\}$, где $a_n \in C$, $\lambda_n \in \mathbb{R}$.

Если $A(t) \in \Pi_W$, то соответствующая этой функции последовательность $\{a_n\}$ принадлежит l_1 (будем говорить, что $a(\lambda)$ принадлежит l_1). Обратно, для каждой функции $a(\lambda) \in l_1$ существует функция $A(t)$, для которой выполнено (1.2), и $A(t)$ имеет вид (1.1). Ряд (1.1) сходится абсолютно и равномерно при $-\infty < t < \infty$. Следовательно, установлено взаимно однозначное соответствие между функциями из Π_W и двумерными последовательностями $a(\lambda) \in l_1$.

Равенство (1.1), согласно которому последовательности $a(\lambda) \in l_1$ поставлена в соответствие функция $A(t) \in \Pi_W$, назовем *обобщенным дискретным преобразованием Фурье* (ОДФ). Равенство (1.2) определяет обратное преобразование. Последовательность $a(\lambda)$ — оригинал, функция $A(t)$ — изображение. ОДФ будем обозначать символами $A(t) = W_0 a(\lambda)$, $a(\lambda) = W_0^{-1} A(t)$. Показано, что если $A(t)$ дифференцируема и $A^{(j)}(t) \in \Pi_W$, $j = 0, K, p$, то

$$W_0^{-1} \frac{d^p A(t)}{dt^p} = (i\lambda)^p a(\lambda).$$

Коэффициенты последовательности $a(\lambda)$ могут зависеть от параметра y :

$$a(\lambda, y) = \{(a_1, \lambda_1), (a_2, \lambda_2), K\}, \quad y \in [a, b].$$

Если существует последовательность положительных чисел $\{a_n\} \in l_1$ такая, что $|a_n(y)| \leq \alpha_n$, то функции $A(t, y) = W_0 a(\lambda, y)$ принадлежат Π_W на каждой горизонтальной прямой полосе $a \leq \operatorname{Im} z \leq b$ ($z = t + iy$). Будем говорить, что функция $A(t, y)$ принадлежит Π_W^y в полосе $[a, b]$. Если функция $A(t, y)$ дифференцируема p раз по y и $\frac{\partial^j A(t, y)}{\partial y^j} \in \Pi_W^y$, $j = 0, \dots, p$, то

$$W_0^{-1} \frac{\partial^p A(t, y)}{\partial y^p} = \frac{\partial^p a(\lambda, y)}{\partial y^p}.$$

Будем считать, что функции в граничных условиях принадлежат Π_W , т. е. представимы в виде абсолютно сходящихся рядов

$$\Phi_{km}(x) = \sum_{\lambda} \varphi_{km}(\lambda) e^{i\lambda x}, \quad \Psi_{km}(x) = \sum_{\lambda} \psi_{km}(\lambda) e^{i\lambda x}, \quad k = \overline{1, n}, \quad m = \overline{1, l},$$

все функции $F_{jm}(x, y)$ принадлежат Π_W^y , т. е. представимы в виде рядов

$$F_{jm}(x, y) = \sum_{\lambda} f_{jm}(\lambda, y) e^{i\lambda x}, \quad j = \overline{1, n}, \quad m = \overline{1, l}.$$

Решение системы $u_{km}(x, y)$ будем искать в классе Π_W^y , т. е. в виде

$$u_{km}(x, y) = \sum_{\lambda} A_{km}(\lambda, y) e^{i\lambda x}, \quad k = \overline{1, n}, \quad m = \overline{1, l},$$

где $A_{km}(\lambda, y)$ — неизвестные функции, которые находятся из граничных условий и условий склейки следующим образом.

Поддействуем оператором W_0^{-1} на уравнения системы (1) и получим систему

$$\sum_{k=1}^n \left(-\lambda^2 a_{kj}^{(m)} A_{km}(\lambda, y) + b_{kj}^{(m)} \frac{d^2 A_{km}(\lambda, y)}{dy^2} + c_{kj}^{(m)} \cdot i\lambda \cdot A_{km}(\lambda, y) + d_{kj}^{(m)} \frac{d A_{km}(\lambda, y)}{dy} + e_{kj}^{(m)} A_{km}(\lambda, y) \right) = f_{jm}(\lambda, y), \quad j = \overline{1, n}, \quad m = \overline{1, l}, \quad (2)$$

обыкновенных линейных дифференциальных уравнений при каждом фиксированном m порядка не выше $2n$ (λ — параметр). Решая эту систему, получим

$$A_{km}(\lambda, y) = \sum_{q=1}^{2n} p_{qkm}(\lambda) \xi_{qkm}(\lambda, y) + \tilde{\xi}_{km}(\lambda, y), \quad k = \overline{1, n}, \quad m = \overline{1, l},$$

где $p_{qkm}(\lambda)$ при фиксированных q, k, m, λ — постоянные. Именно они и находятся из граничных условий и условий склейки. Для определения этих постоянных получается конечная система линейных алгебраических уравнений.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу теории фильтрации.

Постановка задачи. В однородно-изотропной пористой области, представляющей собой две полосы, $-\infty < x < +\infty$: первая ($m = 1$), $-1 \leq y \leq 0$; вторая ($m = 2$), $0 \leq y \leq 1$ — происходит стационарная фильтрация некоторой жидкости.

На внешних границах области $y = 1$, $y = -1$ известны значения нормального и касательного напряжений, а также значение потенциала скорости фильтрации:

$$\begin{aligned}\sigma_y^{(1)}(x, -1) &= F_1(x), & \sigma_y^{(2)}(x, 1) &= G_1(x), \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, -1) &= F_2(x), & \tau_{xy}^{(2)}(x, 1) &= G_2(x), \\ \varphi^{(1)}(x, -1) &= F_3(x), & \varphi^{(2)}(x, 1) &= G_3(x),\end{aligned}\quad (3)$$

где функции $F_j(x)$, $G_j(x)$, $j = 1, 2, 3$, почти-периодические с абсолютно сходящимися рядами Фурье (принадлежат классу Π_W), т. е. имеют структуру

$$F_j(x) = \sum_{\lambda \neq 0} f_j(\lambda) e^{i\lambda x}, \quad G_j(x) = \sum_{\lambda \neq 0} g_j(\lambda) e^{i\lambda x},$$

$\{\lambda\}$ — счетное множество действительных чисел, которое отделено от нуля. На общей границе раздела сред $y = 0$ имеют место условия жесткого сцепления:

$$\sigma_y^{(1)}(x, 0) = \sigma_y^{(2)}(x, 0), \quad \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = \tau_{xy}^{(2)}(x, 0), \quad (4)$$

$$u^{(1)}(x, 0) = u^{(2)}(x, 0), \quad \nu^{(1)}(x, 0) = \nu^{(2)}(x, 0), \quad (5)$$

$$\frac{\varphi^{(1)}(x, 0)}{k_1} = \frac{\varphi^{(2)}(x, 0)}{k_2}, \quad \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial y}(x, 0), \quad (6)$$

где k_1 , k_2 — коэффициенты фильтрации сред. Функции $u^{(m)}(x, y)$, $\nu^{(m)}(x, y)$, $m = 1, 2$, известным образом выражаются через $\sigma_x^{(m)}(x, y)$, $\sigma_y^{(m)}(x, y)$, $\tau_{xy}^{(m)}(x, y)$.

Найти функции потенциала скорости фильтрации $\varphi^{(m)}(x, y)$ жидкости, действующей в каждой полосе пористой области $0 \leq y \leq 1$, $-1 \leq y \leq 0$, $-\infty < x < +\infty$, а также напряжения $\sigma_x^{(m)}(x, y)$, $\sigma_y^{(m)}(x, y)$, $\tau_{xy}^{(m)}(x, y)$, $m = 1, 2$.

Подобные задачи возникают при расчете напряжения и деформации дорожных одежд [4].

Эта задача сводится к решению системы уравнений относительно $\sigma_x^{(m)}(x, y)$, $\sigma_y^{(m)}(x, y)$, $\tau_{xy}^{(m)}(x, y)$, $\varphi^{(m)}(x, y)$, $m = 1, 2$ [5]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \sigma_x^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y^{(m)}}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_x^{(m)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(m)}}{\partial y} - \frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}^{(m)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^{(m)}}{\partial y} - \frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial y} - k_0^{(m)} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(m)}}{\partial y^2} &= 0.\end{aligned}\quad (7)$$

Решение будем искать в классе Π_W^y ($0 \leq y \leq 1$), т. е. в классе функций, представимых в виде рядов

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(1)}(x, y) &= \sum_{\lambda} A_{\lambda}^{(1)}(y) e^{i\lambda x}, & \sigma_x^{(2)}(x, y) &= \sum_{\lambda} A_{\lambda}^{(2)}(y) e^{i\lambda x}, \\ \sigma_y^{(1)}(x, y) &= \sum_{\lambda} B_{\lambda}^{(1)}(y) e^{i\lambda x}, & \sigma_y^{(2)}(x, y) &= \sum_{\lambda} B_{\lambda}^{(2)}(y) e^{i\lambda x}, \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, y) &= \sum_{\lambda} C_{\lambda}^{(1)}(y) e^{i\lambda x}, & \tau_{xy}^{(2)}(x, y) &= \sum_{\lambda} C_{\lambda}^{(2)}(y) e^{i\lambda x}, \\ \varphi^{(1)}(x, y) &= \sum_{\lambda} D_{\lambda}^{(1)}(y) e^{i\lambda x}, & \varphi^{(2)}(x, y) &= \sum_{\lambda} D_{\lambda}^{(2)}(y) e^{i\lambda x}.\end{aligned}\quad (8)$$

Поддействуем оператором W_0^{-1} на уравнения системы (7). Учитывая его свойства, приходим к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}
 -\lambda^2 A_\lambda^{(m)}(y) + \frac{d^2 A_\lambda^{(m)}(y)}{dy^2} - \lambda^2 B_\lambda^{(m)}(y) + \frac{d^2 B_\lambda^{(m)}(y)}{dy^2} &= 0, \\
 i\lambda A_\lambda^{(m)}(y) + \frac{dC_\lambda^{(m)}(y)}{dy} - i\lambda D_\lambda^{(m)}(y) &= 0, \\
 i\lambda C_\lambda^{(m)}(y) + \frac{dB_\lambda^{(m)}(y)}{dy} - \frac{D_\lambda^{(m)}(y)}{dy} - k_0^{(m)} &= 0, \\
 -\lambda^2 D_\lambda^{(m)}(y) + \frac{d^2 D_\lambda^{(m)}(y)}{dy^2} &= 0, \quad m = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Решая систему дифференциальных уравнений (9), имеем

$$\begin{aligned}
 A_\lambda^{(m)}(y) &= \left(-b_1^{(m)}(\lambda) - \frac{2}{\lambda} b_3^{(m)}(\lambda) - b_3^{(m)}(\lambda)y + 2d_1^{(m)}(\lambda) \right) e^{\lambda y} \\
 &\quad + \left(-b_2^{(m)}(\lambda) + \frac{2}{\lambda} b_4^{(m)}(\lambda) - b_4^{(m)}(\lambda)y + 2d_2^{(m)}(\lambda) \right) e^{-\lambda y}, \\
 B_\lambda^{(m)}(y) &= \left(b_1^{(m)}(\lambda) + b_3^{(m)}(\lambda)y \right) e^{\lambda y} + \left(b_2^{(m)}(\lambda) + b_4^{(m)}(\lambda)y \right) e^{-\lambda y}, \\
 C_\lambda^{(m)}(y) &= -\frac{ik_0^{(m)}}{\lambda} + i \left(b_1^{(m)}(\lambda) + \frac{1}{\lambda} b_3^{(m)}(\lambda) + b_3^{(m)}(\lambda)y - d_1^{(m)}(\lambda) \right) e^{\lambda y} \\
 &\quad + i \left(-b_2^{(m)}(\lambda) + \frac{1}{\lambda} b_4^{(m)}(\lambda) - b_4^{(m)}(\lambda)y + d_2^{(m)}(\lambda) \right) e^{-\lambda y}, \\
 D_\lambda^{(m)}(y) &= d_1^{(m)}(\lambda) e^{\lambda y} + d_2^{(m)}(\lambda) e^{-\lambda y}, \quad m = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Используем граничные условия и условия сцепления для определения $b_1^{(m)}(\lambda)$, $b_2^{(m)}(\lambda)$, $b_3^{(m)}(\lambda)$, $b_4^{(m)}(\lambda)$, $d_1^{(m)}(\lambda)$, $d_2^{(m)}(\lambda)$, $m = 1, 2$. Из граничных условий (3) следует, что

$$\begin{aligned}
 b_1^{(1)}(\lambda)e^{-\lambda} + b_2^{(1)}(\lambda)e^{\lambda} - b_3^{(1)}(\lambda)e^{-\lambda} - b_4^{(1)}(\lambda)e^{\lambda} &= f_1(\lambda), \\
 -\frac{ik_0^{(1)}}{\lambda} + i \left(b_1^{(1)}(\lambda) + \frac{1}{\lambda} b_3^{(1)}(\lambda) - b_3^{(1)}(\lambda) - d_1^{(1)}(\lambda) \right) e^{-\lambda} \\
 &\quad + i \left(-b_2^{(1)}(\lambda) + \frac{1}{\lambda} b_4^{(1)}(\lambda) + b_4^{(1)}(\lambda) + d_2^{(1)}(\lambda) \right) e^{\lambda} = f_2(\lambda), \\
 d_1^{(1)}(\lambda)e^{-\lambda} + d_2^{(1)}(\lambda)e^{\lambda} &= f_3(\lambda), \\
 b_1^{(2)}(\lambda)e^{\lambda} + b_2^{(2)}(\lambda)e^{-\lambda} + b_3^{(2)}(\lambda)e^{\lambda} + b_4^{(2)}(\lambda)e^{-\lambda} &= g_1(\lambda), \\
 -\frac{ik_0^{(2)}}{\lambda} + i \left(b_1^{(2)}(\lambda) + \frac{1}{\lambda} b_3^{(2)}(\lambda) + b_3^{(2)}(\lambda) - d_1^{(2)}(\lambda) \right) e^{\lambda} \\
 &\quad + i \left(-b_2^{(2)}(\lambda) + \frac{1}{\lambda} b_4^{(2)}(\lambda) - b_4^{(2)}(\lambda) + d_2^{(2)}(\lambda) \right) e^{-\lambda} = g_2(\lambda),
 \end{aligned}$$

$$d_1^{(2)}(\lambda)e^\lambda + d_2^{(2)}(\lambda)e^{-\lambda} = g_3(\lambda).$$

Из условий (4) следует, что

$$b_1^{(1)}(\lambda) + b_2^{(1)}(\lambda) = b_1^{(2)}(\lambda) + b_2^{(2)}(\lambda),$$

$$\begin{aligned} & -\frac{k_0^{(1)}}{\lambda} + \left(b_1^{(1)}(\lambda) + \frac{1}{\lambda}b_3^{(1)}(\lambda) - d_1^{(1)}(\lambda) \right) + \left(-b_2^{(1)}(\lambda) + \frac{1}{\lambda}b_4^{(1)}(\lambda) + d_2^{(1)}(\lambda) \right) \\ & = -\frac{k_0^{(2)}}{\lambda} + \left(b_1^{(2)}(\lambda) + \frac{1}{\lambda}b_3^{(2)}(\lambda) - d_1^{(2)}(\lambda) \right) + \left(-b_2^{(2)}(\lambda) + \frac{1}{\lambda}b_4^{(2)}(\lambda) + d_2^{(2)}(\lambda) \right). \end{aligned}$$

Функции $u^{(m)}(x, y)$, $\nu^{(m)}(x, y)$, $m = 1, 2$, определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} u^{(m)}(x, y) &= \sum_{\lambda \neq 0} \frac{i}{E_m \lambda^2} \left((b_1^{(m)}\lambda + 2b_3^{(m)} + \lambda y b_3^{(m)} - 2\lambda d_1^{(m)} + \nu_m \lambda b_1^{(m)} + \nu_m \lambda b_3^{(m)} y) e^{\lambda y} \right. \\ &\quad \left. + (\lambda b_2^{(m)} - 2b_4^{(m)} + \lambda y b_4^{(m)} - 2\lambda d_2^{(m)} + \nu_m \lambda b_2^{(m)} - \nu_m \lambda b_4^{(m)} y) e^{-\lambda y} \right) e^{i\lambda x}, \\ \nu^{(m)}(x, y) &= \sum_{\lambda \neq 0} \frac{i}{E_m \lambda^2} \left((b_1^{(m)}\lambda - b_3^{(m)} + \lambda y b_3^{(m)} - 2\nu_m \lambda d_1^{(m)} + \nu_m \lambda b_1^{(m)} \right. \\ &\quad \left. + \nu_m b_3^{(m)} + \nu_m \lambda b_3^{(m)} y) e^{\lambda y} + (-\lambda b_2^{(m)} - b_4^{(m)} - \lambda y b_4^{(m)} + 2\nu_m \lambda d_2^{(m)} \right. \\ &\quad \left. - \nu_m \lambda b_2^{(m)} + \nu_m b_4^{(m)} - \nu_m \lambda b_4^{(m)} y) e^{-\lambda y} \right) e^{i\lambda x} + \sum_{\lambda \neq 0} \frac{-2k_0^{(m)}(1 + \nu_m)}{\lambda^2 E_m} e^{i\lambda x}, \end{aligned}$$

где E_m , ν_m — некоторые заданные постоянные. Из условий (5) следует:

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda \neq 0} \frac{i}{E_1 \lambda^2} \left((b_1^{(1)}\lambda + 2b_3^{(1)} - 2\lambda d_1^{(1)} + \nu_1 \lambda b_1^{(1)}) \right. \\ & \quad \left. + (\lambda b_2^{(1)} - 2b_4^{(1)} - 2\lambda d_2^{(1)} + \nu_1 \lambda b_2^{(1)}) \right) e^{i\lambda x} \\ &= \sum_{\lambda \neq 0} \frac{i}{E_2 \lambda^2} \left((b_1^{(2)}\lambda + 2b_3^{(2)} - 2\lambda d_1^{(2)} + \nu_2 \lambda b_1^{(2)}) \right. \\ & \quad \left. + (\lambda b_2^{(2)} - 2b_4^{(2)} - 2\lambda d_2^{(2)} + \nu_2 \lambda b_2^{(2)}) \right) e^{i\lambda x}, \\ & \sum_{\lambda \neq 0} \frac{i}{E_1 \lambda^2} \left((b_1^{(1)}\lambda - b_3^{(1)} - 2\nu_1 \lambda d_1^{(1)} + \nu_1 \lambda b_1^{(1)} + \nu_1 b_3^{(1)}) \right. \\ & \quad \left. + (-\lambda b_2^{(1)} - b_4^{(1)} - 2\nu_1 \lambda d_2^{(1)} - \nu_1 \lambda b_2^{(1)} + \nu_1 b_4^{(1)}) - 2k_0^{(1)}(1 + \nu_1) \right) e^{i\lambda x} \\ &= \sum_{\lambda \neq 0} \frac{i}{E_2 \lambda^2} \left((b_1^{(2)}\lambda - 2b_3^{(2)} - 2\nu_2 \lambda d_1^{(2)} + \nu_2 \lambda b_1^{(2)} + \nu_2 b_3^{(2)}) \right. \\ & \quad \left. + (-\lambda b_2^{(2)} - b_4^{(2)} + 2\nu_2 \lambda d_2^{(2)} - \nu_2 \lambda b_2^{(2)} + \nu_2 b_4^{(2)}) - 2k_0^{(2)}(1 + \nu_2) \right) e^{i\lambda x}, \end{aligned}$$

Из условий (6) следует, что

$$\frac{d_1^{(1)}(\lambda) + d_2^{(1)}(\lambda)}{k_1} = \frac{d_1^{(2)}(\lambda) + d_2^{(2)}(\lambda)}{k_2}, \quad d_1^{(1)}(\lambda) - d_2^{(1)}(\lambda) = d_1^{(2)}(\lambda) - d_2^{(2)}(\lambda).$$

Согласно вышеизложенному для определения коэффициентов $b_1^{(m)}(\lambda)$, $b_2^{(m)}(\lambda)$, $b_3^{(m)}(\lambda)$, $b_4^{(m)}(\lambda)$, $d_1^{(m)}(\lambda)$, $d_2^{(m)}(\lambda)$, $m = 1, 2$, необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & e^{-\lambda} b_1^{(1)}(\lambda) + e^{\lambda} b_2^{(1)}(\lambda) - e^{-\lambda} b_3^{(1)}(\lambda) - e^{\lambda} b_4^{(1)}(\lambda) = f_1(\lambda), \\ & e^{-\lambda} b_1^{(1)}(\lambda) - e^{\lambda} b_2^{(1)}(\lambda) + \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) e^{-\lambda} b_3^{(1)}(\lambda) + \left(\frac{1}{\lambda} + 1\right) e^{\lambda} b_4^{(1)}(\lambda) \\ & \quad - e^{-\lambda} d_1^{(1)}(\lambda) + e^{\lambda} d_2^{(1)}(\lambda) = -i f_2(\lambda) + \frac{k_0^{(1)}}{\lambda}, \\ & e^{-\lambda} d_1^{(1)}(\lambda) + e^{\lambda} d_2^{(1)}(\lambda) = f_3(\lambda), \\ & e^{\lambda} b_1^{(2)}(\lambda) + e^{-\lambda} b_2^{(2)}(\lambda) + e^{\lambda} b_3^{(2)}(\lambda) + e^{-\lambda} b_4^{(2)}(\lambda) = g_1(\lambda), \\ & e^{\lambda} b_1^{(2)}(\lambda) - e^{-\lambda} b_2^{(2)}(\lambda) + \left(\frac{1}{\lambda} + 1\right) e^{\lambda} b_3^{(2)}(\lambda) + \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) e^{-\lambda} b_4^{(2)}(\lambda) \\ & \quad - e^{\lambda} d_1^{(2)}(\lambda) + e^{-\lambda} d_2^{(2)}(\lambda) = -i g_2(\lambda) + \frac{k_0^{(2)}}{\lambda}, \\ & e^{\lambda} d_1^{(2)}(\lambda) + e^{-\lambda} d_2^{(2)}(\lambda) = g_3(\lambda), \\ & b_1^{(1)}(\lambda) + b_2^{(1)}(\lambda) - b_1^{(2)}(\lambda) - b_2^{(2)}(\lambda) = 0, \\ & b_1^{(1)}(\lambda) - b_2^{(1)}(\lambda) + \frac{1}{\lambda} b_3^{(1)}(\lambda) + \frac{1}{\lambda} b_4^{(1)}(\lambda) - d_1^{(1)}(\lambda) + d_2^{(1)}(\lambda) - b_1^{(2)}(\lambda) \\ & \quad + b_2^{(2)}(\lambda) - \frac{1}{\lambda} b_3^{(2)}(\lambda) - \frac{1}{\lambda} b_4^{(2)}(\lambda) + d_1^{(2)}(\lambda) - d_2^{(2)}(\lambda) = \frac{k_0^{(1)}}{\lambda} - \frac{k_0^{(2)}}{\lambda}, \\ & k_2 d_1^{(1)}(\lambda) + k_2 d_2^{(1)}(\lambda) - k_1 d_1^{(2)}(\lambda) - k_1 d_2^{(2)}(\lambda) = 0, \\ & d_1^{(1)}(\lambda) - d_2^{(1)}(\lambda) - d_1^{(2)}(\lambda) + d_2^{(2)}(\lambda) = 0, \\ & \frac{\lambda(1+\nu_1)}{E_1} b_1^{(1)} + \frac{\lambda(1+\nu_1)}{E_1} b_2^{(1)} + \frac{2}{E_1} b_3^{(1)}(\lambda) - \frac{2}{E_1} b_4^{(1)}(\lambda) - \frac{2\lambda}{E_1} d_1^{(1)} - \frac{2\lambda}{E_1} d_2^{(1)} \\ & \quad - \frac{\lambda(1+\nu_2)}{E_2} b_1^{(2)} - \frac{\lambda(1+\nu_2)}{E_2} b_2^{(2)} - \frac{2}{E_2} b_3^{(2)}(\lambda) \\ & \quad + \frac{2}{E_2} b_4^{(2)}(\lambda) + \frac{2\lambda}{E_2} d_1^{(2)} + \frac{2\lambda}{E_2} d_2^{(2)} = 0, \\ & \frac{\lambda(1+\nu_1)}{E_1} b_1^{(1)} - \frac{\lambda(1+\nu_1)}{E_1} b_2^{(1)} + \frac{\nu_1-1}{E_1} b_3^{(1)}(\lambda) + \frac{\nu_1-1}{E_1} b_4^{(1)}(\lambda) - \frac{2\lambda\nu_1}{E_1} d_1^{(1)} \\ & \quad + \frac{2\lambda\nu_1}{E_1} d_2^{(1)} - \frac{\lambda(1+\nu_2)}{E_2} b_1^{(2)} + \frac{\lambda(1+\nu_2)}{E_2} b_2^{(2)} - \frac{(\nu_2-1)}{E_2} b_3^{(2)}(\lambda) \\ & \quad - \frac{(\nu_2-1)}{E_2} b_4^{(2)}(\lambda) + \frac{2\lambda\nu_2}{E_2} d_1^{(2)} - \frac{2\lambda\nu_2}{E_2} d_2^{(2)} \\ & \quad = \frac{2k_0^{(1)}(1+\nu_1)}{E_1} - \frac{2k_0^{(2)}(1+\nu_2)}{E_2}. \end{aligned} \tag{11}$$

Эта система распадается на две подсистемы:

$$\begin{aligned}
 e^{-\lambda}d_1^{(1)}(\lambda) + e^{\lambda}d_2^{(1)}(\lambda) &= f_3(\lambda), \\
 e^{\lambda}d_1^{(2)}(\lambda) + e^{-\lambda}d_2^{(2)}(\lambda) &= g_3(\lambda), \\
 k_2d_1^{(1)}(\lambda) + k_2d_2^{(1)}(\lambda) - k_1d_1^{(2)}(\lambda) - k_1d_2^{(2)}(\lambda) &= 0, \\
 d_1^{(1)}(\lambda) - d_2^{(1)}(\lambda) - d_1^{(2)}(\lambda) + d_2^{(2)}(\lambda) &= 0,
 \end{aligned} \tag{12}$$

и

$$\begin{aligned}
 e^{-\lambda}b_1^{(1)}(\lambda) + e^{\lambda}b_2^{(1)}(\lambda) - e^{-\lambda}b_3^{(1)}(\lambda) - e^{\lambda}b_4^{(1)}(\lambda) &= f_1(\lambda), \\
 e^{-\lambda}b_1^{(1)}(\lambda) - e^{\lambda}b_2^{(1)}(\lambda) + \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)e^{-\lambda}b_3^{(1)}(\lambda) + \left(\frac{1}{\lambda} + 1\right)e^{\lambda}b_4^{(1)}(\lambda) \\
 &= -if_2(\lambda) + \frac{k_0^{(1)}}{\lambda} + e^{-\lambda}d_1^{(1)}(\lambda) - e^{\lambda}d_2^{(1)}(\lambda), \\
 e^{\lambda}b_1^{(2)}(\lambda) + e^{-\lambda}b_2^{(2)}(\lambda) + e^{\lambda}b_3^{(2)}(\lambda) + e^{-\lambda}b_4^{(2)}(\lambda) &= g_1(\lambda), \\
 e^{\lambda}b_1^{(2)}(\lambda) - e^{-\lambda}b_2^{(2)}(\lambda) + \left(\frac{1}{\lambda} + 1\right)e^{\lambda}b_3^{(2)}(\lambda) + \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)e^{-\lambda}b_4^{(2)}(\lambda) \\
 &= -ig_2(\lambda) + \frac{k_0^{(2)}}{\lambda} + e^{\lambda}d_1^{(2)}(\lambda) - e^{-\lambda}d_2^{(2)}(\lambda), \\
 b_1^{(1)}(\lambda) + b_2^{(1)}(\lambda) - b_1^{(2)}(\lambda) - b_2^{(2)}(\lambda) &= 0,
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
 b_1^{(1)}(\lambda) - b_2^{(1)}(\lambda) + \frac{1}{\lambda}b_3^{(1)}(\lambda) + \frac{1}{\lambda}b_4^{(1)}(\lambda) - b_1^{(2)}(\lambda) + b_2^{(2)}(\lambda) \\
 - \frac{1}{\lambda}b_3^{(2)}(\lambda) - \frac{1}{\lambda}b_4^{(2)}(\lambda) = \frac{k_0^{(1)}}{\lambda} - \frac{k_0^{(2)}}{\lambda} + d_1^{(1)}(\lambda) - d_2^{(1)}(\lambda) - d_1^{(2)}(\lambda) + d_2^{(2)}(\lambda),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\lambda(1+\nu_1)}{E_1}b_1^{(1)} + \frac{\lambda(1+\nu_1)}{E_1}b_2^{(1)} + \frac{2}{E_1}b_3^{(1)}(\lambda) - \frac{2}{E_1}b_4^{(1)}(\lambda) - \frac{\lambda(1+\nu_2)}{E_2}b_1^{(2)} \\
 - \frac{\lambda(1+\nu_2)}{E_2}b_2^{(2)} - \frac{2}{E_2}b_3^{(2)}(\lambda) + \frac{2}{E_2}b_4^{(2)}(\lambda) = \frac{2\lambda}{E_1}d_1^{(1)} + \frac{2\lambda}{E_1}d_2^{(1)} - \frac{2\lambda}{E_2}d_1^{(2)} - \frac{2\lambda}{E_2}d_2^{(2)} = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\lambda(1+\nu_1)}{E_1}b_1^{(1)} - \frac{\lambda(1+\nu_1)}{E_1}b_2^{(1)} + \frac{\nu_1-1}{E_1}b_3^{(1)}(\lambda) + \frac{\nu_1-1}{E_1}b_4^{(1)}(\lambda) \\
 - \frac{\lambda(1+\nu_2)}{E_2}b_1^{(2)} + \frac{\lambda(1+\nu_2)}{E_2}b_2^{(2)} - \frac{(\nu_2-1)}{E_2}b_3^{(2)}(\lambda) - \frac{(\nu_2-1)}{E_2}b_4^{(2)}(\lambda) \\
 = \frac{2k_0^{(1)}(1+\nu_1)}{E_1} - \frac{2k_0^{(2)}(1+\nu_2)}{E_2} + \frac{2\lambda\nu_1}{E_1}d_1^{(1)} - \frac{2\lambda\nu_1}{E_1}d_2^{(1)} - \frac{2\lambda\nu_2}{E_2}d_1^{(2)} + \frac{2\lambda\nu_2}{E_2}d_2^{(2)}.
 \end{aligned}$$

Определитель каждой из них не обращается в 0 ни при каком $\lambda \neq 0$. Итак, справедлива

Теорема. Пусть функции $F_j, G_j, j = 1, 2, 3$, принадлежат классу Π_W , т. е. имеют вид

$$F_j = \sum_{\lambda \neq 0} f_j(\lambda) e^{i\lambda x}, \quad G_j = \sum_{\lambda \neq 0} g_j(\lambda) e^{i\lambda x},$$

причем множество $\{\lambda\}$ отделено от нуля. Тогда краевая задача (3)–(7) в области, представляющей собой две полосы $0 \leq y \leq 1, -1 \leq y \leq 0, -\infty < x < +\infty$, имеет единственное решение, представленное рядами (8), где $A_\lambda^{(m)}(y), B_\lambda^{(m)}(y), C_\lambda^{(m)}(y), D_\lambda^{(m)}(y)$ находятся по формулам (10), а коэффициенты $b_1^{(m)}(\lambda), b_2^{(m)}(\lambda), b_3^{(m)}(\lambda), b_4^{(m)}(\lambda), d_1^{(m)}(\lambda), d_2^{(m)}(\lambda), m = 1, 2$, по формулам (12), (13). Все полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно относительно x при условии, что сходится ряд $\sum \frac{1}{|\lambda|}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кулагина М. Ф. Построение почти-периодических решений линейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами // Изв. вузов. Математика. 2001. № 9. С. 38–42.
2. Кулагина М. Ф. О некоторых бесконечных системах с разностными индексами // Изв. вузов. Математика. 1992. № 3. С. 18–23.
3. Кулагина М. Ф. Об интегральных уравнениях в средних значениях в пространствах почти-периодических функций // Изв. вузов. Математика. 1993. № 8. С. 19–29.
4. Иванов Н. Н. Конструирование и расчет нежестких дорожных одежд. М.: Транспорт, 1973.
5. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.

Статья поступила 21 августа 2015 г.

Кулагина Марина Фокеевна, Микишанина Евгения Арифжановна
 Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова,
 пр. Московский 15, Чебоксары 428000
 kulagina_mf@mail.ru, evaeva_84@mail.ru