

О $\bar{\partial}\partial$ -УРАВНЕНИИ НА ПОЛОЖИТЕЛЬНОМ ПОТОКЕ

Т. Н. Никитина

Аннотация. Изучается индуцированное $\bar{\partial}\partial$ -уравнение на положительном потоке на комплексном многообразии. Показывается, что L^2 -оценки выполняются для $\bar{\partial}\partial$ -уравнения на замкнутом потоке бистепени $(1, 1)$ в псевдовыпуклой области из $\mathbb{C}^n$. Рассматриваются также потоки высшей бистепени.

Ключевые слова: $\bar{\partial}\partial$ -уравнение, положительный поток, дифференциальная форма, комплексное многообразие, примитивная форма, определенные квадратичные формы, дифференциальные операторы на потоке, теоремы существования для $\bar{\partial}\partial$ на замкнутых потоках, потоки высшей бистепени,

T. N. Nikitina. $\bar{\partial}\partial$ -Equation on a positive current.

Abstract: We study the induced $\bar{\partial}\partial$ -equation on a positive current in a complex manifold. We show that L^2 -estimates are satisfied for $\bar{\partial}\partial$ -equation on a positive closed current of bidegree $(1, 1)$ on a pseudoconvex domain in $\mathbb{C}^n$. We also discuss a currents of higher bidegree.

Keywords: $\bar{\partial}\partial$ -equation, positive current, differentiation form, complex manifold, primitive form, definite quadratic forms, differentiation operators on current, existence theorems for $\bar{\partial}\partial$ on closed current, currents of higher bidegree.

1. Введение

Пусть M — комплексное многообразие и T — положительный поток на M . Если u и f — гладкие дифференциальные формы на M , говорят, что

$$\bar{\partial}\partial u = f \text{ на } T, \text{ если } \bar{\partial}\partial u \wedge T = f \wedge T.$$

Первоначально $\bar{\partial}\partial$ -оператор, таким образом, определен только на гладких формах, но позже может быть продолжен (различными способами) на формы, которые определены только на T . В этой статье изучается вопрос: можно ли разрешить $\bar{\partial}\partial$ -уравнение на T , и если это так, какого рода оценки можно найти для решения?

Разрешимость $\bar{\partial}\partial$ -уравнений является классической (см. [1–8]). Аналогично можно также рассматривать гладкие $(1, 1)$ -потоки, которые строго положительны в подобласти D из M и обращаются в нуль вне D , что означает, что мы изучаем наше уравнение в D .

Пусть V — комплексное векторное пространство размерности n . (q, q) -Форма v строго положительна, если она принадлежит конусу, порожденному формами $i\alpha_1 \wedge \bar{\alpha}_1 \wedge \dots \wedge i\alpha_q \wedge \bar{\alpha}_q$, где $\alpha_j \in \Lambda^{1,0}(V^*)$.

Форма $u \in \Lambda^{p,p}(V^*)$ положительна тогда и только тогда, когда $u \wedge v$ положительна для каждой строго положительной формы v бистепени (q, q) с $q + p = n$.

На комплексном многообразии M дифференциальная форма $u \in C_{p,p}^\infty(M)$ строго положительна (соответственно положительно), если $u(z)$ для каждой $z \in M$ строго положительна (соответственно положительно) как элемент $\Lambda^{p,p}(T^*M)$.

Пространство $\mathcal{D}'_{(r,s)}(M)$ потоков биразмерности (r, s) на M по определению дуально пространству $\mathcal{D}_{(r,s)}(M)$ основных форм на M бистепени (r, s) относительно обычной топологии индуктивного предела на пространстве основных форм.

Поток T биразмерности (p, p) положителен (строго положителен), если $\langle T, u \rangle \geq 0$ для всех основных форм $u \in \mathcal{D}_{(p,p)}(M)$, которые строго положительны (положительны).

Пусть $c_q = (-1)^{q(q+1)/2} i^q = (-i)^{q^2}$.

Операторы ∂ и $\bar{\partial}$ действуют на потоках. Поток T замкнутый, если $dT = 0$.

2. Линейная алгебра и L^2 -пространства на потоках бистепени $(1, 1)$

Для $\bar{\partial}\partial$ -задачи на потоках высшей биразмерности сначала более детально обсудим линейную алгебру форм на потоке. Это нужно, чтобы развить версию тождеств Кэлера на потоке, которая будет позже использована в доказательстве априорной оценки Кодайры — Накано — Хермандера.

Начнем с обсуждения форм и потоков в фиксированной точке, т. е. рассмотрим T — неотрицательный элемент в $\Lambda^{1,1}(\mathbb{C}^{n+1})$, и формы $f \in \Lambda^{*,*}(\mathbb{C}^{n+1})$. Пространство (p, q) -форм на T , обозначаемое через $\Lambda_T^{p,q}$, определяется как пространство всех $f \in \Lambda^{p,q}(\mathbb{C}^{n+1})$ по модулю подпространства форм таких, что $f \wedge T = 0$. Чтобы избежать слишком обременительного обозначения, используем тот же самый символ для обозначения элемента из $\Lambda^{p,q}(\mathbb{C}^{n+1})$ и соответствующего элемента из $\Lambda_T^{p,q}$.

На многообразии пространство $(0, q)$ -форм есть внешняя алгебра пространства $(0, 1)$ -форм, но важно ясно понимать, что это не так в нашем случае [9].

В любом случае, чтобы определить нормы на Λ_T также нужна вспомогательная $(1, 1)$ -форма $\omega > 0$, которая будет определять метрику на T . Пусть $\omega_k = \omega^k/k!$.

Пусть σ_T — след T относительно ω , рассматриваемый как форма максимальной степени, т. е. $\sigma_T = T \wedge \omega_n$. Это означает, что $\sigma_T = \text{tr}(T)\omega_{n+1}$, где $\text{tr}(T)$ есть след, рассматриваемый как число.

Можно доказать (см., например, [10, с. 170]), что k -форма f на n -мерном многообразии примитивна тогда и только тогда, когда $k \leq n$ и $f \wedge \omega_{n-k+1} = 0$. Это условие имеет смысл на Λ_T .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. [9]. k -Форма f примитивна на T , если $k \leq n$ и $f \wedge \omega_{n-k+1} \wedge T = 0$.

Следующее предложение является решающим в доказательстве априорного неравенства для $\bar{\partial}\partial$ -оператора.

Пусть $e_1, \dots, e_{n+1}$ — базис для пространства $(1, 0)$ -форм в $\mathbb{C}^{n+1}$. Запишем $\gamma = \sum \gamma_{JK} e_J \wedge \bar{e}_K$ и разобьем γ на сумму $\tau + \sigma$, зависящую от того, J принад-

лежит K (τ -часть) или нет:

$$\begin{aligned} \gamma = & \sum_{j_1 \in K} e_{j_1} \cdots \sum_{j_p \in K} \gamma_{JK} e_{j_p} \wedge \bar{e}_K \\ & + \left(\sum_{r=1}^{p-1} \sum_{|M|=r} \sum_{j_1 \notin K} e_{j_1} \cdots \sum_{j_{m_1-1} \notin K} e_{j_{m_1-1}} \sum_{j_{m_1} \in K} e_{j_{m_1}} \sum_{j_{m_1+1} \notin K} e_{j_{m_1+1}} \right. \\ & \cdots \sum_{j_{m_r-1} \notin K} e_{j_{m_r-1}} \sum_{j_{m_r} \in K} e_{j_{m_r}} \sum_{j_{m_r+1} \notin K} e_{j_{m_r+1}} \cdots \sum_{j_p \notin K} \gamma_{JK} e_{j_p} \wedge \bar{e}_K \\ & \left. + \sum_{j_1 \notin K} e_{j_1} \cdots \sum_{j_p \notin K} \gamma_{JK} e_{j_p} \wedge \bar{e}_K \right) = \tau + \left(\sum_{r=1}^{p-1} \sigma_r + \sigma_0 \right) = \tau + \sigma. \end{aligned}$$

Предложение 1. Квадратичная форма

$$[\gamma, \gamma] \sigma_T = c_{q+p} \gamma \wedge \bar{\gamma} \wedge \omega_{n-q-p} \wedge T, \quad (1)$$

определенная на пространстве примитивных форм из $\Lambda_T^{p,q}$, разлагается на положительно определенные $[\sigma_r, \sigma_r] \sigma_T$, если $(-1)^{p+r} = -1$, и отрицательно определенные $[\tau, \tau] \sigma_T$, $[\sigma_r, \sigma_r] \sigma_T$, если $(-1)^{p+r} = 1$, формы, $1 \leq r \leq p-1$. (В случае $p=0$ форма $[\tau, \tau] \sigma_T$ является положительно определенной, при $p=2k+1$ форма $[\sigma_0, \sigma_0] \sigma_T$ является отрицательно, а при $p=2k$ — положительно определенной.)

Доказательство. Во-первых, выберем базис $e_1, \dots, e_{n+1}$ для пространства $(1, 0)$ -форм в $\mathbb{C}^{n+1}$, который диагонализует обе ω и T . Пусть $dV_j = ie_j \wedge \bar{e}_j$ и $dV_J = \bigwedge_J dV_j$. Тогда $\omega = \sum dV_j$, $T = \sum \lambda_j dV_j$ и

$$T \wedge \omega_{n-q-p+1} = \sum_{|K|=n-q-p+2} \lambda_K dV_K,$$

если положим $\lambda_J = \sum_J \lambda_j$.

Легко проверить, что

$$[\sigma, \sigma] = \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{t=0}^{p-1} [\sigma_r, \sigma_t] = \sum_{r=0}^{p-1} [\sigma_r, \sigma_r],$$

поскольку $[\sigma_r, \sigma_t] \sigma_T = 0$ при $r \neq t$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} [\sigma_r, \sigma_r] \sigma_T &= c_{q+p} \sum_{|K|=q-r} \sum_{|M|=r} \sum_{j_1 \notin K} e_{j_1} \cdots \sum_{j_p \notin K} \sigma_{JK}^r e_{j_p} [M] \wedge dV_{J_M} \wedge \bar{e}_K \\ &\wedge \sum_{|L|=q-r} \sum_{|P|=r} \sum_{s_1 \notin L} \bar{e}_{s_1} \cdots \sum_{s_p \notin L} \overline{\sigma_{SL}^r} \bar{e}_{s_p} [P] \wedge dV_{S_P} \wedge e_L \wedge \omega_{n-q-p} \wedge T \\ &= (-1)^{p+r} \sum_{|K|=q-r} \sum_{|M|=r} \sum_{|P|=r} \sum_{J_M \cap S_P = \emptyset} \sigma_{JK}^r \\ &\times \overline{\sigma_{(j_1, \dots, j_{m_1-1}, j_{m_1+1}, \dots, s_{p_1}, \dots, s_{p_r}, \dots, j_{m_r-1}, j_{m_r+1}, \dots, j_p)K}^r} \sum_{|L|=n-q-p+1} \lambda_L dV_{L \cup J \cup S_P \cup K}, \\ &1 \leq r \leq p-1, \end{aligned}$$

$$[\sigma_0, \sigma_0] \sigma_T = (-1)^p \sum |\gamma_{JK}|^2 \sum_{|L|=n-q-p+1} \lambda_L dV_{L \cup J \cup K}.$$

Здесь запись $(j_1, \dots, j_{m_1-1}, j_{m_1+1}, \dots, s_{p_1}, \dots, s_{p_r}, \dots, j_{m_r-1}, j_{m_r+1}, \dots, j_p)$ означает, что в индексе S выражение $S[P] = (s_1, \dots, s_{p_1-1}, s_{p_1+1}, \dots, s_{p_r-1}, s_{p_r+1}, \dots, s_p)$ заменено на $J[M]$.

Условие, что σ_r , $r \geq 1$, примитивна (σ_0 всегда примитивна, поскольку

$$\begin{aligned} \sum_{j_1 \notin K} e_{j_1} \dots \sum_{j_p \notin K} \gamma_{JK} e_{j_p} \wedge \bar{e}_K \wedge \omega_{n-q-p+1} \wedge T \\ = \sum_{j_1 \notin K} e_{j_1} \dots \sum_{j_p \notin K} \gamma_{JK} e_{j_p} \wedge \bar{e}_K \wedge \sum_{|L|=n-q-p+2} \lambda_L dV_L = 0) \end{aligned}$$

означает, что

$$\begin{aligned} \sigma_r \wedge \omega_{n-q-p+1} \wedge T = \sum_{|K|=q-r} \sum_{|M|=r} \sum_{|L|=n-q-p+2} \sum_{j_1 \notin K} e_{j_1} \dots \sum_{j_p \notin K} \sigma_{JK}^r \\ \times \lambda_L e_{j_p}[M] \wedge dV_{J_M \cup L} \wedge \bar{e}_K = 0. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} [\sigma_r, \sigma_r] = (-1)^{p+r} \sum_{|K|=q-r} \sum_{|M|=r} \sum_{|P|=r} \sum_{J_M \cap L_P = \emptyset} \sigma_{JK}^r \\ \times \sigma_{(j_1, \dots, j_{m_1-1}, j_{m_1+1}, \dots, l_{p_1}, \dots, l_{p_r}, \dots, j_{m_r-1}, j_{m_r+1}, \dots, j_p)K}^r \lambda_{(J \cup L_P \cup K)^c}, \quad 1 \leq r \leq p-1, \\ [\sigma_0, \sigma_0] = (-1)^p \sum |\gamma_{JK}|^2 \lambda_{(J \cup K)^c}. \end{aligned}$$

Фиксируем K , $j_1, \dots, j_{m_1-1}, j_{m_1+1}, \dots, j_{m_r-1}, j_{m_r+1}, \dots, j_p$ и переименуем оставшиеся индексы $1, \dots, N$. Положим

$$\hat{\lambda}_{J_M} = \sum_1^N \lambda_i - (\lambda_{j_{m_1}} + \dots + \lambda_{j_{m_r}}) = \sum_1^N \lambda_i - \lambda_{J_M}$$

и

$$\hat{\lambda}_{J_M L_P} = \sum_1^N \lambda_i - \lambda_{J_M} - \lambda_{L_P}.$$

Можно доказать, что

$$\text{если } \sum \sigma_{J_M}^r \hat{\lambda}_{J_M} = 0, \text{ то } \sum_{J_M \cap L_P = \emptyset} \sigma_{J_M}^r \sigma_{L_P}^{\bar{r}} \hat{\lambda}_{J_M L_P} \leq 0.$$

Имеем

$$[\tau, \sigma] = \sum_{r=0}^{p-1} [\tau, \sigma_r] = 0,$$

поскольку

$$\begin{aligned} [\tau, \sigma_r] \sigma_T = c_{q+p} \sum_{|K|=q-p} \tau_{JK} dV_J \wedge \bar{e}_K \\ \wedge \sum_{|P|=r} \sum_{s_1 \notin L} \bar{e}_{s_1} \dots \sum_{s_{p_1-1} \notin L} \bar{e}_{s_{p_1-1}} \sum_{s_{p_1} \in L} \bar{e}_{s_{p_1}} \sum_{s_{p_1+1} \notin L} \bar{e}_{s_{p_1+1}} \\ \dots \sum_{s_{p_r-1} \notin L} \bar{e}_{s_{p_r-1}} \sum_{s_{p_r} \in L} \bar{e}_{s_{p_r}} \sum_{s_{p_r+1} \notin L} \bar{e}_{s_{p_r+1}} \dots \sum_{s_p \notin L} \bar{\gamma}_{SL} \bar{e}_{s_p} \wedge e_L \wedge \omega_{n-q-p} \wedge T = 0. \end{aligned}$$

Условие примитивности τ означает, что

$$\tau \wedge \omega_{n-q-p+1} \wedge T = \sum_{|K|=q-p} \sum_{|L|=n-q-p+2} \tau_{JK} \lambda_L dV_{J \cup L} \wedge \bar{e}_K = 0,$$

и

$$[\tau, \tau] \sigma_T = \sum_{|K|=q-p} \sum_{J \cap S = \emptyset} \tau_{JK} \bar{\tau}_{SK} \sum_{|L|=n-q-p+1} \lambda_L dV_{L \cup J \cup S \cup K}.$$

Отсюда

$$[\tau, \tau] = \sum_{|K|=q-p} \sum_{J \cap L = \emptyset} \tau_{JK} \bar{\tau}_{LK} \lambda_{(J \cup L \cup K)^c}.$$

Фиксируем K и переименуем оставшиеся индексы $1, \dots, N$. Положим

$$\hat{\lambda}_J = \sum_1^N \lambda_i - (\lambda_{j_1} + \dots + \lambda_{j_p}) = \sum_1^N \lambda_i - \lambda_J$$

и

$$\hat{\lambda}_{JL} = \sum_1^N \lambda_i - \lambda_J - \lambda_L.$$

Можно доказать, что если $\sum \tau_J \hat{\lambda}_J = 0$, то $\sum_{J \cap L = \emptyset} \tau_J \bar{\tau}_L \hat{\lambda}_{JL} \leq 0$. $\square$

Предложение 5.7 в [9] является частным случаем предложения 1 при $p = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $f \in \Lambda^{p,q}(\mathbb{C}^{n+1})$. Норма f на T определяется как

$$|f|_{\omega, T}^2 \sigma_T = c_{q+p} f \wedge \bar{f} \wedge \omega_{n-q-p} \wedge T, \quad (2)$$

где

$$\hat{f} = f_0 \wedge \omega^p + \sum_{k=1}^p \hat{f}_k \wedge \omega^{p-k},$$

а $f_k \in \Lambda_T^{k, q-p+k}$ — примитивные формы,

$$\hat{f}_k = -\tau^k - \sum_{r=1}^{k-1} (-1)^{k+r} \sigma_r^k + (-1)^k \sigma_0^k.$$

Напомним, что норма f в $\mathbb{C}^{n+1}$, измеримая в ω -метрике, определяется как

$$|f|_{\omega}^2 \omega_{n+1} = c_{q+p} f \wedge \bar{f} \wedge \omega_{n-q-p+1},$$

поэтому $(n+1)|f|_{\omega, \omega}^2 = (n-q-p+1)|f|_{\omega}^2$ в случае $T = \omega$. В общем, поскольку $T \leq \text{tr}(T)\omega$, получим $|f|_{\omega, T}^2 \leq (n-q-p+1)|f|_{\omega}^2$. Наконец, поляризацией получим скалярное произведение такое, что

$$(f, f)_{\omega, T} = |f|_{\omega, T}^2,$$

и будем в дальнейшем не упоминать зависимость от ω и T .

Нормы и скалярные произведения на $\Lambda_T^{q,p}$ определяются, конечно, аналогичным способом, так что $(f, g) = (\bar{f}, \bar{g})$. В частности, если $f, g \in \Lambda_T^{q,p}$, то

$$(f, g) \sigma_T = \bar{c}_{q+p} f \wedge \bar{g} \wedge \omega_{n-q-p} \wedge T.$$

Далее определим нормы на $\Lambda_T^{n-p,q}$. Для этого заметим, что любая $f \in \Lambda_T^{n-p,q}$ определяет линейную форму $L_f(g)\sigma_T = g \wedge f \wedge T$ на $\Lambda_T^{p,n-q}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Если $f \in \Lambda_T^{n-p,q}$

$$|f|_{\omega,T} = \|L_f\| = \sup_{|g|_{\omega,T} \leq 1} |L_f(g)|.$$

Эквивалентно L_f можно представить как скалярное произведение с элементом $f' \in \Lambda_T^{p,n-q}$, так что

$$g \wedge f \wedge T = L_f(g)\sigma_T = (g, f')\sigma_T = c_{n-q+p}g \wedge \overline{\widehat{f'}} \wedge \omega_{q-p} \wedge T. \quad (3)$$

Тогда $|f|_{\omega,T} = |f'|_{\omega,T}$.

Напомним, что на кэлеровом (или римановом) многообразии $*$ -оператор Ходжа определяется так: $h \wedge \overline{*g} = (h, g)dV$, если h и g являются k -формами и dV — элемент объема. Аналогично определим $*$ -оператор $*$: $\Lambda_T^{n-q,p} \rightarrow \Lambda_T^{n-p,q}$, полагая

$$h \wedge \overline{*g} \wedge T = (h, g)\sigma_T. \quad (4)$$

Поскольку

$$(h, g)\sigma_T = \overline{c_{n-q+p}}h \wedge \widehat{\overline{g}} \wedge \omega_{q-p} \wedge T,$$

это означает, что $*g = c_{n-q+p}\widehat{\overline{g}} \wedge \omega_{q-p}$ на $\Lambda_T^{n-q,p}$.

Точно таким же образом (4) определяет $*$: $\Lambda_T^{n-p,q} \rightarrow \Lambda_T^{n-q,p}$. Поскольку тогда скалярное произведение определяется как $(h, g) = (\tilde{h}, \tilde{g})$, найдем

$$h \wedge \overline{*g} \wedge T = \overline{c_{n-q+p}}\tilde{h} \wedge \widehat{\tilde{g}} \wedge \omega_{q-p} \wedge T = \overline{c_{n-q+p}}h \wedge \widehat{\tilde{g}} \wedge T,$$

поэтому $*g = c_{n-q+p}\widehat{\tilde{g}}$ на $\Lambda_T^{n-p,q}$.

Следующее предложение связано с изоморфизмом Лефшеца в $\mathbb{C}^{n+1}$ и будет иметь решающее значение, когда мы позже аппроксимируем общие потоки гладкими формами.

Предложение 2. Пусть $T \in \Lambda^{1,1}(\mathbb{C}^{n+1})$ является строго положительным и пусть $F \in \Lambda^{n-p+1,q+1}(\mathbb{C}^{n+1})$, $0 \leq p \leq q \leq n$. Тогда существует единственная форма $\tilde{F} \in \Lambda^{n-q,p}(\mathbb{C}^{n+1})$ такая, что

$$F = \tilde{F} \wedge \omega_{q-p} \wedge T.$$

В частности, F может быть записана в виде $F = f \wedge T$ с $f \in \Lambda^{n-p,q}(\mathbb{C}^{n+1})$.

Предложение 5.4 из [9] есть частный случай предложения 2 при $p = 0$.

Предложение 3. Пусть $f \in \Lambda_T^{q,p}$. Тогда существуют однозначно определенные примитивные формы $f_0 \in \Lambda_T^{q-p,0}$, $f_1 \in \Lambda_T^{q-p+1,1}$, $\dots$, $f_p \in \Lambda_T^{q,p}$ такие, что

$$f = \sum_{k=0}^p f_k \wedge \omega^{p-k}. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится методом математической индукции по p . $\square$

Предложение 5.6 из [9] есть частный случай предложения 3 при $p = 1$.

Аналогично, конечно, имеем примитивное разложение (p, q) -форм.

Следующее предложение говорит, что на самом деле получена норма форм на T .

Предложение 4. Предположим, что $\gamma \in \Lambda^{p,q}(\mathbb{C}^{n+1})$ и $|\gamma|_{\omega,T}^2 = 0$. Тогда $\gamma \wedge T = 0$.

Предложение 5.2 из [9] есть частный случай предложения 4 при $p = 0$.

Пусть теперь $T \geq 0 - (1,1)$ -поток в $\mathbb{C}^{n+1}$. Такой поток может быть записан в виде

$$T = i \sum T_{j\bar{k}} dz_j \wedge d\bar{z}_k,$$

где коэффициенты являются мерами, абсолютно непрерывными относительно меры следа $\sigma_T = T \wedge \omega_n$. Пусть $\text{tr}(T)$ есть $(0,0)$ -поток определенный как $\text{tr}(T)\omega_{n+1} = \sigma_T$. Тогда T может быть записан в виде $T = \tilde{T} \text{tr}(T)$, где $\tilde{T}$ — форма с коэффициентами, определенными почти всюду относительно σ_T . Так как коэффициенты $\tilde{T}$ образуют полуопределенную матрицу со следом равным единице по неравенству Коши следует, что

$$T = i \sum \tilde{T}_{j\bar{k}} dz_j \wedge d\bar{z}_k \text{tr}(T),$$

где $|\tilde{T}_{j\bar{k}}| \leq 1$.

Если f — гладкая или только непрерывная (p,q) -форма в $\mathbb{C}^{n+1}$, определим L^2 -норму f на T :

$$\|f\|_{\omega,T}^2 = \int |f|_{\omega,\tilde{T}}^2 \sigma_T. \quad (6)$$

Равенство (6) означает, что

$$\|f\|_{\omega,T}^2 = c_{p+q} \int f \wedge \bar{f} \wedge \omega_{n-p-q} \wedge T,$$

так как

$$c_{p+q} f \wedge \bar{f} \wedge \omega_{n-p-q} \wedge T = c_{p+q} f \wedge \bar{f} \wedge \omega_{n-p-q} \wedge \tilde{T} \text{tr}(T) = |f|_{\omega,\tilde{T}}^2 \sigma_T,$$

и $\text{tr}(\tilde{T}) = 1$.

Определим L^2 -пространства (p,q) -форм на T , обозначаемое через $L_{p,q}^2(T)$, как пополнение гладких (p,q) -форм относительно L^2 -норм. Таким образом, гладкие формы по определению плотны в L^2 -пространствах.

Если, наконец, φ — борелевская весовая функция, определим $L_{p,q}^2(T, e^{-\varphi})$ как пространство тех $f \in L_{p,q,\text{loc}}^2$, которые удовлетворяют

$$\|f\|_{\omega,T,\varphi}^2 = \int |f|_{\omega,\tilde{T}}^2 e^{-\varphi} \sigma_T < \infty.$$

3. Дифференциальные операторы на T

Предположим, что T является замкнутым.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Для $u \in L_{p,q,\text{loc}}^2(T)$ говорят, что $\bar{\partial}\partial_w u = f$ на T , если $f \in L_{p+1,q+1,\text{loc}}^2(T)$ и $\bar{\partial}\partial(u \wedge T) = f \wedge T$ в смысле потоков.

Сильное продолжение оператора $\bar{\partial}\partial$ определяется следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Если $u \in L_{p,q,\text{loc}}^2(T)$ и $f \in L_{p+1,q+1,\text{loc}}^2(T)$, говорят, что $\bar{\partial}\partial_s u = f$, если существует последовательность гладких (класса C^2) (p,q) -форм u_n такая, что $u_n \rightarrow u$ в $L_{\text{loc}}^2(T)$ и $\bar{\partial}\partial u_n \rightarrow f$ в $L_{\text{loc}}^2(T)$.

Пусть теперь φ — борелевская измеримая весовая функция. Тогда получим замкнутые плотно определенные операторы $\bar{\partial}\partial_w$ и $\bar{\partial}\partial_s$ на $L^2_{p,q}(T, e^{-\varphi})$ с областями, состоящими из всех u таких, что $\|\bar{\partial}\partial u\|_{T,\varphi} < \infty$ с $\bar{\partial}\partial = \bar{\partial}\partial_w$ или $\bar{\partial}\partial_s$.

Далее определим формальные сопряженные. Если f — (p, q) -форма такая, что $*f$ является гладкой, положим $\vartheta f = \varepsilon_{p,q} * \partial * f$, где $\varepsilon_{p,q}$ выбрано так, что

$$(g, \vartheta f)_{\omega, T} = (\bar{\partial}_w g, f)_{\omega, T}, \quad (7)$$

если f имеет компактный носитель. Если φ — весовая функция, положим $\vartheta_\varphi = e^\varphi \vartheta e^{-\varphi}$, так что $(g, \vartheta_\varphi f)_{\omega, T, \varphi} = (\bar{\partial}_w g, f)_{\omega, T, \varphi}$.

4. Априорные оценки для оператора $\bar{\partial}\partial$

Основной технический результат этого параграфа — следующее обобщение тождества Кодаиры — Накано — Хермандера. В формулировке результата используем обозначение $\partial_{-\varphi} = e^{-\varphi} \partial e^\varphi$ для искривленного $\bar{\partial}$ -оператора.

Теорема 1. Пусть $T \geq 0$ — $(1, 1)$ -поток в области D из $\mathbb{C}^{n+1}$ такой, что $i\bar{\partial}\partial T$ имеет измеримые коэффициенты. Пусть ω — кэлера форма в D . Пусть, наконец, g — основная форма бистепени (p, q) с носителем в D , и предположим, что $\varphi \in C^2(D)$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int c_{p+q+1} \partial g \wedge \overline{\partial g} \wedge i\bar{\partial}\partial\varphi \wedge \omega_{n-p-q-2} \wedge T e^\varphi \\ & - \int c_{p+q+1} \partial g \wedge \overline{\partial g} \wedge \omega_{n-p-q-2} \wedge i\bar{\partial}\partial T e^\varphi \\ & + c_{p+q+2} \int \bar{\partial}\partial g \wedge \overline{\bar{\partial}\partial g} \wedge \omega_{n-p-q-2} \wedge T e^\varphi \\ & - c_{p+q+2} \int (\partial_{-\varphi} \partial g)_{p+2} \wedge \overline{(\partial_{-\varphi} \partial g)_{p+2}} \wedge \omega_{n-p-q-2} \wedge T e^\varphi \\ & - c_{p+q} \int \widehat{\vartheta_{-\varphi} \partial g} \wedge \overline{\widehat{\vartheta_{-\varphi} \partial g}} \wedge \omega_{n-p-q} \wedge T e^\varphi \\ & = (\vartheta_{-\varphi} \widehat{\bar{\partial}\partial g}, \widehat{\partial g})_{\omega, T, -\varphi} + \overline{(\vartheta_{-\varphi} \widehat{\bar{\partial}\partial g}, \partial g)_{\omega, T, -\varphi}}. \quad (8) \end{aligned}$$

В частности, если $i\bar{\partial}\partial T$ — строго отрицательный и $i\bar{\partial}\partial\varphi \geq \omega$, имеем

$$\begin{aligned} & (n-p-q-1)\|\partial g\|^2 + c_{p+q+2} \int \bar{\partial}\partial g \wedge \overline{\bar{\partial}\partial g} \wedge \omega_{n-p-q-2} \wedge T e^\varphi \\ & - c_{p+q+2} \int (\partial_{-\varphi} \partial g)_{p+2} \wedge \overline{(\partial_{-\varphi} \partial g)_{p+2}} \wedge \omega_{n-p-q-2} \wedge T e^\varphi \\ & - c_{p+q} \int \widehat{\vartheta_{-\varphi} \partial g} \wedge \overline{\widehat{\vartheta_{-\varphi} \partial g}} \wedge \omega_{n-p-q} \wedge T e^\varphi \\ & \leq (\vartheta_{-\varphi} \widehat{\bar{\partial}\partial g}, \widehat{\partial g}) + \overline{(\vartheta_{-\varphi} \widehat{\bar{\partial}\partial g}, \partial g)}. \quad (9) \end{aligned}$$

Если, более того, $dT = 0$, то

$$\begin{aligned} & (n-p-q-1)\|\partial g\|^2 - c_{p+q+2} \int (\partial_{-\varphi} \partial g)_{p+2} \wedge \overline{(\partial_{-\varphi} \partial g)_{p+2}} \wedge \omega_{n-p-q-2} \wedge T e^\varphi \\ & - c_{p+q} \int \widehat{\vartheta_{-\varphi} \partial g} \wedge \overline{\widehat{\vartheta_{-\varphi} \partial g}} \wedge \omega_{n-p-q} \wedge T e^\varphi \leq (\widehat{\bar{\partial}\partial g}, \widehat{\bar{\partial}\partial g}). \quad (10) \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что (9) и (10) следуют из (8), поскольку

$$(\bar{\partial}\partial g, \widehat{\bar{\partial}\partial g}) = \overline{(\bar{\partial}\partial g, \bar{\partial}\partial g)}.$$

Чтобы доказать (8), следуем методу Бохнера — Кодайры [11]. $\square$

Теорема 1 имеет дубликат для форм бистепени $(n-p, q)$.

Теорема 2. *С обозначением и предположениями, как в теореме 1, пусть f — основная форма бистепени $(n-p, q)$ с носителем в D такая, что $*f$ гладкая (класса C^2). Если $i\bar{\partial}\partial T \leq 0$ и $i\bar{\partial}\partial\varphi \geq \omega$ и $dT = 0$, то*

$$\begin{aligned} (q-p-1)\|\partial_\varphi \overline{*f}\|^2 - c_{n-q+p+2} \int (\partial\partial_\varphi \overline{*f})_{p+2} \wedge \overline{(\partial\partial_\varphi \overline{*f})_{p+2}} \wedge \omega_{q-p-2} \wedge T e^{-\varphi} \\ - c_{n-q+p} \int \widehat{\partial\partial_\varphi \overline{*f}} \wedge \overline{\widehat{\partial\partial_\varphi \overline{*f}}} \wedge \omega_{q-p} \wedge T e^{-\varphi} \leq (\widehat{\partial_\varphi \partial_\varphi \overline{*f}}, \bar{\partial}_\varphi \widehat{\partial_\varphi \overline{*f}}). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно применить теорему 1 к $g = \overline{*f}e^{-\varphi}$. $\square$

5. Теоремы существования для $\bar{\partial}\partial$ на замкнутых потоках бистепени $(1, 1)$

Теорема 3. *Пусть $T \geq 0$ — замкнутый $(1, 1)$ -поток в $\mathbb{C}^{n+1}$, и пусть $\omega = i\bar{\partial}\partial|z|^2$ — кэлерава форма евклидовой метрики в $\mathbb{C}^{n+1}$. Пусть φ — плюрисубгармоническая функция в $\mathbb{C}^{n+1}$, удовлетворяющая $i\bar{\partial}\partial\varphi \geq \omega$. Тогда для любой $\bar{\partial}_w$ -замкнутой $(n-p, q)$ -формы f на T с $q-p-1 \geq 1$ существует $(n-p-1, q-1)$ -форма u на T такая, что $\bar{\partial}\partial_w u = f$ на T и*

$$\int |\partial u|_{\omega, T}^2 \sigma_T e^{-\varphi} \leq \frac{1}{q-p-1} \int |f|_{\omega, T}^2 \sigma_T e^{-\varphi}.$$

Сначала докажем теорему, предполагая, что T — гладкий и строго положительный, а затем получим общую теорему из аппроксимации T такими потоками $T_{(\varepsilon)}$. После этого нужно аппроксимировать нашу форму f , определенную только на T , глобальными формами, которые являются замкнутыми на $T_{(\varepsilon)}$. Это оказывается удивительно легко: вместо регуляризации T и f отдельно регуляризируем произведение $f \wedge T$ и затем используем предложение 2, чтобы записать $(f \wedge T)_\varepsilon = f_{(\varepsilon)} \wedge T_{(\varepsilon)}$.

Для этого выберем неотрицательную основную функцию χ , сосредоточенную в единичном шаре, такую, что $\int \chi = 1$, и пусть $\chi_\varepsilon(z) = \varepsilon^{-2n} \chi(z/\varepsilon)$. Для любой формы или потока α обозначим через α_ε свертку $\alpha * \chi_\varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Предположим сначала, что T — строго положительный и T, φ гладкие. Для доказательства теоремы нужно показать, что

$$|(f, \bar{\partial}_\varphi \alpha)|^2 \leq \frac{1}{q-p-1} \|\partial_\varphi \bar{\partial}_\varphi * \alpha\|^2 = \frac{1}{q-p-1} \|\vartheta_\varphi \bar{\partial}_\varphi \alpha\|^2, \quad (11)$$

если α — основная форма бистепени $(n-p+1, q)$ и нормируем так, что $\|f\|^2 = 1$. (Если (11) выполнено, из теоремы о представлении Рисса следует, что можно найти форму u на T такую, что

$$(f, \bar{\partial}_\varphi \alpha) = (\partial_w u, \vartheta_\varphi \bar{\partial}_\varphi \alpha) \text{ и } \|\partial_w u\| \leq \frac{1}{q-p-1}.$$

Тогда $\bar{\partial}\partial_w u = f$ и все доказано.)

Доказательство (11) проводится стандартным способом.

Также имеем версии теоремы 3 для псевдовыпуклой области в $\mathbb{C}^{n+1}$ и общих кэлеровых метрик. Далее имеем версии этих теорем для некоторых компактных кэлеровых многообразий.

6. Потоки высшей бистепени

Решающую часть в доказательствах играло предложение 1, согласно которому квадратичная форма, определенная как

$$[\gamma, \hat{\gamma}]\sigma_T = c_{q+p}\gamma \wedge \bar{\gamma} \wedge T \wedge \omega_{n-q-p},$$

является определенной на пространстве (q, p) -форм на T , удовлетворяющих $\gamma \wedge \omega_{n-p-q+1} \wedge T = 0$ (т. е. «примитивных» форм).

Это неверно для $(2, 2)$ -потоков, даже если они являются строго положительными [9].

Пусть T — (s, s) -форма

$$T = \sum_{l=0}^1 dV_{sl+1, sl+2, \dots, s(l+1)}$$

в $\mathbb{C}^{2s}$ (где $dV_{jk} = dV_j \wedge dV_k$, $dV_j = idz_j \wedge d\bar{z}_j$).

Легко заметить, что локальная разрешимость для $\bar{\partial}\partial u$ на $(s, s-1)$ -формах не имеет места при таком выборе T . Возьмем

$$f = \sum_j \sum_{k_1 < k_2 < \dots < k_{s-1}} f_j^{k_1 k_2 \dots k_{s-1}} dz_j \wedge dV_{k_1 k_2 \dots k_{s-1}},$$

так что

$$f \wedge T = \sum_j \sum_{k_1 < k_2 < \dots < k_{s-1}} \sum_{l=0}^1 f_j^{k_1 k_2 \dots k_{s-1}} dz_j \wedge dV_{k_1 k_2 \dots k_{s-1}, sl+1, sl+2, \dots, s(l+1)}.$$

Тогда $\bar{\partial}f \wedge T = 0$ означает, что

$$\sum \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_j} = 0, \quad (12)$$

где $f_j = \sum_{k_1 < k_2 < \dots < k_{s-1}} f_j^{k_1 k_2 \dots k_{s-1}}$.

Если $f \wedge T = \bar{\partial}\partial u \wedge T$, для $(s-1, s-2)$ -формы u можно записать

$$u = \sum_{j=1}^{2s} \sum_{k_1 < \dots < k_{s-2}} u_j^{k_1 \dots k_{s-2}} dz_j \wedge dV_{k_1 \dots k_{s-2}}.$$

Тогда

$$u \wedge T = \sum_{j=1}^{2s} \sum_{k_1 < \dots < k_{s-2}} \sum_{l=0}^1 u_j^{k_1 \dots k_{s-2}} dz_j \wedge dV_{k_1 \dots k_{s-2}, sl+1, sl+2, \dots, s(l+1)},$$

и можно показать, что

$$\bar{\partial}\partial u \wedge T = \sum_{j=1}^{2s} \sum_{k_1 < \dots < k_{s-2}} \sum_{k_{s-1}}^1 \sum_{l=0}^1 i \left(\frac{\partial^2 u_j^{k_1 \dots k_{s-2}}}{\partial \bar{z}_{k_{s-1}} \partial z_{k_{s-1}}} - \frac{\partial^2 u_{k_{s-1}}^{k_1 \dots k_{s-2}}}{\partial \bar{z}_{k_{s-1}} \partial z_j} \right) \times dz_j \wedge dV_{k_1 \dots k_{s-1}, s(l+1), \dots, s(l+1)},$$

поэтому уравнение $\bar{\partial}\partial u \wedge T = f \wedge T$ разлагается на

$$\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_{s-1} \leq s} \sum_{k_{s-1}=1}^s i \left(\frac{\partial^2 u_j^{k_1 \dots k_{s-2}}}{\partial \bar{z}_{k_{s-1}} \partial z_{k_{s-1}}} - \frac{\partial^2 u_{k_{s-1}}^{k_1 \dots k_{s-2}}}{\partial \bar{z}_{k_{s-1}} \partial z_j} \right) = f_j, \quad 1 \leq j \leq s,$$

и аналогичную систему для $u_{s+1}^{k_1 \dots k_{s-2}}, u_{s+2}^{k_1 \dots k_{s-2}}, \dots, u_{2s}^{k_1 \dots k_{s-2}}, s+1 \leq k_1 < \dots < k_{s-2} \leq 2s, s+1 \leq k_{s-1} \leq 2s$. Она разрешима, только если

$$\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}_1} + \frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}_2} + \dots + \frac{\partial f_s}{\partial \bar{z}_s} = 0, \quad (13)$$

что не предполагается (12).

Пусть T — (s, s) -форма

$$T = \sum_{k_s < k_{s+1} < \dots < k_{2s-1}} dV_{k_s k_{s+1} \dots k_{2s-1}}$$

в $\mathbb{C}^{2s}$. Легко заметить, что локальная разрешимость для $\bar{\partial}\partial u$ на $(s, s-1)$ -формах имеет место для этого выбора T . Имеем

$$f \wedge T = \sum f_j dz_j \wedge d\hat{V}_j,$$

где $f_j = \sum_{k_1 < \dots < k_{s-1}} f_j^{k_1 \dots k_{s-1}}$. Тогда $\bar{\partial}f \wedge T = 0$ означает, что

$$\sum \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_j} = 0. \quad (14)$$

Если $f \wedge T = \bar{\partial}\partial u \wedge T$, то

$$u \wedge T = \sum_{j=1}^{2s} \sum_{k_1 < \dots < k_{s-2}} \sum_{k_s < \dots < k_{2s-1}} u_j^{k_1 \dots k_{s-2}} dz_j \wedge dV_{k_1 \dots k_{s-2} k_s \dots k_{2s-1}},$$

и можно показать, что

$$\bar{\partial}\partial u \wedge T = \sum_{j=1}^{2s} \sum_{k_1 < \dots < k_{s-2}} \sum_{k_{s-1}} \sum_{k_s < \dots < k_{2s-1}} i \left(\frac{\partial^2 u_j^{k_1 \dots k_{s-2}}}{\partial \bar{z}_{k_{s-1}} \partial z_{k_{s-1}}} - \frac{\partial^2 u_{k_{s-1}}^{k_1 \dots k_{s-2}}}{\partial \bar{z}_{k_{s-1}} \partial z_j} \right) dz_j \wedge dV_{k_1 \dots k_{2s-1}},$$

поэтому уравнение $\bar{\partial}\partial u \wedge T = f \wedge T$ разлагается в систему

$$\sum_{k_1 < \dots < k_{s-2}} \sum_{k_{s-1}} \sum_{k_s < \dots < k_{2s-1}} i \left(\frac{\partial^2 u_j^{k_1 \dots k_{s-2}}}{\partial \bar{z}_{k_{s-1}} \partial z_{k_{s-1}}} - \frac{\partial^2 u_{k_{s-1}}^{k_1 \dots k_{s-2}}}{\partial \bar{z}_{k_{s-1}} \partial z_j} \right) = f_j, \quad 1 \leq j \leq 2s.$$

Она разрешима, только если

$$\sum \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_j} = \sum_j \sum_{k_1 < \dots < k_{s-2}} \sum_{k_{s-1}} \sum_{k_s < \dots < k_{2s-1}} i \left(\frac{\partial^3 u_j^{k_1 \dots k_{s-2}}}{\partial \bar{z}_{k_{s-1}} \partial z_{k_{s-1}} \partial \bar{z}_j} - \frac{\partial^3 u_{k_{s-1}}^{k_1 \dots k_{s-2}}}{\partial \bar{z}_{k_{s-1}} \partial z_j \partial \bar{z}_j} \right) = 0, \quad (15)$$

что предполагается (14).

Пусть T — (s, s) -форма $\sum_{j=0}^1 dV_{sj+1, sj+2, \dots, s(j+1)}$ в $\mathbb{C}^{2s}$. Раз T биразмерности (s, s) , примитивная 2-форма должна удовлетворять

$$\gamma \wedge \omega^{s-1} \wedge T = 0. \quad (16)$$

Возьмем, в частности, $\gamma = \sum_{j=1}^{2s} \gamma_j dV_j$. Тогда

$$\gamma \wedge \omega = \sum_{j < k} \gamma_{jk} dV_{jk}, \text{ где } \gamma_{jk} = \gamma_j + \gamma_k,$$

$\vdots$

$$\gamma \wedge \omega^{s-1} = (s-1)! \sum_{j < k_1 < \dots < k_{s-1}} \gamma_{jk_1 \dots k_{s-1}} dV_{jk_1 \dots k_{s-1}},$$

где $\gamma_{jk_1 \dots k_{s-1}} = \gamma_j + \gamma_{k_1} + \dots + \gamma_{k_{s-1}}$, (доказывается методом математической индукции), поэтому равенство (16) точно означает, что $(s-1)! \sum_1^{2s} \gamma_j = 0$.

С другой стороны

$$\gamma \wedge \bar{\gamma} = 2 \operatorname{Re} \sum_{j < k} \gamma_j \bar{\gamma}_k dV_{jk},$$

поэтому

$$\gamma \wedge \bar{\gamma} \wedge \omega = 2 \operatorname{Re} \sum_{j < k_1 < k_2} (\gamma_j (\bar{\gamma}_{k_1} + \bar{\gamma}_{k_2}) + \gamma_{k_1} \bar{\gamma}_{k_2}) dV_{jk_1 k_2},$$

$\vdots$

$$\begin{aligned} \gamma \wedge \bar{\gamma} \wedge \omega^{s-2} &= (s-2)! 2 \operatorname{Re} \sum_{j < k_1 < k_2 < \dots < k_{s-1}} (\gamma_j (\bar{\gamma}_{k_1} + \dots + \bar{\gamma}_{k_{s-1}}) \\ &+ \gamma_{k_1} (\bar{\gamma}_{k_2} + \dots + \bar{\gamma}_{k_{s-1}}) + \dots + \gamma_{k_{s-3}} (\bar{\gamma}_{k_{s-2}} + \bar{\gamma}_{k_{s-1}}) + \gamma_{k_{s-2}} \bar{\gamma}_{k_{s-1}}) dV_{jk_1 k_2 \dots k_{s-1}} \end{aligned}$$

(доказывается методом математической индукции),

$$\begin{aligned} \gamma \wedge \bar{\gamma} \wedge \omega^{s-2} \wedge T &= (s-2)! 2 \operatorname{Re} [\gamma_1 (\bar{\gamma}_2 + \dots + \bar{\gamma}_s) + \gamma_2 (\bar{\gamma}_3 + \dots + \bar{\gamma}_s) + \\ &\dots + \gamma_{s-1} \bar{\gamma}_s + \gamma_{s+1} (\bar{\gamma}_{s+2} + \dots + \bar{\gamma}_{2s}) + \dots + \gamma_{2s-2} (\bar{\gamma}_{2s-1} + \bar{\gamma}_{2s}) + \gamma_{2s-1} \bar{\gamma}_{2s}] dV_{1 \dots 2s}. \end{aligned}$$

Эта форма является, очевидно, неопределенной, поскольку получим разные знаки для $\gamma = (1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ и $\gamma = (1, -1, \dots, 1, -1)$.

Пусть T — (s, s) -форма $\sum_{j_1 < \dots < j_s} dV_{j_1, \dots, j_s}$ в $\mathbb{C}^{2s}$, тогда равенство (16) означает, что

$$(s-1)! \binom{2s-1}{s-1} \sum_1^{2s} \gamma_j = 0.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\gamma \wedge \bar{\gamma} \wedge \omega^{s-2} \wedge T &= (s-2)! \binom{2s-2}{s-2} 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^{2s-1} \gamma_j (\bar{\gamma}_{j+1} + \dots + \bar{\gamma}_{2s}) \right] dV_{1\dots 2s} \\ &= (s-2)! \binom{2s-2}{s-2} 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^{2s-1} -|\gamma_j|^2 - \gamma_j (\bar{\gamma}_1 + \dots + \bar{\gamma}_{j-1}) \right] dV_{1\dots 2s} \leq 0.\end{aligned}$$

Доказательство проводится методом математической индукции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белошাপка В. К. Функции, плюригармонические на многообразии // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1978. Т. 42, № 3. С. 475–483.
2. Чирка Е. М. Потoki и некоторые их применения // Харви Р. Голоморфные цепи и их границы. М.: Мир, 1979. С. 122–158.
3. Никитина Т. Н. Устранимые особенности на границе и $\bar{\partial}$ -замкнутое продолжение CR -форм с особенностями на порождающем многообразии. Новосибирск: Наука, 2008.
4. Nikitina T. N. The $\bar{\partial}\bar{\partial}$ -equation on a positive current // The 14th General Meeting of European Women in Mathematics. Book of Abstracts Part II. University of Novi Sad (Serbia), 2009. P. 15–16.
5. Никитина Т. Н. $\bar{\partial}$ и $\bar{\partial}\bar{\partial}$ -уравнение на положительном потоке // Тез. докл. международной конференции «Современные проблемы анализа и геометрии». Новосибирск: Ин-т математики им. С. Л. Соболева, 2009. С. 81.
6. Никитина Т. Н. Уравнение Монжа – Ампера на положительном потоке // Тез. докл. международной конференции «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений», Новосибирск: Ин-т математики им. С. Л. Соболева, 2013. С. 402.
7. Никитина Т. Н. $\bar{\partial}$ - и $\bar{\partial}\bar{\partial}$ -замкнутое продолжение форм. Saarbrücken, Germany: LAP, 2014.
8. Никитина Т. Н. Об уравнении Монжа – Ампера на положительном потоке // Тез. докл. международной конференции «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование», Улан-Удэ. Новосибирск: Ин-т математики им. С. Л. Соболева, 2015. С. 209–211.
9. Berndtsson B., Sibony N. The $\bar{\partial}$ -equation on a positive current // Invent. math. 2002. V. 147. P. 371–428.
10. Wells R. O. Differential analysis on complex manifolds. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1967.
11. Siu Y-T. Complex-analiticity of harmonic maps, vanishing and Lefschets theorems // J. Diff. Geom. 1982. V. 17. P. 55–138.

Статья поступила 10 августа 2015 г.

Никитина Татьяна Николаевна
Сибирский федеральный университет,
Институт математики и фундаментальной информатики,
пр. Свободный, 79, Красноярск, 660041
AANick@yandex.ru