

ОЦЕНКА СВЕРХУ ФУНКЦИОНАЛА
ПОГРЕШНОСТИ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ
С СИММЕТРИЧНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Е. Г. Васильева, Н. Б. Цыренжапов

Аннотация. Получена оценка сверху функционала погрешности квадратурных формул с симметричным пограничным слоем. В явном виде выделена константа, входящая в эту оценку.

Ключевые слова: оценка, функционал погрешности, квадратурная формула.

E. G. Vasilyeva, N. B. Tsyrenzhapov. An upper estimate of error functional of the quadrature formulas with a symmetric boundary layer.

Abstract: In the article we obtain an upper estimate of error functional of the quadrature formulas with a symmetric boundary layer. We singled the constant in this estimate in an explicit form.

Keywords: estimate, error functional, quadrature formula.

В [1] определены кубатурные формулы с регулярным пограничным слоем для области Ω и соответствующие им функционалы погрешности кубатурных формул с регулярным пограничным слоем.

Сначала выделим из множеств функционалов погрешности с регулярным пограничным слоем конкретный функционал погрешности квадратурной формулы для области $(0, 1)$ и оценим сверху норму этого функционала в пространстве $L_p^m(E_1)$.

Пусть

$$l(x) = \varepsilon_{(0,1)}(x) - \sum_{\gamma=0}^m C_\gamma \delta(x - \gamma), \quad \langle l, x^\alpha \rangle = 0, \quad \alpha = 0, 1, \dots, m,$$

$$\|l\|_{C^*} = 1 + \sum_{\gamma=0}^m |C_\gamma| < \infty,$$

$$l_1(x) = \varepsilon_{(0,m)}(x) - \sum_{\gamma=0}^m F_\gamma \delta(x - \gamma), \quad \langle l_1, x^\alpha \rangle = 0, \quad \alpha = 0, 1, \dots, m,$$

$$\|l_1\|_{C^*} = m + \sum_{\gamma=0}^m |F_\gamma| < \infty, \quad (a, b) = [0, 1), \quad \frac{1}{N} = h.$$

Суммируя элементарные функционалы $l\left(\frac{x}{h} - \beta\right)$, $\beta = 0, 1, \dots, N - m - 1$, и $l_1\left(\frac{x}{h} - N + m\right)$, построим конкретный функционал погрешности квадратурной формулы с регулярным пограничным слоем для полуинтервала $[0, 1)$:

$$l_{(0,1)}^h(x) = \sum_{\beta=0}^{N-m-1} l\left(\frac{x}{h} - \beta\right) + l_1\left(\frac{x}{h} - N + m\right).$$

По построению $l_{(0,1)}^h(x) \in L_p^{m*}$.

Теорема. Пусть $l_{(0,1)}^h(x)$ — функционал погрешности квадратурной формулы с регулярным пограничным слоем для интервала $(0, 1)$, $\text{supp } l_{(0,1)}^h(x) \subseteq [0, 1]$ и $l_{(0,1)}^h(x) \in L_p^{m*}$. Тогда при $h \rightarrow 0$ норма функционала погрешности $l_{(0,1)}^h(x)$ удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} \|l_{(0,1)}^h(x)\|_{L_p^{m*}} &\leq h^m \left[\int_0^1 \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{e^{2\pi i \beta x}}{(2\pi i \beta)^m} \right|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} \\ &\quad + h^m \left[\frac{(m+2) + \sum_{\gamma=0}^m (|F_\gamma| + 2|C_\gamma|)}{2(m-1)!} \right] m^{m+1-\frac{1}{p}} h^{1-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Доказательство. Преобразуем периодический функционал погрешности $\tilde{l}_0(\frac{x}{h})$:

$$\begin{aligned} \tilde{l}_0\left(\frac{x}{h}\right) &= \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} l\left(\frac{x}{h} - \beta\right) \\ &= \sum_{\beta=-\infty}^{-1} l\left(\frac{x}{h} - \beta\right) + \sum_{\beta=0}^{N-m-1} l\left(\frac{x}{h} - \beta\right) + \sum_{\phi=N-m}^{\infty} l\left(\frac{x}{h} - \beta\right) \\ &= \sum_{\beta=0}^{N-m-1} l\left(\frac{x}{h} - \beta\right) + l_{(0,1)*}^h(x), \quad (1) \end{aligned}$$

где

$$l_{(0,1)*}^h(x) = \sum_{\beta=-\infty}^{-1} l\left(\frac{x}{h} - \beta\right) + \sum_{\beta=N-m}^{\infty} l\left(\frac{x}{h} - \beta\right).$$

Из (1) следует, что функционал погрешности с регулярным пограничным слоем имеет представление

$$l_{(0,1)}^h(x) = \tilde{l}_0\left(\frac{x}{h}\right) + l_1\left(\frac{x}{h} - N + m\right) - l_{(0,1)*}^h(x). \quad (2)$$

По построению носитель функционала погрешности с регулярным пограничным слоем $l_{(0,1)}^h(x)$ равен $\text{supp } l_{(0,1)}^h(x) = [0, 1]$. Норма функционала погрешности в явном виде выражается формулой [2]:

$$\|l_{(0,1)}^h(x)\|_{L_p^{m*}} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon_{2m}^{(m)}(x) * l_{(0,1)}^h(x)|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}},$$

Если $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ и $y \in \text{supp } l_{(0,1)}^h(x)$, то $(x - y)$ сохраняет знак. Следовательно, $\varepsilon_{2m}^{(m)}(x) * l_{(0,1)}^h(x) = 0$ для всех $h, \beta \in [0, 1)$. Отсюда

$$\|l_{(0,1)}^h(x)\|_{L_p^{m*}} = \left[\int_0^1 |\varepsilon_{2m}^{(m)}(x) * l_{(0,1)}^h(x)|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}}.$$

Учитывая представление функционала $l_{(0,1)}^h(x)$ в виде (2) и то, что $\text{supp } l_1\left(\frac{x}{h} - N + m\right) \subset [hN - hm, hN]$, а также применяя неравенство Минковского, имеем

$$\begin{aligned} & \|l_{(0,1)}^h(x)\|_{L_p^{m*}} \\ & \leq \left[\int_0^1 \left| \varepsilon_{2m}^{(m)}(x) * \tilde{l}_0\left(\frac{x}{h}\right) \right|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} + \left[\int_{hN-hm}^{hN} \left| \varepsilon_{2m}^{(m)}(x) * l_1\left(\frac{x}{h} - N + m\right) \right|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} \\ & + \left[\int_0^1 \left| \sum_{\beta=-\infty}^{-1} \varepsilon_{2m}^{(m)}(x) * l\left(\frac{x}{h} - \beta\right) \right|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} + \left[\int_0^1 \left| \sum_{\beta=N-m}^{\infty} \varepsilon_{2m}^{(m)}(x) * l\left(\frac{x}{h} - \beta\right) \right|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} \\ & = I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \quad (3) \end{aligned}$$

Оценим I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 & = \left[\sum_{h\gamma \in [0,1] \Delta_{h\gamma}} \int \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{e^{2\pi i h^{-1} \beta x}}{(2\pi i h^{-1} \beta)^m} \right|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} = \left\langle \begin{array}{l} x \rightarrow h\gamma + x \\ x \rightarrow hx \\ dx \rightarrow hdx \end{array} \right\rangle \\ & = h^m \left[\int_0^1 \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{e^{2\pi i \beta x}}{(2\pi i \beta)^m} \right|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} = h^m J_m, \quad (4) \end{aligned}$$

где $\Delta_{h\gamma} = \{x \in E_1, h\gamma \leq x < h\gamma + h\}$.

Преобразуем свертку:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2m}^{(m)}(x) * l_1\left(\frac{x}{h} - N + m\right) & = \left\langle \frac{y}{h} \rightarrow y \right\rangle \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - hy)^{m-1} \text{sgn}(x - hy)}{2(m-1)!} l_1(y - N + m) h dy = \langle y - N + m \rightarrow y \rangle \\ & = \int_0^m \frac{(x - hy + hN - hm)^{m-1}}{2(m-1)!} \text{sgn}(x - hy + hN - hm) h l_1(y) dy. \quad (5) \end{aligned}$$

Воспользовавшись равенством (5), оценим I_2 в (3):

$$\begin{aligned} I_2 & = \left[\int_{hN-hm}^{hN} \left| \int_0^m \frac{(x - hy + hN - hm)^{m-1}}{2(m-1)!} \text{sgn}(x - hy + hN - hm) l_1(y) h dy \right|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} \\ & = \langle x \rightarrow hx + hN - hm \rangle = h^{m+\frac{1}{p'}} \left[\int_0^m \left| \int_0^m \frac{(x - y)^{m-1} \text{sgn}(x - y)}{2(m-1)!} l_1(y) dy \right|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} \\ & \leq h^{m+1-\frac{1}{p}} \left[\int_0^m \left| \max_{x,y \in [0,m]} |x - y|^{m-1} \|l_1\|_{C^*} \frac{1}{2(m-1)!} \right|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} \\ & \leq h^{m+1-\frac{1}{p}} m^{m+1-\frac{1}{p}} \frac{m + \sum_{\gamma=0}^m |F_\gamma|}{2(m-1)!}. \quad (6) \end{aligned}$$

Используя равенство

$$\sum_{\beta=-\infty}^{-m} \varepsilon_{2m}^{(m)} * l\left(\frac{x}{h} + \beta\right) = 0 \text{ для } x \in [0, h(m-1)),$$

преобразуем свертку:

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=-m+1}^{-1} \int \frac{(x-y)^{m-1} \operatorname{sgn}(x-y)}{2(m-1)!} l\left(\frac{x}{h} + \beta\right) dy &= \left\langle \frac{y}{h} \rightarrow y, y - \beta \rightarrow y \right\rangle \\ &= \sum_{\beta=-m+1}^{-1} \int \frac{(x-hy+h\beta)^{m-1} \operatorname{sgn}(x-hy+h\beta)}{2(m-1)!} l(y) h dy. \end{aligned} \quad (7)$$

Для оценки выражения I_3 на основании равенства (7) находим

$$\begin{aligned} I_3 &= \left[\int_0^{h(m-1)} \left| \sum_{\beta=-m+1}^{-1} \int_{h\beta}^{h\beta+hm} \frac{(x-hy+h\beta)^{m-1}}{2(m-1)!} \operatorname{sgn}(x-hy+h\beta) l(y) h dy \right|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} \\ &= \langle x \rightarrow hx, x - \beta \rightarrow x \rangle \\ &= h^{m+\frac{1}{p'}} \left[\int_0^{h(m-1)} \left| \sum_{\beta=-m+1}^{-1} \int_0^m \frac{(x-y)^{m-1} \operatorname{sgn}(x-y)}{2(m-1)!} l(y) dy \right|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq h^{m+1-\frac{1}{p}} \left[\int_0^{m-1} \left| \sum_{\beta=-m+1}^{-1} \max_{x,y \in [0,m]} |x-y| \frac{\|l\|_{C^*}}{2(m-1)!} \right|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq h^{m+1-\frac{1}{p}} m^{m+1-\frac{1}{p}} \frac{1 + \sum_{\gamma=0}^m |C_\gamma|}{2(m-1)!}. \end{aligned} \quad (8)$$

Учитывая, что $x \in [0, 1+h(m-1)]$ и $\varepsilon_{2m}^{(m)} * l(\frac{x}{h} - \beta) = 0$ для всех $\beta > N+m-1$, и проводя аналогичные рассуждения, получим

$$I_4 \leq h^{m+1-\frac{1}{p}} m^{m+1-\frac{1}{p}} \frac{1 + \sum_{\gamma=0}^m |C_\gamma|}{2(m-1)!}. \quad (9)$$

Собирая оценки (3), (4), (6), (8) и (9), имеем

$$\|l_{(0,1)}^h\|_{L_p^{m*}} \leq h^m J_m + \frac{(m+2) + \sum_{\gamma=0}^m (|F_\gamma| + 2|C_\gamma|)}{2(m-1)!} m^{m+1-\frac{1}{p}} h^m h^{1-\frac{1}{p}}.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.

2. Шойнжуров Ц. Б. Оценка нормы функционала погрешности кубатурных формул в различных функциональных пространствах. Улан-Удэ: Изд-во БНЦ СО РАН, 2005.

Статья поступила 25 августа 2015 г.

Васильева Евгения Геннадьевна
Восточно-Сибирский гос. университет технологий и управления,
ул. Ключевская, 40в, строение 1, Улан-Удэ 670013
vasil_eg@mail.ru

Цыренжапов Нима Булатович
Восточно-Сибирский гос. институт культуры,
ул. Терешковой, 1, Улан-Удэ 670031
nimac@mail.ru