

УДК 517.518.87

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ УЗЛОВ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ С ВЕСОМ

Е. Н. Булгатова, Е. Б. Павлова

Аннотация. Рассматриваются весовые квадратурные формулы. Показан способ нахождения асимптотически оптимального распределения узлов таких формул.

Ключевые слова: квадратурная весовая формула, оптимальное распределение узлов.

E. N. Bulgatova and E. B. Pavlova. Optimal distribution of nodes of the quadrature formula with weight.

Abstract: This article considers the quadrature formulas with weight. Shows how to find the asymptotically optimal distribution of nodes of these formulas.

Keywords: quadrature weighting formula, the optimal distribution of nodes.

Рассмотрим распределение узлов весовой квадратурной формулы в зависимости от свойств конкретной весовой функции и от поведения подынтегральной функции, принадлежащей определенному функциональному пространству.

Пусть $g(x) \in L_{p'}$ — вес, $1 < p \leq \infty$, $f \in W_p^m$ и вычисляется интеграл

$$If = \int_0^1 g(x)f(x) dx.$$

Разобьем отрезок интегрирования $[0, 1]$ на части $[x_{\beta-1}, x_{\beta}]$, $\beta = 1, 2, \dots, N$, $x_0 = 0$, $x_N = 1$, и рассмотрим на каждой части интерполяционную формулу Лагранжа

$$L_m(x - x_{\beta-1}) = \sum_{\gamma=0}^m \frac{\omega_m(x - x_{\beta-1})}{\omega'_m(x_{\beta-1+\gamma})(x - x_{\beta-1+\gamma})} f(x_{\beta-1+\gamma})$$

с произвольным расположением узлов $x_{\beta-1} < x_{\beta} < x_{\beta+1} < \dots < x_{\beta-1+m}$, $\beta = 1, 2, \dots, N$, и $\omega_m(x - x_{\beta-1}) = (x - x_{\beta-1})(x - x_{\beta})(x - x_{\beta+1}) \dots (x - x_{\beta-1+m})$.

Интеграл If представим в виде суммы

$$If = \sum_{\beta=1}^N \int_{x_{\beta-1}}^{x_{\beta}} g(x)f(x)dx.$$

Интеграл по каждой части вычислим по формуле

$$\int_{x_{\beta-1}}^{x_{\beta}} g(x)f(x) dx \approx \int_{x_{\beta-1}}^{x_{\beta}} g(x)L_m(x - x_{\beta-1}) dx = h^* \sum_{\gamma=0}^m C_{\gamma}(\beta)f(x_{\beta-1+\gamma}),$$

где коэффициенты определяются следующим образом:

$$C_\gamma(\beta) = \int_{x_{\beta-1}}^{x_\beta} \frac{\omega_m(x - x_{\beta-1})g(x)}{\omega'_m(x_{\beta-1+\gamma})(x - x_{\beta-1+\gamma})} dx.$$

Используя погрешность интерполяционной формулы Лагранжа, имеем

$$f(x) - L_m(x - x_{\beta-1}) = \frac{(x - x_{\beta-1})(x - x_\beta)(x - x_{\beta+1}) \dots (x - x_{\beta-1+m})}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi),$$

где $\xi \in (x_{\beta-1}, x_{\beta-1+m})$.

Отмечая, что $g(x + x_\beta) = g(x_\beta) + o(1)$, $\max_{x \in [x_{\beta-1+\gamma}, x_{\beta+\gamma}]} |x - x_{\beta+\gamma}| = |x_{\beta+\gamma} - x_{\beta-1+\gamma}| + o(1)$, $\gamma = 0, 1, 2, \dots, m-1$, при $N \rightarrow \infty$ и $x \in [x_{\beta-1}, x_\beta]$, оценим погрешность:

$$\begin{aligned} & \int_{x_{\beta-1}}^{x_\beta} g(x)f(x) dx - h^* \sum_{\gamma=0}^m C_\gamma(\beta) f(x_{\beta-1+\gamma}) \\ & \leq g(x_\beta) \frac{|x_{\beta+\gamma} - x_{\beta-1+\gamma}|^{m+1}}{(m+1)!} \max_{x \in [x_{\beta-1+\gamma}, x_{\beta+\gamma}]} |f^{(m+1)}(x)| (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Пусть $f(x) \in W_\infty^m$ и $\max_{x \in [0,1]} |f^{(m+1)}(x)| \leq M$. Тогда суммарная погрешность равна

$$R = \sum_{\beta=1}^N g(x_\beta) |x_\beta - x_{\beta-1}|^{m+1} \frac{M}{(m+1)!} (1 + o(1)). \quad (1)$$

Рассмотрим две возрастающие последовательности чисел

$$\begin{aligned} x_0 = 0 &< x_1 < x_2 < \dots < x_\gamma < \dots < x_N = 1, \\ 0 &< h < 2h < \dots < \gamma h < \dots < Nh = 1. \end{aligned}$$

С помощью этих последовательностей можно построить дифференцируемую функцию $x = \varphi(t)$ по значениям $x_\gamma = \varphi(h\gamma)$, $\gamma = 1, 2, \dots, N$, удовлетворяющую условиям $x(0) = 0$ и $x(1) = 1$.

Теорема. Пусть $f \in W_\infty^m$, $\max_{x \in [0,1]} |f^{(m+1)}(x)| \leq M$, $g(x) \in L_1(0,1)$ и

$$\int_0^1 g(x)f(x) dx \approx \sum_{\beta=1}^N \sum_{\gamma=0}^m C_\gamma(\beta) f(x_{\beta-1+\gamma})$$

есть весовая формула. Тогда асимптотически оптимальное распределение узлов x_β , $\beta = 1, 2, \dots, N$, определяется функцией $x = \varphi(t)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}(g(\varphi(t))(\varphi'(t))^{m+1}) = 0,$$

начальным условиям $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ и в неявной форме выражается интегралом

$$\int_0^x (g(x))^{\frac{1}{m+1}} dx = \int_0^1 (g(x))^{\frac{1}{m+1}} dx \cdot t$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве x_β возьмем значения $\varphi\left(\frac{\beta}{N}\right)$ непрерывно дифференцируемой функции $\varphi(t)$, удовлетворяющей условиям $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$.

По свойству непрерывной функции $\varphi(t)$ имеем

$$x_\beta - x_{\beta-1} = \varphi\left(\frac{\beta}{N}\right) - \varphi\left(\frac{\beta-1}{N}\right) = \varphi'\left(\frac{\beta}{N}\right) \frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N^{m+1}}\right).$$

Формула (1) принимает вид

$$R = \frac{1}{N^{m+1}} \sum_{\beta=0}^{N-1} \left[\left(\varphi'\left(\frac{\beta}{N}\right) \right)^{m+1} g(x_\beta) \frac{M}{(m+1)!} \right] + o\left(\frac{1}{N^{m+1}}\right).$$

Выражение в скобках является квадратурной суммой Римана для интеграла

$$\int_0^1 (\varphi'(t))^{m+1} g(\varphi(t)) \frac{M}{(m+1)!} dt. \quad (2)$$

Из (2) находим

$$R = \frac{1}{N^m} \int_0^1 (\varphi'(t))^{m+1} g(\varphi(t)) \frac{M}{(m+1)!} dt + o\left(\frac{1}{N^{m+1}}\right). \quad (3)$$

Для определения оптимального расположения узлов минимизируем главный член в (3):

$$A = \int_0^1 (\varphi'(t))^{m+1} g(\varphi(t)) dt.$$

Примем за независимую переменную в интеграле A функцию φ и запишем в виде

$$A = \int_0^1 (t'(\varphi))^{-m} g(\varphi) d\varphi.$$

Составим функцию Лагранжа

$$F(t(\varphi) + \lambda \tau(\varphi)) = \int_0^1 (t'(\varphi) + \lambda \tau'(\varphi))^{-m} g(\varphi) d\varphi,$$

где $\tau(0) = 0$, $\tau(1) = 0$. Вычислим производную при $\lambda = 0$ и приравняем ее к нулю:

$$F'(t(\varphi)) = \int_0^1 \left(\frac{-m}{(t'(\varphi))^{m+1}} g(\varphi) \tau'(\varphi) + (t'(\varphi))^{-m} \frac{dg(\varphi)}{d\lambda} \right) d\varphi = 0. \quad (4)$$

Отметим, что $g(\varphi)$ не зависит от λ , поэтому $\frac{dg(\varphi)}{d\lambda} = 0$.

Интегрируя (4) по частям, имеем

$$\frac{d}{d\varphi} \left[\frac{1}{(t'(\varphi))^{m+1}} g(\varphi) \right] = 0 \quad (5)$$

или $g(\varphi)(\varphi'(t))^{m+1} = C_0$.

Из начальных условий находим

$$\int_0^x (g(x))^{\frac{1}{m+1}} dx = \int_0^1 (g(x))^{\frac{1}{m+1}} dx \cdot t$$

Теорема доказана.

Далее рассмотрим простейшую весовую функцию $g(x) = |x|^s$, $-1 < s < 1$. В этом случае уравнение (5) примет вид

$$\frac{d}{d\varphi} \left[\frac{1}{(t'(\varphi))^{m+1}} \varphi^s \right] = 0.$$

Интегрируя уравнение и используя начальные условия, находим $x = t^{\frac{m+1}{m+s+1}}$. Тогда асимптотически оптимальное расположение узлов соответствует точкам

$$x_\beta = \left(\frac{\beta}{N} \right)^{\frac{m+1}{m+s+1}}, \quad \beta = 0, 1, \dots, N-1.$$

Пусть вычисляется интеграл $\int_0^1 x^s \varphi(x) dx$, $-1 < s < 1$, и $\varphi(0) \neq 0$. Отрезок интегрирования разобьем на части $[x_{\beta-1}, x_\beta]$, $\beta = 1, 2, \dots, N$, $x_0 = 0$, $x_N = 1$. Тогда

$$\int_0^1 x^s \varphi(x) dx = \sum_{\beta=1}^N \int_{x_{\beta-1}}^{x_\beta} x^s \varphi(x) dx.$$

Каждый из интегралов вычисляем по формуле

$$\int_{x_{\beta-1}}^{x_\beta} x^s \varphi(x) dx \approx h^* \sum_{\gamma=0}^m C_\gamma(\beta) \varphi(x_{\beta-1+\gamma}),$$

где $h^* = x_\beta - x_{\beta-1}$ и коэффициенты определяются из систем

$$\int_0^1 (x_{\beta-1} + h^* x)^s x^\alpha dx = \sum_{\gamma=0}^m C_\gamma(\beta) (x_{\beta-1+\gamma})^\alpha, \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots, m, \quad \beta = 1, 2, \dots, N.$$

Интеграл по всему отрезку $[0, 1]$ равен

$$\int_0^1 x^s \varphi(x) dx \approx \sum_{\beta=1}^N (x_\beta - x_{\beta-1}) \sum_{\gamma=0}^m C_\gamma(\beta) \varphi(x_{\beta-1+\gamma}).$$

Составим весовую формулу для $s = -\frac{1}{2}$ и $m = 2$. Коэффициенты $C_\gamma(\beta)$ находятся из систем

$$\int_0^1 (x_{\beta-1} + h^* x)^{-\frac{1}{2}} x^\alpha dx = \sum_{\gamma=0}^2 C_\gamma(\beta) (x_{\beta-1+\gamma})^\alpha, \quad \alpha = 0, 1, 2, \quad \beta = 1, 2, \dots, N.$$

Пусть $\varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция на $[0, 1]$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, $x_\beta = \left(\frac{\beta}{N}\right)^{\frac{6}{5}} = (h\beta)^{\frac{6}{5}}$, $\max_{x \in [0, 1]} |\varphi^m(x)| \leq M$. Система для определения коэффициентов имеет вид

$$\int_0^1 (((\beta - 1)h)^{\frac{6}{5}} + ((\beta h)^{\frac{6}{5}} - ((\beta - 1)h)^{\frac{6}{5}})x)^{-\frac{1}{2}} x^\alpha dx = \sum_{\gamma=0}^2 C_\gamma(\beta) ((\beta - 1 + \gamma)h)^{\frac{6\alpha}{5}},$$

$\alpha = 0, 1, 2$, $\beta = 1, 2, \dots, N$, $h = \frac{1}{N}$.

Интеграл приближенно равен

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} \varphi(x) dx \approx \sum_{\beta=1}^N ((\beta h)^{\frac{6}{5}} - ((\beta - 1)h)^{\frac{6}{5}}) \sum_{\gamma=0}^2 C_\gamma(\beta) \varphi\left(\left(\frac{\beta - 1 + \gamma}{N}\right)^{\frac{6}{5}}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н. С. Численные методы. М.: Наука, 1973.
2. Шойнжуров Ц. Б. Оценка нормы функционала погрешности кубатурных формул в различных функциональных пространствах. Улан-Удэ: Изд-во БНЦ СО РАН, 2005.

Статья поступила 14 августа 2015 г.

Булгатова Елена Николаевна, Павлова Елена Бадмаевна
Восточно-Сибирский гос. университет технологий и управления
ул. Ключевская, 40в, строение 1, 670013 Улан-Удэ, Республика Бурятия
belena77@mail.ru, pavlova2607@mail.ru