

УДК 513.83

О МОЩНОСТИ ФИНАЛЬНО КОМПАКТНОГО T_1 -ПРОСТРАНСТВА СЧЕТНОГО ПСЕВДОХАРАКТЕРА

П. В. Черников

Аннотация. А. В. Архангельский сформулировал проблему: оценить мощность финально компактного T_1 -пространства X счетного псевдохарактера. В работе получена такая оценка, а именно доказано, что $|X| < \beta$, где β — первый измеримый кардинал. Оценка точная.

Ключевые слова: счетно полный ультрафильтр, финально компактное пространство.

P. V. Chernikov. Cardinality of a Finally Compact T_1 -Space.

Abstract: A. V. Arkhangel'skiĭ posed the problem: Estimate the cardinality of a finally compact T_1 -space X of countable pseudocharacter. We obtain such an estimate; namely, we prove that $|X| < \beta$, where β is the first measurable cardinal. The estimate is sharp.

Keywords: countably complete ultrafilter, finally compact space.

1. Приведем необходимые определения. Топологическое пространство X называется *финально компактным*, если каждое открытое покрытие пространства X содержит счетное подпокрытие этого пространства.

Говорят, что топологическое пространство X *имеет счетный псевдохарактер*, если всякая точка пространства X представима в виде пересечения счетного числа открытых множеств.

Ультрафильтр D над множеством A называется *счетно полным*, если для любых $A_i \in D$, $i = 1, 2, \dots$, множество $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ принадлежит D .

Мощность множества X называется *измеримым кардинальным числом*, если над X существует нетривиальный счетно полный ультрафильтр.

В [1, с. 34] сформулирована **проблема**: оценить мощность финально компактного T_1 -пространства счетного псевдохарактера.

В начале 80-х годов прошлого века И. Юхас и П. В. Черников независимо установили, что если X — финально компактное T_1 -пространство счетного псевдохарактера, то $|X| < \beta$, где β — первый измеримый кардинал [2, с. 31; 3]. Юхас привел это утверждение без доказательства. Доказательство автора содержится в малодоступной работе [3]. В данной работе мы приводим это утверждение с доказательством. Оно решает сформулированную проблему.

Далее потребуются

Лемма. Пусть A — произвольное непустое множество, D — счетно полный ультрафильтр над A , X — финально компактное T_1 -пространство счетного псевдохарактера, $f \in X^A$. Тогда существует единственная точка $x_0 \in X$ такая, что для всякой окрестности V точки x_0

$$\{i : f(i) \in V\} \in D.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для всякой точки $x \in X$ существует окрестность V_x такая, что $\{i : f(i) \in V_x\} \notin D$. Пространство X финально компактно, поэтому можно выбрать счетное подпокрытие $\{V_{x_n}\}_{n=1}^\infty$ покрытия $\{V_x\}_{x \in X}$ пространства X . Поскольку

$$\bigcup_{n=1}^\infty \{i : f(i) \in V_{x_n}\} = A,$$

найдется номер m , для которого $\{i : f(i) \in V_{x_m}\} \in D$. Противоречие. Таким образом, существование точки x_0 установлено.

Докажем единственность. Пусть существуют две различные точки $x_1, x_2 \in X$, обладающие указанным свойством. Имеем

$$\{x_j\} = \bigcap_{n=1}^\infty \sigma_n^j, \quad j = 1, 2,$$

где σ_n^j — открытые подмножества пространства X ($n = 1, 2, \dots$). Следовательно,

$$A_j = \{i : f(i) = x_j\} = \bigcap_{n=1}^\infty \{i : f(i) \in \sigma_n^j\} \in D, \quad j = 1, 2.$$

Пусть $i_0 \in A_1 \cap A_2$. Тогда $f(i_0) = x_1$, $f(i_0) = x_2$. Противоречие. Лемма доказана.

Точка x_0 называется *D -пределом функции $f \in X^A$* [4]. Обозначим эту точку, следуя [4], через $D\text{-}\lim f$.

Теорема 1. Пусть X — финально компактное T_1 -пространство счетного псевдохарактера. Тогда $|X|$ — неизмеримое кардинальное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D — счетно полный ультрафильтр над множеством X , $\text{id} : X \rightarrow X$ — тождественное отображение. Пусть $x_0 = D\text{-}\lim \text{id}$. По условию существуют открытые множества σ_n , $n \geq 1$, в X такие, что $\{x_0\} = \bigcap_{n=1}^\infty \sigma_n$. При всех $n \geq 1$ имеем $\sigma_n \in D$, поэтому $\{x_0\} \in D$, т. е. D — главный ультрафильтр. Теорема доказана.

Таким образом, если X — финально компактное T_1 -пространство счетного псевдохарактера, то $|X| < \beta$, β — первый измеримый кардинал.

Ранее этот результат был известен в случае, когда X — регулярное финально компактное пространство счетного псевдохарактера [1, с. 34; 5, гл. IV, задача 119].

ЗАМЕЧАНИЕ. И. Юхас в [2] показал, что для всякого множества X_0 , $|X_0| < \beta$, существует финально компактное T_1 -пространство X^* счетного псевдохарактера такое, что $|X_0| < |X^*| < \beta$. Отсюда следует, что полученная (выше) оценка $|X| < \beta$ точная.

2. Остановимся на сходимости D -пределов.

Теорема 2. Пусть A — произвольное непустое множество, D — счетно полный ультрафильтр над A , X — финально компактное T_1 -пространство счетного псевдохарактера, $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset X^A$, $f \in X^A$. Для того чтобы последовательность $\{D\text{-}\lim f_n\}_{n=1}^\infty$ сходилась к точке $D\text{-}\lim f$, необходимо и достаточно, чтобы

$$S = \{i \in A : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(i) = f(i)\} \in D.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть последовательность $\{D\text{-}\lim f_n\}_{n=1}^\infty$ сходится к точке $D\text{-}\lim f$. Пусть $a_n = D\text{-}\lim f_n$, $n \geq 1$, $a_0 = D\text{-}\lim f$. Найдется счетное семейство открытых в X множеств $\{\sigma_k^n\}_{k=1}^\infty$ такое, что

$$\{a_n\} = \bigcap_{k=1}^\infty \sigma_k^n \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Имеем

$$M_n = \{i \in A : f_n(i) = a_n\} = \bigcap_{k=1}^\infty \{i \in A : f_n(i) \in \sigma_k^n\} \in D, \quad n \geq 1,$$

$$M_0 = \{i \in A : f(i) = a_0\} = \bigcap_{k=1}^\infty \{i \in A : f(i) \in \sigma_k^0\} \in D.$$

Пусть $M = \bigcap_{n=0}^\infty M_n \in D$. Если $i_0 \in M$, то

$$f_n(i_0) = a_n \rightarrow a_0 = f(i_0).$$

Следовательно, $S \supset M$ и, значит, $S \in D$.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть множество S принадлежит D . Покажем, что тогда последовательность $\{D\text{-}\lim f_n\}_{n=1}^\infty$ сходится к точке $D\text{-}\lim f$. Пусть $a_n = D\text{-}\lim f_n$, $n \geq 1$, $a_0 = D\text{-}\lim f$. Найдется счетное семейство открытых в X множеств $\{V_k^n\}_{k=1}^\infty$ такое, что

$$\{a_n\} = \bigcap_{k=1}^\infty V_k^n \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Имеем

$$M_n = \{i \in A : f_n(i) = a_n\} = \bigcap_{k=1}^\infty \{i \in A : f_n(i) \in V_k^n\} \in D, \quad n \geq 1,$$

$$M_0 = \{i \in A : f(i) = a_0\} = \bigcap_{k=1}^\infty \{i \in A : f(i) \in V_k^0\} \in D.$$

Имеем также

$$M = \bigcap_{n=0}^\infty M_n \in D, \quad S \cap M \in D.$$

Если $i_0 \in S \cap M$, то последовательность $\{D\text{-}\lim f_n\}_{n=1}^\infty$ сходится к точке $D\text{-}\lim f$. Теорема доказана.

Сходимость D -пределов рассматривается также в [6, 7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Архангельский А. В. Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты // Успехи мат. наук. 1978. Т. 33, № 6. С. 29–84.
2. Juhász I. Cardinal functions in topology-ten years later. Second ed. Amsterdam: Math. Centrum, 1980.
3. Черников П. В. О счетно полных ультрафильтрах. М., 1984. Деп. в ВИНТИ, № 3206–84Деп. Аннот.: Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 4. С. 201–202.
4. Кейслер Г. Дж., Чэн Чень-чунь. Теория непрерывных моделей. М.: Мир, 1971.
5. Архангельский А. В., Пономарев В. И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974.
6. Эдвардс Р. Функциональный анализ. М.: Мир, 1969.
7. Черников П. В. Об элементарных теориях, пространстве моделей и D -пределах // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, № 1. С. 155–158.

Статья поступила 10 января 2015 г.

Черников Павел Васильевич
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090