

УДК 517.633

О СТАЦИОНАРНОМ МЕТОДЕ ГАЛЁРКИНА В ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. Е. Федоров, И. М. Тихонова

Аннотация. Доказана однозначная регулярная разрешимость в пространстве Соболева краевой задачи для уравнения смешанного типа второго порядка, которая ранее была изучена авторами с помощью нестационарного метода Галёркина в сочетании с методом ε -регуляризации. В настоящей работе для этой краевой задачи применяется стационарный метод Галёркина, при этом существенно упрощается методика исследования. Кроме того, получена оценка погрешности стационарного метода Галёркина через собственные значения оператора Лапласа по переменным $x \in \mathbb{R}^n$ и t .

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, краевая задача, априорная оценка, стационарный метод Галёркина, погрешность.

1. Введение. Начало исследованиям уравнений смешанного типа было положено в работах Геллерстедта и Трикоми [1–3]. Далее модельные уравнения смешанного типа изучались в работах многих авторов [4–7].

Построение общей теории краевых задач для уравнений смешанного типа с произвольным многообразием изменения типа было начато в 70-е гг. прошлого века В. Н. Враговым и рядом других авторов [8–12]. В дальнейшем эта теория развивалась во многих направлениях [13–20]. При исследовании краевых задач для уравнений смешанного типа общего вида применялись функциональные методы [21], метод регуляризации [17], метод Галёркина.

В работах [22–25] стационарный метод Галёркина применяется к решению первой краевой задачи и краевой задачи Врагова для уравнения смешанного типа, а также для этих задач получена оценка погрешности стационарного метода Галёркина через собственные числа оператора Лапласа по переменным $x \in \mathbb{R}^n$ и t . В [26] к решению краевой задачи для уравнения смешанного типа в постановке В. Н. Врагова применен модифицированный метод Галёркина и получена оценка его погрешности. В [27] аналогичные результаты получены для первой краевой задачи. Вопросам оценки погрешности метода Галёркина для других классов уравнений посвящены, например, [28–30].

Работа выполнена в рамках Государственного задания Минобрнауки России на 2014–2016 годы (проект №3047).

© 2016 Федоров В. Е., Тихонова И. М.

2. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная односвязная область с гладкой границей S . Положим

$$Q = \Omega \times (0, T), \quad S_T = S \times (0, T), \quad T = \text{const} > 0; \quad \Omega_t = \Omega \times \{t\}, \quad t \in [0, T].$$

В цилиндрической области Q рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv k(x, t)u_{tt} - \Delta u + a(x, t)u_t + c(x)u = f(x, t). \quad (1)$$

Коэффициент $k(x, t)$ может менять знак внутри области Q произвольным образом, поэтому уравнение (1) является уравнением смешанного типа с произвольным многообразием изменения типа.

Предполагается, что коэффициенты уравнения (1) — гладкие функции. Введем множества

$$P_0^\pm = \{(x, 0) : x \in \Omega, k(x, 0) \gtrless_0\}, \quad P_T^\pm = \{(x, T) : x \in \Omega, k(x, T) \gtrless_0\}.$$

Краевая задача. Найти в области Q решение уравнения (1) такое, что

$$u|_{S_T} = 0, \quad (2)$$

$$u_t|_{\overline{P}_0^-} = 0, \quad u|_{\overline{P}_T^+} = 0, \quad u_t|_{t=T} = 0. \quad (3)$$

Впервые постановка краевой задачи (1)–(3) рассмотрена авторами в [31], где была использована другая методика — нестационарный метод Галёркина с привлечением метода ε -регуляризации. В настоящей работе используется стационарный метод Галёркина, а также получена оценка его погрешности через собственные значения спектральной задачи для $(n+1)$ -мерного уравнения Лапласа по $x \in \mathbb{R}^n$ и t .

3. Априорные оценки. Через C_L обозначим класс гладких функций, удовлетворяющих условиям (2), (3). В работе [31] доказано следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой и выполнены условия:

$$k(x, 0) < 0, \quad k(x, T) < 0, \quad a - \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0.$$

Тогда существуют неотрицательные функции $\xi(t), \eta(t) \in C^\infty[0, T]$ такие, что для любой $u \in C_L$ имеет место неравенство

$$(Lu, \xi u_t + \eta u) \geq C_1 \|u\|_1^2, \quad C_1 = \text{const} > 0. \quad (4)$$

Следствие 1. Пусть выполнены все условия леммы 1. Тогда краевая задача (1)–(3) может иметь не более одного решения из пространства $W_2^2(Q)$.

Лемма 2. Пусть выполнены условия

$$k(x, t) \equiv k(t), \quad k(0) < 0, \quad k(T) < 0, \quad a \pm \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0.$$

Тогда существуют неотрицательные функции $\xi(t), \eta(t) \in C^\infty[0, T]$ такие, что для всех функций $u \in C_L$ имеет место неравенство

$$(Lu, \xi \tilde{\Delta} u_t + \eta \tilde{\Delta} u) \geq C_2 \int_Q \left[u_{tt}^2 + \sum_{i=1}^n u_{tx_i}^2 + (\Delta u)^2 \right] dQ - C_3 \|u\|_1^2, \quad C_2, C_3 > 0, \quad (5)$$

где $\tilde{\Delta} u = -u_{tt} - \Delta u$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $k(0) < 0$, $k(T) < 0$, существуют положительные числа $t_0 < T_0 < T$, δ_1 такие, что

$$k(t) \leq -\delta_1 < 0, \quad 0 \leq t \leq t_0; \quad k(t) \leq -\delta_1 < 0, \quad T_0 \leq t \leq T.$$

Функции $\xi(t), \eta(t)$ выбираем следующим образом:

$$\xi(t) \geq 0, \quad \xi(0) = \xi(T) = 0, \quad \xi(t) = \mu, \quad t_0 \leq t \leq T_0,$$

$$\xi_t \geq 0, \quad 0 \leq t \leq t_0; \quad \xi_t \leq 0, \quad T_0 \leq t \leq T,$$

$$\eta(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}\xi_t + 1, & 0 \leq t \leq t_0, \\ 1, & t_0 \leq t \leq T_0, \\ -\frac{1}{2}\xi_t + 1, & T_0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

При этом число μ удовлетворяет условию $\mu \geq 2\delta^{-1}(\max_Q |k| + \delta_1)$. В силу такого выбора функций $\xi(t), \eta(t)$ получаем

$$\left(a - \frac{1}{2}k_t\right) \xi - k \left(\eta + \frac{1}{2}\xi_t\right) + \left(\eta - \frac{3}{2}\xi_t\right) \geq \delta_1 + 1,$$

$$\left(a + \frac{1}{2}k_t\right) \xi - k \left(\eta - \frac{1}{2}\xi_t\right) \geq \delta_1,$$

$$\eta - \frac{1}{2}\xi_t \geq 1, \quad \eta - \frac{3}{2}\xi_t \geq 1, \quad \eta + \frac{1}{2}\xi_t \geq 1.$$

Для $u \in C_L$ после интегрирования по частям с учетом условий (2), (3) получаем

$$\begin{aligned} (Lu, \xi \tilde{\Delta} u_t + \eta \tilde{\Delta} u) = & \int_Q \left\{ \left[\left(a + \frac{1}{2}k_t\right) \xi - k \left(\eta - \frac{1}{2}\xi_t\right) \right] u_{tt}^2 + \left(\eta - \frac{1}{2}\xi_t\right) (\Delta u)^2 + \right. \\ & \left. + \left[\left(a - \frac{1}{2}k_t\right) \xi - k \left(\eta + \frac{1}{2}\xi_t\right) + \left(\eta - \frac{3}{2}\xi_t\right) \right] \sum_{i=1}^n u_{tx_i}^2 \right\} dQ + \dots, \quad (6) \end{aligned}$$

где многоточием обозначены подчиненные члены. Используя неравенство Коши и теоремы вложения [17], из равенства (6) получаем априорную оценку (5).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Априорная оценка (4) остается справедливой и для новых функций $\xi(t), \eta(t)$ из доказательства леммы 2.

4. Разрешимость задачи. Пусть функции $\{\varphi_k(x, t)\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормированы в $L_2(Q)$ и являются решением спектральной задачи

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}v &\equiv -v_{tt} - \Delta v = \lambda v, & (x, t) \in Q, \\ v|_{S_T} &= 0, \quad v_t|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=T} = 0.\end{aligned}\tag{7}$$

В дальнейшем будем считать, что собственные числа задачи (7) пронумерованы следующим образом: $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$, и $\lambda_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$. Положим

$$\psi_k(x, t) = \xi(t)\varphi_{kt}(x, t) + \eta(t)\varphi_k(x, t),$$

где $\xi(t), \eta(t)$ из леммы 2.

Теорема 1. Функции $\{\psi_k(x, t)\}_{k=1}^{\infty}$ линейно независимы, и множество их линейных комбинаций плотно в $L_2(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 полностью совпадает с доказательством теоремы 1 в [22].

Теорема 2. Пусть выполнены условия лемм 1, 2. Тогда для любой функции $f \in L_2(Q)$ такой, что $f_t \in L_2(Q)$, существует единственное регулярное решение краевой задачи (1)–(3) из пространства $W_2^2(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приближенное решение краевой задачи (1)–(3) ищется в виде

$$u^N = \sum_{k=1}^N c_k^N \varphi_k(x, t).$$

Коэффициенты c_k^N определяются как решение системы алгебраических уравнений

$$(Lu^N, \psi_k) = (f, \psi_k), \quad k = \overline{1, N}.\tag{8}$$

Из равенств (8) нетрудно получить соотношения

$$\begin{aligned}(Lu^N, \xi u_t^N + \eta u^N) &= (f, \xi u_t^N + \eta u^N), \\ (Lu^N, \xi \tilde{\Delta} u_t^N + \eta \tilde{\Delta} u^N) &= (f, \xi \tilde{\Delta} u_t^N + \eta \tilde{\Delta} u^N).\end{aligned}$$

Отсюда с учетом гладкости функций $\varphi_k(x, t)$ и лемм 1 и 2 вытекает, что для приближенных решений u^N справедливы априорные оценки (4), (5). Следовательно, существуют подпоследовательность $u^{N_k}(x, t)$ и функция $u(x, t) \in W_2^2(Q)$ такие, что $u^{N_k} \rightarrow u$ слабо в $W_2^2(Q)$. При этом справедлива оценка

$$\|u\|_2 \leq C_4(\|f\| + \|f_t\|), \quad C_4 > 0.$$

Переходя к пределу при $N_k \rightarrow \infty$ в равенстве (8), получаем

$$\int_Q \left[ku_{tt} - \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} + a(x, t)u_t + c(x)u \right] \psi_k dQ = \int_Q f(x, t) \psi_k dQ, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тем самым в силу теоремы 1 уравнение $Lu = f(x, t)$ выполняется для почти всех $(x, t) \in Q$ и краевые условия (2), (3) удовлетворяются в среднем. Теорема 2 доказана.

5. Оценка погрешности.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для погрешности стационарного метода Галёркина справедлива оценка

$$\|u - u^N\|_1 \leq C_5(\|f\| + \|f_t\|)\lambda_{N+1}^{-1/4}, \quad C_5 > 0,$$

где постоянная C_5 не зависит от N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 2 краевая задача (1)–(3) имеет единственное решение $u \in W_2^2(Q)$. Имеем разложение функции $u(x, t)$ в ряд Фурье:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k, \quad c_k = (u, \varphi_k). \quad (9)$$

При этом ряд (9) сходится в $W_2^1(Q)$ и $L_2(Q)$. Из уравнений (8) получаем равенства

$$(Lu, \psi_k) = (f, \psi_k), \quad k = \overline{1, N}. \quad (10)$$

С другой стороны, в силу равенства Парсеваля имеет место неравенство

$$\sum_{l=1}^{\infty} c_l^2 \lambda_l^2 = \|\tilde{\Delta}u\|^2 \leq C_6(\|f\|^2 + \|f_t\|^2), \quad C_6 > 0. \quad (11)$$

Пусть H_N — линейное подпространство $\dot{W}_2^1(Q)$, натянутое на $\varphi_1, \dots, \varphi_N$, и P_N — оператор проектирования на H_N . Из равенств (8), (10) нетрудно получить равенство

$$(L(u - u^N), \xi v_t + \eta v) = 0 \quad \forall v \in H_N.$$

Полагая в последнем равенстве $v = \omega - u^N$ с произвольной функцией ω из H_N , имеем

$$(L(u - u^N), \xi(u_t - u_t^N)) + \eta(u - u^N) = (L(u - u^N), \xi(u_t - \omega_t)) + \eta(u - \omega).$$

Отсюда в силу леммы 1 получаем оценку

$$\|u - u^N\|_1^2 \leq C_7(\|f\| + \|f_t\|)\|u - \omega\|_{1,1}, \quad C_7 > 0. \quad (12)$$

С другой стороны,

$$\|u - P_N u\|_1^2 \leq C_8 \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_k c_k^2 \leq C_8 \lambda_{N+1}^{-1} \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k^2, \quad C_9 > 0. \quad (13)$$

Из неравенства (12), полагая в нем $\omega = P_N u$ и используя (11), (13), получаем оценку погрешности стационарного метода Галёркина.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gellerstedt S. Sur un probleme aux limites pour une equation lineaire aux derivees partielles du second ordre de tipe mixte. Uppsala: These, 1935.
2. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. М.: Гостехиздат, 1947.
3. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит, 1957.
4. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
5. Гудерлей К. Г. Теория околзвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
6. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970.
7. Салахитдинов М. С. Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент: ФАН, 1974.
8. Каратопраклиев Г. Д. Об одном классе уравнений смешанного типа в многомерных областях // Докл. АН СССР, 1976. Т. 230, № 4. С. 769–772.
9. Ларькин Н. А. Об одном классе нелинейных уравнений смешанного типа // Сиб. мат. журн, 1978. Т. 19, № 6. С. 343–348.
10. Врагов В. Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 6. С. 1098–1105.
11. Врагов В. Н. О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанно-составного типа // Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск: Наука, 1978. С. 5–13.
12. Терехов А. Н. Краевая задача для уравнения смешанного типа // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1979. С.128–136.
13. Джураев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: ФАН, 1979.
14. Врагов В. Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ, 1983.
15. Моисеев Е. И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
16. Кузьмин А. Г. Неклассические уравнения смешанного типа и их приложение к газодинамике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1990.
17. Егоров И. Е., Федоров В. Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995.
18. Егоров И. Е., Федоров В. Е. Введение в теорию уравнения смешанного типа второго порядка. Якутск: Изд-во Якутск. ун-та, 1998.
19. Егоров И. Е., Федоров В. Е. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа высокого порядка // Мат. заметки ЯГУ. 1999. Т. 6, вып. 1. С. 26–35.
20. Чуешев А. В. Разрешимость краевых задач для уравнений смешанного типа высокого порядка / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск: НГУ, 2001.
21. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
22. Егоров И. Е., Тихонова И. М. О стационарном методе Галёркина для уравнения смешанного типа второго порядка // Мат. заметки ЯГУ, 2010. Т. 17, вып. 2. С. 41–47.
23. Егоров И. Е., Тихонова И. М. Применение стационарного метода Галёркина для уравнения смешанного типа // Мат. заметки ЯГУ, 2012. Т. 19, вып. 2. С. 20–28.
24. Егоров И. Е., Тихонова И. М. О скорости сходимости стационарного метода Галёркина для уравнения смешанного типа // Вестн. Южно-Уральск. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2012, № 14, С. 53–58.
25. Тихонова И. М. Оценка погрешности стационарного метода Галёркина для задачи А. Н. Терехова // XVII и XVIII Лаврентьевские чтения: Сб. статей науч. конф. школьников, студентов, аспирантов и молодых ученых Республики Саха (Якутия). 2015. С. 69–72.
26. Егоров И. Е., Тихонова И. М. Применение модифицированного метода Галёркина к уравнению смешанного типа // Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 4. С. 14–19.
27. Егоров И. Е. Применение модифицированного метода Галёркина к первой краевой задаче для уравнения смешанного типа // Мат. заметки СВФУ, 2015. Т. 22, № 3. С. 3–10.
28. Джишкарини А. В. О быстроте сходимости метода Бубнова — Галёркина // Журн. вычисл. математики и мат. физики 1964. Т. 4, № 2. С. 343–348.

- 29. Виноградова П. В., Зарубин А. Г. Оценка погрешности метода Галёркина для нестационарных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 9, С. 1643–1651.
- 30. Виноградова П. В., Королева Т. Э. О равномерной оценке скорости сходимости метода Галёркина для нелинейного уравнения третьего порядка // Мат. заметки СВФУ, 2014. Т. 21, № 2. С. 3–7.
- 31. Тихонова И. М., Федоров В. Е. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа второго порядка // Мат. заметки ЯГУ, 2010. Т. 17, вып. 2. С. 109–117.

Статья поступила 12 ноября 2016 г.

Федоров Валерий Евстафьевич, Тихонова Ирина Михайловна
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
Научно-исследовательский институт математики,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
FedorovVE58@mail.ru, Irinamikh3007@mail.ru

THE STATIONARY GALËRKIN METHOD
FOR A BOUNDARY VALUE PROBLEM
FOR A MIXED SECOND-ORDER EQUATION

V. E. Fedorov and I. M. Tikhonova

Abstract: We prove the existence of the unique regular solution for the boundary value problem for the mixed type second-order equation in the Sobolev space. The stationary Galërkin method is applied, for which the error estimate is obtained using eigenvalues of the spectral problem for the Laplace equation in the variables $x \in \mathbb{R}^n$ and t .

Keywords: mixed type equation, boundary value problem, a priori estimate, stationary Galërkin method, error.

REFERENCES

1. Gellerstedt S., Sur un probleme aux limites pour une equation lineaire aux derivees partielles du second ordre de tipe mixte, These, Uppsala (1935).
2. Tricomi F. C., Linear Equations of Mixed Type [in Russian], Gostekhizdat, Moscow (1947).
3. Tricomi F. C., Lectures on Partial Differential Equations [in Russian], Izdat. Inostr. Lit., Moscow (1957).
4. Bitsadze A. V., Equations of Mixed Type [in Russian], Akad. Nauk SSSR, Moscow (1959).
5. Guderley K. G., The Theory of Transonic Flows [in Russian], Izdat. Inostr. Lit., Moscow (1962).
6. Smirnov M. M., Equations of Mixed Type [in Russian], Nauka, Moscow (1970).
7. Salakhitdinov M. S., Equations of Mixed-Composite Type [in Russian], Fan, Tashkent (1974).
8. Karatoprakliev G. D., "A class of mixed-type equations in multidimensional domains," Dokl. AN SSSR, **230**, No. 4, 769–772 (1976).
9. Lar'kin N. A. "One class of nonlinear equations of mixed type," Sib. Math. J., **19**, No. 6, 919–924 (1978).
10. Vragov V. N. "On the theory of boundary-value problems for mixed-type equations in space," Differ. Uravn., **13**, No. 6, 1098–1105 (1977).
11. Vragov V. N. "On the formulation and the solvability of boundary value problems for mixed-composite type equations," in: Matematicheskiy Aanaliz i Smejniye Voprosi Matematiki, Nauka, Novosibirsk, 1978, pp. 5–13.
12. Terekhov A. N. "A boundary value problem for mixed type equation," in: Primenenie Metodov Funktsional'nogo Analiza k Zadacham Matematicheskoi Fiziki i Vyshislitel'noi Matematiki, IM SO AN SSSR, Novosibirsk, 1979, pp. 128–136.
13. Djuraev T. D., Boundary Value Problems for Equations of Mixed and Mixed-Composite Types [in Russian], FAN, Tashkent (1979).
14. Vragov V. N., Boundary Value Problems for Nonclassical Equations of Mathematical Physics [in Russian], Novosibirsk Univ., Novosibirsk (1983).
15. Moiseev E. I., Equations of Mixed Type with a Spectral Parameter, MGU, Moscow (1988).
16. Kuzmin A. G., Non-classical Mixed Type Equations and Their Application in Gas Dynamics [in Russian], LGU, Leningrad (1990).
17. Egorov I. E. and Fedorov V. E., High-Order Nonclassical Equations of Mathematical Physics, Vychisl. Tsentr SO RAN, Novosibirsk (1995).

18. Egorov I. E. and Fedorov V. E., Introduction to the Theory of Mixed Type Equations of Second Order, Yakutsk Univ., Yakutsk (1998).
19. Egorov I. E. and Fedorov V. E. "About a boundary value problem for mixed type equation of high order," Mat. Zamet. YAGU, **6**, No. 1, 26–35 (1999).
20. Chueshev A. B. The solvability of boundary value problems for mixed type equations of high order, Diss. ... kand. fiz.-mat. nauk, Novosib. Gos. Univ., Novosibirsk (2001).
21. Ladyzhenskaya O. A., Boundary Value Problems of Mathematical Physics, Nauka, Moscow (1985).
22. Egorov I. E. and Tikhonova I. M. "Stationary Galerkin method for a mixed second-order equation," Mat. Zamet. YAGU, **17**, No. 2, 41–47 (2010).
23. Egorov I. E. and Tikhonova I. M. "Application of the stationary Galerkin method to an equation of mixed type," Mat. Zamet. YAGU, **19**, No. 2, 20–28 (2012).
24. Egorov I. E. and Tikhonova I. M. "About convergence speed of the stationary Galerkin method for a mixed type equation," Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Univ., Ser. Mat. Model. Program., **40**, No. 14, 53–58 (2012).
25. Tikhonova I. M. "Error estimates for the stationary Galerkin method for the Terekhov problem," in: Sbornik statei nauchn. konf. "XVII i XVIII Lavrentievskie Chteniya", Izdat. MCNIP, Kirov, 2015, pp. 69–72.
26. Egorov I. E. and Tikhonova I. M. "Application of the modified Galerkin method for a mixed-type equation," Mat. Zamet. SVFU, **21**, No. 3, 14–19 (2014).
27. Egorov I. E. "Application of the modified Galerkin method for the first boundary problem for a mixed type equation," Mat. Zamet. SVFU, **22**, No. 3, 14–19 (2015).
28. Dzhashkariani A. V. "On the rate of convergence of the Bubnov–Galerkin method," USSR Comput. Math. Math. Phys., **4**, No. 2, 183–189 (1964).
29. Vinogradova P. V. and Zarubin A. G. "Error estimates for the Galerkin method as applied to time-dependent equations," Comput. Math. Math. Phys., **49**, No. 9, 1567–1575 (2009).
30. Vinogradova P. V. and Koroleva T. E. "Uniform estimation of the convergence rate of the Galerkin method for a third-order nonlinear equation," Mat. Zamet. SVFU, **21**, No. 2, 3–7 (2014).
31. Tikhonova I. M. and Fedorov V. E. "On one boundary value problem for a mixed second-order equation," Mat. Zamet. YAGU, **17**, No. 2, 109–117 (2010).

Submitted November 12, 2016

Fedorov Valery Evstafievich, Tikhonova Irina Mikhailovna
 M. K. Ammosov North-Eastern Federal University,
 Research Institute of Mathematics,
 Kulakovskii Street, 48, Yakutsk 677000, Russia
 FedorovVE58@mail.ru, Irinamikh3007@mail.ru