

ОБ ОДНОЙ НЕСТАНДАРТНОЙ
ЗАДАЧЕ СОПРЯЖЕНИЯ
ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
А. И. Кожанов, С. В. Потапова

Аннотация. Исследована разрешимость в классах регулярных решений одной задачи сопряжения для эллиптических уравнений с нестандартными граничными условиями и условиями сопряжения на плоскости $x = 0$. Область, в которой рассматривается задача сопряжения, является параллелепипедом Q . На нижней границе Q условие задается для самой функции в области, где $x > 0$, и для ее частной производной по t в области, где $x < 0$, а при переходе через плоскость $x = 0$ эти условия «перекручиваются» и на верхней границе Q условие для самой функции уже задается в области, где $x < 0$, а для ее частной производной по t — в области, где $x > 0$. Путем сочетания метода регуляризации и метода продолжения по параметру доказаны теоремы единственности и существования регулярных (имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение) решений этой задачи сопряжения.

Ключевые слова: задача сопряжения, регулярное решение, условия склеивания (сопряжения), эллиптическое уравнение, разрывные граничные условия.

1. Введение

Одним из методов исследования разрешимости краевых задач для параболических уравнений является метод эллиптической регуляризации [1, 2]. Если при этом само параболическое уравнение имеет некоторые особенности, в частности, является уравнением с меняющимся направлением эволюции [3–8], то возникающая при эллиптической регуляризации краевая задача при наличии условий склеивания (сопряжения) окажется нестандартной и ранее неизученной. Именно такая ситуация будет рассмотрена в настоящей работе и, как представляется авторам, полученный результат имеет самостоятельное значение.

Приведем постановку задачи. Пусть Q — параллелепипед $(-1, 1) \times (0, T) \times (0, A)$, $0 < T, A < +\infty$, $f(x, t, a)$ — заданная при $(x, t, a) \in \overline{Q}$ функция, α и β — заданные действительные числа. Обозначим

$$Q^+ = \{(x, t, a) : (x, t, a) \in Q, x > 0\},$$

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-01-06582), работа второго автора выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках базовой части государственного задания (проект № 3047).

$$Q^- = \{(x, t, a) : (x, t) \in Q, x < 0\},$$

$$Q_1 = Q^+ \cup Q^-.$$

Краевая задача. Найти функцию $u(x, t, a)$, являющуюся на множестве Q_1 решением уравнения

$$\Delta u = f(x, t, a) \quad (1)$$

и такую, что для нее выполняются граничные условия

$$u(-1, t, a) = u(1, t, a) = 0, \quad (t, a) \in (0, T) \times (0, A); \quad (2)$$

$$u(x, T, a) = u_t(x, 0, a) = 0, \quad (x, a) \in (-1, 0) \times (0, A); \quad (3)$$

$$u_t(x, T, a) = u(x, 0, a) = 0, \quad (x, a) \in (0, 1) \times (0, A);$$

$$u(x, t, 0) = u_a(x, t, A) = 0, \quad (x, t) \in (-1, 1) \times (0, T), \quad (4)$$

а также условия сопряжения

$$u(+0, t, a) = \alpha u(-0, t, a), \quad (t, a) \in (0, T) \times (0, A);$$

$$u_x(-0, t, a) = \beta u_x(+0, t, a), \quad (t, a) \in (0, T) \times (0, A). \quad (5)$$

Отметим, что граничные условия (3) являются разрывными и «перекрученными», т. е., например, на нижней границе параллелепипеда Q при $t = 0$ условие задается для самой функции $u(x, t, a)$ в области, где $x > 0$, и для ее производной $u_t(x, t, a)$ — в области, где $x < 0$, а при переходе через плоскость $x = 0$ эти условия «перекручиваются» (меняются местами) и на верхней границе параллелепипеда Q при $t = T$ условие для самой функции $u(x, t, a)$ уже задается в области, где $x < 0$, а для ее производной $u_t(x, t, a)$ — в области, где $x > 0$. Такие условия встречаются в задачах Жевре, например, для параболических уравнений с меняющимся направлением времени [3–8], для некоторых неклассических уравнений отметим работы [6, 9–12].

2. Разрешимость краевой задачи

Пусть V_0 — линейное пространство

$$V_0 = \{v(x, t, a) : v \in W_2^2(Q^+), v \in W_2^2(Q^-)\}$$

с нормой

$$\|v\|_{V_0} = (\|v\|_{W_2^2(Q^+)}^2 + \|v\|_{W_2^2(Q^-)}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что V_0 с такой нормой является банаховым пространством.

Теорема 1. Пусть выполняется условие

$$\alpha\beta \geq 0. \quad (6)$$

Тогда краевая задача (1)–(5) имеет в пространстве V_0 не более одного решения $u(x, t, a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x, t, a)$ — решение краевой задачи (1)–(5) такое, что $u(x, t, a) \in V_0$, и пусть в уравнении (1) выполняется $f(x, t) \equiv 0$. Если

$\alpha = 0$, то из первого условия (5), условий (2)–(4) и однородного уравнения (1) вытекает, что $u(x, y, t) \equiv 0$ в Q^+ . Но тогда условие (5) преобразуется к виду $u(+0, y, t) = u_x(-0, y, t) = 0$. Эти условия, условия (2)–(4) и однородное уравнение (1) дают тождество $u(x, t, a) \equiv 0$ в Q^- . Таким образом, $u(x, t, a) \equiv 0$ в Q_1 . Если $\beta = 0$, то аналогично можно показать, что решение $u(x, t, a)$ краевой задачи (1)–(5) единственно в V_0 .

Пусть теперь $\alpha, \beta \neq 0$. Уравнение (1) умножим на функцию $u(x, t, a)$, проинтегрируем по цилиндру Q^- , затем умножим на функцию $\gamma u(x, t, a)$, $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$, проинтегрируем по Q^+ и сложим. Получим равенство

$$\begin{aligned} \int_{Q^-} (u_t^2 + u_a^2 + u_x^2) dQ^- + \gamma \int_{Q^+} (u_t^2 + u_a^2 + u_x^2) dQ^+ \\ + \int_0^T \int_0^A [-u_x(-0, t, a)u(-0, t, a) + \gamma u_x(+0, t, a)u(+0, t, a)] dt da = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Вследствие условия (6) число γ положительно. Далее, условия сопряжения (5) дают равенство

$$\int_0^T \int_0^A [u_x(-0, t, a)u(-0, t, a) - \gamma u_x(+0, t, a)u(+0, t, a)] dt da = 0.$$

Тогда из равенства (7) и условий (2)–(4) следует, что функция $u(x, t, a)$ тождественно равна нулю в Q_1 . Это означает, что решение краевой задачи (1)–(5) единственно в V_0 . Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть выполняются условие (6) и условия

$$\begin{aligned} f(x, t, a) \in L_2(Q_1), \quad f_{tt}(x, t, a) \in L_2(Q_1), \quad f_{aa}(x, t, a) \in L_2(Q_1); \\ f(x, T, a) = f_t(x, 0, a) = 0, \quad (x, a) \in (-1, 0) \times (0, A); \\ f(x, 0, a) = f_t(x, T, a) = 0, \quad (x, a) \in (0, 1) \times (0, A); \\ f(x, t, 0) = f(x, t, A) = 0, \quad (x, t) \in (-1, 1) \times (0, T). \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда краевая задача (1)–(5) имеет решение $u(x, t, a)$, принадлежащее пространству V_0 .

Доказательство. Воспользуемся методом регуляризации. Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x, t, a)$, являющуюся в Q_1 решением уравнения

$$\varepsilon(u_{xxxxxx} + u_{xxxxxx}) + \Delta u = f(x, t, a) \quad (9)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2)–(5), а также условия

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, T, a) = u_{ttt}(x, 0, a) = 0, \quad (x, a) \in (-1, 0) \times (0, A); \\ u_{tt}(x, 0, a) = u_{ttt}(x, T, a) = 0, \quad (x, a) \in (0, 1) \times (0, A); \end{aligned} \quad (10)$$

$$u_{aa}(x, t, 0) = u_{aaa}(x, t, A) = 0, \quad (x, t) \in (-1, 1) \times (0, T). \quad (11)$$

Пусть V_1 — линейное пространство

$$V_1 = \{v(x, t, a) : v \in V_0, v_{xxtttt} \in L_2(Q^+), v_{xxaaaa} \in L_2(Q^+), \\ v_{xxtttt} \in L_2(Q^-), v_{xxaaaa} \in L_2(Q^-)\}$$

с нормой

$$\|v\|_{V_1} = \left(\|v\|_{V_0}^2 + \int_{Q^+} (v_{xxtttt}^2 + v_{xxaaaa}^2) dQ^+ + \int_{Q^-} (v_{xxtttt}^2 + v_{xxaaaa}^2) dQ^- \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Покажем, что регуляризованная краевая задача (9), (2)–(5), (10), (11) при фиксированном ε разрешима в пространстве V_1 для любой функции $f(x, t, a) \in L_2(Q)$.

Воспользуемся методом продолжения по параметру. Пусть λ — число из отрезка $[0, 1]$. Рассмотрим семейство краевых задач: *найти функцию $u(x, t, a)$ являющуюся в Q_1 решением уравнения (9) и такую, что выполняются условия (2)–(4), (10), (11), а также*

$$\begin{aligned} u(+0, t, a) &= \lambda \alpha u(-0, t, a), \quad (t, a) \in (0, T) \times (0, A); \\ u_x(-0, t, a) &= \lambda \beta u_x(+0, t, a), \quad (t, a) \in (0, T) \times (0, A). \end{aligned} \quad (12)$$

Пусть Λ — множество тех чисел λ из отрезка $[0, 1]$, для которых краевая задача (9), (2)–(4), (10)–(12) при фиксированном ε имеет решение, принадлежащее пространству V_1 . Если множество Λ непусто, открыто и замкнуто, то оно совпадает со всем отрезком $[0, 1]$ (см. [13]).

Множество Λ непусто, так как при $\lambda = 0$ краевая задача распадается на две независимые задачи в подобластях Q^+ и Q^- , разрешимость которых в классах регулярных решений известна (см. [14]).

Для доказательства открытости и замкнутости множества Λ достаточно показать, что для всевозможных решений $u(x, t, a) \in V_1$ краевой задачи (9), (2)–(4), (10)–(12) имеет место равномерная по λ априорная оценка

$$\|u\|_{V_1} \leq N \|f\|_{L_2(Q_1)}. \quad (13)$$

Покажем, что искомая оценка действительно имеет место. Пусть $\alpha \neq 0$. Уравнение (9) умножим на функцию $u_{xx}(x, t, a)$, проинтегрируем по цилиндру Q^- , уравнение (9) умножим на функцию $\gamma u_{xx}(x, t, a)$, $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$, проинтегрируем по цилиндру Q^+ и сложим. При выполнении условий (2)–(4), (10)–(12) получим равенство

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{Q^-} (u_{xxtt}^2 + u_{xxaa}^2) dQ^- + \varepsilon \int_{Q^+} (u_{xxtt}^2 + u_{xxaa}^2) dQ^+ \\ + \int_{Q^-} (u_{xt}^2 + u_{xa}^2 + u_{xx}^2) dQ^- + \int_{Q^+} (u_{xt}^2 + u_{xa}^2 + u_{xx}^2) dQ^+ \\ = \int_{Q^-} f u_{xx} dQ^- + \int_{Q^+} f u_{xx} dQ^+. \end{aligned} \quad (14)$$

Отметим, что согласно условию (6) число γ положительно. Применив неравенство Юнга к правой части (14), получим первую оценку:

$$\varepsilon \int_{Q^-} (u_{xttt}^2 + u_{xaaa}^2) dQ^- + \varepsilon \int_{Q^+} (u_{xttt}^2 + u_{xaaa}^2) dQ^+ \leq C_1 \|f\|_{L_2(Q_1)}^2, \quad (15)$$

где $C_1 > 0$ определяется числами α, β .

Чтобы получить оценки для производных высокого порядка, определим функции $z(x, t, a)$ и $v(x, t, a)$:

$$\begin{aligned} z(x, t, a) &= u(x, t, a) - \lambda\beta(1+x)u_x(+0, t, a), \quad (x, t, a) \in Q^-; \\ v(x, t, a) &= u(x, t, a) - \lambda\alpha(1-x)u(-0, t, a), \quad (x, t, a) \in Q^+. \end{aligned} \quad (16)$$

Заметим, что функция $u(x, t, a)$ однозначно вычисляется через функции $z(x, t, a)$ и $v(x, t, a)$:

$$\begin{aligned} u(x, t, a) &= z(x, t, a) + \frac{\lambda\beta(1+x)}{1+\lambda^2\alpha\beta} [v_x(+0, t, a) - \lambda\alpha z(-0, t, a)], \quad (x, t, a) \in Q^-; \\ u(x, t, a) &= v(x, t, a) + \frac{\lambda\alpha(1-x)}{1+\lambda^2\alpha\beta} [z_x(-0, t, a) + \lambda\beta v_x(+0, t, a)], \quad (x, t, a) \in Q^+; \end{aligned} \quad (17)$$

кроме того, выполняются равенства

$$\begin{aligned} z(-1, t, a) &= z_x(-0, t, a) = 0, \\ z(x, T, a) &= z_t(x, 0, a) = z_{tt}(x, T, a) = z_{ttt}(x, 0, a) = 0, \\ z(x, t, 0) &= z_a(x, t, A) = z_{aa}(x, t, 0) = z_{aaa}(x, 0, A) = 0, \quad (x, t, a) \in Q^-; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} v(1, t, a) &= v(+0, t, a) = 0, \\ v(x, 0, a) &= v_t(x, T, a) = v_{tt}(x, 0, a) = v_{ttt}(x, T, a) = 0, \\ v(x, t, 0) &= v_a(x, t, A) = v_{aa}(x, t, 0) = v_{aaa}(x, 0, A) = 0, \quad (x, t, a) \in Q^+. \end{aligned} \quad (19)$$

Уравнение (9) преобразуется в следующие уравнения для функций $z(x, t, a)$ и $v(x, t, a)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon(z_{xtttt} + z_{xaaaa}) + \Delta z &= f(x, t, a) + \frac{\lambda\beta(1+x)}{1+\lambda^2\alpha\beta} [v_{xtt}(+0, t, a) \\ &\quad - \lambda\alpha z_{tt}(-0, t, a) + v_{xaa}(+0, t, a) - \lambda\alpha z_{aa}(-0, t, a)], \quad (x, t, a) \in Q^-; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(v_{xtttt} + v_{xaaaa}) + \Delta v &= f(x, t, a) + \frac{\lambda\alpha(1-x)}{1+\lambda^2\alpha\beta} [\lambda\beta v_{xtt}(+0, t, a) \\ &\quad + z_{tt}(-0, t, a) + \lambda\beta v_{xaa}(+0, t, a) + z_{aa}(-0, t, a)], \quad (x, t, a) \in Q^+. \end{aligned} \quad (21)$$

Уравнения (20), (21) вместе с условиями (18), (19) дают краевую задачу для функций $z(x, t, a)$ и $v(x, t, a)$, эквивалентную вследствие взаимно однозначной связи (16), (17) задаче (9), (2)–(4), (10)–(12). Поэтому вначале установим открытость и замкнутость множества Λ на семействе задач (20), (21), (18), (19),

а из этого будет следовать открытость и замкнутость множества Λ для семейства задач (9), (2)–(4), (10)–(12). Отметим, что для решений $z(x, t, a)$ и $v(x, t, a)$ в силу их взаимно однозначной связи (16), (17) сохранится оценка (15).

Уравнение (20) умножим на функцию $[z_{xxtttt}(x, t, a) + z_{xxaaaa}(x, t, a)]$, проинтегрируем по Q^- , уравнение (21) умножим на $[v_{xxtttt}(x, t, a) + v_{xxaaaa}(x, t, a)]$, проинтегрируем по Q^+ и сложим. При выполнении граничных условий (18), (19) получим равенство

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \int_{Q^-} (z_{xxtttt}^2 + 2z_{xxttaa}^2 + z_{xxaaaa}^2) dQ^- + \varepsilon \int_{Q^+} (v_{xxtttt}^2 + 2v_{xxttaa}^2 + v_{xxaaaa}^2) dQ^+ \\
& + \int_{Q^-} (z_{xttt}^2 + z_{xaaa}^2 + z_{xtta}^2 + z_{xtaa}^2 + z_{xtt}^2 + z_{xaa}^2) dQ^- \\
& + \int_{Q^+} (v_{xttt}^2 + v_{xaaa}^2 + v_{xtta}^2 + v_{xtaa}^2 + v_{xtt}^2 + v_{xaa}^2) dQ^+ \\
& = \int_{Q^-} f[z_{xxtttt} + z_{xxaaaa}] dQ^- + \int_{Q^-} \left(\frac{\lambda\beta(1+x)}{1+\lambda^2\alpha\beta} [v_{xtt}(+0, t, a) - \lambda\alpha z_{tt}(-0, t, a) \right. \\
& \quad \left. + v_{xaa}(+0, t, a) - \lambda\alpha z_{aa}(-0, t, a)] \right) [z_{xxtttt} + z_{xxaaaa}] dQ^- \\
& + \int_{Q^+} f[v_{xxtttt} + v_{xxaaaa}] dQ^+ + \int_{Q^+} \left(\frac{\lambda\alpha(1-x)}{1+\lambda^2\alpha\beta} [\lambda\beta v_{xtt}(+0, t, a) + z_{tt}(-0, t, a) \right. \\
& \quad \left. + \lambda\beta v_{xaa}(+0, t, a) + z_{aa}(-0, t, a)] \right) [v_{xxtttt} + v_{xxaaaa}] dQ^+. \quad (22)
\end{aligned}$$

Правую часть (22) оценим с помощью неравенства Юнга и неравенств

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^A \varphi^2(+0, t, a) dt da & \leq C \int_{Q^+} \varphi_x^2(x, t, a) dQ^+, \\
\int_0^T \int_0^A \psi^2(-0, t, a) dt da & \leq C \int_{Q^-} \psi_x^2(x, t, a) dQ^-,
\end{aligned}$$

где C — некоторая положительная константа. Тогда в правой части получившегося неравенства будут интегралы от функций $v_{xxtt}^2(x, t, a)$, $z_{xxtt}^2(x, t, a)$, $v_{xaa}^2(x, t, a)$, $z_{xaa}^2(x, t, a)$, для которых, как отмечалось выше, справедлива оценка (15) в силу взаимно однозначной связи (16), (17). Тем самым получим априорную оценку

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \int_{Q^-} (z_{xxtttt}^2 + z_{xxaaaa}^2) dQ^- + \varepsilon \int_{Q^+} (v_{xxtttt}^2 + v_{xxaaaa}^2) dQ^+ \\
& + \int_{Q^-} (z_{xtt}^2 + z_{xaa}^2) dQ^- + \int_{Q^+} (v_{xtt}^2 + v_{xaa}^2) dQ^+ \leq C_2 \|f\|_{L_2(Q_1)}^2, \quad (23)
\end{aligned}$$

где положительное число C_2 определяется числами $\varepsilon, \alpha, \beta, C$.

Из этой оценки следует равномерная по параметру λ оценка (13) для решения краевой задачи (20), (21), (18), (19) при фиксированном ε . Следовательно, краевая задача (9), (2)–(5), (10), (11) ($\lambda = 1$) в силу взаимно однозначной связи (16), (17) при фиксированном ε также имеет решение $u(x, t, a)$, принадлежащее пространству V_1 для любой функции $f(x, t, a) \in L_2(Q_1)$.

Покажем, что для семейства решений $\{u_\varepsilon(x, t, a)\}$ краевой задачи (9), (2)–(5), (10), (11) имеет место априорная оценка, равномерная по ε и такая, что с ее помощью можно будет организовать процедуру предельного перехода.

Для этого повторим действия, с помощью которых получено равенство (22), т. е. уравнение (9) умножим на функцию $[u_{\varepsilon xxtttt}(x, t, a) + u_{\varepsilon xaaaa}(x, t, a)]$, проинтегрируем по Q^- , затем умножим на $\gamma[u_{\varepsilon xxtttt}(x, t, a) + u_{\varepsilon xaaaa}(x, t, a)]$, $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$, проинтегрируем по Q^+ и сложим. При выполнении условий (2)–(5), (10), (11) получим равенство (22), где в правой части будут лишь интегралы от функций $f[u_{\varepsilon xxtttt} + u_{\varepsilon xaaaa}]$ в соответствующих подобластях Q^+, Q^- . В этих интегралах выполним дважды интегрирование по частям по переменным t и a соответственно, затем применим неравенство Юнга. Тогда при выполнении условий (8) получим

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_{Q^-} (u_{\varepsilon xxtttt}^2 + u_{\varepsilon xaaaa}^2) dQ^- + \varepsilon \int_{Q^+} (u_{\varepsilon xxtttt}^2 + u_{\varepsilon xaaaa}^2) dQ^+ \\ & + \int_{Q^-} (u_{\varepsilon xxtt}^2 + u_{\varepsilon xaa}^2) dQ^- + \int_{Q^+} (u_{\varepsilon xxtt}^2 + u_{\varepsilon xaa}^2) dQ^+ \\ & \leq C_3 (\|f_{tt}\|_{L_2(Q_1)}^2 + \|f_{aa}\|_{L_2(Q_1)}^2), \quad (24) \end{aligned}$$

в котором число $C_3 > 0$ определяется только числами α, β . Из этой оценки следует априорная оценка

$$\|u_\varepsilon\|_{V_1}^2 \leq M (\|f_{tt}\|_{L_2(Q_1)}^2 + \|f_{aa}\|_{L_2(Q_1)}^2). \quad (25)$$

Из оценки (25) и свойства рефлексивности пространства L_2 следует, что существуют последовательность $\{\varepsilon_n\}$ положительных чисел и функция $u(x, t, a)$ такие, что при $n \rightarrow \infty$ выполняется

$$\varepsilon_n \rightarrow 0, \quad u_{\varepsilon_n}(x, t, a) \rightarrow u(x, t, a), \quad u_{\varepsilon_n tt}(x, t, a) \rightarrow u_{tt}(x, t, a),$$

$$u_{\varepsilon_n aa}(x, t, a) \rightarrow u_{aa}(x, t, a), \quad u_{\varepsilon_n xx}(x, t, a) \rightarrow u_{xx}(x, t, a)$$

слабо в пространстве $L_2(Q)$.

Очевидно, что предельная функция $u(x, y, t)$ принадлежит пространству V_0 , для нее в областях Q^+ и Q^- выполнены уравнение (1), а также краевые условия (2)–(4) и условия сопряжения (5). Другими словами, функция $u(x, y, t)$ дает решение краевой задачи (1)–(5) из требуемого класса. Теорема доказана.

3. Замечания

1. Теоремы 1 и 2 также справедливы, например, для квазиэллиптических уравнений

$$u_{tt} + (-1)^{m+1} \frac{\partial^{2m} u}{\partial a^{2m}} + u_{xx} = f(x, t, a), \quad m \geq 2,$$

с граничными условиями (2), (3), (5) и условиями

$$\left. \frac{\partial^k u(x, t, a)}{\partial a^k} \right|_{a=0} = \left. \frac{\partial^k u(x, t, a)}{\partial a^k} \right|_{a=A} = 0, \quad (x, t) \in (-1, 1) \times (0, T), \quad k = 0, \dots, m-1.$$

2. Вместо симметричного интервала $(-1, 1)$ переменной x можно рассмотреть произвольный интервал (a, b) .

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубинский Ю. А. Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях // Мат. сб. 1965. Т. 67. № 4. С. 609–642.
2. Олейник О. А., Радкевич Е. В. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой. М.: ВИНТИ, 1971.
3. Gevrey M. Sur les equations aux derivees partielles du type parabolique // J. Math. Appl. 1913. V. 9, №. 6. P. 305–478.
4. Ларькин Н. А., Новиков В. А., Яненко Н. Н. Нелинейные уравнения переменного типа. Новосибирск: Наука, 1983.
5. Терсенов С. А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985.
6. Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В. Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.
7. Кислов Н. В., Пулькин И. С. О существовании и единственности слабого решения задачи Жевре с обобщенными условиями склейки // Вестн. МЭИ. 2002. № 6. С. 88–92.
8. Петрушко И. М., Черных Е. В. О параболических уравнениях 2-го порядка с меняющимся направлением времени // Вестн. МЭИ. № 6. 2003. С. 85–93.
9. Джурраев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: ФАН. 1979.
10. Pyatkov S. G., Popov S., Antipin V. I. On solvability of boundary value problem for kinetic operator-differential equations // Integral Equ. Operator Theory, 2014. V. 80, No. 4, P. 557–580.
11. Антипин В. И. Разрешимость краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 2. С. 245–257.
12. Potapova S. V. Boundary value problems for pseudohyperbolic equations with a variable time direction // TWMS J. Pure Appl. Math. 2012. V. 3, N 1. P. 75–91.
13. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

14. Якубов С. Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985.

Статья поступила 28 августа 2016 г.

Кожанов Александр Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`kozhanov@math.nsc.ru`

Потапова Саргылана Викторовна
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
Научно-исследовательский институт математики,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
`sargyp@inbox.ru`

ON A NON-STANDARD CONJUGATION PROBLEM FOR ELLIPTIC EQUATIONS

A. I. Kozhanov and S. V. Potapova

Abstract. We investigate the regular solvability of the conjugation problem for elliptic equations with non-standard boundary conditions and sewing conditions on the plane $x = 0$. Let Q be a parallelepiped. On the bottom of Q we give a boundary condition for $u(x, t, a)$ in the part where $x > 0$ and for $u_t(x, t, a)$ in the part where $x < 0$. On the plane $x = 0$ these conditions "intertwist", so on the top of Q we give a boundary condition for $u(x, t, a)$ in the part where $x < 0$ and for $u_t(x, t, a)$ in the part where $x > 0$. Combining the regularization method and natural parameter continuation, we prove the uniqueness and existence theorems for regular solutions of this non-standard conjugation problem.

Ключевые слова: conjugation problem, regular solution, sewing condition, elliptic equation, discontinuous boundary conditions.

REFERENCES

1. Dubinskii Yu. A. "Weak convergence for nonlinear elliptic and parabolic equations," *Mat. Sb.*, **67**, No. 4, 609–642 (1965).
2. Oleinik O. A. and Radkevich E. V. "Second order equations with nonnegative characteristic form," *Itogi Nauki, Ser. Mat., Mat. Anal.* 1969, 7–252 (1971).
3. Gevrey M. "Sur les equations aux derivees partielles du type parabolique," *J. Math. Appl.* **9**, No. 6, 305–478 (1913).
4. Larkin N., Novikov B., and Yanenko N., *Non-linear mixed type equations* [in Russian], Nauka, Novosibirsk (1983).
5. Tersenov S. A., *The parabolic equations with changing time direction* [in Russian], *Inst. Math.*, Novosibirsk (1985).
6. Egorov I. E., Pyatkov S. G., and Popov S. V., *Nonclassical operator-differential equations* [in Russian], Nauka, Novosibirsk (2000).
7. Kislov N. V. and Pulkin I. S. "On existence and uniqueness of a weak solution to Gevrey problem with generalized sewing conditions," *Vestn. MEI*, No. 6, 88–92 (2002).
8. Petrushko I. M. and Chernykh E. V. "About parabolic equations of second order with changing time direction," *Vestn. MEI*, № 6, 85–93 (2003).
9. Djuraev T. D., *Boundary value problems for equations of mixed and mixed-compound type* [in Russian], FAN, Tashkent (1986).
10. Pyatkov S. G., Popov S. V., and Antipin V. I. "On solvability of boundary value problem for kinetic operator-differential equations," *Integral Equ. Operator Theory*, **80**, No. 4, 557–580 (2014).
11. Antipin V. I., "Solvability of a boundary value problem for operator-differential equations of mixed type," *Sib. Math. J.*, **54**, No. 2, 185–195 (2013);
12. Potapova S. V. "Boundary value problems for pseudohyperbolic equations with a variable time direction," *TWMS J. Pure Appl. Math.*, **3**, No. 1, 75–91 (2012).
13. Trenogin V. A., *Functional analysis* [in Russian], Nauka, Moscow (1993).

14. Yakubov S. Ya., Linear differential-operator equations and their applications [in Russian], Elm, Baku (1985).

Submitted August 28, 2016

Aleksandr Ivanovich Kozhanov
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptug Avenue, Novosibirsk 630090, Russia;
Novosibirsk State University,
2 Pirogov Street, 2, Novosibirsk 630090, Russia
`kozhanov@math.nsc.ru`

Sargylana Viktorovna Potapova
M. K. Ammosov Nord-Eastern Federal University,
Research Institute of Mathematic,
Kulakovskogo st., 48, Yakutsk 677000, Russia
`sargyp@inbox.ru`