

## НЕСЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ И РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЛАНЖЕВЕНА

Е. В. Карачанская, А. П. Петрова

**Аннотация.** Строятся решения стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) типа Ланжевена, обладающих неслучайной функцией, зависящей от решения уравнения. Определены условия, при которых возникает эта неслучайная функция. С использованием вида решения однородного стохастического дифференциального уравнения построено решение СДУ типа Ланжевена более общего вида в результате представления его в виде линейного. Построен стохастический процесс с неслучайным квадратом модуля, не являющийся решением СДУ Ито.

**Ключевые слова:** уравнение Ланжевена, броуновское движение, стохастическое дифференциальное уравнение, формула Ито, неслучайный модуль скорости, точное решение.

### Введение

Классическая теория стохастических дифференциальных уравнений [1] определяет построение решения линейного уравнения на основе применения формулы Ито. В работе В. А. Дубко [2] введено понятие первого интеграла для стохастического многомерного уравнения Ито. Далее в [3] были получены условия, которым должна удовлетворять функция случайных аргументов, чтобы быть первым интегралом системы СДУ. На основе этих результатов было построено аналитическое решение СДУ типа Ланжевена [4]. Однако позднее в [4] была обнаружена ошибка, несколько сужающая класс уравнений, для которых было найдено решение. В данной статье представлено корректное решение СДУ типа Ланжевена. Внесение уточнений в интегрирование уравнения позволило сконструировать случайный процесс, для которого не существует соответствующего СДУ.

Рассмотрение нового класса СДУ типа Ланжевена актуально, поскольку стохастические уравнения Ланжевена имеют большой спектр применения, например, в финансовой математике и экономике [5], статистической физике [6, 7] и т. д.

Уравнение Ланжевена (1908 г.) рассматривается в статистической физике для описания нелинейного броуновского движения [6]. Это дифференциальное уравнение со случайной (ланжевенской) силой  $\xi(t)$ , которая возникает из-за

наличия флуктуации скорости  $\mathbf{v}(t)$  броуновской частицы массы  $m$  в среде с постоянным коэффициентом трения  $\mu$ :

$$m \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = -m\mu \mathbf{v}(t) + \xi(t). \quad (1)$$

Введение Ито в 1948 г. стохастического интеграла позволило представить уравнение Ланжевена в виде стохастического дифференциального уравнения Ито [8]:

$$d\mathbf{v}(t) = a\mathbf{v}(t)dt + b d\mathbf{w}(t), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

где  $\mathbf{w}(t)$  — винеровский процесс.

Нахождение решения дифференциального уравнения, описывающего какой-либо процесс, или нахождение его первого интеграла дают возможность дальнейшего моделирования этого процесса и управления им в случае необходимости.

Процесс решения стохастических дифференциальных уравнений очень сложен. Чаще всего речь идет о существовании и единственности решения, а не его нахождении. Решения можно найти только в очень специфических случаях (см., например, [1, 3, 4, 9–13]). В основном при нахождении решения опираются на метод, предложенный И. И. Гихманом и А. В. Скороходом, или используют замены, приводящие уравнения к виду, для которого можно найти решение. Еще один метод связан с возможностью перехода от уравнения Ито к уравнению Стратоновича, что в итоге позволяет решать СДУ как обыкновенное дифференциальное уравнение.

Следует отметить, что стохастических дифференциальных уравнений, для которых найдено точное решение, не очень много.

В. А. Дубко в 1978 г. было доказано, что для СДУ Ито существуют первые интегралы — детерминированные (неслучайные) функции, зависящие от случайных функций — решений этих СДУ [2, 3].

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1** [2]. Пусть  $\mathbf{x}(t)$  —  $n$ -мерный случайный процесс, подчиненный системе СДУ Ито

$$dx_i(t) = a_i(t, \mathbf{x}(t)) dt + \sum_{k=1}^m b_{ik}(t, \mathbf{x}(t)) dw_k(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (3)$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям существования и единственности решения [1], и  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$  — его решение, удовлетворяющее заданному начальному условию. Неслучайная функция  $u(t, \mathbf{x}) \in \mathcal{C}_{t,x}^{1,2}$  называется *первым интегралом системы СДУ*, если она с вероятностью единица на любой из траекторий решения (3) принимает постоянное значение, зависящее только от  $\mathbf{x}_0$ :  $u(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)) = u(0, \mathbf{x}_0)$ , или, другими словами, ее стохастический дифференциал равен нулю:  $d_t u(t, \mathbf{x}(t)) = 0$ .

Возможность построения решения для уравнений из этого класса связана с определением вида неслучайных функций — первых интегралов — и их дальнейшим использованием [3, 14]. Однако определение вида функции для первого

интеграла не всегда возможно, но при этом возникает возможность построения решения СДУ при условии, что оно обладает неслучайным функционалом, зависящим от решения СДУ.

Целью данной статьи является определение условий, обеспечивающих существование детерминированных функций для стохастических дифференциальных уравнений типа Ланжевена и построение решений соответствующих уравнений.

### 1. Уравнение типа Ланжевена с ортогональными воздействиями

Пусть  $\mathbf{v}(t)$  — скорость броуновской частицы,  $\mathbf{w}(t)$  — винеровский процесс в пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Исходя из некоррелированности компонент лагранжевой силы и нулевого среднего их воздействия на броуновскую частицу [15], движение броуновской частицы в трехмерном пространстве можно описать кроме уравнений (1) и (2) еще одним СДУ специального вида — уравнением типа Ланжевена, предложенным в [3]:

$$d\mathbf{v}(t) = -\mu\mathbf{v}(t) dt + \frac{b}{|\mathbf{v}(t)|} [\mathbf{v}(t) \times d\mathbf{w}(t)], \quad (4)$$

где  $[\mathbf{v}(t) \times d\mathbf{w}(t)]$  означает векторное произведение векторов  $\mathbf{v}(t)$  и  $d\mathbf{w}(t)$ ,  $\mathbf{v}(0) = 0$ ,  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mu, b \in \mathbb{R}^1$ ,  $\mu \geq 0$  — постоянная.

В работе [3] показано, что уравнение (4) обладает первым интегралом вида

$$u(t, \mathbf{v}) = \exp \{2\mu t\} \left( |\mathbf{v}|^2 - \frac{b^2}{\mu} \right), \quad (5)$$

при этом для всех  $t \geq 0$ , как следует из (5), выполняется равенство

$$|\mathbf{v}(t)|^2 = \exp \{-2\mu t\} \left( |\mathbf{v}(0)|^2 - \frac{b^2}{\mu} \right) + \frac{b^2}{\mu}. \quad (6)$$

Таким образом,  $|\mathbf{v}(t)|^2$  — неслучайная функция от  $t$ .

Для задач моделирования реальных систем интерес представляет случай, когда свойства среды изменяются с течением времени, т. е. коэффициенты этого уравнения зависят от параметра  $t$ :  $\mu = \mu(t)$ ,  $a = a(t)$ .

Рассмотрим уравнение типа (4) для  $\mathbf{v}(t)$  более общего вида, а именно

$$d\mathbf{v}(t) = -\mu(t)\mathbf{v}(t) dt + \frac{b(t)}{|\mathbf{v}(t)|} [\mathbf{v}(t) \times d\mathbf{w}(t)], \quad (7)$$

где  $\mu(t), b(t) \in \mathbb{R}^1$  — неслучайные функции от  $t$ .

Относительно гладкости этих и других встречающихся коэффициентов будем полагать, что она достаточна для обеспечения условий существования и единственности решения стохастического дифференциального уравнения.

Введем обозначения для матриц группы поворотов:

$$B_1^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

С учетом (8) и  $\mathbf{v}(t) = (v_1, v_2, v_3)^*$  преобразуем векторное произведение в (7) аналогично [3]:

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{w} = dw_1 B_1^0 \mathbf{v} + dw_2 B_2^0 \mathbf{v} + dw_3 B_3^0 \mathbf{v} = \sum_{k=1}^3 B_k^0 \mathbf{v} dw_k. \quad (9)$$

Тогда (7) можно записать в виде СДУ Ито:

$$d\mathbf{v}(t) = -\mu(t)\mathbf{v}(t) dt + \frac{b(t)}{|\mathbf{v}(t)|} \sum_{k=1}^3 B_k^0 \mathbf{v}(t) d\mathbf{w}(t), \quad (10)$$

Воспользовавшись (10), построим уравнение для  $|\mathbf{v}(t)|^2$ . Продифференцировав по Ито каждую компоненту  $v_i^2(t)$ , получаем

$$d|\mathbf{v}(t)|^2 = -2\mu(t)|\mathbf{v}(t)|^2 dt + 2b^2(t) dt, \quad (11)$$

т. е.  $|\mathbf{v}^2(t)|$  является неслучайной функцией. Уравнение (11) линейное, и его решение имеет вид

$$|\mathbf{v}(t)|^2 = \exp \left\{ -2 \int_0^t \mu(\tau) d\tau \right\} \left[ 2 \int_0^t b^2(u) \exp \left\{ 2 \int_0^u \mu(\tau) d\tau \right\} du + |\mathbf{v}(0)|^2 \right]. \quad (12)$$

Таким образом, получили следующий результат.

**Лемма 1.** Для стохастического процесса  $\mathbf{v}(t)$ , подчиненного уравнению (7), функция  $|\mathbf{v}(t)|^2$  является неслучайной.

Это означает, что коэффициент диффузионной части уравнения (7) неслучаен, но при этом зависит от модуля скорости самой частицы в текущий момент времени.

Заметим, что для уравнения (4) был найден первый интеграл (5), хотя для уравнения (7) это проблематично. Однако существует возможность построения решения уравнения.

Введем обозначение  $b(t)/|\mathbf{v}(t)| = a(t)$ . Очевидно, что в силу представления (12) функция  $a(t)$  неслучайная. Будем исследовать решение уравнения

$$d\mathbf{v}(t) = -\mu(t)\mathbf{v}(t) dt + a(t)[\mathbf{v}(t) \times d\mathbf{w}(t)]. \quad (13)$$

Перепишем (13) в виде

$$d\mathbf{v}(t) = -\mu(t)\mathbf{v}(t) dt + \sum_{k=1}^3 B_k(t)\mathbf{v}(t) d\mathbf{w}(t), \quad (14)$$

где матрицы  $B_k(t)$ ,  $k = \overline{1, 3}$ , имеют вид

$$B_1(t) = a(t)B_1^0, \quad B_2(t) = a(t)B_2^0, \quad B_3(t) = a(t)B_3^0. \quad (15)$$

Запись динамики стохастического процесса допускает, кроме представления Ито (14), еще и представление Стратоновича:

$$d\mathbf{v}(t) = -\tilde{\mu}(t)\mathbf{v}(t) dt + \sum_{k=1}^3 b_k(t, \mathbf{v}(t))\mathbf{v}(t) d\tilde{\mathbf{w}}(t), \quad (16)$$

где

$$\tilde{\mu} = \mu + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 b_{j,k}(t, \mathbf{v}) \frac{\partial b_{i,k}(t, \mathbf{v})}{\partial v_j}. \quad (17)$$

Рассмотрим следующее уравнение Ито:

$$d\mathbf{v}(t) = -A\mathbf{v}(t) dt + \sum_{k=1}^3 B_k^0 \mathbf{v}(t) d\mathbf{w}(t), \quad (18)$$

где  $A = \mu I$ . Связь между представлениями Стратоновича и Ито описывается уравнениями (17), где  $b_{i,j}^k$ ,  $i, j, k = \overline{1, 3}$ , — соответствующие элементы матриц  $B_k^0$ ,  $k = \overline{1, 3}$ . Тогда уравнение (18) в представлении Ито можно записать в представлении Стратоновича:

$$d\mathbf{v}(t) = \left( -A - \frac{a^2}{2} \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 B_k(\tau) B_j(\tau) \right) \mathbf{v}(t) dt + a \sum_{k=1}^3 B_k^0 \mathbf{v}(t) d\tilde{\mathbf{w}}(t). \quad (19)$$

Между коэффициентами уравнений (18) и (19) можно установить функциональную связь, если потребовать совпадения в среднеквадратическом решений уравнений (18) и (19) (см. [14]). Таким образом, для нахождения решения уравнения (18) достаточно решить уравнение (19), поскольку его можно интерпретировать как обыкновенное дифференциальное уравнение.

После перехода к представлению Стратоновича решение уравнения (19) принимает следующий вид (см. [14]):

$$\mathbf{v}(t) = T^+ \exp \left\{ t \left( -\mu I - \frac{a^2}{2} \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 B_k(\tau) B_j(\tau) \right) + a \sum_{k=1}^3 \int_{t_0}^t B_k^0 d\tilde{\mathbf{w}}(\tau) \right\} \mathbf{v}(0), \quad (20)$$

где  $T^+$  — оператор хронологического упорядочения.

Рассмотрим нахождение решения уравнения Ито с функциональными неслучайными коэффициентами:

$$d\mathbf{v}(t) = -A(t)\mathbf{v}(t) dt + \sum_{k=1}^3 B_k(t)\mathbf{v}(t) d\mathbf{w}(t), \quad (21)$$

где  $A(t) = \mu(t)A$ ,  $A$  — постоянная матрица. Уравнение (21) внешне подобно уравнению (18), при этом также возможен переход к представлению Стратоновича:

$$d\mathbf{v}(t) = \left( -A(t) - \frac{a^2(t)}{2} \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 B_k(\tau) B_j(\tau) \right) \mathbf{v}(t) dt + a(t) \sum_{k=1}^3 B_k^0 \mathbf{v}(t) d\tilde{\mathbf{w}}(t). \quad (22)$$

Так как уравнения (21) и (22) эквивалентны, по аналогии с (20) запишем

решение уравнения (22) следующим образом:

$$\mathbf{v}(t) = T^+ \exp \left\{ \int_{t_0}^t \left( -A(\tau) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 B_k(\tau) B_j(\tau) \right) d\tau + \sum_{k=1}^3 \int_{t_0}^t B_k(\tau) d\tilde{w}_k(\tau) \right\} \mathbf{v}(0). \quad (23)$$

При выполнении условий типа Лаппо — Данилевского [16] оператор хронологического упорядочения  $T^+$  можно опустить. Определим возможность такого действия для выражения (23).

1. Учитывая вид и свойства матриц  $A(t)$ ,  $B_k(t)$ ,  $k = \overline{1, 3}$ , первое слагаемое в экспоненте в (23) упростим:

$$-A(\tau) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 B_k(\tau) B_j(\tau) = (a^2(\tau) - \mu(\tau))I.$$

2. В выражении (23) матрицы, определяемые первым и вторым слагаемыми в экспоненте, коммутируют. Поэтому (23) можно представить в виде

$$\mathbf{v}(t) = T^+ \left[ \exp \left\{ \int_{t_0}^t (a^2(\tau) - \mu(\tau))I d\tau \right\} \exp \left\{ \sum_{k=1}^3 \int_{t_0}^t B_k(\tau) dw_k(\tau) \right\} \right] \mathbf{v}(0). \quad (24)$$

3. Для матрицы в первой экспоненте условие Лаппо — Данилевского выполняется, но для матрицы во второй экспоненте данное условие будет выполняться только в случае, когда  $w_1(t) = w_2(t) = w_3(t)$ .

При выполнении этого условия можно снять оператор  $T^+$  в выражении (23) (поэтому в дальнейшем  $T^+$  не используется) и построить решение уравнения

$$d\mathbf{v}(t) = -A(t) \mathbf{v}(t) dt + \sum_{k=1}^3 B_k(t) \mathbf{v}(t) d\mathbf{w}(t), \quad \mathbf{w}(t) = (w(t), w(t), w(t))^*. \quad (25)$$

Рассмотрим построение точного решения для  $\mathbf{v}(t)$  даже в более общем виде, чем (14), используя результаты, представленные в [14]. Используем переход к представлению Стратоновича для решения (25).

Если  $A(t) = \mu(t)I$  и  $\mu(t) = \mu$ ,  $a(t) = a$  — константы, то (23) примет вид

$$\mathbf{v}(t) = \exp \{t(a^2 - \mu)I\} \exp \left\{ a \sum_{k=1}^3 w_k(t) B_k^0 \right\} \mathbf{v}(0), \quad (26a)$$

$$w_1(t) = w_2(t) = w_3(t). \quad (26b)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В выражении (26) перешли от  $\tilde{\mathbf{w}}(t)$  к  $\mathbf{w}(t)$ , поскольку для любых  $\alpha(t) \in C_{[0, T]}^1$  выполняется соотношение

$$\int_0^t \alpha(\tau) d\tilde{\mathbf{w}}(\tau) = \int_0^t \alpha(\tau) d\mathbf{w}(\tau),$$

## 2. Разложение матричной экспоненты для группы поворотов

Рассмотрим разложение в степенной ряд выражения  $\exp \left\{ a \sum_{k=1}^3 \xi_k(t) B_k^0 \right\}$  для произвольного случайного процесса  $\xi(t) \in \mathbb{R}^3$ . Исходя из определения матричной экспоненты, имеем

$$\exp \left\{ a \sum_{k=1}^3 \xi_k(t) B_k^0 \right\} = I + a \sum_{k=1}^3 \xi_k(t) B_k^0 + \frac{a^2}{2!} \left( \sum_{k=1}^3 \xi_k(t) B_k^0 \right)^2 + \frac{a^3}{3!} \left( \sum_{k=1}^3 \xi_k(t) B_k^0 \right)^3 + \dots \quad (27)$$

**Лемма 2.** Степени матрицы  $\sum_{k=1}^3 \xi_k(t) B_k^0$ , где  $B_k^0$ ,  $k = \overline{1, 3}$ , — матрицы поворотов, определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=1}^3 \xi_k(t) B_k^0 \right)^{2m-1} &= (-1)^{m+1} (|\xi(t)|^2)^{m-1} \sum_{k=1}^3 \xi_k(t) B_k^0, \quad m = 1, 2, \dots, \\ \left( \sum_{k=1}^3 \xi_k(t) B_k^0 \right)^{2m} &= (-1)^{m+1} (|\xi(t)|^2)^{m-1} \left( \sum_{k=1}^3 \xi_k(t) B_k^0 \right)^2, \quad m = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (28)$$

где  $|\xi(t)|^2 = \xi_1^2(t) + \xi_2^2(t) + \xi_3^2(t)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Возводя последовательно выражение  $\sum_{k=1}^3 \xi_k(t) B_k^0$  в различные степени, получим соответствующие рекуррентные соотношения.  $\square$

**Лемма 3.** Если  $B_k^0$ ,  $k = \overline{1, 3}$ , — матрицы группы поворотов,  $\xi(t) \in \mathbb{R}^3$ , то имеет место следующее представление матричной экспоненты:

$$\exp \left\{ a \sum_{k=1}^3 \xi_k(t) B_k^0 \right\} = I + \frac{\sin(a |\xi(t)|)}{|\xi(t)|} \sum_{k=1}^3 \xi_k(t) B_k^0 + \frac{2 \sin^2(a \frac{|\xi(t)|}{2})}{|\xi(t)|^2} \left( \sum_{k=1}^3 \xi_k(t) B_k^0 \right)^2. \quad (29)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Подставляя результаты леммы 2 в выражение (27) и используя разложение в степенные ряды синуса и косинуса, получаем

$$\begin{aligned} \exp \left\{ a \sum_{k=1}^3 \xi_k(t) B_k^0 \right\} &= I + a \sum_{k=1}^3 \xi_k(t) B_k^0 \frac{1}{|\xi(t)|} \sin(a |\xi(t)|) \\ &\quad + \frac{1}{|\xi(t)|^2} \left( \sum_{k=1}^3 \xi_k(t) B_k^0 \right)^2 (1 - \cos(a |\xi(t)|)) = \\ &= I + \frac{\sin(a |\xi(t)|)}{|\xi(t)|} \sum_{k=1}^3 \xi_k(t) B_k^0 + \frac{2 \sin^2(a \frac{|\xi(t)|}{2})}{|\xi(t)|^2} \left( \sum_{k=1}^3 \xi_k(t) B_k^0 \right)^2. \quad \square \end{aligned}$$

В данном случае функция  $\xi(t)$  может быть случайным процессом любой природы в  $\mathbb{R}^3$ , в частности, это может быть пуассоновский процесс. Кроме того, координатные компоненты этого процесса могут быть с любой коррелятивной зависимостью, в том числе и быть равными, как определено в (26) — условие (26b).

Таким образом получаем представление для случайного процесса  $\mathbf{v}(t)$ , определяемого (26):

$$\mathbf{v}(t) = \exp \{t(a^2 - \mu)\} \left[ I + \frac{\sin(\sqrt{3}a|w(t)|)}{\sqrt{3}|w(t)|} \sum_{k=1}^3 w(t) B_k^0 + \frac{2 \sin^2 \left( \frac{\sqrt{3}a|w(t)|}{2} \right)}{3} \left( \sum_{k=1}^3 B_k^0 \right)^2 \right] \mathbf{v}(0), \quad (30)$$

которое является решением уравнения

$$d\mathbf{v}(t) = -\mu I \mathbf{v}(t) dt + a \sum_{k=1}^3 B_k^0 \mathbf{v}(t) dw(t), \quad (31)$$

Принимая во внимание характер алгоритма построения решения при постоянных  $\mu$ ,  $a$  и результат (30), с учетом явного вида матриц  $A(t) = -\mu(t)I$ ,  $B_k(t)$ ,  $k = \overline{1, 3}$ , соответствующих уравнению (31), можем убедиться, что и уравнение (21) с условием (26b):

$$d\mathbf{v}(t) = -\mu(t)I \mathbf{v}(t) dt + a(t) \sum_{k=1}^3 B_k^0 \mathbf{v}(t) dw(t), \quad (32)$$

будет иметь точное решение, подобное (30), но при замене  $a$  на  $\int_0^t a(\tau) d\tau$  и  $\mu$  на  $\int_0^t \mu(\tau) d\tau$  и переходе от  $w_k(t)$  к  $\int_0^t a(\tau) dw_k(\tau)$  (в силу замечания 1).

Собирая полученные результаты, сформулируем их в виде теоремы.

**Теорема 1.** Пусть выполняется условие  $a(t), \mu(t) \in \mathcal{C}^1$ . Тогда решение уравнения (32) существует и имеет вид

$$\mathbf{v}(t) = \exp \left\{ \int_0^t (a^2(\tau) - \mu(\tau)) d\tau \right\} \left[ I + \frac{\sin \left( \sqrt{3} \int_0^t a(\tau) dw(\tau) \right)}{\sqrt{3} |w(t)|} \sum_{k=1}^3 w(t) B_k^0 + \frac{2 \sin^2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^t a(\tau) dw(\tau) \right)}{3} \left( \sum_{k=1}^3 B_k^0 \right)^2 \right] \mathbf{v}(0). \quad (33)$$

Таким образом, наличие детерминированной функции, зависящей от решения стохастического дифференциального уравнения, позволяет найти это решение.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что в процессе построения решения уравнения (25) помимо требования непрерывности по  $t$  коэффициентов  $\mu(t)$  и  $a(t)$  другие ограничения не использовались. Поэтому полученное решение является решением более общей задачи, чем исходная.

Как видим, это решение похоже на классическое решение однородного линейного СДУ, построенного в [1]. Используя вид решения линейного СДУ из [1], будем искать решение СДУ типа Ланжевена более общего вида.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Одним из результатов следует выделить построение случайного процесса  $\mathbf{y}(t)$  вида

$$\mathbf{y}(t) = \exp \{t(a^2 - \mu)\} \left[ I + \frac{\sin(a|\boldsymbol{\xi}(t)|)}{|\boldsymbol{\xi}(t)|} \sum_{k=1}^3 \xi_k(t) B_k^0 + \frac{2 \sin^2(a \frac{|\boldsymbol{\xi}(t)|}{2})}{|\boldsymbol{\xi}(t)|^2} \left( \sum_{k=1}^3 \xi_k(t) B_k^0 \right)^2 \right]. \quad (34)$$

определяемого случайным процессом  $\xi(t)$  произвольной природы, со свойством:  $|\mathbf{y}(t)|^2$  — неслучайная функция, для которого нельзя построить стохастическое дифференциальное уравнение в силу невыполнения условий типа Лапшо — Данилевского.

### 3. Получение обобщения уравнения типа Ланжевена

Рассмотрим следующее обобщение уравнения типа Ланжевена [17]:

$$d\mathbf{v}(t) = -\mu(t)\mathbf{v}(t) dt + \frac{b_1(t)}{|\mathbf{v}(t)|} [\mathbf{v}(t) \times d\mathbf{w}(t)] + \frac{b_2(t)}{\sqrt{2}|\mathbf{v}(t)|^2} [\mathbf{v}(t) \times [\mathbf{v}(t) \times d\mathbf{w}(t)]], \quad (35)$$

которое описывает более сложный (турбулентный, с «вихрями») вид броуновского движения. Само уравнение (35) будем в дальнейшем называть усложненным.

Поскольку неслучайность функции  $|\mathbf{v}(t)|^2$  позволила построить решение уравнения (7), определим условия, при которых уравнение (35) также будет обладать подобным свойством.

С учетом представления (9) и свойств двойного векторного произведения получаем

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}(t) \times [\mathbf{v}(t) \times d\mathbf{w}(t)]] &= \left[ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -v_3 dw_2 + v_2 dw_3 \\ v_3 dw_1 - v_1 dw_3 \\ -v_2 dw_1 + v_1 dw_2 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} -v_2^2 dw_1 + v_1 v_2 dw_2 - v_3^2 dw_1 + v_1 v_3 dw_3 \\ -v_3^2 dw_2 + v_2 v_3 dw_3 + v_1 v_2 dw_1 - v_1^2 dw_2 \\ v_1 v_3 dw_1 - v_1^2 dw_3 + v_2 v_3 dw_2 - v_2^2 dw_3 \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} |\mathbf{v}(t)|^2 - v_1^2 & -v_1 v_2 & -v_1 v_3 \\ -v_1 v_2 & |\mathbf{v}(t)|^2 - v_2^2 & -v_2 v_3 \\ -v_1 v_3 & -v_2 v_3 & |\mathbf{v}(t)|^2 - v_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dw_1 \\ dw_2 \\ dw_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Лемма 4.** Уравнение типа Ланжевена (35) может быть представлено в виде следующего уравнения Ито:

$$d\mathbf{v}(t) = -\mu(t)\mathbf{v}(t) dt + \left[ \frac{b_1(t)}{|\mathbf{v}(t)|} K + \frac{b_2(t)}{\sqrt{2}|\mathbf{v}(t)|^2} K^2 \right] d\mathbf{w}(t), \quad (36)$$

где матрицы  $K$  и  $K^2$  имеют вид соответственно

$$K = \sum_{k=1}^3 B_k^0 \mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (37)$$

$$K^2 = - \begin{pmatrix} |\mathbf{v}(t)|^2 - v_1^2 & -v_1 v_2 & -v_1 v_3 \\ -v_1 v_2 & |\mathbf{v}(t)|^2 - v_2^2 & -v_2 v_3 \\ -v_1 v_3 & -v_2 v_3 & |\mathbf{v}(t)|^2 - v_3^2 \end{pmatrix}$$

Для уравнений (35) и соответственно (36) функция  $|\mathbf{v}(t)|^2$  также неслучайна [3] и является решением обыкновенного дифференциального уравнения вида

$$d|\mathbf{v}(t)|^2 = h(t, |\mathbf{v}(t)|) dt, \quad (38)$$

где  $h(t, |\mathbf{v}(t)|)$  — некоторая неслучайная функция.

**Лемма 5.** Для уравнения (35) функция  $|\mathbf{v}(t)|^2$  является неслучайной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для сокращения записи обозначим

$$B(b_1, b_2, t, \mathbf{v}(t), |\mathbf{v}(t)|) = \frac{b_1(t)}{|\mathbf{v}(t)|} K + \frac{b_2(t)}{\sqrt{2}|\mathbf{v}(t)|^2} K^2. \quad (39)$$

Продифференцируем по Ито функцию  $\mathbf{v}^2(t)$ , учитывая, что  $\mathbf{v}(t)$  является решением уравнения (36). Получаем

$$\mathbf{v}^2(t) = 2 \left[ -\mu(t)|\mathbf{v}(t)|^2 + \frac{1}{2} \text{tr}(B(b_1, b_2, t, \mathbf{v}(t), |\mathbf{v}(t)|) \cdot B^*(b_1, b_2, t, \mathbf{v}(t), |\mathbf{v}(t)|)) \right] dt. \quad (40)$$

В силу кососимметричности матрицы  $K$  имеем

$$K^2 = -K \cdot K^*, \quad (K^2)^* = (-K \cdot K^*)^* = K^2.$$

Следовательно,

$$B(b_1, b_2, t, \mathbf{v}(t), |\mathbf{v}(t)|) \cdot B^*(b_1, b_2, t, \mathbf{v}(t), |\mathbf{v}(t)|) = \frac{b_1^2(t)}{|\mathbf{v}(t)|^2} (-K^2) + \frac{b_2^2(t)}{2|\mathbf{v}(t)|^4} K^4.$$

Вычисление  $K^4$  привело к такому результату:

$$K^4 = |\mathbf{v}(t)|^2 \cdot \begin{pmatrix} v_2^2 + v_3^2 & -v_1 v_2 & -v_1 v_3 \\ -v_1 v_2 & v_1^2 + v_3^2 & -v_2 v_3 \\ -v_1 v_3 & -v_2 v_3 & v_1^2 + v_2^2 \end{pmatrix} = -|\mathbf{v}(t)|^2 \cdot K^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & B(b_1, b_2, t, \mathbf{v}(t), |\mathbf{v}(t)|) \cdot B^*(b_1, b_2, t, \mathbf{v}(t), |\mathbf{v}(t)|) \\ &= - \left( \frac{b_1^2(t)}{|\mathbf{v}(t)|^2} + \frac{b_2^2(t)}{2|\mathbf{v}(t)|^2} \right) K^2 = \left( \frac{b_1^2(t)}{|\mathbf{v}(t)|^2} + \frac{b_2^2(t)}{2|\mathbf{v}(t)|^2} \right) K \cdot K^*. \end{aligned}$$

Стало быть,

$$\operatorname{tr} K \cdot K^* = -\operatorname{tr} K^2 = 2|\mathbf{v}(t)|^2.$$

В результате имеем

$$d\mathbf{v}^2(t) \equiv |d\mathbf{v}(t)|^2 = 2 \left[ -\mu(t)|\mathbf{v}(t)|^2 + b_1^2(t) + \frac{b_2^2(t)}{2} \right] dt, \quad (41)$$

т. е. функция  $|\mathbf{v}(t)|^2$  неслучайна. Лемма доказана.

Таким образом, уравнение (36) также имеет детерминированную функцию, зависящую от случайной — решения самого уравнения. Следовательно, и исходное уравнение (7), и расширяющее его уравнение (35) связаны с неслучайной функцией  $|\mathbf{v}(t)|^2$ . Это позволяет сделать вывод о возможности решения уравнения (35), опираясь на решение уравнения (7) с выполнением условия (26b).

Решение уравнения (41) с учетом (12) будет таким:

$$|\mathbf{v}(t)|^2 = \exp \left\{ -2 \int_0^t \mu(\tau) d\tau \right\} \times \left[ 2 \int_0^t \left( b_1^2(u) + \frac{b_2^2(u)}{2} \right) \exp \left\{ 2 \int_0^u \mu(\tau) d\tau \right\} du + |\mathbf{v}(0)|^2 \right]. \quad (42)$$

#### 4. Построение решения для усложненного уравнения Ланжевена

Представим полученное векторное произведение несколько в ином виде, а именно с применением матриц группы поворотов, используя представление уравнения в лемме 4 и (9):

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}(t) \times [\mathbf{v}(t) \times d\mathbf{w}(t)]] &= \left[ \mathbf{v}(t) \times \left[ \left( \sum_{k=1}^3 B_k^0 \mathbf{v}(t) \right) d\mathbf{w}(t) \right] \right] \\ &= \left( \sum_{k=1}^3 B_k^0 \mathbf{v}(t) \right) [\mathbf{v}(t) \times d\mathbf{w}(t)] = \left( \sum_{k=1}^3 B_k^0 \mathbf{v}(t) \right) \sum_{k=1}^3 B_j^0 \mathbf{v}(t) d\mathbf{w}(t) \\ &= |\mathbf{v}(t)|^2 \sum_{k=1}^3 C_k^0 d\mathbf{w}(t), \end{aligned}$$

где  $C_k^0 = (B_1^0 + B_2^0 + B_3^0) B_k^0$ . Тогда уравнение (36) примет следующий вид:

$$d\mathbf{v}(t) = -\mu(t)\mathbf{v}(t) dt + \left[ \frac{b_1(t)}{|\mathbf{v}(t)|} \sum_{k=1}^3 B_k^0 \mathbf{v}(t) + \frac{b_2(t)}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^3 C_k^0 \right] d\mathbf{w}(t). \quad (43)$$

Таким образом, имеет место следующий результат.

**Лемма 6.** Обобщение уравнения типа Ланжевена (35) может быть представлено в виде линейного стохастического дифференциального уравнения (43), где  $B_k^0$ ,  $k = \overline{1, 3}$ , составляют группу поворотов,  $C_k^0 = (B_1^0 + B_2^0 + B_3^0)B_k^0$ .

Такой вид уравнения позволяет воспользоваться результатом теоремы 1 для нахождения решения уравнения (35).

Уравнение (35) есть стохастическое линейное уравнение. Согласно [1] его решение можно найти, используя решение соответствующего однородного, в данном случае — уравнения (21) при условии  $A(t) = \mu(t)I$ .

Решение однородного уравнения (21) запишем в виде

$$\mathbf{v}(t) = R(t)\mathbf{v}(0). \quad (44)$$

Тогда решение  $\mathbf{V}(t)$  соответствующего линейного уравнения (35) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) = R(t) \left[ \mathbf{v}(0) - \int_0^t \frac{b_1(s)}{|\mathbf{v}(s)|} \frac{b_2(s)}{\sqrt{2}} (R(s))^{-1} \sum_{k=1}^3 C_k^0 \sum_{j=1}^3 (B_j^0)^* ds \right. \\ \left. + \int_0^t \frac{b_1(s)}{|\mathbf{v}(s)|} (R(s))^{-1} \sum_{j=1}^3 B_j^0 d\mathbf{w}(s) \right], \quad (45) \end{aligned}$$

где  $|\mathbf{v}(t)|$  определяется из (42).

С учетом кососимметричности матриц группы поворотов получим

$$\sum_{k=1}^3 C_k^0 \left( \sum_{j=1}^3 B_j^0 \right)^* = 3 \sum_{k=1}^3 B_k^0. \quad (46)$$

Таким образом, получаем решение уравнения (35).

**Теорема 2.** Пусть  $b_1(t), b_2(t), \mu(t) \in \mathcal{C}^1$  и  $\mu(t) > 0$  для всех  $t$ . Тогда решение усложненного уравнения типа Ланжевена

$$d\mathbf{v}(t) = -\mu(t)\mathbf{v}(t) dt + \frac{b_1(t)}{|\mathbf{v}(t)|} [\mathbf{v}(t) \times d\mathbf{w}(t)] + \frac{b_2(t)}{\sqrt{2}|\mathbf{v}(t)|^2} [\mathbf{v}(t) \times [\mathbf{v}(t) \times d\mathbf{w}(t)]] \quad (47)$$

при выполнении условия  $\mathbf{w}(t) = (w(t), w(t), w(t))^*$  имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) = R(t) \left[ \mathbf{v}(0) + 3 \int_0^t \frac{b_1(s)}{|\mathbf{v}(s)|} \frac{b_2(s)}{\sqrt{2}} (R(s))^{-1} \sum_{k=1}^3 B_k^0 ds \right. \\ \left. + \int_0^t \frac{b_1(s)}{|\mathbf{v}(s)|} (R(s))^{-1} \sum_{k=1}^3 B_k^0 d\mathbf{w}(s) \right], \end{aligned}$$

где  $B_k^0$ ,  $k = \overline{1, 3}$ , составляют группу поворотов (8),  $R(s)$  определяется выражением (44) и  $|\mathbf{v}(t)|$  определяется из (42).

## 5. Заключение

Неслучайность квадрата модуля скорости броуновской частицы позволила получить в явном виде выражение для нее в специфическом случае. Кроме того, неслучайность модуля скорости объясняет, почему движущиеся частицы (в том числе и свет) не могут иметь сколь угодно большую скорость.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наук. думка, 1968.
2. Дубко В. А. Первый интеграл системы стохастических дифференциальных уравнений Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978. 22 с. (Препринт).
3. Дубко В. А. Вопросы теории и применения стохастических дифференциальных уравнений. Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1989.
4. Дубко В. А., Чалых Е. В. Построение аналитического решения для одного класса уравнений типа Ланжевена с ортогональными случайными воздействиями // Укр. мат. журн., 1998. Т. 50, № 4. С. 666–668.
5. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Факты, модели. Теория. М.: ФАЗИС, 2004. Т. 1, 2.
6. Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика. М.: Мир, 1978. Т. 1.
7. Климонтович Ю. Л. Нелинейное броуновское движение // Успехи физ. наук. 1994. Т. 164. № 8. С. 811–844.
8. Ито К., Маккин Г. Диффузионные процессы и их траектории. М.: Мир, 1968.
9. Дубко В. А., Карачанская Е. В. Специальные разделы теории стохастических дифференциальных уравнений. Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2013.
10. Маккин Г. Стохастические интегралы. М.: Мир, 1972. (Сер.: Библиотека сборника Математика).
11. Леваков, А. А. Стохастические дифференциальные уравнения. Минск: БГУ, 2009.
12. Пугачев В. С., Силицын И. Н. Теория стохастических систем. М.: Логос, 2004.
13. Миллер Б. М., Панков А. Р. Теория случайных процессов в примерах и задачах. М.: Физматлит, 2002.
14. Карачанская Е. В. Случайные процессы с инвариантами. Хабаровск: Изд-во Тихоокеанск. гос. ун-та, 2014.
15. Risken H. The Fokker–Planck equation: methods of solution and applications. Berlin: Springer-Verl., 1984.
16. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
17. Чалых Е. В. Об одном обобщении уравнений Ланжевена с детерминированным модулем скорости // Укр. мат. журн. 1998. Т. 50, № 7. С. 1004–1006.

*Статья поступила 15 августа 2016 г.*

Карачанская Елена Викторовна  
Государственный университет путей сообщения,  
ул. Серышева, 47, Хабаровск 680000  
elena\_chal@mail.ru

Петрова Алена Петровна  
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,  
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000  
alyona.petrova393@gmail.com

NON-RANDOM FUNCTIONS  
AND SOLUTIONS OF LANGEVIN-TYPE  
STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

E. V. Karachanskaya and A. P. Petrova

**Abstract.** We construct a solution of a Langevine-type stochastic differential equation (SDE) with a non-random function depending on its solution. We determine conditions for such non-random function to appear. Using the solution of a homogeneous SDE, we obtain a solution of the generalized Langevine-type SDE by reducing it to a linear one. We construct a stochastic process with non-random modulus in square which is not a solution to an Itô-type SDE.

**Keywords:** Langevine-type equation, Brownian motion, stochastic differential equation, Itô's formula, deterministic modulus in square for velocity, analytical solution.

REFERENCES

1. Gihman I. I. and Skorohod A. V., Stochastic differential equations, Springer-Verl., Berlin; New York, 1972.
2. Dubko V. A., The first integral of a stochastic differential equations system [in Russian], Kiev: Inst. Mat. Akad. Nauk Ukr. SSR (1978).
3. Dubko V. A., Questions of theory and application of stochastic differential equations [in Russian], DVNC Akad. Nauk, Vladivostok (1989).
4. Dubko V. A. and Chalykh E. V. "Construction of an analytic solution of one class of Langevin-type equations with orthogonal random actions," Ukr. Mat. Zh., **50**, No. 4, 588–589 (1998).
5. Shiryaev A. N., Essentials of stochastic finance: Facts, models, theory. World Sci. Publ. Company (1999).
6. Balescu R., Equilibrium and nonequilibrium statistical mechanics, John Wiley & Sons, New York (1975).
7. Klimontovich Yu. L. "Nonlinear Brownian motion," Usp. fiz. nauk, **164**, No. 8, 811–844 (1994).
8. Itô K. and McKean H. P., Jr., Diffusion processes and their sample paths, Acad. Press, New York; Springer-Verl., Berlin (1965).
9. Dubko V. A. and Karachanskaya E. V., Specific sections of the theory of stochastic differential equations [in Russian], Pacific Nat. Univ., Khabarovsk (2013).
10. McKean H. P., Jr., Stochastic integrals, Acad. Press, New York; London (1969).
11. Levakov A. A., Stochastic differential equations [in Russian], Belarusian Gos. Univ., Minsk (2009).
12. Pugachev V. S. and Sinitsyn I. N., Theory of stochastic systems [in Russian], Logos, Moscow (2004).
13. Miller B. M. and Pankov A. S., Theory of random processes in examples and problems [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2002).
14. Karachanskaya E. V., Stochastic processes with invariants [in Russian], Pacific Nat. Univ., Khabarovsk (2014).
15. Risken H., The Fokker–Planck equation: methods of solution and applications, Springer-Verl., Berlin (1984).

- 
16. *Demidovich B. P.*, Lectures on mathematical stability theory [in Russian], Nauka, Moscow (1967).
  17. *Chalykh E. V.* “On one generalization of the Langevin equation with determinate modulus of velocity,” *Ukr. Mat. Zh.*, **50**, No. 7, 1004–1006 (1998).

*Submitted August 15, 2016*

Elena Victorovna Karachanskaya  
Far Eastern State Transport University,  
47 Seryshev Street, Khabarovsk 680000, Russia  
`elena_chal@mail.ru`

Alena Petrovna Petrova  
North-Eastern Federal University,  
48 Kulakovskii Street, Yakutsk 677000, Russia  
`alyona.petrova393@gmail.com`