

УДК 519.172.2

ОПИСАНИЕ ГРАНЕЙ В 3-МНОГОГРАННИКАХ БЕЗ ВЕРШИН СТЕПЕНЕЙ ОТ 4 ДО 9

А. О. Иванова

Аннотация. В 1940 г. Лебег доказал, что в каждой нормальной плоской карте найдется грань, набор степеней инцидентных вершин которой мажорируется одной из следующих последовательностей: $(3, 6, \infty)$, $(3, 7, 41)$, $(3, 8, 23)$, $(3, 9, 17)$, $(3, 10, 14)$, $(3, 11, 13)$, $(4, 4, \infty)$, $(4, 5, 19)$, $(4, 6, 11)$, $(4, 7, 9)$, $(5, 5, 9)$, $(5, 6, 7)$, $(3, 3, 3, \infty)$, $(3, 3, 4, 11)$, $(3, 3, 5, 7)$, $(3, 4, 4, 5)$, $(3, 3, 3, 3, 5)$.

В данной заметке доказывается, что в каждом 3-многограннике, не содержащем вершины степеней от 4 до 9, найдется грань, набор степеней инцидентных вершин которой мажорируется одной из следующих последовательностей: $(3, 3, \infty)$, $(3, 10, 12)$, $(3, 3, 3, \infty)$, $(3, 3, 3, 3, 3)$, где все параметры точны.

Ключевые слова: плоский граф, плоская карта, структурные свойства, 3-многогранник, вес.

1. Введение

Степень $d(v)$ вершины v ($r(f)$ грани f) в нормальной плоской карте M есть число инцидентных ей ребер (петли учитываются дважды в $d(v)$, а разделяющие ребра — дважды в $r(f)$). Через Δ и δ обозначим максимальную и минимальную степени вершин в M соответственно. Под k -вершиной (k -гранью) подразумеваем вершину (грань) степени k ; k^+ -вершина имеет степень не менее k , и т. д.

Хорошо известно, что каждая нормальная плоская карта, в которой допускаются петли и кратные ребра, но степень каждой вершины и каждой грани не менее трех, содержит 5^- -вершину и 5^- -грань. Далее через M будем обозначать нормальную плоскую карту.

Весом грани в M называется сумма степеней ее граничных вершин, а $w(M)$, или просто w , обозначает минимальный вес 5^- -граней в M . Будем говорить, что f является *гранью типа* $(k_1, k_2, \dots)$ или просто $(k_1, k_2, \dots)$ -гранью, если множество степеней вершин, инцидентных f , мажорируется вектором $(k_1, k_2, \dots)$.

Еще в 1940 г. Лебег [1] дал описание 5^- -граней в нормальных плоских картах.

Работа выполнена в рамках государственной работы «Организация проведения научных исследований» и поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (коды проектов 15-01-05867 и 16-01-00499).

Теорема 1 (Лебег [1]). Каждая нормальная плоская карта содержит 5^- -грань одного из следующих типов:

$$\begin{aligned} &(3, 6, \infty), \quad (3, 7, 41), \quad (3, 8, 23), \quad (3, 9, 17), \quad (3, 10, 14), \quad (3, 11, 13), \\ &(4, 4, \infty), \quad (4, 5, 19), \quad (4, 6, 11), \quad (4, 7, 9), \quad (5, 5, 9), \quad (5, 6, 7), \\ &(3, 3, 3, \infty), \quad (3, 3, 4, 11), \quad (3, 3, 5, 7), \quad (3, 4, 4, 5), \quad (3, 3, 3, 3, 5). \end{aligned}$$

Теорема 1, как и другие идеи Лебега [1], нашли множество приложений в задачах раскраски плоских графов (первое из таких приложений и недавний обзор можно найти в [2–4]).

Некоторые параметры лебеговской теоремы были улучшены для узких классов плоских графов. Коциг [5] в 1963 г. доказал, что для каждой плоской триангуляции с $\delta = 5$ верно неравенство $w \leq 18$ и выдвинул гипотезу, что $w \leq 17$. В 1989 г. гипотезу Коцига в более общем виде подтвердил О. В. Бородин [6].

Теорема 2 (Бородин [6]). В каждой нормальной плоской карте с $\delta = 5$ найдется $(5, 5, 7)$ -грань или $(5, 6, 6)$ -грань, где все параметры точны.

Кроме того, теорема 2 подтверждает гипотезу Грюнбаума [7] 1975 г. о том, что циклическая связность (минимальное число ребер, при удалении которых из графа получается две компоненты, каждая из которых содержит цикл) каждого 5-связного плоского графа не превосходит 11, причем оценка точна (ранее Пламмером [8] была получена оценка 13).

Под 3-многогранником мы подразумеваем конечный 3-связный выпуклый многогранник. Еще в 1922 г. Штейниц [9] доказал, что 3-многогранники взаимно однозначно соответствуют 3-связным плоским графам. Как показывает n -пирамида, двойная n -пирамида и схожая с ними конструкция, в которой каждая 3-грань инцидентна 3-вершине, 4-вершине и n -вершине, 3-многогранники, содержащие $(4, 4, \infty)$ -границы, могут иметь неограниченный w . То же верно для $(3, 3, 3, \infty)$ -граней. Чтобы убедиться в этом, возьмем двойную $2n$ -пирамиду и удалим в ней все верхние нечетные ребра и нижние четные; в полученной чetyреангуляции все грани являются $(3, 3, 3, n)$ -гранями.

Для плоских триангуляций, не содержащих 4-вершины, Коциг [10] доказал, что $w \leq 39$, а О. В. Бородин [11], подтверждая гипотезу Коцига [10], доказал, что $w \leq 29$. Оценка 29 неуплучшаема, как следует из дважды усеченного додекаэдра. В дальнейшем О. В. Бородин [12] показал, что каждый триангулированный 3-многогранник без $(4, 4, \infty)$ -граней удовлетворяет неравенству $w \leq 29$, а для каждой триангуляции без смежных 4-вершин имеет место точная оценка $w \leq 37$.

Для произвольных плоских нормальных карт теорема 1 влечет $w \leq \max\{51, \Delta + 9\}$. Хорняк и Йендроль [13] усилили это неравенство следующим образом: если не существует ни $(4, 4, \infty)$ -граней, ни $(3, 3, 3, \infty)$ -граней, то $w \leq 47$. О. В. Бородин и Вудал [14] доказали, что запрет $(3, 3, 3, \infty)$ -граней влечет $w \leq \max\{29, \Delta + 8\}$.

Также в [13] рассматривается минимальный вес w^* по всем граням вместо веса только 5^- -граней, как это делалось ранее, начиная с Лебега [1]. Очевидно, что $w^* \leq w$. Хорняк и Йендроль [13] доказали, что любая плоская нормальная карта без $(4, 4, \infty)$ -граней и $(3, 3, 3, \infty)$ -граней имеет $w^* \leq 32$.

Для четырехангулированных 3-многогранников С. В. Августинович и О. В. Бородин [15] улучшили описание 4-граней, вытекающее из теоремы Лебега, следующим образом: $(3, 3, 3, \infty)$, $(3, 3, 4, 10)$, $(3, 3, 5, 7)$, $(3, 4, 4, 5)$.

Другие результаты, связанные с теоремой Лебега, можно найти в перечисленных выше статьях, в недавнем обзоре Йендроля и Фосса [16], а также в [14, 17–25].

В 2002 г. О. В. Бородин [26] усилил теорему 1 Лебега следующим образом (где звездочками помечены неулучшаемые параметры, доказанные в [26]).

Теорема 3 (Бородин [26]). *В каждой нормальной плоской карте найдется 5^- -грань одного из следующих типов:*

$$\begin{aligned} &(3, 6, \infty^*), \quad (3, 8^*, 22), \quad (3, 9^*, 15), \quad (3, 10^*, 13), \quad (3, 11^*, 12), \\ &(4, 4, \infty^*), \quad (4, 5^*, 17), \quad (4, 6^*, 11), \quad (4, 7^*, 8), \quad (5, 5^*, 8), \quad (5, 6, 6^*), \\ &(3, 3, 3, \infty^*), \quad (3, 3, 4^*, 11), \quad (3, 3, 5^*, 7), \quad (3, 4, 4, 5^*), \quad (3, 3, 3, 3, 5^*). \end{aligned}$$

Недавно О. В. Бородин и А. О. Иванова [27] получили точное описание 3-граней в нормальных плоских картах (в частности, в плоских графах) с $\delta \geq 4$.

Теорема 4 (Бородин, Иванова [27]). *Каждая нормальная плоская карта без 3-вершин содержит 3-грань одного из следующих типов:*

$$\begin{aligned} &(Ta) \ (4, 4, \infty), \\ &(Tb) \ (4, 5, 14), \\ &(Tc) \ (4, 6, 10), \\ &(Td) \ (4, 7, 7), \\ &(Te) \ (5, 5, 7), \\ &(Tf) \ (5, 6, 6). \end{aligned}$$

Более того, все параметры в (Ta) – (Tf) точные и достигаются независимо друг от друга.

Целью данной заметки является доказательство следующего факта.

Теорема 5. *Каждый 3-многогранник без вершин степеней от 4 до 9 содержит 5^- -грань одного из следующих типов: $(3, 3, \infty)$, $(3, 10, 12)$, $(3, 3, 3, \infty)$, $(3, 3, 3, 3, 3)$, где все параметры точны.*

Из теоремы 3 следует, что при запрете вершин степеней от 6 до 9 остаются 5^- -грани следующих типов: $(3, 10, 13)$, $(3, 11, 12)$, $(3, 3, \infty)$, $(3, 3, 3, \infty)$, $(3, 3, 3, 3, 3)$. В теореме 5 имеем только $(3, 10, 12)$ вместо $(3, 10, 13)$ и $(3, 11, 12)$, где параметры 10 и 12 в типе $(3, 10, 12)$ точные.

2. Доказательство теоремы

Все параметры в теореме 5 точные. Конструкции, подтверждающие точность типов $(3, 3, \infty)$ и $(3, 3, 3, \infty)$, описаны во введении, а точность типа $(3, 3, 3, 3, 3)$ следует из додекаэдра. Чтобы подтвердить точность типа $(3, 10, 12)$, возьмем хорошо известную триангуляцию, в которой имеются только 5-вершины и 6-вершины, причем каждая из 5-вершин окружена 6-вершинами, и вставим 3-вершину в каждую 3-грань.

Предположим, что 3-многогранник M' является контрпримером к теореме 5. Пусть M — контрпример к теореме 5 на том же множестве вершин, что и M' , но имеющий наибольшее число ребер.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В M нет 4^+ -грани $v_1v_2 \dots$, где $d(v_1) \geq 10$ и $d(v_3) \geq 10$. Действительно, иначе проведем диагональ v_1v_3 , что противоречит максимальнойности M .

2.1. Перераспределение зарядов. Множества вершин, ребер и граней контрпримера M обозначим через V , E и F соответственно. Из формулы Эйлера $|V| - |E| + |F| = 2$ для M следует

$$\sum_{v \in V} (d(v) - 6) + \sum_{f \in F} (2r(f) - 6) = -12. \quad (1)$$

Положим *начальный заряд* $\mu(v)$ равным $d(v) - 6$ для каждой вершины v и $\mu(f)$ — равным $2d(f) - 6$ для каждой грани f ; таким образом, только 5^- -вершины имеют отрицательный начальный заряд. С учетом свойств контрпримера M локально перераспределим начальные заряды вершин и граней, при этом сохраняя их сумму, таким образом, что *новый заряд* $\mu'(x)$ для всех $x \in V \cup F$ будет неотрицательным. Полученное из (1) противоречие завершит доказательство теоремы 5. Данная техника перераспределения зарядов часто используется при решении структурных задач и задач раскраски плоских графов.

Через $v_1, \dots, v_{d(v)}$ обозначим соседей вершины v в циклическом порядке вокруг v .

Будем использовать следующие правила перераспределения зарядов (см. рис. 1):

R1. Каждая 4^+ -грань дает 1 каждой инцидентной 3-вершине.

R2. Каждая 10-вершина v дает 3-вершине v_1 следующий заряд через грань $f = v_1vv_2 \dots$:

- (a) $\frac{2}{5}$, если $d(f) = 3$ и $d(v_2) \geq 10$,
- (b) $\frac{1}{5}$, если $d(f) \geq 4$ и $d(v_2) = 3$.

R3. Каждая 11^+ -вершина v дает 3-вершине v_1 следующий заряд через грань $f = v_1vv_2$:

- (a) $\frac{1}{2}$, если $11 \leq d(v) \leq 12$,
- (b) $\frac{11}{20}$, если $d(v) \geq 13$.

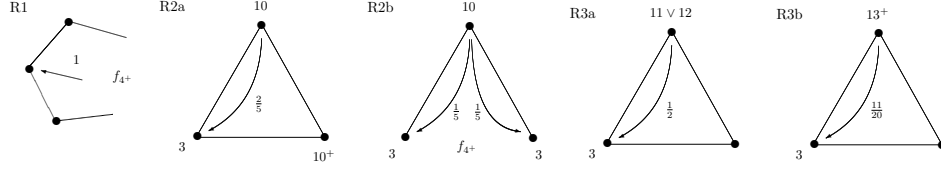


Рис. 1. Правила перераспределения зарядов

2.2. Доказательство неравенства $\mu'(x) \geq 0$ для всех $x \in V \cup F$. Сначала рассмотрим грань f в M . Если $d(f) = 3$, то f не участвует в правилах перераспределения зарядов, поэтому $\mu'(v) = \mu(f) = 2 \times 3 - 6 = 0$. Если $d(f) = 4$, то $\mu'(v) = 8 - 6 - 2 \times 1 = 0$ по R1 ввиду отсутствия $(3, 3, 3, \infty)$ -граней в M . Если $d(f) = 5$, то $\mu'(v) = 10 - 6 - 4 \times 1 = 0$ по R1 ввиду отсутствия $(3, 3, 3, 3, 3)$ -граней в M . Если $d(f) \geq 6$, то $\mu'(v) = 2d(f) - 6 - d(f) \times 1 \geq 0$ по R1.

Пусть далее v является вершиной в M .

СЛУЧАЙ 1: $d(v) = 3$. Если v инцидентна трем 4^+ -граням, то $\mu'(v) \geq 3 - 6 + 3 \times 1 = 0$ по R1.

Если v инцидентна в точности двум 4^+ -граням и 3-грани $v_1 v v_2$, то v получает 1 от каждой 4^+ -грани, и нам необходимо получить 1 в сумме от v_1 и v_2 . Напомним, что грани типов $(3, 3, \infty)$ и $(3, 10, 12)$ запрещены в M , следовательно, $d(v_1) \geq 10$ и $d(v_2) \geq 10$.

Если $d(v_1) = 10$, то $d(v_2) \geq 13$; тем самым $\mu'(v) \geq -3 + 2 \times 1 + \frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{11}{20} > 0$ по R1, R2 и R3b.

Если $11 \leq d(v_1) \leq 12$, то $d(v_2) \geq 11$, откуда получаем либо $\mu'(v) \geq -3 + 2 \times 1 + 2 \times \frac{1}{2} + 0$ по R1 и R3a, либо $\mu'(v) \geq -3 + 2 \times 1 + \frac{1}{2} + \frac{11}{20} > 0$ по R1, R3a и R3b.

Заметим, что случай, когда v инцидентна в точности одной 4^+ -грани, исключен ввиду отсутствия $(3, 3, \infty)$ -граней в M с учетом замечания 1.

Пусть теперь v окружена 3-гранями. Если $d(v_1) = 10$, то $d(v_2) \geq 13$ и $d(v_2) \geq 13$, а следовательно, $\mu'(v) = -3 + 2 \times \frac{2}{5} + 4 \times \frac{11}{20} = 0$ по R2 и R3b. Если $d(v_i) \geq 11$ для всех $1 \leq i \leq 3$, то $\mu'(v) \geq -3 + 6 \times \frac{1}{2} = 0$ по R2, R3a и R3b.

СЛУЧАЙ 2: $d(v) \geq 10$. Если $d(v) = 10$, то v посылает через каждую грань не более $\frac{2}{5}$ согласно R2, откуда $\mu'(v) \geq 10 - 6 - 10 \times \frac{2}{5} = 0$.

Предположим, что $d(v) = 11$. Если v инцидентна хотя бы одной 4^+ -грани, то v ничего не посылает через них, откуда имеем $\mu'(v) \geq 11 - 6 - 10 \times \frac{1}{2} = 0$ по R3a. Если v окружена только 3-гранями, то она инцидентна не менее чем одной грани, в границе которой нет 3-вершин ввиду нечетности $d(v)$ и отсутствию $(3, 3, \infty)$ -граней, и снова $\mu'(v) \geq 11 - 6 - 10 \times \frac{1}{2} = 0$ по R3a.

Рассуждая так же в случае $d(v) = 13$, получаем $\mu'(v) \geq 13 - 6 - 12 \times \frac{11}{20} > 0$ по R3b.

Если $d(v) = 12$, то $\mu'(v) \geq 12 - 6 - 12 \times \frac{1}{2} = 0$ по R3a.

Наконец, если $d(v) \geq 14$, то имеем $\mu'(v) \geq d(v) - 6 - d(v) \times \frac{11}{20} = \frac{3(3d(v)-40)}{20} > 0$ согласно R3b.

Таким образом, доказали, что $\mu'(x) \geq 0$ для всех $x \in V \cup F$, что противоречит формуле (1) и завершает доказательство теоремы 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lebesgue H. Quelques conséquences simples de la formule d'Euler // J. Math. Pures Appl. 1940. V. 19. P. 27–43.
2. Borodin O. V. Colorings of plane graphs: a survey // Discrete Math. 2013. V. 313, N 4. P. 517–539.
3. Ore O., Plummer M. D. Cyclic coloration of plane graphs // Recent progress in combinatorics (W. T. Tutte, ed.) New York: Acad. Press, 1969. P. 287–293.
4. Plummer M. D., Toft B. Cyclic coloration of 3-polytopes // J. Graph Theory. 1987. V. 11. P. 507–515.
5. Kotzig A. From the theory of Eulerian polyhedra (Russian) // Mat. Čas. 1963. V. 13. P. 20–31.
6. Бородин О. В. Решение задач Кошига и Грюнбаума об отделимости цикла в плоском графе // Мат. заметки. 1989. V. 46, N 5. P. 9–12.
7. Grünbaum B. Polytopal graphs // Studies in graph theory (D. R. Fulkerson, ed.). 1975. P. 201–224. (MAA Stud. Math.; V. 12).
8. Plummer M. D. On the cyclic connectivity of planar graph // Graph theory and application. Berlin: Springer-Verl., 1972. P. 235–242.
9. Steinitz E. Polyeder und Raumeinteilungen // Enzykl. math. Wiss. (Geometrie), 3AB. 1922. V. 12. P. 1–139.
10. Kotzig A. Extremal polyhedral graphs // Ann. New York Acad. Sci. 1979. V. 319. P. 569–570.
11. Бородин О. В. Минимальный вес грани в плоских триангуляциях без 4-вершин // Мат. заметки. 1992. Т. 51, № 1. С. 16–19.
12. Borodin O. V. Triangulated 3-polytopes with restricted minimal weight of faces // Discrete Math. 1998. V. 186. P. 281–285.
13. Horňák M., Jendrol' S. Unavoidable sets of face types for planar maps // Discuss. Math. Graph Theory. 1996. V. 16, N 2. P. 123–142.
14. Бородин О. В., Вудал Д. Р. Вес граней в плоских картах // Мат. заметки. 1998. V. 6, N 5. P. 648–657.
15. Августиневич С. В., Бородин О. В. Окрестности ребер в нормальных картах // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 3. С. 3–9.
16. Jendrol' S., Voss H.-J. Light subgraphs of graphs embedded in the plane – a survey // Discrete Math. 2013. V. 313, N 4. P. 406–421.
17. Бородин О. В. Совместное обобщение теорем Лебега и Кошига о комбинаторике плоских графов // Дискрет. математика. 1991. Т. 3, № 4. С. 24–27.
18. Бородин О. В., Лопарев Д. В. Высота младших граней в плоских нормальных картах // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1998. Т. 5, № 4. С. 6–17.
19. Ferencová B., Madaras T. On the structure of polyhedral graphs with prescribed edge and dual edge weight // Acta Univ. M. Belii Math. 2005. V. 12. P. 13–18.
20. Ferencová B., Madaras T. Light graph in families of polyhedral graphs with prescribed minimum degree, face size, edge and dual edge weight // Discrete Math. 2010. V. 310. P. 1661–1675.
21. Jendrol' S. Triangles with restricted degrees of their boundary vertices in plane triangulations // Discrete Math. 1999. V. 196. P. 177–196.
22. Madaras T., Soták R. The 10-cycle C_{10} is light in the family of all plane triangulations with minimum degree five // Tatra Mt. Math. Publ. 1999. V. 18. P. 35–56.
23. Madaras T., Škrekovski R., Voss H.-J. The 7-cycle C_7 is light in the family of planar graphs with minimum degree 5 // Discrete Math. 2007. V. 307. P. 1430–1435.
24. Mohar B., Škrekovski R., Voss H.-J. Light subgraphs in planar graphs of minimum degree 4 and edge-degree 9 // J. Graph Theory. 2003. V. 44. P. 261–295.
25. Madaras T., Škrekovski R. Heavy paths, light stars, and big melons // Discrete Math. 2004. V. 286. P. 115–131.
26. Бородин О. В. Усиление теоремы Лебега о строении младших граней в выпуклых многогранниках // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2002. Т. 9, № 3. С. 29–39.

- 27. Borodin O. V., Ivanova A. O. Describing 3-faces in normal plane maps with minimum degree 4 // Discrete Math. 2013. V. 313, N 23. P. 2841–2847.
- 28. Borodin O. V., Woodall D. R. Cyclic degrees of 3-polytopes // Graphs Comb. 1999. V. 15. P. 267–277.
- 29. Kotzig A. Contribution to the theory of Eulerian polyhedra // Mat.-Fyz. Čas. 1955. V. 5. P. 101–113.
- 30. Wernicke P. Über den kartographischen Vierfarbensatz // Math. Ann. 1904. V. 58. P. 413–426.

Статья поступила 7 мая 2016 г.

Иванова Анна Олеговна
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
shmgnanna@mail.ru

DESCRIPTION OF FACES IN 3-POLYTOPES WITHOUT VERTICES OF DEGREE FROM 4 TO 9

A. O. Ivanova

Abstract. In 1940, Lebesgue proved that every normal plane map contains a face for which the set of degrees of its vertices is majorized by one of the following sequences:

$$\begin{aligned} &(3, 6, \infty), (3, 7, 41), (3, 8, 23), (3, 9, 17), (3, 10, 14), (3, 11, 13), \\ &(4, 4, \infty), (4, 5, 19), (4, 6, 11), (4, 7, 9), (5, 5, 9), (5, 6, 7), \\ &(3, 3, 3, \infty), (3, 3, 4, 11), (3, 3, 5, 7), (3, 4, 4, 5), (3, 3, 3, 3, 5). \end{aligned}$$

In this note prove that every 3-polytope without vertices of degree from 4 to 9 contains a face for which the set of degrees of its vertices is majorized by one of the following sequences:
 $(3, 3, \infty), (3, 10, 12), (3, 3, 3, \infty), (3, 3, 3, 3, 3),$
which is tight.

Keywords: planar graph, plane map, structure properties, 3-polytope, weight.

REFERENCES

1. Lebesgue H. "Quelques conséquences simples de la formule d'Euler," J. Math. Pures Appl., **19**, 27–43 (1940).
2. Borodin O. V. "Colorings of plane graphs: a survey," Discrete Math., **313**, 4, 517–539 (2013).
3. Ore O. and Plummer M. D. "Cyclic coloration of plane graphs," in: Recent progress in combinatorics (W. T. Tutte, ed.), Acad. Press, New York (1969), pp. 287–293.
4. Plummer M. D. and Toft B. "Cyclic coloration of 3-polytopes," J. Graph Theory **11**, 507–515 (1987).
5. Kotzig A. "From the theory of Eulerian polyhedra," Mat. Čas., **13**, 20–31 (1963).
6. Borodin O. V. "Solution of Kotzig's and Grünbaum's problems on the separability of a cycle in a planar graph," Mat. Zametki, **46**, 5, 9–12 (1989).
7. Grünbaum B. "Polytopal graphs," in: Studies in graph theory (D. R. Fulkerson, ed.), Washington, DC, Math. Assoc. Amer. (1975), pp. 201–224. (MAA Stud. Math.; V. 12).
8. Plummer M. D. "On the cyclic connectivity of planar graph," in: Graph theory and application, Springer-Verl., Berlin (1972), pp. 235–242.
9. Steinitz E. "Polyeder und Raumeinteilungen," Enzykl. math. Wiss. (Geometrie), 3AB, **12**, 1–139 (1922).
10. Kotzig A. "Extremal polyhedral graphs," Ann. New York Acad. Sci., **319**, 569–570 (1979).
11. Borodin O. V. "Minimal weight of face in plane triangulations without 4-vertices," Mat. zametki, **51**, 1, 16–19 (1992).
12. Borodin O. V. "Triangulated 3-polytopes with restricted minimal weight of faces," Discrete Math., **186** 281–285 (1998).
13. Horňák M. and Jendrol' S. "Unavoidable sets of face types for planar maps," Discus. Math. Graph Theory, **16**, 2, 123–142 (1996).
14. Borodin O. V. and Woodall D. R. "The weight of faces in plane maps," Mat. Zametki, **6**, 5, 648–657 (1998).

15. Avgustinovich S. V. and Borodin O. V. "Neighborhoods of edges in normal maps," Diskretn. Anal. Issled. Oper., **2**, 3, 3–9 (1995).
16. Jendrol' S. and Voss H.-J. "Light subgraphs of graphs embedded in the plane – a survey," Discrete Math., **313**, 4, 406–421 (2013).
17. Borodin O. V. "Joint generalization of the theorems of Lebesgue and Kotzig on the combinatorics of planar maps," Diskret. Mat., **3**, 4, 24–27 (1991).
18. Borodin O. V. and Loparev D. V. "The height of small faces in planar normal maps," Diskretn. Anal. Issled. Oper. Ser. 1, **5**, 4, 6–17 (1998).
19. Ferencová B. and Madaras T. "On the structure of polyhedral graphs with prescribed edge and dual edge weight," Acta Univ. M. Belii Math., **12**, 13–18 (2005).
20. Ferencová B. and Madaras T. "Light graph in families of polyhedral graphs with prescribed minimum degree, face size, edge and dual edge weight," Discrete Math., **310**, 1661–1675 (2010).
21. Jendrol' S. "Triangles with restricted degrees of their boundary vertices in plane triangulations," Discrete Math., **196**, 177–196 (1999).
22. Madaras T. and Soták R. "The 10-cycle C_{10} is light in the family of all plane triangulations with minimum degree five," Tatra Mt. Math. Publ., **18**, 35–56 (1999).
23. Madaras T., Škrekovski R., and Voss H.-J. "The 7-cycle C_7 is light in the family of planar graphs with minimum degree 5," Discrete Math., **307**, 1430–1435 (2007).
24. Mohar B., Škrekovski R., and Voss H.-J. "Light subgraphs in planar graphs of minimum degree 4 and edge-degree 9," J. Graph Theory, **44**, 261–295 (2003).
25. Madaras T. and Škrekovski R. "Heavy paths, light stars, and big melons," Discrete Math., **286**, 115–131 (2004).
26. Borodin O. V. "An improvement of Lebesgue's theorem on the structure of minor faces of 3-polytopes," Diskretn. Anal. Issled. Oper., **9**, 3, 29–39 (2002).
27. Borodin O. V. and Ivanova A. O. "Describing 3-faces in normal plane maps with minimum degree 4," Discrete Math., **313**, 23, 2841–2847 (2013).
28. Borodin O. V. and Woodall D. R. "Cyclic degrees of 3-polytopes," Graphs Comb., **15**, 267–277 (1999).
29. Kotzig A. "Contribution to the theory of Eulerian polyhedra," Mat.-Fyz. Čas., **5**, 101–113 (1955).
30. Wernicke P. "Über den kartographischen Vierfarbensatz," Math. Ann., **58**, 413–426 (1904).

Submitted May 07, 2016

Anna Olegovna Ivanova

M. K. Ammosov North-Eastern Federal University,
Kulakovskogo st., 48, Yakutsk 677000, Yakutia, Russia
shmgnanna@mail.ru