

УДК 517.946

## ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. И. Григорьева

**Аннотация.** Изучается разрешимость задачи сопряжения для неклассических дифференциальных уравнений, а именно для псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений. Заданные уравнения рассматриваются с некоторым разрывным коэффициентом в одномерном случае. Для доказательства теорем существования и единственности регулярных решений используется метод продолжения по параметру.

**Ключевые слова:** псевдопараболическое уравнение, псевдогиперболическое уравнение, разрывные коэффициенты, задача сопряжения, существование, единственность, регулярное решение.

### Введение

Работа посвящена исследованию разрешимости задач сопряжения (обобщенных задач дифракции или transmission problems) для псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений.

Обычная задача сопряжения, или задача дифракции, соответствует ситуации, в которой то или иное дифференциальное уравнение (возможно, с разрывными коэффициентами) рассматривается в двух областях с общим участком границы, при этом на общем участке границы задаются условия непрерывности решения и потока. С точки зрения математического моделирования задача дифракции подразумевает, что моделируется тот или иной физический, механический или химический процесс, протекающий в двух средах с разными характеристиками [1].

В настоящей работе будем рассматривать задачу сопряжения в более общей постановке — вместо условий непрерывности будем задавать условия сопряжения (склейки) с произвольными коэффициентами.

Для классических дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического, параболического или гиперболического типов задачи дифракции (сопряжения) изучаются с давних времен — см., например, работы [2–6]; из более поздних работ отметим статьи [7–12]. Задачи с условиями сопряжения (склейки) естественным образом возникают и также давно изучаются в теории уравнений смешанного типа и в теории вырождающихся уравнений (см., например, [13–21]).

Наконец, отметим, что в последнее время задачи сопряжения изучаются и для неклассических дифференциальных уравнений [22–29].

Как указано выше, задачи сопряжения естественным образом возникают в математическом моделировании — при изучении процессов теплопроводности в составных средах, колебаний неоднородных (составных) сред, в электродинамике, в теории упругости и во многих других ситуациях. Некоторые примеры можно найти в [30–33].

Уравнения, изучаемые в настоящей работе, а именно псевдопараболические и псевдогиперболические, в последнее время в литературе называют в целом *уравнениями соболевского типа*. Их активное изучение началось с работы С. Л. Соболева [34]; обширную библиографию по тематике, связанной с подобными уравнениями, можно найти в монографиях [35–40]. Вместе с тем заметим, что задачи сопряжения, или обобщенные задачи дифракции, для псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений ранее практически не изучались. Можно отметить лишь работу [23]. Частично восполнить этот пробел и предполагается в настоящей статье.

## 1. Постановки задач

Пусть  $x$  — точка интервала  $(-1, 1)$  оси  $Ox$ ;  $Q_1$ ,  $Q_2$  и  $Q$  — цилиндры  $(-1, 0) \times (0, T)$ ,  $(0, 1) \times (0, T)$  и  $(-1, 1) \times (0, T)$  конечной высоты  $T$ ;  $a(x, t)$ ,  $b(x, t)$ ,  $c(x, t)$  и  $f(x, t)$  суть заданные функции, определенные при  $(x, t) \in \overline{Q}$ ;  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  — заданные функции, определенные при  $t \in [0, T]$ . Далее, пусть  $h(x)$  — заданная функция, определенная при  $x \in [-1, 0]$  и  $x \in (0, 1]$ , строго положительная и дифференцируемая на указанных множествах и такая, что у нее определено конечное значение  $h(+0)$ , также являющееся положительным числом, а также определены конечные производные  $h'(\pm 0)$ .

**Задача сопряжения I.** Найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в цилиндрах  $Q_1$  и  $Q_2$  решением уравнения

$$u_t - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)u_{xt}) - a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u = f(x, t) \quad (1)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(-1, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \quad (3)$$

$$u(-0, t) = \alpha(t)u(+0, t), \quad 0 < t < T, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & h(+0)u_{xt}(+0, t) + a(+0, t)u_x(+0, t) \\ & = \beta(t)[h(-0)u_{xt}(-0, t) + a(-0, t)u_x(-0, t)], \quad 0 < t < T. \end{aligned} \quad (5)$$

**Задача сопряжения II.** Найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в цилиндрах  $Q_1$  и  $Q_2$  решением уравнения

$$u_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)u_{xt}) - a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u = f(x, t) \quad (6)$$

и такую, что для нее выполняются начальные условия

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \quad (7)$$

а также условия (2), (4), (5).

Определим необходимые функциональные пространства  $V_1$  и  $V_2$ :

$$V_1 = \left\{ v(x, t) : \int_{Q_1 \cup Q_2} (v^2 + v_{xxt}^2) dx dt < +\infty, \right\},$$

$$V_2 = \left\{ v(x, t) : \int_{Q_1 \cup Q_2} (v^2 + v_{tt}^2 + v_{xxt}^2) dx dt < +\infty \right\},$$

где все производные понимаются как обобщенные производные по С. Л. Соболеву [45]. Зададим нормы в этих пространствах:

$$\|v\|_{V_1} = \left\{ \int_{Q_1 \cup Q_2} (v^2 + v_{xxt}^2) dx dt \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \|v\|_{V_2} = \left\{ \int_{Q_1 \cup Q_2} (v^2 + v_{tt}^2 + v_{xxt}^2) dx dt \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что  $V_1$  и  $V_2$  с заданными нормами являются банаховыми пространствами.

Прежде чем перейти к содержательной части, отметим, что в [23] аналогичная задача сопряжения изучалась для уравнения (1) с условиями (2)–(4), но при выполнении условий  $a(x, t) = \alpha_0 h(x)$ ,  $b(x, t) = -\alpha_0 h'(x)$ ,  $\alpha_0 = \text{const}$ ,  $\alpha(t) \equiv \beta(t) \equiv 1$ . При этом в [23] было доказано существование обобщенных решений.

В настоящей работе подобных ограничений на функции  $a(x, t)$ ,  $b(x, t)$  нет (другими словами, будут рассмотрены более общие модели, чем в [23]), кроме того, будет доказано существование регулярных решений, имеющих все производные, входящие в уравнения (1), (6).

И еще одно замечание. Условие (5) задач сопряжения I и II, определяющее склеивание потока, интегрированием нетрудно преобразовать к виду, не содержащему вторых производных  $u_{xt}(-0, t)$  и  $u_{xt}(+0, t)$ . В случае работы [23] такое преобразование позволяет перейти к более простой формулировке задачи сопряжения, в которой задается условие склеивания лишь первой (конормальной в многомерном случае) производной. В настоящей работе вышеназванное преобразование приводит к видоизмененному условию склеивания (5). Именно в такой видоизмененной постановке и будем рассматривать задачи сопряжения для уравнений (1) и (6).

Пусть дополнительно заданы функции  $\beta_0(t)$  и  $K(t, \tau)$ , определенные при  $t \in [0, T]$ ,  $\tau \in [0, t]$ ,  $0 \leq t \leq T$ .

**Задача сопряжения I'.** Найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в цилиндрах  $Q_1$  и  $Q_2$  решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2)–(4), а также условие

$$h(+0)u_x(+0, t) = \beta_0(t)h(-0)u_x(-0, t) + \int_0^t K(t, \tau)u_x(-0, \tau)d\tau, \quad 0 < t < T. \quad (5')$$

**Задача сопряжения II'.** Найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в цилиндрах  $Q_1$  и  $Q_2$  решением уравнения (6) и такую, что для нее выполняются условия (2), (4), (5') и (7).

Задачи сопряжения I' и II' дают более общую по сравнению с задачами I и II постановку задач сопряжения для псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений. В каком случае решения задач сопряжения I' и II' дают решения задач I и II, покажем ниже.

## 2. Разрешимость задачи сопряжения I'

Обсудим вначале вопрос о единственности решений.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия

$$\alpha(t) \in C^1([0, T]), \quad \beta_0(t) \in C^1([0, T]), \quad (8)$$

$$|\beta_0(t)| > 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, T], \quad (9)$$

$$K(t, \tau) \in C^1(D), \quad a(x, t) \in C(\overline{Q_1}) \cap C(\overline{Q_2}), \quad (10)$$

$$h(x) \in C^1([-1, 0]), \quad h(x) \in C^1([0, 1]), \quad |h'(x)| \leq C\sqrt{h(x)}, \quad C \geq 0, \quad (11)$$

$$\frac{\alpha(t)}{\beta_0(t)} \geq \gamma_0 \geq 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, T]. \quad (12)$$

Тогда задача сопряжения I' имеет в пространстве  $V_1$  не более одного решения.

**Доказательство.** Пусть  $f(x, t) \equiv 0$  при  $(x, t) \in Q$ . Умножим уравнение (1) на  $(u - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)u_x))$  и проинтегрируем по области  $Q_1$ . Далее умножим уравнение (1) на  $\gamma(t)(u - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)u_x))$  и проинтегрируем по области  $Q_2$ , где  $\gamma(t) = \frac{\alpha(t)}{\beta_0(t)}$ . Просуммировав полученные равенства, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{-1}^0 u^2(x, t) dx + \frac{\gamma(t)}{2} \int_0^1 u^2(x, t) dx + \int_{-1}^0 h(x)u_x^2(x, t) dx + \gamma(t) \int_0^1 h(x)u_x^2(x, t) dx \\ & + \frac{1}{2} \int_{-1}^0 h^2(x)u_x^2(x, t) dx + \frac{\gamma(t)}{2} \int_0^1 h^2(x)u_x^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^0 h^2(x)u_{xx}^2(x, t) dx \\ & + \frac{\gamma(t)}{2} \int_0^1 h^2(x)u_{xx}^2(x, t) dx = h(-0)u(-0, t)u_x(-0, t) - \gamma(t)h(+0)u(+0, t)u_x(+0, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{-1}^0 h'(x)h(x)u_x(x,t)u_{xx}(x,t) dx - \gamma(t) \int_0^1 h'(x)h(x)u_x(x,t)u_{xx}(x,t) dx \\
& - \int_0^t \int_{-1}^0 c(x,\tau)u^2 dx d\tau - \int_0^t \int_0^1 \left[ \gamma(\tau)c(x,\tau) - \frac{\gamma'(\tau)}{2} \right] u^2 dx d\tau \\
& + \int_0^t \int_{-1}^0 h'(x)b(x,\tau)u_x^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 \left[ h'(x)\gamma(\tau)b(x,\tau) + \frac{h'^2(x)\gamma'(\tau)}{2} \right] u_x^2 dx d\tau \\
& - \int_0^t \int_{-1}^0 h'(x)a(x,\tau)u_{xx}^2 dx d\tau - \int_0^t \int_0^1 \left[ h(x)\gamma(\tau)a(x,\tau) - \frac{h^2(x)\gamma'(\tau)}{2} \right] u_{xx}^2 dx d\tau \\
& - \int_0^t \int_{-1}^0 [b(x,\tau) - h'(x)c(x,\tau)]uu_x dx d\tau \\
& - \int_0^t \int_0^1 [\gamma(\tau)b(x,\tau) - h'(x)\gamma(\tau)c(x,\tau) + h'(x)\gamma'(\tau)]uu_x dx d\tau \\
& - \int_0^t \int_{-1}^0 [h'(x)a(x,\tau) - h(x)b(x,\tau)]u_x u_{xx} dx d\tau \\
& - \int_0^t \int_0^1 [h'(x)\gamma(\tau)a(x,\tau) - h(x)\gamma(\tau)b(x,\tau) - h'(x)h(x)\gamma'(\tau)]u_x u_{xx} dx d\tau \\
& + \int_0^t \int_{-1}^0 [a(x,\tau) + h(x)c(x,\tau)]uu_{xx} dx d\tau + \\
& + \int_0^t \int_0^1 [\gamma(\tau)a(x,\tau) + h(x)\gamma(\tau)c(x,\tau) - h(x)\gamma'(\tau)]uu_{xx} dx d\tau.
\end{aligned}$$

Имеют место следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
\int_0^t \nu^2(-0, \tau) d\tau & \leq \delta \int_0^t \int_{-1}^0 \nu_x^2 dx d\tau + C(\delta) \int_0^t \int_{-1}^0 \nu^2 dx d\tau, \\
\int_0^t \nu^2(+0, \tau) d\tau & \leq \delta \int_0^t \int_0^1 \nu_x^2 dx d\tau + C(\delta) \int_0^t \int_0^1 \nu^2 dx d\tau,
\end{aligned} \tag{*}$$

где  $\delta$  — произвольное положительное число.

Введем обозначение

$$I_1 = h(-0)u(-0, t)u_x(-0, t) - \gamma(t)h(+0)u(+0, t)u_x(+0, t). \tag{14}$$

Тогда, используя условия (2)–(4) и (5') в (14), перепишем  $I_1$  в виде

$$I_1 = -\gamma(t)u(+0, t) \int_0^t K(t, \tau)u_x(-0, \tau)d\tau. \quad (15)$$

Применяя в (13) неравенства (\*), Гёльдера, Юнга, используя (15) и условия теоремы, получим неравенство

$$\begin{aligned} k_0 \left[ \int_{-1}^0 u^2(x, t) dx + \int_0^1 u^2(x, t) dx + \int_{-1}^0 u_x^2(x, t) dx + \int_0^1 u_x^2(x, t) dx + \int_{-1}^0 u_{xx}^2(x, t) dx \right. \\ \left. + \int_0^1 u_{xx}^2(x, t) dx \right] \leq C_1 \left[ \int_0^t \int_{-1}^0 u^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 u^2 dx d\tau + \int_0^t \int_{-1}^0 u_x^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 u_x^2 dx d\tau \right. \\ \left. + \int_0^t \int_{-1}^0 u_{xx}^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 u_{xx}^2 dx d\tau \right], \end{aligned}$$

где  $k_0$  определяется функциями  $h(x)$ ,  $\gamma(\tau)$ , а  $C_1$  — функциями  $h(x)$ ,  $\gamma(\tau)$ ,  $a(x, t)$ ,  $b(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $K(x, t)$ .

Если

$$\begin{aligned} z_1(t) = \int_{-1}^0 u^2(x, t) dx + \int_0^1 u^2(x, t) dx \\ + \int_{-1}^0 u_x^2(x, t) dx + \int_0^1 u_x^2(x, t) dx + \int_{-1}^0 u_{xx}^2(x, t) dx + \int_0^1 u_{xx}^2(x, t) dx, \end{aligned}$$

то следствием (16) будет неравенство

$$z_1(t) \leq M_1 \int_0^t z_1(\tau) d\tau,$$

где число  $M_1$  определяется функциями  $h(x)$ ,  $\gamma(\tau)$ ,  $a(x, t)$ ,  $b(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $K(x, t)$ .

Из этого неравенства и леммы Гронуолла следует, что  $z_1(t) \equiv 0$  при  $t \in [0, T]$ , откуда очевидно, что имеют место тождества  $u(x, t) \equiv 0$  в  $\overline{Q_1}$  и  $u(x, t) \equiv 0$  в  $\overline{Q_2}$ . Теорема доказана.

Рассмотрим вопрос о существовании решений. Справедлива

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия (8)–(12), и пусть также

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_0}{h(+0)} \left[ \beta_0(t)h(-0) + \int_0^t K(t, \tau) d\tau \right] \neq 0, \\ 1 - \lambda_0 \alpha(t) \neq 0 \quad \text{при} \quad \lambda \in [0, 1], \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда для любой функции  $f(x, t)$  из пространства  $L_2(Q)$  задача сопряжения  $I$  имеет решение  $u(x, t)$ , принадлежащее пространству  $V_1$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся методом продолжения по параметру [33, с. 146–148]. Пусть  $\lambda$  — число из отрезка  $[0, 1]$ . Рассмотрим задачу: найти решение  $u(x, t)$  уравнения (1) такое, что для него выполняются условия (2), (3), а также условия

$$u(-0, t) = \lambda \alpha(t) u(+0, t), \quad 0 < t < T, \quad (4_\lambda)$$

$$u_x(+0, t) = \frac{\lambda}{h(+0)} \left[ \beta_0(t) h(-0) u_x(-0, t) + \int_0^t K(t, \tau) u_x(-0, \tau) d\tau \right], \quad 0 < t < T. \quad (5_\lambda)$$

Обозначим через  $\Lambda$  множество тех чисел  $\lambda$  из отрезка  $[0, 1]$ , для которых задача (1)–(3),  $(4_\lambda)$ ,  $(5_\lambda)$  разрешима в пространстве  $V_1$  для любой функции  $f(x, t)$ , принадлежащей пространству  $L_2(Q)$ . Если это множество непусто, открыто и замкнуто, то оно будет совпадать со всем отрезком  $[0, 1]$ .

При  $\lambda = 0$  задача (1)–(3),  $(4_\lambda)$ ,  $(5_\lambda)$  разрешима [36], отсюда следует, что число 0 принадлежит множеству  $\Lambda$ , а значит, множество  $\Lambda$  непусто.

Докажем, что множество  $\Lambda$  открыто. Пусть  $\lambda_0 \in \Lambda$ ,  $\lambda = \lambda_0 + \tilde{\lambda}$ . Покажем, что при малых  $|\tilde{\lambda}|$  число  $\lambda$  также принадлежит  $\Lambda$ .

Пусть  $v(x, t)$  — произвольная функция из пространства  $V$ . Рассмотрим задачу: найти решение  $u(x, t)$  уравнения (1) такое, что для него выполняются условия (2), (3), а также условия

$$u(-0, t) = \lambda_0 \alpha(t) u(+0, t) + \tilde{\lambda} v(+0, t), \quad 0 < t < T, \quad (4_{\lambda, v})$$

$$u_x(+0, t) = \frac{\lambda_0}{h(+0)} \left[ \beta_0(t) h(-0) u_x(-0, t) + \int_0^t K(t, \tau) u_x(-0, \tau) d\tau \right] + \tilde{\lambda} v_x(-0, t), \quad 0 < t < T. \quad (5_{\lambda, v})$$

Введем обозначения  $\varphi_1(t) = \tilde{\lambda} v(+0, t)$ ,  $\psi_1(t) = \tilde{\lambda} v_x(-0, t)$ , и пусть

$$v_0(x, t) = \frac{x - x^3}{\frac{\lambda_0}{h(+0)} \left[ \beta_0(t) h(-0) + \int_0^t K(t, \tau) d\tau \right]} \psi_1(t) + \frac{1 - x^2}{1 - \lambda_0 \alpha(t)} \varphi_1(t),$$

что в силу (17) определено корректно.

Полагая  $u(x, t) = w(x, t) + v_0(x, t)$ , в силу условий  $(4_{\lambda, v})$ ,  $(5_{\lambda, v})$  получим равенства

$$w_t - \frac{\partial}{\partial x} (h(x) w_{xt}) - a(x, t) w_{xx} + b(x, t) w_x + c(x, t) w = f_0(x, t), \quad (18)$$

$$w(-1, t) = w(1, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (19)$$

$$w(x, 0) = 0, \quad x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \quad (20)$$

$$w(-0, t) = \alpha(t)\lambda_0 w(+0, t), \quad 0 < t < T, \quad (21)$$

$$w_x(+0, t) = \frac{\lambda_0}{h(+0)} \left[ \beta_0(t)h(-0)w_x(-0, t) + \int_0^t K(t, \tau)w_x(-0, \tau)d\tau \right], \quad 0 < t < T, \quad (22)$$

где

$$f_0(x, t) = f(x, t) - v_{0t} + \frac{\partial}{\partial x}(h(x)v_{0xt}) + a(x, t)v_{0xx} - b(x, t)v_{0x} - c(x, t)v_0, \quad 0 < t < T.$$

Заметим, что функция  $f_0(x, t)$  принадлежит пространству  $L_2(Q)$  (в силу того, что функция  $v(x, t)$  принадлежит пространству  $V$ ). Поскольку число  $\lambda_0$  принадлежит  $\Lambda$ , задача (18)–(22) имеет решение, принадлежащее  $V$ . Возвращаясь к функции  $u(x, t)$ , получим, что задача (1)–(3),  $(4_{\lambda, v})$ ,  $(5_{\lambda, v})$  при всех  $v(x, t)$  из  $V$  имеет решение  $u(x, t)$ , принадлежащее пространству  $V$ . Тем самым эта задача порождает оператор  $G$ , переводящий пространство  $V$  в себя:  $G(v) = u$ . Покажем, что при малых  $|\tilde{\lambda}|$  этот оператор сжимающий.

Пусть  $w(x, t) = u(x, t) - v_0(x, t)$ ,  $\tilde{f}(x, t) = f_0(x, t) - f(x, t)$ . Для функции  $w(x, t)$  выполняются равенства (19)–(22), а также выполняется уравнение

$$w_t - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)w_{xt}) - a(x, t)w_{xx} + b(x, t)w_x + c(x, t)w = \tilde{f}(x, t). \quad (23)$$

Для получения необходимых оценок рассмотрим равенство, являющееся следствием (23):

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{-1}^0 \left( w_\tau - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)w_{x\tau}) - a(x, \tau)w_{xx} + b(x, \tau)w_x + c(x, \tau)w - \tilde{f}(x, \tau) \right) \\ & \quad \times \left( w - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)w_x) + w_\tau - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)w_{x\tau}) \right) dx d\tau \\ & + \int_0^t \int_0^1 \left( w_\tau - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)w_{x\tau}) - a(x, \tau)w_{xx} + b(x, \tau)w_x + c(x, \tau)w - \tilde{f}(x, \tau) \right) \\ & \quad \times \gamma(\tau) \left( w - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)w_x) + w_\tau - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)w_{x\tau}) \right) dx d\tau = 0. \quad (24) \end{aligned}$$

Проинтегрировав в равенстве (24) по частям, получим

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^0 w^2(x, t) dx + \frac{\gamma(t)}{2} \int_0^1 w^2(x, t) dx + \int_{-1}^0 h(x)w_x^2(x, t) dx + \gamma(t) \int_0^1 h(x)w_x^2(x, t) dx$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_{-1}^0 h'^2(x) w_x^2(x, t) dx + \frac{\gamma(t)}{2} \int_0^1 h'^2(x) w_x^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^0 h^2(x) w_{xx}^2(x, t) dx \\
& + \frac{\gamma(t)}{2} \int_0^1 h^2(x) w_{xx}^2(x, t) dx + \int_0^t \int_{-1}^0 w_\tau^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 \gamma(\tau) w_\tau^2 dx d\tau \\
& + \int_0^t \int_{-1}^0 h^2(x) w_{x\tau}^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 \gamma(\tau) h^2(x) w_{x\tau}^2 dx d\tau \\
& + \int_0^t \int_{-1}^0 h'^2(x) w_{x\tau}^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 \gamma(\tau) h'^2(x) w_{x\tau}^2 dx d\tau + \int_0^t \int_{-1}^0 h^2(x) w_{xx\tau}^2 dx d\tau \\
& + \int_0^t \int_0^1 \gamma(\tau) h^2(x) w_{xx\tau}^2 dx d\tau = h(-0)w(-0, t)w_x(-0, t) - \gamma(t)h(+0)w(+0, t)w_x(+0, t) \\
& + \int_0^t h(-0)w_{x\tau}(-0, \tau)w_\tau(-0, \tau)d\tau - \int_0^t \gamma(\tau)h(+0)w_{x\tau}(+0, \tau)w_\tau(+0, \tau)d\tau \\
& - \int_{-1}^0 h'(x)h(x)w_x(x, t)w_{xx}(x, t) dx - \gamma(t) \int_0^1 h'(x)h(x)w_x(x, t)w_{xx}(x, t) dx \\
& - 2 \int_0^t \int_{-1}^0 h'(x)h(x)w_{x\tau}w_{xx\tau} dx d\tau - 2 \int_0^t \int_0^1 \gamma(\tau)h'(x)h(x)w_{x\tau}w_{xx\tau} dx d\tau \\
& + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 \gamma'(\tau)w^2 dx d\tau - \int_0^t \int_0^1 \gamma'(\tau)h'(x)w w_x dx d\tau \\
& - \int_0^t \int_0^1 \gamma'(\tau)h(x)w w_{xx} dx d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 \gamma'(\tau)h'^2(x)w_x^2 dx d\tau \\
& + \int_0^t \int_0^1 \gamma'(\tau)h'(x)h(x)w_x w_{xx} dx d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 \gamma'(\tau)h^2(x)w_{xx}^2 dx d\tau \\
& + \int_0^t \int_{-1}^0 (a(x, \tau)w_{xx} - b(x, \tau)w_x - c(x, \tau)w + \tilde{f}(x, \tau)) \\
& \quad \times \left( w - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)w_x) + w_\tau - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)w_{x\tau}) \right) \\
& + \int_0^t \int_0^1 \gamma(\tau)(a(x, \tau)w_{xx} - b(x, \tau)w_x - c(x, \tau)w + \tilde{f}(x, \tau))
\end{aligned}$$

$$\times \left( w - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)w_x) + w_\tau - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)w_{x\tau}) \right). \quad (25)$$

Введем обозначение

$$I_2 = \int_0^t h(-0)w_{x\tau}(-0, \tau)w_\tau(-0, \tau) d\tau - \int_0^t \gamma(\tau)h(+0)w_{x\tau}(+0, \tau)w_\tau(+0, \tau) d\tau. \quad (26)$$

Используя условия (19)–(22), приведем (26) к виду

$$\begin{aligned} I_2 = & h(-0) \int_0^t \alpha'(\tau)w_{x\tau}(-0, \tau)w(+0, \tau) d\tau \\ & - h(-0) \int_0^t \beta'_0(\tau)\gamma(\tau)w_x(-0, \tau)w_\tau(+0, \tau) d\tau \\ & - \int_0^t \gamma(\tau)K(\tau, \tau)w_\tau(+0, \tau)w_x(-0, \tau) d\tau \\ & - \int_0^t \gamma(\tau)w_\tau(+0, \tau) \int_0^\tau K_\tau(\tau, \xi)w_x(-0, \xi) d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Применяя неравенства (\*), Гёльдера, Юнга и лемму Гронуолла, как и выше, получим, что следствием равенства (25) будет оценка

$$\|w(x, t)\|_V^2 \leq M_2 \|\tilde{f}(x, t)\|_{L_2(Q)}^2,$$

где число  $M_2$  представлено через  $\lambda$  и определяется функциями  $h(x)$ ,  $\gamma(\tau)$ ,  $a(x, t)$ ,  $b(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $K(x, t)$ . Перейдя к функции  $w(x, t) = u(x, t) - v_0(x, t)$ , получим

$$\|u(x, t)\|_V^2 \leq M_3 |\tilde{\lambda}| \|v(x, t)\|_{L_2(Q)},$$

где число  $M_3$  также определяется функциями  $h(x)$ ,  $\gamma(\tau)$ ,  $a(x, t)$ ,  $b(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $K(x, t)$ .

Пусть  $\tilde{\lambda}$  настолько мало, что выполняется неравенство

$$M_3 |\tilde{\lambda}| < 1.$$

Для таких чисел  $\tilde{\lambda}$  отображение  $G$  будет сжимающим и, следовательно, будет иметь неподвижную точку  $u(x, t)$ :  $G(u) = u$ . Отсюда и получим, что число  $\lambda_0 + \tilde{\lambda}$  принадлежит  $\Lambda$  и тем самым что  $\Lambda$  открыто.

Докажем теперь, что  $\Lambda$  замкнуто. Пусть  $\{\lambda_k\}$  — последовательность элементов множества  $\Lambda$  такая, что  $\lambda_k \rightarrow \lambda_0$ . Покажем, что  $\lambda_0$  также принадлежит  $\Lambda$ . Пусть  $u_k(x, t)$  — решение задачи (1)–(3),  $(4_{\lambda_k})$ ,  $(5_{\lambda_k})$ . Вследствие принадлежности чисел  $\lambda_k$  множеству  $\Lambda$  функции  $u_k$  будут принадлежать пространству  $V$ . Обозначим через  $w_{km}(x, t)$  функцию  $u_k(x, t) - u_m(x, t)$ . Имеют место следующие равенства:

$$w_{kmt} - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)w_{kmtx}) - a(x, t)w_{kmtx} + b(x, t)w_{kmt} + c(x, t)w_{km} = 0, \quad (27)$$

$$w_{km}(-1, t) = w_{km}(1, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (28)$$

$$w_{km}(x, 0) = 0, \quad x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \quad (29)$$

$$w_{km}(-0, t) = \alpha(t)\lambda_k w_{km}(+0, t) + (\lambda_k - \lambda_m)\alpha(t)u_m(+0, t), \quad 0 < t < T, \quad (30)$$

$$w_{kmx}(+0, t) = \frac{\lambda_k}{h(+0)} \left[ \beta_0(t)h(-0)w_{kmx}(-0, t) + \int_0^t K(t, \tau)w_{kmx}(-0, \tau) d\tau \right] + \frac{\lambda_k - \lambda_m}{h(+0)} \left[ \beta_0(t)h(-0)u_{mx}(-0, t) + \int_0^t K(t, \tau)u_{mx}(-0, \tau) d\tau \right], \quad 0 < t < T. \quad (31)$$

Умножим равенство (27) на

$$w_{km} + w_{km\tau} - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)w_{kmx}) - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)w_{kmx\tau})$$

и проинтегрируем по области  $Q_1$ , умножим равенство (27) на

$$\gamma(t) \left[ w_{km} + w_{km\tau} - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)w_{kmx}) - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)w_{kmx\tau}) \right]$$

и проинтегрируем по области  $Q_2$ . Суммируя полученные равенства, интегрируя по частям и используя условия (28)–(31), а также применяя неравенства Гёльдера, Юнга, (\*) и лемму Гронуолла, получим следующую оценку:

$$\|w_{km}(x, t)\|^2 \leq M_4 |\lambda_k - \lambda_m|^2, \quad (32)$$

в которой число  $M_4$  определяется функциями  $h(x)$ ,  $\gamma(\tau)$ ,  $a(x, t)$ ,  $b(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $K(x, t)$ .

Из (32) следует, что  $\{u_k(x, t)\}$  есть фундаментальная в пространстве  $V$  последовательность. Поскольку  $V$  банахово, существует функция  $u(x, t)$  из этого пространства, являющаяся пределом семейства функций  $\{u_k(x, t)\}$ . Переходя к пределу в семействе задач (1)–(3),  $(4_{\lambda_k})$ ,  $(5_{\lambda_k})$  при  $k \rightarrow \infty$ , получим, что предельная функция  $u(x, t)$  будет решением задачи (1)–(3),  $(4_{\lambda_0})$ ,  $(5_{\lambda_0})$ , принадлежащим пространству  $V$ , это и означает, что число  $\lambda_0$  принадлежит  $\Lambda$ .

Таким образом, множество  $\Lambda$  непусто, открыто и замкнуто. Следствием этого является совпадение со всем отрезком  $[0, 1]$  и то, что задача  $I'$  разрешима в пространстве  $V$ . Теорема доказана.

### 3. Разрешимость задачи сопряжения $\Pi'$

Как и в предыдущей задаче, сначала докажем единственность решений.

**Теорема 3.** Пусть выполняются условия (8)–(12). Тогда задача сопряжения  $\Pi'$  имеет в пространстве  $V_2$  не более одного решения.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим равенство, являющееся следствием уравнения (6):

$$\int_0^t \int_{-1}^0 \left[ u_{\tau\tau} - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)u_{x\tau}) - a(x, \tau)u_{xx} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + b(x, \tau)u_x + c(x, \tau)u \left[ u_\tau - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)u_x) \right] dx d\tau \\
& + \int_0^t \int_0^1 \left[ u_{\tau\tau} - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)u_{x\tau}) - a(x, \tau)u_{xx} \right. \\
& \left. + b(x, \tau)u_x + c(x, \tau)u \right] \gamma(\tau) \left( u_\tau - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)u_x) \right) dx d\tau = 0.
\end{aligned}$$

Интегрируя по частям и используя начальные условия, перейдем от данного равенства к следующему:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{-1}^0 u_t^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \gamma(t) u_t^2(x, t) dx + \int_{-1}^0 h'^2(x) u_x^2(x, t) dx + \int_0^1 \gamma(t) h'^2(x) u_x^2(x, t) dx \\
& + \int_{-1}^0 h^2(x) u_{xx}^2(x, t) dx + \int_0^1 \gamma(t) h^2(x) u_{xx}^2(x, t) dx = h(-0)u_x(-0, t)u_t(-0, t) \\
& - \gamma(t)h(+0)u_x(+0, t)u_t(+0, t) - \int_{-1}^0 h(x)u_x(x, t)u_{xt}(x, t) dx \\
& - \int_0^1 \gamma(t)h(x)u_x(x, t)u_{xt}(x, t) dx \\
& - 2 \int_{-1}^0 h'(x)h(x)u_x(x, t)u_{xx}(x, t) dx - 2 \int_0^1 \gamma(t)h'(x)h(x)u_x(x, t)u_{xx}(x, t) dx \\
& + \int_0^t \int_{-1}^0 [a(x, \tau)u_{xx} - b(x, \tau)u_x - c(x, \tau)u] \left( u_\tau - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)u_x) \right) dx d\tau \\
& + \int_0^t \int_0^1 \gamma(\tau)[a(x, \tau)u_{xx} - b(x, \tau)u_x - c(x, \tau)u] \left( u_\tau - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)u_x) \right) dx d\tau.
\end{aligned}$$

Применяя условия сопряжения и неравенства (\*), Гёльдера, Юнга, а также используя равенство (33), получим неравенство вида

$$\begin{aligned}
& k_2 \left[ \int_{-1}^0 u_t^2(x, t) dx + \int_0^1 \gamma(t) u_t^2(x, t) dx + \int_{-1}^0 u_{xt}^2(x, t) dx \right. \\
& \left. + \int_0^1 \gamma(t) u_{xt}^2(x, t) dx + \int_{-1}^0 u_{xxt}^2(x, t) dx + \int_0^1 \gamma(t) u_{xxt}^2(x, t) dx \right] \\
& \leq C_3 \left[ \int_0^t \int_{-1}^0 u^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 \gamma(\tau) u^2 dx d\tau + \int_0^t \int_{-1}^0 u_x^2 dx d\tau \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t \int_0^1 \gamma(\tau) u_x^2 dx d\tau + \int_0^t \int_{-1}^0 u_\tau^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 \gamma(\tau) u_\tau^2 dx d\tau + \int_0^t \int_{-1}^0 u_{xx}^2 dx d\tau \\
& + \int_0^t \int_0^1 \gamma(\tau) u_{xx}^2 dx d\tau + \int_0^t \int_{-1}^0 u_{x\tau}^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 \gamma(\tau) u_{x\tau}^2 dx d\tau \\
& + \int_0^t \int_{-1}^0 u_{xx\tau}^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 \gamma(\tau) u_{xx\tau}^2 dx d\tau \Big], \quad (34)
\end{aligned}$$

где число  $k_2$  определяется функциями  $h(x)$ ,  $\gamma(\tau)$ , а  $C_3$  — функциями  $h(x)$ ,  $\gamma(\tau)$ ,  $a(x, t)$ ,  $b(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $N(x, t)$ .

Введем обозначение

$$\begin{aligned}
z_2(t) = & \int_{-1}^0 u_{xt}^2(x, t) dx + \int_0^1 u_{xt}^2(x, t) dx + \int_{-1}^0 u_t^2(x, t) dx \\
& + \int_0^1 u_t^2(x, t) dx + \int_{-1}^0 u_{xxt}^2(x, t) dx + \int_0^1 u_{xxt}^2(x, t) dx.
\end{aligned}$$

Тогда следствием (34) будет неравенство

$$z_2(t) \leq M_5 \int_0^t z_2(\tau) d\tau,$$

где  $M_5$  определяется функциями  $h(x)$ ,  $\gamma(\tau)$ ,  $a(x, t)$ ,  $b(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $K(x, t)$ .

Применяя лемму Гронуолла, из этого неравенства получим  $z_2(t) \equiv 0$  при  $t \in [0, T]$ , откуда имеют место тождества  $u(x, t) \equiv 0$  в  $\overline{Q_1}$ ,  $u(x, t) \equiv 0$  в  $\overline{Q_2}$ . Теорема доказана.

**Теорема 4.** Пусть выполняются условия (8)–(12). Тогда для любой функции  $f(x, t)$  из пространства  $L_2(Q)$  задача сопряжения  $\Pi'$  имеет решение  $u(x, t)$ , принадлежащее пространству  $V_2$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы также основано на методе продолжения по параметру [33, с. 146–148]. Рассматривается задача: найти решение уравнения (6) такое, что для него выполняются условия (2), (3), а также условия  $(4_\lambda)$  и  $(5_\lambda)$ .  $\Lambda$  — это множество чисел  $\lambda$  из отрезка  $[0, 1]$ , для которых исследуемая задача разрешима в пространстве  $V_2$  для любой функции  $f(x, t)$ , принадлежащей пространству  $L_2(Q)$ . Если множество  $\Lambda$  непусто, открыто и замкнуто, то оно будет совпадать со всем отрезком  $[0, 1]$ .

Множество  $\Lambda$  непусто в силу разрешимости задачи (6), (2), (3),  $(4_\lambda)$ ,  $(5_\lambda)$  при  $\lambda = 0$  [36]. Для доказательства открытости и замкнутости множества  $\Lambda$  достаточно показать наличие для всех решений исследуемой задачи равномерной по  $\lambda$  априорной оценки вида

$$\|u\|_{V_2} \leq M_6 \|f\|_{L_2(Q)}. \quad (35)$$

Для получения необходимой оценки умножим уравнение (6) на выражение  $u_{\tau\tau} - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)u_{x\tau})$  и проинтегрируем по области  $Q_1$ , умножим уравнение (6) на  $\gamma(t)(u_{\tau\tau} - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)u_{x\tau}))$  и проинтегрируем по области  $Q_2$ , затем полученные равенства суммируем. Интегрируя по частям, используя условия теоремы, неравенства (\*), Гёльдера, Юнга, как и выше, получим

$$\begin{aligned}
 k_3 \left[ \int_0^t \int_{-1}^0 u_{\tau\tau}^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 \gamma(\tau) u_{\tau\tau}^2 dx d\tau + \int_0^t \int_{-1}^0 u_{x\tau}^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 \gamma(\tau) u_{x\tau}^2 dx d\tau \right. \\
 \left. \int_0^t \int_{-1}^0 u_{xx\tau}^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 \gamma(\tau) u_{xx\tau}^2 dx d\tau \right] \\
 \leq C_4 \left[ \int_0^t \int_{-1}^0 f^2(x, \tau) dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 \gamma(\tau) f^2(x, \tau) dx d\tau \right], \quad (36)
 \end{aligned}$$

где  $k_3$  определяется функциями  $h(x)$ ,  $\gamma(\tau)$ , а  $C_4$  определяется  $\lambda$  и функциями  $h(x)$ ,  $\gamma(\tau)$ ,  $a(x, t)$ ,  $b(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $K(x, t)$ .

Из неравенства (36) нетрудно получить оценку (35). Таким образом, множество  $\Lambda$  непусто, открыто и замкнуто и, следовательно, исходная задача разрешима в пространстве  $V$ . Теорема доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14, вып. 3. С. 3–19.
2. Олейник О. А. Краевые задачи для линейных уравнений эллиптического и параболического типов с разрывными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1961. Т. 25. № 1. С. 3–20.
3. Ильин В. А. О разрешимости задач Дирихле и Неймана для линейного эллиптического оператора с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137, № 1. С. 28–30.
4. Ильин В. А. Метод Фурье для гиперболического уравнения с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1962. Т. 142, № 1. С. 21–24.
5. Ильин В. А., Шишмарев И. А. Метод потенциалов для задач Дирихле и Неймана в случае уравнения с разрывными коэффициентами // Сиб. мат. журн. 1961. Т. 2, № 1. С. 46–58.
6. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
7. Ильин В. А., Луференко П. В. Смешанные задачи, описывающие продольные колебания стержня, состоящего из двух участков, имеющих разные плотности, разные упругости, но одинаковые импедансы // Докл. АН. 2009. Т. 428, № 1. С. 12–15.
8. Андропова О. А. Спектральные задачи сопряжения с поверхностной диссипацией энергии // Тр. ИПММ НАН Украины. 2009. Т. 19. С. 10–22.
9. Рогожников А. М. Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков, при условии совпадения времени прохождения волн по каждому из этих участков // Докл. АН. 2012. Т. 441, № 4. С. 449–451.
10. Кулешов А. А. Смешанные задачи для уравнения продольных колебаний неоднородного стержня со свободным либо закрепленным правым концом, состоящего из двух участков разной плотности и упругости // Докл. АН. 2012. Т. 442, № 4. С. 451–454.

11. Рогожников А.М. Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков с произвольными длинами // Докл. АН. 2012. Т. 444, № 5. С. 488–491.
12. Смирнов И. Н. О колебаниях, описываемых телеграфным уравнением в случае системы, состоящей из нескольких участков разной плотности и упругости // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 49, № 5. С. 643–648.
13. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
14. Ладыженская О. А., Ступялис Л. Об уравнениях смешанного типа // Вестн. ЛГУ. 1967. № 18. С. 38–46.
15. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970.
16. Ладыженская О. А., Ступялис Л. Краевые задачи для уравнений смешанного типа // Тр. МИАН СССР. 1971. Т. 116. С. 101–136.
17. Ступялис Л. Краевые задачи для эллипτικο-гиперболических уравнений // Тр. МИАН СССР. 1973. Т. 125. С. 211–229.
18. Терсенов С. А. Введение в теорию уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Ин-т математики, 1982.
19. Джураев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1986.
20. Моисеев Е. И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
21. Сабитов К.Б., Мартеньянова Н.В. Обратная задача для уравнения эллипτικο-гиперболического типа с нелокальным граничным условием // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 3. С. 633–647.
22. Кожанов А. И. Задача сопряжения для одного класса уравнений составного типа переменного направления // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2002. С. 96–109.
23. Bouziani A., Merazga N. Solution to a transmission problem for quasilinear pseudoparabolic equations by the Rothe method // Electronic Journal of Differential Equ. 2007. № 14. P. 1–27.
24. Шубин В. В. Краевые задачи для уравнений третьего порядка с разрывным коэффициентом // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2012. Т. 12, № 1. С. 126–138.
25. Potapova S. V. Boundary value problems for pseudohyperbolic equations with a variable time direction // TWMS J. Pure Appl. Math. 2012. V. 3, № 1. P. 73–91.
26. Кожанов А. И., Шарин Е. Ф. Задача сопряжения для некоторых неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка // Укр. мат. вісник. 2014. Т. 11, № 2. С. 181–202.
27. Кожанов А. И., Потапова С. В. Задача Дирихле для одного класса уравнений составного типа с разрывным коэффициентом при старшей производной // Дальневост. мат. журн. 2014. Т. 14, № 1. С. 48–65.
28. Антипин В.И. Разрешимость краевой задачи для уравнения третьего порядка с меняющимся направлением времени // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, № 1. С. 8–15.
29. Pyatkov S. G., Popov S., Antipin V. I. On solvability of boundary value problem for kinetic operator-differential equations // Integral Equ. Operator Theory. 2014. V. 80, № 4. P. 557–580.
30. von Petersdorff T. Boundary integral equations for mixed Dirichlet, Neumann and transmission problems // Math. Meth. Appl. Sci. V. 11. 1989. P. 185–213.
31. Никольский Д. Н. Эволюция раздела различных жидкостей в неоднородных слоях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2010. Т. 50, № 7. С. 1269–1275.
32. Никольский Д. Н. Трехмерная эволюция границы загрязнения в ограниченной кусочно-пористой среде // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2011. Т. 51, № 5. С. 913–919.
33. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2007.
34. Соболев С. Л. Об одной краевой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18, № 2. С. 3–50.
35. Демиденко Г. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной Новосибирск: Науч. кн., 1998.
36. Kozhanov A. I. Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.

- 37. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroup of operators. Utrecht: VSP, 2003.
- 38. Hayashi N., Kaikina E. I., Naumkin P. I., Shishmarev I. A. Asymptotic for dissipative nonlinear equations. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2006.
- 39. Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
- 40. Корпусов М. О. Разрушение в неклассических нелокальных уравнениях. М.: Либроком, 2011.

*Статья поступила 1 августа 2016 г.*

Григорьева Александр Ивановна  
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,  
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000  
`shadrina.ai`

# THE CONJUGATION PROBLEM FOR PSEUDOPARABOLIC AND PSEUDOHYPERBOLIC EQUATIONS

A. I. Grigorieva

**Abstract.** We study solvability of a conjugation problem for pseudoparabolic and pseudohyperbolic equations. The equations are considered as equations with discontinuous coefficients. We prove the existence and uniqueness theorem using natural parameter continuation.

**Keywords:** pseudoparabolic equation, pseudohyperbolic equation, discontinuous coefficient, conjugation problem.

## REFERENCES

1. Gelfand I. M. "Some questions of analysis and differential equations," *Usp. Mat. Nauk*, **14**, No. 3, 3–19 (1959).
2. Oleinik O. A. "Boundary value problems for linear equations of elliptic and parabolic type with discontinuous coefficients," *Izv. AN USSR, Ser. Mat.*, **25**, No. 1, 3–20 (1961).
3. Ilyin V. A. "On the solvability of the Dirichlet and Neumann problems for linear elliptic operator with discontinuous coefficients," *Dokl. Akad. Nauk*, **137**, No. 1, 28–30 (1961).
4. Ilyin V. A. "Fourier method for hyperbolic equations with discontinuous coefficients," *Dokl. Akad. Nauk*, **142**, No. 1, 21–24 (1962).
5. Ilyin V. A. and Shishmarev I. A. "Potential method for the Dirichlet and Neumann problems in the case of equations with discontinuous coefficients," *Sib. Math. J.*, **2**, No. 1, 46–58 (1961).
6. Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., and Ural'tseva N. N., *Linear and quasilinear parabolic equations* [in Russian], Nauka, Moscow, 1967.
7. Ilyin V. A. and Luferenko P. V. "Mixed problems describing the longitudinal vibrations of a rod consisting of two segments with different densities, different elastic, but the same impedances," *Dokl. Math.*, **428**, No. 1, 12–15 (2009).
8. Andropova O. A. "Spectral problems interfacing with surface dissipation of energy," *Tr. Inst. Prikl. Mat. Mekh.*, **19**, 10–22 (2009).
9. Rogozhnikov A. M. "Study of the mixed problem, describing the process of shaft vibrations, which consists of several sections, provided match the transit time of waves in each of these areas," *Dokl. Math.*, **441**, No. 4, 449–451 (2012).
10. Kuleshov A. A. "Mixed problem for the equation of longitudinal vibrations of an inhomogeneous bar with a free or fixed right end, consisting of two sections of different density and elasticity," *Dokl. Math.*, **442**, No. 4, 451–454 (2012).
11. Rogozhnikov A. M. "Study of the mixed problem, describing the process of shaft vibrations, consisting of several sections with arbitrary lengths," *Dokl. Math.*, **444**, No. 5, 488–491 (2012).
12. Smirnov I. N. "Oscillations described by the telegraph equation for a system consisting of several sections of different density and elasticity," *Differ. Equ.*, **49**, No. 5, 643–648 (2012).
13. Bitsadze A. V., *Mixed type equations*, AN USSR, Kiev (1959).
14. Ladyzhenskaya O. A. and Stupyalis L. "About mixed type equations," *Vestn. Leningrad. Univ.*, No. 18, 38–46 (1967).
15. Smirnov I. N., *Mixed type equations*, Nauka, Moscow (1970).

16. Ladyzhenskaya O. A. and Stupyalis L. "Boundary value problems for mixed type equations," Tr. Mat. Inst. Steklova, **116**, 101–136 (1971).
17. Stupyalis L. "Boundary value problems for elliptic-hyperbolic equations," Tr. Mat. Inst. Steklova, **125**, 211–229 (1973).
18. Tersenov S. A., Introduction to the theory of parabolic equations with a varying direction of time, Inst. Mat., Novosibirsk (1982).
19. Juraev T. D., Boundary value problems for equations of mixed and mixed-composite types, Fan, Tashkent (1986).
20. Moiseev E. I., Mixed type equations with a spectral parameter, Izd. Moskov. Univ., Moscow (1988).
21. Sabitov K. B. and Martemyanova N. V. "The inverse problem for an equation of elliptic-hyperbolic type with a nonlocal boundary condition," Sib. Math. J., **53**, No. 3, 633–647 (2012).
22. Kozhanov A. I. "A conjugation problem for a class of composite type equations with changing direction," in: Nonclassical Equ. Math. Phys., Inst. Math., Novosibirsk, 96–109 (2002).
23. Bouziani A. and Merazga N. "Solution to a transmission problem for quasilinear pseudoparabolic equations by the Rothe method," Electron. J. Differ. Equ., No. 14, 1–27 (2007).
24. Shubin V. V. "Boundary problems for third-order equations with discontinuous coefficients," Vestn. Novosib. Gos. Univ., **12**, No. 1, 126–138 (2012).
25. Potapova S. V. "Boundary value problems for pseudohyperbolic equations with a variable time direction. TWMS," J. Pure Appl. Math., **3**, No. 1, 73–91 (2012).
26. Kozhanov A. I. and Sharin E. F. "A conjugation problem for some nonclassical differential equations of higher order," Ukr. Mat. Vestn., **11**, No. 2, 181–202 (2014).
27. Kozhanov A. I. and Potapova S. V. "The Dirichlet problem for a class of composite type equations with a discontinuous coefficient of the highest derivative," Dalnevost. Math. J., **14**, No. 1, 48–65 (2014).
28. Antipin V. I. "The solvability of the boundary value problem for a third-order equation with changing time direction," Mat. Zamet. YaGU, **18**, No. 1, 8–5 (2011).
29. Pyatkov S. G., Popov S., and Antipin V. I. "On solvability of boundary value problems for kinetic operator-differential equations," Integral Equ. Operator Theory, **80**, No. 4, 557–580 (2014).
30. Von Petersdorff T., "Boundary integral equations for mixed Dirichlet, Neumann and transmission problems," Math. Mech. Appl. Sci. **11**, 185–213 (1989).
31. Nikolskiy D. N. "Evolution section of various liquids in non-uniform layers," Comput. Math. Math. Phys., **50**, No 7, 1269–1275 (2010).
32. Nikolskiy D. N. "The three-dimensional pollution in the border bounded by a piecewise-porous medium," Comput. Math. Math. Phys., **51**, No. 5, 913–919 (2011).
33. Trenogin V. A., Functional analysis, Fizmatlit, Moscow (2007).
34. Sobolev S. L., "On a boundary problem of mathematical physics," Izv. Akad. Nauk, **18**, No. 2, 3–50 (1954).
35. Demidenko G. V., Equations and systems unsolvable with respect to the higher derivative, Nauchn. Kniga, Novosibirsk (1998).
36. Kozhanov A. I., Composite type equations and inverse problems, VSP, Utrecht (1999).
37. Sviridyuk G. A. and Fedorov V. E., Linear Sobolev type equations and degenerate semigroup of operators, VSP, Utrecht (2003).
38. Hayashi N., Kaikina E. I., Naumkin P. I., and Shishmarev I. A., Asymptotic for dissipative nonlinear equations, Springer-Verl., Berlin; Heidelberg (2006).

- 
- 39. Sveshnikov A. G., Alshin A. B., Korpusov M. O., and Pletner Yu. D., Linear and non-linear equations of Sobolev type, Fizmatlit, Moscow (2007).
  - 40. Korpusov M. O., The destruction of solutions in the nonclassical non-local equations, Librokom, Moscow (2011).

*Submitted August 1, 2016*

Alexandra Ivanovna Grigorieva  
M. K. Ammosov North-Eastern Federal University,  
Institute of Mathematics and Informatics,  
48 Kulakovskii Street, Yakutsk 677000, Russia  
`shadrina_ai@mail.ru`