

УДК 513.83

О СХОДИМОСТИ D -ПРЕДЕЛОВ

П. В. Черников

Аннотация. Доказаны некоторые утверждения о сходимости D -пределов.

Ключевые слова: финально компактное пространство, счетно полный ультрафильтр, D -предел.

Обозначим через X финально компактное хаусдорфово пространство. Пусть I — произвольное непустое множество, D — счетно полный ультрафильтр над I . В [1] доказана

Лемма 1. Пусть $f \in X^I$. Тогда существует единственная точка $X_0 \in X$ такая, что для всякой окрестности V точки X_0

$$\{i \in I : f(i) \in V\} \in D.$$

Эту точку обозначим, следуя [2], через $D\text{-}\lim f$ и назовем D -пределом функции f . В случае, когда D — ультрафильтр, X — компактное хаусдорфово пространство, теорема о существовании D -предела, аналогичная лемме 1, содержится в [2]. Докажем некоторые утверждения о сходимости D -пределов.

Потребуется

Лемма 2. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset X^I$, $f \in X^I$ и

$$\{i \in I : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(i) = f(i)\} \in D.$$

Тогда для всякой окрестности V точки $D\text{-}\lim f$ существует такой номер N , что

$$\{i \in I : f_n(i) \in V\} \in D$$

при всех $n \geq N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2 аналогично доказательству теоремы 6 из [1].

Теорема 1. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset X^I$, $f \in X^I$ и существует база B окрестностей точки $D\text{-}\lim f$, состоящая из (открытых) множеств типа F_σ . Пусть

$$\{i \in I : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(i) = f(i)\} \in D.$$

Тогда последовательность $\{D\text{-}\lim f_n\}_{n=1}^\infty$ сходится к точке $D\text{-}\lim f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $X_0 = D\text{-}\lim f$. Пусть U — окрестность точки X_0 в пространстве X . Найдется окрестность $V \in B$ точки X_0 такая, что $V \subset U$. По лемме 2 существует такой номер N , что

$$\{i \in I : f_n(i) \in V\} \in D$$

при всех $n \geq N$. По условию множество V имеет тип F_σ , т. е. $V = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, где F_k — замкнутое подмножество пространства X , $k \geq 1$. При $n \geq N$ имеем

$$\{i \in I : f_n(i) \in V\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{i \in I : f_n(i) \in F_k\} \in D.$$

Значит, найдется номер k_n такой, что $\{i \in I : f_n(i) \in F_{k_n}\} \in D$. Отсюда следует, что

$$D\text{-}\lim f_n \in F_{k_n} \subset V \subset U$$

при всех $n \geq N$. Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [3]. Подмножество Z_0 топологического пространства Z называется *относительно секвенциально компактным*, если каждая последовательность его точек содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке пространства Z .

Теорема 2. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^I$, $f \in X^I$. Пусть

$$\{i \in I : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(i) = f(i)\} \in D$$

и подмножество $\{D\text{-}\lim f_n : n = 1, 2, \dots\}$ пространства X относительно секвенциально компактно. Тогда последовательность $\{D\text{-}\lim f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к точке $D\text{-}\lim f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $X_n = D\text{-}\lim f_n$, $n \geq 1$, $X_0 = D\text{-}\lim f$. Допустим, что последовательность $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ не сходится к точке X_0 . Тогда найдутся окрестность U точки X_0 и подпоследовательность $\{X_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ последовательности $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ такие, что X_{n_k} не принадлежит множеству U при всех $k \geq 1$. Найдется подпоследовательность $\{X_{n_{k_m}}\}_{m=1}^{\infty}$ последовательности $\{X_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, сходящаяся к некоторой точке $Y \in X$. Так как Y не принадлежит U , то $Y \neq X_0$. Последнее противоречит теореме 5 из [1]. Теорема доказана.

Теорема 2 обобщает теорему 5 из [1].

Теорема 3. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^I$, $f \in X^I$ и каждая точка $D\text{-}\lim f_n$, $n \geq 1$, имеет тип G_σ . Пусть

$$S = \{i \in I : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(i) = f(i)\} \in D.$$

Тогда последовательность $\{D\text{-}\lim f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к точке $D\text{-}\lim f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $X_n = D\text{-}\lim f_n$, $n \geq 1$. Так как точка X_n имеет тип G_σ , то

$$M_n = \{i \in I : f_n(i) = X_n\} \in D, \quad n \geq 1.$$

Пусть V — окрестность точки $D\text{-}\lim f$. Имеем

$$M = S \cap \{i \in I : f(i) \in V\} \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} M_n \neq \emptyset.$$

Пусть $i_0 \in M$. Найдется номер N такой, что $f_n(i_0) \in V$ при $n \geq N$, т. е. $X_n \in V$ при $n \geq N$. Теорема доказана.

Сходимость D -пределов рассматривается также в [4, 5].

Дадим одно применение теоремы 6 из [1]. Пусть X_* — финально компактное регулярное хаусдорфово пространство. Обозначим через I^* множество всех счетно полных ультрафильтров над I . Для $f \in X_*^I$ можно определить функцию $F : I^* \rightarrow X_*$ следующим образом:

$$F(L) = L\text{-}\lim f, \quad L \in I^*.$$

Теорема 4. Пусть D^* — счетно полный ультрафильтр над множеством I^* . Пусть $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset X_*^I$, $f \in X_*^I$ и

$$\{i \in I : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(i) = f(i)\} = I.$$

Тогда последовательность $\{D^*\text{-}\lim F_n\}_{n=1}^\infty$ сходится к точке $D^*\text{-}\lim F$ (здесь $F_n(L) = L\text{-}\lim f_n$, $F(L) = L\text{-}\lim f$, $L \in I^*$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $L \in I^*$ выполнено включение $I \in L$, поэтому по теореме 6 из [1] последовательность $\{L\text{-}\lim f_n\}_{n=1}^\infty$ сходится к $L\text{-}\lim f$, т. е.

$$\{L \in I^* : \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(L) = F(L)\} = I^*, \quad I^* \in D^*.$$

Применяя еще раз теорему 6 из [1], получаем, что последовательность $\{D^*\text{-}\lim F_n\}_{n=1}^\infty$ сходится к точке $D^*\text{-}\lim F$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черников П. В. Некоторые свойства элементарных теорий и пространства моделей // Мат. заметки ЯГУ. 2013. Т. 20, № 1. С. 153–159.
2. Кейслер Г. Дж., Чэн Чень-чунь. Теория непрерывных моделей. М.: Мир, 1971.
3. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
4. Черников П. В. Об элементарных теориях, пространстве моделей и D -пределах // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, № 1. С. 155–158.
5. Эдвардс Р. Функциональный анализ. М.: Мир, 1969.

Статья поступила 15 марта 2016 г.

Черников Павел Васильевич
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090

UDC 513.83

ON CONVERGENCE OF D-LIMITS

P. V. Chernikov

Abstract: Some statements about the convergence of D-limits are proved.

Keywords: finally compact topological space, countably complete ultrafilter.

REFERENCES

1. Chernikov P. V. "Some Properties of Elementary Theories and Spaces of Models," Math. Notes of Yakut. State Univ., **20**, No. 1, 153–159 (2013).
2. Chang C. C. and Keisler H. J., Continuous Model Theory. Princeton Univ. Press, Princeton (1966).
3. Engelking R., General Topology, Warszawa (1977).
4. Chernikov P. V. "On Elementary theories, model spaces and D-limits," Math. Notes of Yakut. State Univ., **18**, No. 1, 155–158 (2011).
5. Edwards R. D., Functional Analysis. Theory and Applications, Holt Rinehart and Winston, New York, Chicago, San Francisco, Toronto, and London (1965).

Submitted March 15, 2016

Chernikov Pavel Vasilievich
Novosibirsk State University,
Pirogova st., 2, Novosibirsk 630090, Russia