

СТРОЕНИЕ ОКРЕСТНОСТЕЙ
ПЛОСКИХ НОРМАЛЬНЫХ КАРТ
С МИНИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ 5
Д. В. Никифоров

Аннотация. В 1940 г. Лебег дал описание окрестностей вершин степени 5 в нормальных плоских картах с минимальной степенью 5 (M_5), не приводя полного доказательства, а указав только его идею. В работе приводится подробная схема полного доказательства лебеговского описания, в котором улучшены два параметра без ухудшения остальных. Кроме того, описывается доказательство теоремы о высоте 5-звезды (максимальная степень ее вершин) в M_5 , в которой улучшается результат О. В. Бородина, А. О. Ивановой и Т. Р. Йенсена 2013 г.

Ключевые слова: плоский граф, плоская нормальная карта, структура, окрестность.

Введение

Интерес к строению плоских графов с минимальной степенью 5 частично объясняется их ролью в решении известной проблемы четырех красок. Важной вехой на этом пути была таблица Лебега, дающая приблизительное описание окружений вершин степени 5 в M_5 (M_5 — нормальная плоская карта с минимальной степенью 5). Для решения проблемы четырех красок Апеллю и Хакену [1] в 1976 г. потребовалось изучить строение окрестностей второго порядка вершин степени 5 (5-вершин), т. е. шаров радиуса 2 с центрами в 5-вершинах, тогда как таблица Лебега дает описание окрестностей первого порядка.

Как доказано Штейницем, конечные 3-связные плоские графы взаимно однозначно отвечают конечным выпуклым трехмерным многогранникам, называемым 3-многогранниками. Поэтому, изучая строение плоских графов, мы изучаем, в частности, комбинаторное строение 3-многогранников.

В 1904 г. Вернике [2] доказал, что в любом плоском графе с минимальной степенью 5 существует 5-вершина, смежная с 6⁺-вершиной (5-вершиной или 6-вершиной), что в 1922 г. усилил Франклин [3], доказав, что любой плоский граф с минимальной степенью 5 содержит 5-вершину, смежную с двумя 6⁺-вершинами. В 1940 г. Лебег [4] дал описание окрестностей вершин степени 5 в M_5 , не приводя полного доказательства, а указав лишь его идею.

Таблица Лебега в качестве следствий дает различные факты о строении M_5 , допускающие улучшения. Несколько таких следствий доведено до неулучшаемых результатов, но на это потребовались десятки лет и новые идеи. В

целом же до 2013 г. не были известны улучшения ни одного из параметров этой таблицы, не ухудшающие остальных ее параметров.

Теорема 1 [4]. В любой плоской нормальной карте с минимальной степенью 5 существует 5-вершина одного из следующих типов:

$$\begin{aligned} &(\overline{6, 6, 7, 7, 7}), \quad (\overline{6, 6, 6, 7, 9}), \quad (\overline{6, 6, 6, 6, 11}), \quad (\overline{5, 6, 7, 7, 8}), \quad (5, 6, \overline{6, 7, 11}), \\ &(5, 6, \overline{6, 8, 8}), \quad (5, 6, \overline{6, 9, 7}), \quad (5, 7, 6, 6, 12), \quad (5, 8, 6, 6, 10), \quad (5, 6, 6, 6, 17), \\ &\quad (5, 5, \overline{7, 7, 8}), \quad (5, 13, 5, 7, 7), \quad (5, 10, 5, 7, 8), \quad (5, 8, 5, 7, 9), \\ &\quad (5, 7, 5, 7, 10), \quad (5, 7, 5, 8, 8), \quad (5, 5, 7, 6, 12), \quad (5, 5, 8, 6, 10), \\ &\quad (5, 6, 5, 7, 12), \quad (5, 6, 5, 8, 10), \quad (5, 17, 5, 6, 7), \quad (5, 11, 5, 6, 8), \\ &\quad (5, 11, 5, 6, 9), \quad (5, 7, 5, 6, 13), \quad (5, 8, 5, 6, 11), \quad (5, 9, 5, 6, 10), \quad (5, 6, 6, 5, \infty), \\ &\quad (5, 5, 7, 5, 41), \quad (5, 5, 8, 5, 23), \quad (5, 5, 9, 5, 17), \quad (5, 5, 10, 5, 14), \quad (5, 5, 11, 5, 13). \end{aligned}$$

k -Звезда $S_k(v)$ называется *младшей*, если ее центр v имеет степень 5. *Высота* 5-звезды есть максимальная степень ее вершин. Через $h(S_5)$ обозначим минимальную высоту младших 5-звезд в данной M_5 .

Существуют известные оценки для высоты S_1, S_2, S_3, S_4 в M_5 (1904–2014 гг.). Кроме того, известны точные описания младших 3-звезд (Йенсен, Мадараш [5]), $(d-2)$ -звезд (О. В. Бородин, А. О. Иванова [6]) и 4-звезд (О. В. Бородин, А. О. Иванова [7]) в M_5 .

Более общая проблема описания d -звезд при d -вершинах, $d \leq 5$, называемых *полными* звездами, на данный момент кажется неприступной для произвольных НПМ и трудной даже для M_5 .

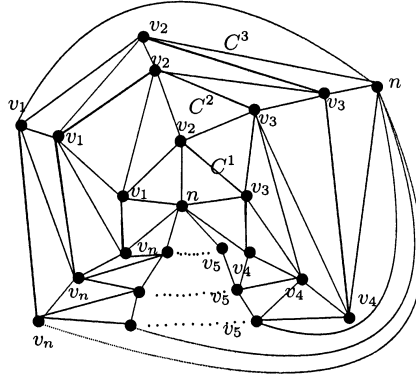
5-Вершина v , окруженная вершинами $v_1, \dots, v_5$ в циклическом порядке, называется $(\overrightarrow{d_1, d_2, d_3, d_4})$ -вершиной, или вершиной *типа* $(\overrightarrow{d_1, d_2, d_3, d_4})$, если существует k , $k \leq 5$, такое, что $d(v_k) \leq d_k$ (сложение по модулю 5).

Существует известная конструкция (рис. 1), показывающая, что $h(S_5)$ не ограничена для произвольных M_5 , и в которой каждая 5-вершина v является $(\overrightarrow{5, 6, 6, 5})$ -вершиной и, более того, v смежна с двумя 5-вершинами и двумя 6-вершинами. Лебег [4] доказал, что если M_5 не содержит $(\overrightarrow{5, 6, 6, 5})$ -вершин, то $h(S_5) \leq 41$. О. В. Бородин, А. О. Иванова и Йенсен [8] понизили эту оценку до 28 и дали конструкцию M_5 без $(\overrightarrow{5, 6, 6, 5})$ -вершин с $h(S_5) = 20$.

В данной статье доказаны следующие теоремы.

Теорема 2. В любой плоской нормальной карте с минимальной степенью 5 существует 5-вершина одного из следующих типов:

$$\begin{aligned} &(\overline{6, 6, 7, 7, 7}), \quad (\overline{6, 6, 6, 7, 9}), \quad (\overline{6, 6, 6, 6, 11}), \quad (5, 8, \overline{6, 7, 7}), \quad (5, 7, 6, 8, 7), \\ &(5, 6, \overline{6, 7, 11}), \quad (5, 6, \overline{6, 8, 8}), \quad (5, 7, 6, 6, 12), \quad (5, 8, 6, 6, 10), \quad (5, 6, 6, 6, 17), \\ &\quad (5, 5, 7, \overline{7, 8}), \quad (5, 13, 5, 7, 7), \quad (5, 10, 5, 7, 8), \quad (5, 8, 5, 7, 9), \\ &\quad (5, 7, 5, 7, 10), \quad (5, 7, 5, 8, 8), \quad (5, 5, 7, 6, 12), \quad (5, 5, 8, 6, 10), \\ &\quad (5, 6, 5, 7, 12), \quad (5, 6, 5, 8, 10), \quad (5, 27, 5, 6, 7), \quad (5, 15, 5, 6, 8), \\ &\quad (5, 11, 5, 6, 9), \quad (5, 7, 5, 6, 13), \quad (5, 8, 5, 6, 11), \quad (5, 9, 5, 6, 10), \quad (5, 6, 6, 5, \infty), \\ &\quad (5, 5, 7, 5, 41), \quad (5, 5, 8, 5, 23), \quad (5, 5, 9, 5, 17), \quad (5, 5, 10, 5, 14), \quad (5, 5, 11, 5, 13). \end{aligned}$$

Рис. 1. Конструкция $h(S_5)$

Теорема 3. В любой плоской нормальной карте с минимальной степенью 5 существует 5-вершина одного из следующих типов:

$$\begin{aligned}
 &(\overline{6, 6, 7, 7, 7}), \quad (\overline{6, 6, 6, 7, 9}), \quad (6, 6, 6, 6, 11), \quad (5, 8, \overline{6, 7, 7}), \quad (5, 7, 6, 8, 7), \\
 &(5, 6, \overline{6, 7, 11}), \quad (5, 6, \overline{6, 8, 8}), \quad (5, 7, 6, 6, 12), \quad (5, 8, 6, 6, 10), \quad (5, 6, 6, 6, 17), \\
 &(5, 5, 7, \overline{7, 8}), \quad (5, 13, 5, 7, 7), \quad (5, 10, 5, 7, 8), \quad (5, 8, 5, 7, 9), \\
 &(5, 7, 5, 7, 10), \quad (5, 7, 5, 8, 8), \quad (5, 5, 7, 6, 12), \quad (5, 5, 8, 6, 10), \\
 &(5, 6, 5, 7, 12), \quad (5, 6, 5, 8, 10), \quad (5, 27, 5, 6, 7), \quad (5, 15, 5, 6, 8), \\
 &(5, 11, 5, 6, 9), \quad (5, 7, 5, 6, 13), \quad (5, 8, 5, 6, 11), \quad (5, 9, 5, 6, 10), \quad (5, 6, 6, 5, \infty), \\
 &(5, 5, 7, 5, 31), \quad (5, 5, 8, 5, 22), \quad (5, 5, 9, 5, 17), \quad (5, 5, 10, 5, 14), \quad (5, 5, 11, 5, 13).
 \end{aligned}$$

В [13–15] теоремы 2 и 3 доказываются для триангуляций.

Теорема 4 [16]. Каждая нормальная плоская карта с минимальной степенью 5, не содержащая $(\overline{5, 6, 6, 5})$ -вершин, содержит младшую 5-звезду высоты не более 23.

Схема доказательства теоремы 2

(1) Достаточно доказать теорему 2 для триангуляций, поскольку добавление диагоналей в нетреугольную грань нормальной плоской карты с минимальной $\delta = 5$ не создает ни новых 5-вершин, ни одного из указанных в теореме 2 типов.

(2) Пусть G — контрпример к теореме 2, т. е. G — плоская триангуляция с минимальной степенью 5, в которых нет ни одного из типов, указанных в теоремах 2–4.

(3) Формулу Эйлера $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2$ перепишем в виде

$$(2|E(G)| - 6|V(G)|) + (4|E(G)| - 6|F(G)|) = -12,$$

где $F(G)$ — множество граней графа G . Отсюда

$$\sum_{v \in V(G)} (d(v) - 6) + \sum_{f \in F(G)} (2r(f) - 6) < 0, \quad (1)$$

где $d(v)$ — степень вершины v , а $r(f)$ — ранг грани f .

(4) Начальный заряд $\mu(v)$ каждой вершины $v \in V(G)$ положим равным $d(v) - 6$, а заряд каждой грани f графа G равен $2r(f) - 6$. Поскольку заряд каждой грани равен 0, из (1) имеем

$$\sum_{v \in V} (d(v) - 6) < 0. \quad (2)$$

Заметим, что заряд 5-вершины равен -1 , заряд 6-вершины равен 0, а заряды всех остальных вершин положительны. Мы перераспределим заряды вершин так, чтобы новый заряд $\mu^*(v)$ каждой вершины v стал неотрицательным. Поскольку сумма зарядов вершин при перераспределении сохраняется, получим противоречие с (2), что и завершит доказательство теоремы.

(5) Используются следующие правила перераспределения зарядов (рис. 2).

R1. Каждая вершина v степени ≥ 7 отдает в грань $\varepsilon(v) = \frac{d(v)-6}{d(v)}$.

R2. Пусть грань $M = xyz$, где $d(x) = 5$, тогда x получает от M :

- (a) $\varepsilon(y) + \varepsilon(z)$, если $d(y) \geq 6$, $d(z) \geq 6$,
- (b) $\frac{\varepsilon(y)}{2}$, если $d(y) \geq 6$, $d(z) = 5$.

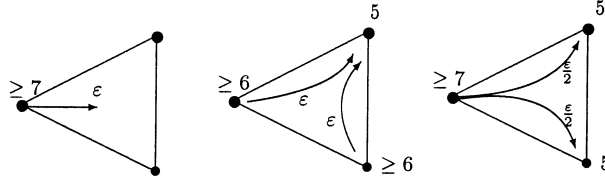


Рис. 2. Правила перераспределения зарядов

(6) Перебор типов теоремы 2.

Имеем пять случаев для рассмотрения: в окрестности v (1) нет 5-вершин; (2) одна 5-вершина; (3) две 5-вершины; (4) три 5-вершины и (5) четыре 5-вершины.

Таким образом теорема 2 доказана.

Схема доказательства теоремы 3

(1) Достаточно доказать теорему 3 для триангуляций, поскольку добавление диагоналей в нетреугольную грань нормальной плоской карты с минимальной $\delta = 5$ не создает новых 5-вершин ни одного из указанных в теореме 3 типов.

(2)–(5). Не отличаются от теоремы 2.

(6) Идея улучшения теоремы Лебега заключается в том, что каждый тип в теореме Лебега — это 5-вершины с разными степенями, которые смежны с центральной вершиной степени 5. Каждый тип, не попавший в теорему Лебега, покрывается одним из типов данных в теореме Лебега. Поэтому суть улучшения состоит в том, чтобы убрать ненужные покрытия. Чтобы это сделать, мы используем заряды из других вершин степени 5. Почему из других вершин степени 5? Потому что у вершин степени 5 есть своя собственная окрестность. Из этой окрестности они получают для себя заряд или даже излишний заряд. И этот излишний заряд мы используем для улучшения других типов в теореме Лебега.

Проверка того, что $\mu^*(v) \geq 0$ для всех $v \in V(G)$

Далее рассмотрим идею улучшения одного типа (5, 5, 7, 5, 33) теоремы 3.

Рассмотрим его центральную вершину степени 5, заряд которой плохой. Выясним, сколько не хватает в типе заряда. Для этого применим правила R1 и R2. Вершины $d(v_1) = d(v_2) = d(v_4) = 5$, $d(v_3) = 7$ и $d(v_5) = 33$ отдают заряд $\mu^*(v) = -1 + \frac{33}{231} < 0$. т. е. типу не хватает $\varepsilon = \frac{9}{231}$, чтобы заряд плохой вершины v стал равен нулю.

После этого рассмотрим соседние вершины степени 5 (рис. 3), где можем получить лишние заряды.

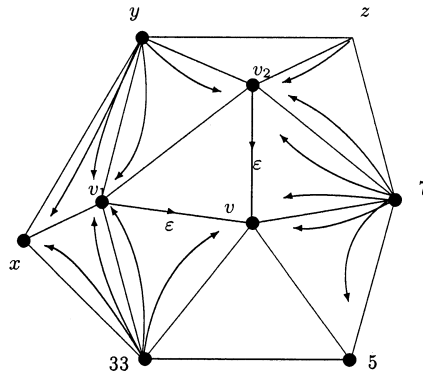


Рис. 3. Перераспределения соседних зарядов

Вершина v_3 не рассматривается, так как из нее получаем слишком много неизвестных соседних вершин. А вершины v_1 и v_2 смежны и число неизвестных соседних вершин заметно меньше.

В ходе улучшения появляется несколько случаев.

(i) Вершина v_1 не имеет достаточного заряда даже для себя, а вершина v_2 имеет достаточно, чтобы отдать лишний заряд обоим смежным 5-вершинам.

(ii) Вершина v_2 не имеет достаточного заряда даже для себя, а вершина v_1 имеет достаточно, чтобы отдать лишний заряд обоим смежным 5-вершинам.

(iii) Вершины v_2 и v_1 не имеют достаточного заряда, чтобы отдать лишний заряд смежной вершине v .

В этом и заключается идея улучшения.

Таким образом после перебора теорема 3 доказана.

Схема доказательства теоремы 4

(1) Достаточно доказать теорему 4 для триангуляций, поскольку добавление диагоналей в нетреугольную грань нормальной плоской карты с $\delta = 5$ не создает ни новых младших звезд, ни $(\overrightarrow{5, 6, 6, 5})$ -вершин и не может понизить высоту имеющихся младших 5-звезд.

(2) Допустим, что триангуляция T_5 с минимальной степенью 5 и множествами вершин, ребер и граней V , E и F соответственно является контрпримером к теореме 4. Заметим, что любая 5-вершина в T_5 смежна с 24^+ -вершиной.

(3)–(4) Не отличается от теоремы 2 или 3.

(5) Используем следующие правила перераспределения зарядов (рис. 4 и 5).

R1: Каждая вершина v с $7 \leq d(v) \leq 23$ отдает $\frac{1}{4}$ каждой инцидентной ей 5-вершине v_2 , если $d(v_3) \geq 6$.

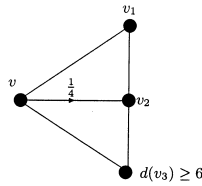


Рис. 4. Правила перераспределения зарядов **R1**

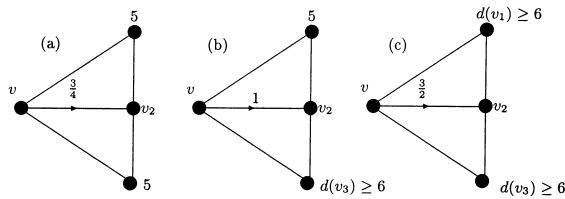


Рис. 5. Правила перераспределения зарядов **R2**

R2. Каждая 24^+ -вершина v отдает каждой инцидентной ей 5-вершине v_2 :

- (a) $\frac{3}{4}$, если $d(v_1) = d(v_3) = 5$,
- (b) 1, если $d(v_1) = 5$, а $d(v_3) \geq 6$,
- (c) $\frac{3}{2}$, если $d(v_1) \geq 6$ и $d(v_3) \geq 6$.

Заряд вершины x после применения правил R1 и R2 обозначим через $\mu_2(x)$.

5-Вершина x называется *богатой*, если $\mu_2(x) > 0$, и *бедной*, если x является $(\overrightarrow{5, 5, n, 5})$ -вершиной, где $7 \leq n \leq 23$.

(6) Леммы 5–8 ведут к завершению доказательства.

Лемма 5. Если $d(v) \geq 24$, то $\mu'(v) \geq 0$.

Лемма 6. Если $7 \leq d(v) \leq 23$, то $\mu'(v) \geq 0$.

Лемма 7. Если 5-вершина v не является бедной, то $\mu_2(v) \geq 0$.

Лемма 8. Если 5-вершина v является бедной или богатой, то $\mu'(v) \geq 0$.

Доказательство леммы 8 имеет схожую идею доказательства улучшения теоремы Лебега. Возможны несколько случаев.

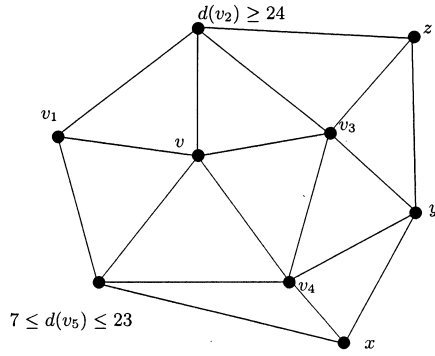


Рис. 6. Окрестность вершины v

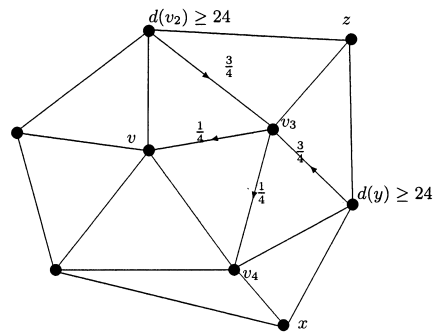


Рис. 7. Если v_4 является бедной

(i) Вершина v_4 не имеет достаточного заряда даже для себя, а вершина v_3 имеет достаточно, чтобы отдать лишний заряд обоим смежным 5-вершинам (рис. 7).

(ii) Вершина v_3 не имеет достаточного заряда даже для себя, а вершина v_4 имеет достаточно, чтобы отдать лишний заряд обоим смежным 5-вершинам (рис. 8).

(iii) Вершина v_4 и v_3 имеют достаточного заряда, чтобы отдать лишний заряд смежной вершине v (рис. 9).

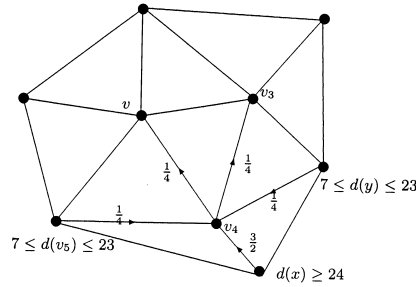
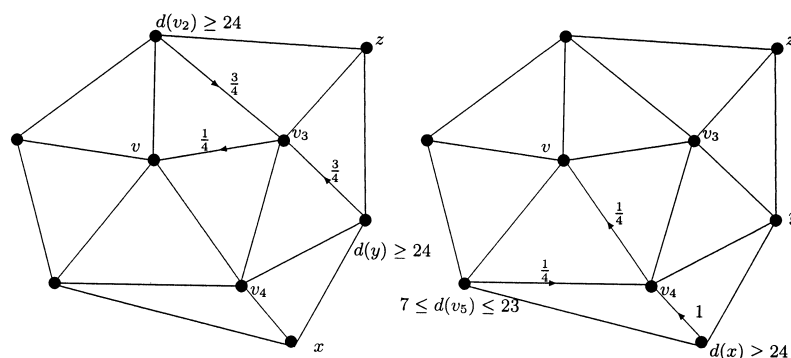


Рис. 8. Если v_3 является бедной

Таким образом, поскольку 6-вершины не участвуют в перераспределении зарядов, а 7^+ -вершины не участвуют в дораспределении зарядов, из лемм 5–8 следует, что $\mu'(v) \geq 0$ для всех $v \in V$. Теорема 4 доказана.

Рис. 9. Если ни одна из вершин v_3 и v_4 не является бедной

ЛИТЕРАТУРА

1. Appel K., Haken W. Every planar map is four colorable. I. Discharging // Illinois J. Math. 1977. V. 21. P. 429–490.
2. Wernicke P. Über den kartographischen Vierfarbensatz // Math. Ann. 1904. V. 58. P. 413–426.
3. Franklin Ph. The four colour problem // Amer. J. Math. 1922. V. 44. P. 225–236.
4. Lebesgue H. Quelques conséquences simples de la formule d'Euler // J. Math. Pures Appl. 1940. V. 19. P. 27–43.
5. Jendrol' S., Madaras T. On light subgraphs in plane graphs of minimal degree five // Discuss. Math. Graph Theory. 1996. V. 16. P. 207–217.
6. Van den Heuvel J., McGuinness S. Coloring the square of a planar graph // J. Graph Theory. 2003. V. 42. P. 110–124.
7. Balogh J., Kochol M., Pluhár A., Yu X. Covering planar graphs with forests // J. Comb. Theory, Ser. B. 2005. V. 94. P. 147–158.
8. Harant J., Jendrol' S. On the existence of specific stars in planar graphs // Graphs Comb. 2007. V. 23. P. 529–543.
9. Borodin O. V., Ivanova A. O. Describing $(d-2)$ -stars at d -vertices, $d \leq 5$, in normal plane maps // Discrete Math. 2013. V. 313, N 17. P. 1700–1709.
10. Borodin O. V., Ivanova A. O. Describing 4-stars at 5-vertices in normal plane maps with minimum degree 5 // Discrete Math. 2013. V. 313, N 17. P. 1710–1714.
11. Borodin O. V., Ivanova A. O., Jensen T. R. 5-stars of low weight in normal plane maps with minimum degree 5 // Discuss. Math. Graph Theory. 2014. V. 34, N 3. P. 539–546.
12. Borodin O. V., Woodall D. R. Short cycles of low weight in normal plane maps with minimum degree 5 // Discuss. Math. Graph Theory. 1998. V. 18, N 2. P. 159–164.
13. Иванова А. О., Никифоров Д. В. Describing of окрестностей 5-вершин в плоских триангуляциях с минимальной степенью 5 // Мат. заметки ЯГУ. 2013. Т. 20, № 2. С. 66–78.
14. Иванова А. О., Никифоров Д. В. Строение окрестностей 5-вершин в плоских триангуляциях с минимальной степенью 5 // Теоретические и практические вопросы развития научной мысли в современном мире. Сб. статей II Междунар. науч.-практ. конф. (29–30 апреля 2013 г.). Ч. 1. Уфа: РИЦ БашГУ, 2013. С. 13–16.
15. Иванова А. О., Никифоров Д. В. Комбинаторное строение триангулированных 3-многогранников с минимальной степенью 5 // Сб. статей науч. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых Республики Саха (Якутия). XVII и XVIII Лаврентьевские чтения г. Якутск. Киров: МНЦНИП, 2015. С. 22–27.
16. Иванова А. О., Никифоров Д. В. Высота 5-звезды в плоских нормальных картах с минимальной степенью 5 // Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 4. С. 39–43.
17. Иванова А. О., Никифоров Д. В. Комбинаторное строение триангулированных 3-многогранников с минимальной степенью 5 // VII Междунар. конф. по математическому

моделированию (Якутск, 30 июня–4 июля 2014 г.) Якутск, 2014. Р. 102–103.

Статья поступила 28 сентября 2015 г.

Никифоров Дмитрий Владиславович
Северо-Восточный федеральный университет, Якутск
Научно-исследовательский институт математики
Институт математики и информатики
zerorebellion@mail.ru

THE STRUCTURE OF NEIGHBORHOODS OF 5-VERTICES IN NORMAL PLANE MAPS WITH MINIMUM DEGREE 5

D. V. Nikiforov

Abstract: In 1940, Lebesgue described the neighborhoods of vertices of degree 5 in normal plane maps with minimum degree 5 (M_5), presenting only an idea of the proof but not the details. The paper presents a detailed scheme of a complete proof of Lebesgue's description with improving two of its parameters without worsening the others. Moreover, it is present a scheme of the proof of the height of a 5-star (the maximum degree of its vertices) in an M_5 , which improves the result of O.V.Borodin, A.O.Ivanova, T.R.Yensen (2013).

Keywords: plane graph, normal plane maps, structure, neighborhood.

REFERENCES

1. Appel K. and Haken W. "Every planar map is four colorable. I. Discharging," Illinois J. Math. **21**, 429–490 (1977).
2. Wernicke P. "Über den kartographischen Vierfarbensatz," Math. Ann. **58**, 413–426 (1904).
3. Franklin P., "The four color problem," Amer. J. Math., **44**, 225–236 (1922).
4. Lebesgue H. "Quelques conséquences simples de la formule d'Euler," J. Math. Pures Appl., **19**, 27–43 (1940).
5. Jendrol' S. and Madaras T. "On light subgraphs in plane graphs with minimum degree five," Discuss. Math. Graph Theory, **16**, 207–217 (1996).
6. Van den Heuvel J. and McGuinness S. "Coloring the square of a planar graph" J. Graph Theory, **42**, 110–124 (2003).
7. Balogh J., Kochol M., Pluhár A., and Yu X. "Covering planar graphs with forests," J. Comb. Theory, Ser. B, **94**, 147–158 (2005).
8. Harant J., Jendrol' S. "On the existence of specific stars in planar graphs," Graphs Comb., **23**, 529–543 (2007).
9. Borodin O. V. and Ivanova A. O. "Describing $(d - 2)$ -stars at d -vertices, $d \leq 5$, in normal plane maps," Discrete Math., **313**, No. 17, 1700–1709 (2013).
10. Borodin O. V. and Ivanova A. O. "Describing 4-stars at 5-vertices in normal plane maps with minimum degree 5," Discrete Math., **313**, No. 17, 1710–1714 (2013).
11. Borodin O. V., Ivanova A. O., and Jensen T. R. "5-Stars of low weight in normal plane maps with minimum degree 5," Discuss. Math. Graph Theory, **34**, No. 3, 539–546 (2014).
12. Borodin O. V. and Woodall D. R. "Short cycles of low weight in normal plane maps with minimum degree 5," Discuss. Math. Graph Theory, **18**, No. 2, 159–164 (1998).
13. Ivanova A. O. and Nikiforov D. V. "Describing of neighborhoods of 5-vertices in plane triangulations with minimum degree 5," Mat. Zam. YaGU, **20**, No. 2, 66–78 (2013).
14. Ivanova A. O. and Nikiforov D. V. "Describing of neighborhoods of 5-vertices in plane triangulations with minimum degree 5," in: Theoretical and practical issues of the development of scientific thought in the modern world," Sb. statey Mezhdunar. nauchno-pract. konf. Ufa, Apr. 29–30, 2013, P. 1. Baskir. Gos. Univ., Ufa (2013), pp. 13–16.

15. *Ivanova A. O. and Nikiforov D. V.* “The combinatorial structure of triangulated polyhedra with minimum degree 5,” *Sb. statey nauch. konf. studentov, aspirantov i molodyh uchenykh Resp. Sakha (Yakutsk) “XVII and XVIII Lavrent’evskie chteniya.”* Kirov (2015), pp. 22–27.
16. *Ivanova A. O. and Nikiforov D. V.* “Height of 5-star in flat normal maps with minimum degree 5,” *Mat. Zamet. SVFU*, **21**, No. 4, 39–43 (2014).
17. *Ivanova A. O. and Nikiforov D. V.* “Combinatorial structure of triangulated 3-polytopes with minimum degree 5,” in: *VII Int. Conf. Math. Modelling (Yakutsk, June 30–July 4, 2014)*, Yakutsk (2014), pp. 102–103.

Submitted September 28, 2015

Nikiforov Dmitrii Vladislavovich
Nord-East Federal University,
Research Institute of Mathematic and Informatic,
Kulakovskogo st., 48, Yakutsk 677000, Russia
`zerorebellion@mail.ru`