

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ КВАЗИПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Е. И. Атласова

Аннотация. Исследована разрешимость задач сопряжения (обобщенных задач дифракции) для квазипараболических уравнений нечетного порядка. Для изучаемых задач доказаны теоремы существования и единственности регулярных решений.

Ключевые слова: квазипараболическое уравнение, задача сопряжения, существование, единственность, априорная оценка, регулярное решение.

Введение

Квазипараболическими уравнениями в математической литературе условно можно назвать уравнения вида

$$(-1)^p D_t^{2p+1} u - \Delta u + c(x, t)u = f(x, t), \quad (*)$$

в которых $D_t^k = \frac{\partial^k}{\partial t^k}$, $p > 0$ (p целое), Δ — оператор Лапласа по пространственным переменным. В случае $p = 0$ эти уравнения являются обычными параболическими уравнениями.

В настоящей работе мы рассматриваем в цилиндре $Q = \Omega \times (-T, T)$, $-T < T < +\infty$, задачу сопряжения для уравнения третьего порядка

$$h(t)D_t^3 u + \Delta u + c(x, t)u = f(x, t), \quad (**)$$

где $c(x, t)$, $f(x, t)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, функция $h(t)$ строго положительна при $t \in [-T, T]$, непрерывна на множествах $[-T, 0]$ и $(0, T]$ и, быть может, имеет разрыв первого рода при $t = 0$.

Разрешимость тех или иных краевых задач для уравнений (**) в случае непрерывной функции $h(t)$ достаточно хорошо изучена (см., например, работы [1–4] и имеющуюся в них библиографию). Вместе с тем заметим, что задачи сопряжения для уравнений (**) (или для более общих уравнений (*) с разрывным коэффициентом $h(t)$ ранее не изучались. С другой стороны, близкие задачи сопряжения, но для уравнений четного порядка по переменной t с разрывной функцией $h(t)$, изучались автором в [5].

1. Постановки задач

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты бесконечно дифференцируемой) границей Γ , Q — цилиндр $\Omega \times (-T, T)$, $0 < T < +\infty$, $S = \Gamma \times (0, T)$. Пусть $h(t)$, $c(x, t)$ и $f(x, t)$ — заданные функции, определенные для $x \in \overline{\Omega}$ и $t \in [-T, T]$, причем функция $h(t)$ строго положительна при $t \in [-T, T]$, непрерывна на отрезках $[-T, 0]$ и $[0, T]$ и имеет разрыв первого рода при $t = 0$, α_i , $i = \overline{0, 2}$, — заданные действительные числа. Обозначим через L дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x, t)$ определяется равенством

$$Lv = h(t)D_t^3 v + \Delta v + c(x, t)v.$$

Обозначим $Q_- = \Omega \times (-T, 0)$, $Q_+ = \Omega \times (0, T)$, $Q = Q_- \cup Q_+$

Задача сопряжения I. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся на множестве Q решением уравнения

$$Lu = f(x, t) \quad (1)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$D_t^k u(x, t)|_{t=-T} = 0, \quad x \in \Omega, \quad k = \overline{0, 1}, \quad (2)$$

$$D_t^1 u(x, t)|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

$$u(x, t)|_S = 0, \quad t \in (-T, T), \quad (4)$$

$$D_t^k u(x, t)|_{t=-0} = \alpha_k D_t^k u(x, t)|_{t=+0}, \quad x \in \Omega, \quad k = \overline{0, 2}. \quad (5)$$

Задача сопряжения II. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся на множестве Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), (4), а также условия

$$D_t^k u(x, t)|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega, \quad k = \overline{0, 1}, \quad (6)$$

$$D_t^k u(x, t)|_{t=-0} = \alpha_k D_t^k u(x, t)|_{t=+0}, \quad x \in \Omega, \quad k = 0, 2. \quad (7)$$

Задача сопряжения III. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся на множестве Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), (4), (5), а также условие

$$u(x, t)|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (8)$$

Задача сопряжения IV. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся на множестве Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), (4), (5), а также условие

$$D_t^2 u(x, t)|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (9)$$

Определим пространство, в котором будут изучаться свойства единственности и существования решений задач сопряжения I и II. Именно, через $W_2^{2,3}(Q_{\mp})$

будем обозначать анизотропное пространство функций, имеющих обобщенные производные по пространственным переменным до второго порядка включительно и по переменной t до третьего порядка включительно. Нормируем пространство $W_2^{2,3}(Q_{\mp})$:

$$\|v\|_{W_2^{2,3}(Q_{\mp})} = \left(\int_{Q_{\mp}} \left[v^2 + \sum_{i,j=1}^n v_{x_i x_j}^2 + (D_t^3 v)^2 \right] dx dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Положим

$$V = \{v(x, t) : v(x, t) \in W_2^{2,3}(Q_-), v(x, t) \in W_2^{2,3}(Q_+)\}.$$

Норму в этом пространстве определим естественным образом:

$$\|v\|_V = \|v\|_{W_2^{2,3}(Q_-)} + \|v\|_{W_2^{2,3}(Q_+)};$$

очевидно, что V с такой нормой есть банахово пространство.

2. Единственность решений

Теорема 1. Пусть выполняются условия

$$h(t) \in C^1([-T, 0]), \quad h(t) \in C^1([0, T]), \quad c(x, t) \in C^1(\overline{Q_-}), \quad c(x, t) \in C^1(\overline{Q_+}); \quad (10)$$

$$h(t) \geq h_0 > 0, \quad h'(t) \geq 0 \quad \text{при } t \in [-T, T]; \quad (11)$$

$$c(x, t) \leq 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{c(x, t)}{h(t)} \right] \geq 0 \quad \text{при } (x, t) \in \overline{Q}; \quad (12)$$

$$\alpha_1 \alpha_2 > 0; \quad (13)$$

$$\alpha_2^2 - \alpha_1 \alpha_2 \geq 0; \quad (14)$$

$$h(+0)\alpha_0^2 - h(-0)\alpha_1 \alpha_2 \geq 0; \quad (15)$$

$$h(-0)\alpha_1 \alpha_2 c(x, +0) - h(+0)\alpha_0^2 c(x, -0) \geq 0 \quad \text{при } x \in \overline{\Omega}; \quad (16)$$

$$\text{если } \alpha_2^2 = \alpha_1 \alpha_2, \text{ то } \alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) = 0. \quad (17)$$

Тогда задача сопряжения I имеет единственное решение в пространстве V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(x, t)$ — тождественно нулевая в $\overline{Q}$ функция.

Рассмотрим равенство

$$- \int_{Q_-} \frac{1}{h(t)} Lu \cdot u_t dx dt - \gamma \int_{Q_+} \frac{1}{h(t)} Lu \cdot u_t dx dt = 0, \quad (18)$$

в котором γ есть число, значение которого будет указано ниже. Интегрируя по частям и используя условия (2)-(5), получим

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 = 0, \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{Q_-} \frac{1}{h'(t)} u_{x_i}^2 dxdt + \frac{\gamma}{2} \sum_{i=1}^n \int_{Q_+} \frac{1}{h'(t)} u_{x_i}^2 dxdt \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{Q_-} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{c(x, t)}{h(t)} \right] u^2 dxdt + \frac{\gamma}{2} \int_{Q_+} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{c(x, t)}{h(t)} \right] u^2 dxdt, \\
I_2 &= \int_{\Omega} [\gamma u_{tt}(x, +0) u_t(x, +0) - u_{tt}(x, -0) u_t(x, -0)] dx, \\
I_3 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} [u_{tt}^2(x, -0) - \gamma u_{tt}^2(x, +0)] dx, \\
I_4 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[\frac{1}{h(-0)} u_{x_i}^2(x, -0) - \frac{\gamma}{h(+0)} u_{x_i}^2(x, +0) \right] dx, \\
I_5 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\frac{\gamma c(x, +0)}{h(+0)} u^2(x, +0) - \frac{c(x, -0)}{h(-0)} u^2(x, -0) \right] dx, \\
I_6 &= \gamma \int_{\Omega} u_{tt}^2(x, T) dx + \frac{\gamma}{2h(T)} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i}^2(x, T) dx - \frac{\gamma}{2h(T)} \int_{\Omega} c(x, T) u^2(x, T) dx.
\end{aligned}$$

Выберем γ : $\gamma = \alpha_1 \alpha_2$. Из условий (11)–(16) следует теперь, что $I_j = 0$, $j = \overline{2, 6}$.

Рассмотрим равенство

$$- \int_{Q_-} \frac{A-t}{h(t)} Lu \cdot u_t dxdt - \gamma \int_{Q_+} \frac{A-t}{h(t)} Lu \cdot u_t dxdt = 0, \quad (20)$$

в котором A — фиксированное число такое, что $A > T$. Интегрируя по частям и используя условия (2)–(5), получим

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_-} u_{tt}^2 dxdt + \gamma \int_{Q_+} u_{tt}^2 dxdt - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{Q_-} \left(\frac{A-t}{h(t)} \right)_t u_{x_i}^2 dxdt \\
&\quad - \frac{\gamma}{2} \sum_{i=1}^n \int_{Q_+} \left(\frac{A-t}{h(t)} \right)_t u_{x_i}^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_{Q_-} \left(\frac{(A-t)c(x, t)}{h(t)} \right)_t u^2 dxdt \\
&\quad + \frac{\gamma}{2} \int_{Q_+} \left(\frac{(A-t)c(x, t)}{h(t)} \right)_t u^2 dxdt - \frac{A(\alpha_2^2 - \alpha_1 \alpha_2)}{2} \int_{\Omega} u_{tt}^2(x, +0) dx \\
&\quad + \frac{A}{2} \left(\frac{\alpha_0^2}{h(-0)} - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{h(+0)} \right) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i}^2(x, +0) dx \\
&\quad + \frac{A}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 c(x, +0)}{h(+0)} - \frac{\alpha_0^2 c(x, -0)}{h(-0)} \right) u^2(x, +0) dx \\
&\quad + \alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) \int_{\Omega} u_{tt}(x, +0) u_t(x, +0) dx + \alpha_1 \alpha_2 (A - T) \int_{\Omega} u_{tt}^2(x, T) dx
\end{aligned}$$

$$+ \frac{\alpha_1 \alpha_2 (A - T)}{2h(T)} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i}^2(x, T) dx - \frac{\alpha_1 \alpha_2 (A - T)}{2h(T)} \int_{\Omega} c(x, T) u^2(x, T) dx = 0. \quad (21)$$

Если $\alpha_2^0 - \alpha_1 \alpha_2$ — положительное число, то из $I_3 = 0$ следует, что $u_{tt}(x, -0) = u_{tt}(x, +0) = 0$ при $x \in \Omega$. Но тогда из (21) очевидным образом вытекает, что $u(x, t) \equiv 0$ в Q_- и Q_+ . Если же $\alpha_2^2 - \alpha_1 \alpha_2 = 0$, то выполняется $\alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) = 0$. Но тогда из (21) вновь следует, что $u(x, t) \equiv 0$ в $\overline{Q}$.

Теорема полностью доказана.

Теорема 2. Пусть выполняется условие (10), а также условия

$$\begin{aligned} h(t) &\geq h_0 > 0 \quad \text{при } t \in [-T, T], \\ h'(t) &\geq 0 \quad \text{при } t \in [-T, 0], \quad h'(t) \leq 0 \quad \text{при } t \in [0, T]; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} c(x, t) &\leq 0 \quad \text{при } (x, t) \in \overline{Q}, \quad c_t(x, t) \geq 0 \quad \text{при } (x, t) \in \overline{Q}_-, \\ c_t(x, t) &\leq 0 \quad \text{при } (x, t) \in \overline{Q}_+; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\alpha_0 \alpha_2 < 0. \quad (24)$$

Тогда задача сопряжения II имеет в пространстве V единственное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим равенство (18), в котором положим $\gamma = \alpha_1 \alpha_2$. Краевые условия (2), (4)–(7), условия (10), (22)–(24) теоремы приводят к равенствам

$$u(x, +0) = u(x, -0) = 0, \quad u_{tt}(x, +0) = u_{tt}(x, -0) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (25)$$

Тогда задача сопряжения II в цилиндре Q_- представляет собой самостоятельную задачу; анализируя для решения $u(x, t)$ этой задачи равенство

$$\int_{Q_-} \frac{1}{h(t)} Lu \cdot u_t dx dt = 0,$$

интегрируя по частям и используя условия теоремы и равенства (25), получим

$$u_{tt}(x, t) \equiv 0 \quad \text{при } (x, t) \in \overline{Q}_-. \quad (26)$$

Анализируя равенство

$$\int_{Q_+} \frac{1}{h(t)} Lu \cdot u_t dx dt = 0$$

и используя условия теоремы, равенства (25) и (26), получим

$$u_{tt}(x, t) \equiv 0 \quad \text{при } (x, t) \in \overline{Q}_+. \quad (27)$$

Из (26) и (27) очевидным образом получаем $u(x, t) \equiv 0$ в Q .

Теорема полностью доказана.

Теорема 3. Пусть выполняются условия (10), (12), а также условия

$$h(t) \geq h_0 > 0 \quad \text{при } t \in [-T, T]; \quad (28)$$

$$\alpha_0 \alpha_2 > 0; \quad (29)$$

$$\alpha_1^2 - \alpha_0 \alpha_2 \geq 0; \quad (30)$$

$$h(-0)\alpha_1 \alpha_2 c(x, +0) - h(+0)\alpha_0^2 c(x, -0) \geq 0 \quad \text{при } x \in \overline{\Omega}. \quad (31)$$

Тогда задача сопряжения III имеет в пространстве V единственное решение.

Теорема 4. Пусть выполняются условия (10)–(12), а также условия

$$\alpha_0 \alpha_1 > 0; \quad (32)$$

$$\alpha_2^2 - \alpha_0 \alpha_1 \geq 0. \quad (33)$$

Тогда задача сопряжения IV имеет в пространстве V единственное решение.

Доказательство теорем 3 и 4 проводится вполне аналогично доказательству теорем 1 и 2.

3. Существование решений

Для доказательства разрешимости задач сопряжения I–IV будем использовать метод ε -регуляризации и метод продолжения по параметру.

Рассмотрим вначале задачу сопряжения I. Положим

$$\beta_j = \frac{1}{\alpha_j}, \quad j = \overline{0, 2}, \quad \alpha_j \neq 0.$$

Теорема 5. Пусть выполняются условия (10)–(12). Тогда для любой функции $f(x, t)$ такой, что

$$f(x, t) \in L_2(Q), \quad f_t(x, t) \in L_2(Q),$$

$$f(x, T) = \alpha_0 h(+0)f(x, -0) - \alpha_1 \alpha_2 h(-0)f(x, +0) = 0 \quad \text{при } x \in \Omega,$$

задача сопряжения I разрешима в пространстве V .

Доказательство. Пусть ε — положительное число, L_ε — оператор, действие которого определяется равенством

$$L_\varepsilon u \equiv Lu - \varepsilon h(t) D_t^3 \Delta u = f(x, t). \quad (1_\varepsilon)$$

Обозначим

$$V_1 = \{v(x, t) : v(x, t) \in V, D_t^3 v_{x_i x_j}(x, t) \in L_2(Q_-), \\ D_t^3 v_{x_i x_j}(x, t) \in L_2(Q_+), i, j = 1, \dots, n\}.$$

Норму в пространстве V_1 определим естественным образом:

$$\|v\|_{V_1} = \left(\|v\|_V^2 + \sum_{i,j=1}^n \int_{Q_-} (D_t^3 v_{x_i x_j})^2 dx dt + \sum_{i,j=1}^n \int_{Q_+} (D_t^3 v_{x_i x_j})^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим задачу: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндрах Q_- и Q_+ решением уравнения

$$L_\varepsilon u \equiv f(x, t)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2)–(5). Покажем, что при фиксированном ε краевая задача (1_ε) , (2)–(5) разрешима в пространстве V_1 для любой функции $f(x, t)$, принадлежащей пространству $L_2(Q)$. Воспользуемся методом продолжения по параметру.

Пусть λ — число из отрезка $[0, 1]$. Рассмотрим семейство задач: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндрах Q_- и Q_+ решением уравнения (1_ε) и такую, что для нее выполняются условия (2)–(4), а также условия

$$D_t^k u(x, t)|_{t=+0} = \lambda \beta_k D_t^k u(x, t)|_{t=-0}, \quad x \in \Omega, \quad k = \overline{0, 1}, \quad (34_\lambda)$$

$$D_t^2 u(x, t)|_{t=-0} = \lambda \alpha_2 D_t^2 u(x, t)|_{t=+0}, \quad x \in \Omega. \quad (35_\lambda)$$

Покажем, что при фиксированном ε краевая задача (1_ε) , (2)–(4), (34_λ) , (35_λ) разрешима в V_1 для любой функции $f(x, t)$, принадлежащей $L_2(Q)$.

Обозначим через Λ множество чисел λ из отрезка $[0, 1]$, для которых задача (1_ε) , (2)–(4), (34_λ) , (35_λ) разрешима в пространстве V_1 для любой функции $f(x, t)$ из пространства $L_2(Q)$. Если окажется, что множество Λ непусто, открыто и замкнуто одновременно (в метрическом пространстве $X = [0, 1]$), то оно будет совпадать со всем отрезком $[0, 1]$ (см. [12, с. 153]). Совпадение же множества Λ с отрезком $[0, 1]$ и будет означать разрешимость в пространстве V_1 задачи (1_ε) , (2)–(5).

Заметим, что задача (1_ε) , (2)–(4), (34_0) , (35_0) распадается на две независимые задачи в цилиндрах Q_- и Q_+ , разрешимость каждой из которых в пространстве V_1 очевидна (при принадлежности функции $f(x, t)$ пространству $L_2(Q)$). Следовательно, число 0 принадлежит множеству Λ и тем самым множество Λ непусто.

Для того чтобы установить наличие необходимых свойств у множества Λ , нам понадобятся априорные оценки. Покажем их наличие.

Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} - \int_{Q_-} L_\varepsilon u \cdot \frac{A-t}{h(t)} u_t dx dt - \gamma \int_{Q_+} L_\varepsilon u \cdot \frac{A-t}{h(t)} u_t dx dt \\ = - \int_{Q_-} \frac{A-t}{h(t)} f u_t dx dt - \gamma \int_{Q_+} \frac{A-t}{h(t)} f u_t dx dt, \end{aligned}$$

в котором γ , как и раньше, есть число $\alpha_1 \alpha_2$. Из этого равенства с помощью интегрирования по частям получим

$$\varepsilon \int_{Q_-} u_{x_{it}t}^2 dx dt + \varepsilon \gamma \sum_{i=1}^n \int_{Q_+} u_{x_{it}t}^2 dx dt + \int_{Q_-} u_{tt}^2 dx dt + \gamma \int_{Q_+} u_{tt}^2 dx dt$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{Q_-} \left(\frac{A-t}{h(t)} \right)_t u_{x_i}^2 dxdt - \frac{\gamma}{2} \sum_{i=1}^n \int_{Q_+} \left(\frac{A-t}{h(t)} \right)_t u_{x_i}^2 dxdt \\
& + \frac{1}{2} \int_{Q_-} \left(\frac{(A-t)c(x,t)}{h(t)} \right)_t u^2 dxdt + \frac{\gamma}{2} \int_{Q_+} \left(\frac{(A-t)c(x,t)}{h(t)} \right)_t u^2 dxdt \\
& + \varepsilon A(1 - \gamma \lambda^2 \beta_2^2) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i tt}^2(x, -0) dx + A(1 - \gamma \lambda^2 \beta_2^2) \int_{\Omega} u_{tt}^2(x, -0) dx \\
& + A \left[\frac{1}{h(-0)} - \frac{\gamma \lambda^2 \beta_0^2}{h(+0)} \right] \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i}^2(x, -0) dx \\
& + \frac{A}{2} \int_{\Omega} \left[\frac{\lambda^2 \beta_0^2 c(x, +0)}{h(+0)} - \frac{c(x, -0)}{h(-0)} \right] u^2(x, -0) dx = \int_{Q_-} (A-t) f u_t dxdt \\
& - \gamma \int_{Q_+} \frac{A-t}{h(t)} f u_t dxdt - \varepsilon (\gamma \lambda^2 \beta_1 \beta_2 - 1) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i tt}(x, -0) u_{x_i t}(x, -0) dx \\
& - (\gamma \lambda^2 \beta_1 \beta_2 - 1) \int_{\Omega} u_{tt}(x, -0) u_t(x, -0) dx. \quad (36)
\end{aligned}$$

Используя условия (10)–(16), а в случае равенства $\alpha_2^2 = \alpha_1 \alpha_3$ дополнительно используя условие $\alpha_1 = \alpha_2$ (напомним, что $\alpha_1 \neq 0$), применяя в правой части (36) неравенство Юнга, а также неравенства

$$\int_{\Omega} u_t^2(x, -0) dx \leq T \int_{Q_-} u_{tt}^2 dxdt, \quad \int_{\Omega} u_{x_i t}^2(x, -0) dx \leq T \int_{Q_-} u_{x_i tt}^2 dxdt,$$

и, наконец, выбирая число A достаточно большим, получим первую априорную оценку:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_{Q_-} u_{x_i tt}^2 dxdt + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_{Q_+} u_{x_i tt}^2 dxdt + \int_{Q_-} u_{tt}^2 dxdt + \int_{Q_+} u_{tt}^2 dxdt \\
& \leq M_1 \left(\int_{Q_-} f^2 dxdt + \int_{Q_+} f^2 dxdt \right), \quad (37)
\end{aligned}$$

постоянная M_1 в которой зависит только от числа T .

Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned}
& \int_{Q_-} L_{\varepsilon} u \cdot \frac{A-t}{h(t)} \Delta u_t dxdt + \gamma \int_{Q_+} L_{\varepsilon} u \cdot \frac{A-t}{h(t)} \Delta u_t dxdt \\
& = \int_{Q_-} \frac{A-t}{h(t)} f \Delta u_t dxdt + \gamma \int_{Q_+} \frac{A-t}{h(t)} f \Delta u_t dxdt. \quad (38)
\end{aligned}$$

Вновь интегрируя по частям, используя условия (10)–(16), условия теоремы и применяя неравенство Юнга, получаем, что для решений $u(x, t)$ краевой задачи (1_ε) , (2)–(4), (34_λ) , (35_λ) будет выполняться оценка

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{Q_-} (\Delta u_{tt})^2 dxdt + \varepsilon \int_{Q_+} (\Delta u_{tt})^2 dxdt + \sum_{i=1}^n \int_{Q_-} u_{x_i tt}^2 dxdt + \sum_{i=1}^n \int_{Q_+} u_{x_i tt}^2 dxdt \\ + \int_{Q_-} (\Delta u)^2 dxdt + \int_{Q_+} (\Delta u)^2 dxdt \leq M_2 \left(\int_{Q_-} f^2 dxdt + \int_{Q_+} f^2 dxdt \right), \end{aligned} \quad (39)$$

в которой постоянная M_2 определяется числами T и ε , функцией $c(x, t)$ и областью Ω .

Анализируя равенство

$$\int_{Q_-} L_\varepsilon u \cdot D_t^3 u dxdt + \int_{Q_+} L_\varepsilon u \cdot D_t^3 u dxdt = \int_{Q_-} f D_t^3 u dxdt + \int_{Q_+} f D_t^3 u dxdt, \quad (40)$$

используя условия теоремы, оценки (37) и (39) и применяя неравенство Юнга, получим, что имеет место оценка

$$\begin{aligned} \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_{Q_-} (D_t^3 u_{x_i})^2 dxdt + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_{Q_+} (D_t^3 u_{x_i})^2 dxdt + \int_{Q_-} (D_t^3 u)^2 dxdt \\ + \int_{Q_+} (D_t^3 u)^2 dxdt \leq M_3 \left(\int_{Q_-} f^2 dxdt + \int_{Q_+} f^2 dxdt \right) \end{aligned} \quad (41)$$

с постоянной M_3 , определяющейся числами T и ε , функцией $c(x, t)$ и областью Ω .

Последняя априорная оценка

$$\varepsilon^2 \int_{Q_-} (D_t^3 \Delta u)^2 dxdt + \varepsilon^2 \int_{Q_+} (D_t^3 \Delta u)^2 dxdt \leq M_4 \left(\int_{Q_-} f^2 dxdt + \int_{Q_+} f^2 dxdt \right) \quad (42)$$

очевидным образом следует из оценок (37), (39) и (41).

Полученные оценки вместе со вторым основным неравенством для эллиптических операторов [6] дают окончательную априорную оценку

$$\|u\|_{V_1} \leq M_0 \|f\|_{L_2(Q)}.$$

Эта оценка, теорема о методе продолжения по параметру [7, с. 153], а также техника работы [5] позволяют установить требуемую открытость и замкнутость множества Λ . Как говорилось выше, открытость и замкнутость Λ вместе с его непустотой означают, что задача (1_ε) , (2)–(5) (другими словами, задача (1_ε) , (2)–(4), (34_1) , (35_1)) разрешима в пространстве V_1 .

Итак, при фиксированном ε краевая задача (1_ε) , (2)–(5) имеет решение $u^\varepsilon(x, t)$, принадлежащее пространству V_1 . Для семейства $\{u^\varepsilon(x, t)\}$ имеет место

равномерная по ε априорная оценка (37). Далее, для семейства $\{u^\varepsilon(x, t)\}$ будет выполняться равномерная по ε вторая оценка, подобная приведенной выше оценке (38), но с дополнительным интегрированием по частям в правой части и в слагаемом, содержащем функцию $c(x, t)$:

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_{Q_-} (\Delta u_{tt}^\varepsilon)^2 dxdt + \varepsilon \int_{Q_+} (\Delta u_{tt}^\varepsilon)^2 dxdt + \sum_{i=1}^n \int_{Q_-} (u_{x_i tt}^\varepsilon)^2 dxdt \\ & + \sum_{i=1}^n \int_{Q_+} (u_{x_i tt}^\varepsilon)^2 dxdt + \int_{Q_-} (\Delta u^\varepsilon)^2 dxdt + \int_{Q_+} (\Delta u^\varepsilon)^2 dxdt \\ & \leq M'_2 \left[\int_{Q_-} (f^2 + f_t^2) dxdt + \int_{Q_+} (f^2 + f_t^2) dxdt \right] \end{aligned} \quad (43)$$

с постоянной M'_2 , определяющейся лишь числом T , функцией $c(x, t)$ и областью Ω .

Третья априорная оценка

$$\begin{aligned} & \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_{Q_-} (D_t^3 u_{x_i}^\varepsilon)^2 dxdt + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_{Q_+} (D_t^3 u_{x_i}^\varepsilon)^2 dxdt + \int_{Q_-} (D_t^3 u^\varepsilon)^2 dxdt \\ & + \int_{Q_+} (D_t^3 u^\varepsilon)^2 dxdt \leq M'_3 \left[\int_{Q_-} (f^2 + f_t^2) dxdt + \int_{Q_+} (f^2 + f_t^2) dxdt \right], \end{aligned} \quad (44)$$

вновь равномерная по ε , выводится из равенства (40) с помощью оценки (42). Последняя же оценка

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \int_{Q_-} (D_t^3 \Delta u^\varepsilon)^2 dxdt + \varepsilon^2 \int_{Q_+} (D_t^3 \Delta u^\varepsilon)^2 dxdt \\ & \leq M'_4 \left[\int_{Q_-} (f^2 + f_t^2) dxdt + \int_{Q_+} (f^2 + f_t^2) dxdt \right] \end{aligned} \quad (45)$$

очевидным образом вытекает из предыдущих; постоянная M'_4 в этой оценке определяется лишь числом T , функцией $c(x, t)$ и областью Ω .

Из оценок (37), (43)–(45), свойства рефлексивности гильбертова пространства (пространства $L_2(Q)$) и свойств слабого предела следует возможность выбора из семейства $\{u^\varepsilon(x, t)\}$ последовательности $\{u_m(x, t)\}_{m=1}^\infty$, слабо сходящейся в пространстве V к некоторой функции $u(x, t)$, такой, что выполняется

$$\varepsilon_m \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty,$$

$$\varepsilon_m D_t^3 u_m(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty \text{ слабо в пространстве } L_2(Q).$$

Предельная функция $u(x, t)$ и будет искомым решением задачи сопряжения I.

Теорема полностью доказана.

Теорема 6. Пусть выполняется условие (10), а также условия (22)–(24). Тогда для любой функции $f(x, t)$ такой, что

$$f(x, t) \in L_2(Q), \quad f_t(x, t) \in L_2(Q),$$

$$\alpha_0 h(+0)f(x, -0) - \alpha_1 \alpha_2 h(-0)f(x, +0) = 0 \quad \text{при } x \in \Omega,$$

задача сопряжения II разрешима в пространстве V .

Доказательство теоремы проводится вполне аналогично доказательству теоремы 5, а именно с помощью теоремы о методе продолжения по параметру и априорных оценок.

Теорема 7. Пусть выполняются условия (10), (12), а также условия (28)–(31). Тогда для любой функции $f(x, t)$ такой, что

$$f(x, t) \in L_2(Q), \quad f_t(x, t) \in L_2(Q),$$

$$\alpha_0 h(+0)f(x, -0) - \alpha_1 \alpha_2 h(-0)f(x, +0) = 0 \quad \text{при } x \in \Omega,$$

задача сопряжения III разрешима в пространстве V .

Теорема 8. Пусть выполняются условия (10)–(12), а также условия (32) и (33). Тогда для любой функции $f(x, t)$ такой, что

$$f(x, t) \in L_2(Q), \quad f_t(x, t) \in L_2(Q),$$

$$\alpha_0 h(+0)f(x, -0) - \alpha_1 \alpha_2 h(-0)f(x, +0) = 0 \quad \text{при } x \in \Omega,$$

задача сопряжения IV разрешима в пространстве V .

Доказательство теорем 7 и 8 проводится вполне аналогично доказательству соответствующих теорем 5 и 6 о разрешимости задач сопряжения I и II.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубинский Ю. А. Краевые задачи для некоторых дифференциально-операторных уравнений высокого порядка // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196, № 1. С. 32–35.
2. Егоров И. Е., Федоров В. Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995.
3. Лукина Г. А. О разрешимости пространственно-нелокальных задач для уравнения третьего порядка // Мат. заметки ЯГУ. 2010. Т. 17, № 1. С. 35–46.
4. Шубин В. В. Краевые задачи для уравнений третьего порядка с разрывным коэффициентом // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2012. Т. 12, № 11. С. 126–138.
5. Атласова Е. И. Задача сопряжения для квазигиперболических уравнений высокого порядка // Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 4. С. 3–13.
6. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
7. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

Статья поступила 24 января 2016 г.

Атласова Елена Ивановна
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
elena.131190@mail.ru

UDC 517.946

SOLVABILITY OF CONJUGATE PROBLEMS FOR QUASIPARABOLIC EQUATIONS OF THIRD ORDER

E. I. Atlasova

Abstract: We study solvability of conjugate problems (generalized diffraction problems) for quasiparabolic equations of odd order. We prove existence and uniqueness theorems for regular solutions to these problems.

Keywords: quasiparabolic equation, conjugation problem, existence, uniqueness, a priori estimate, regular solution.

REFERENCES

1. Dubinskii Yu. A. "Boundary value problems for some differential-operator equations of high order," Soviet Math. Dokl., **196**, No. 1, 32–35 (1971).
2. Egorov I. E. and Fedorov V. E., Nonclassical equations of mathematical physics of high order, Comput. Center SB RAS, Novosibirsk (1995).
3. Lukina G. A. "On solvability of space-nonlocal problems for an equation of third order," Mat. Zam. YAGU, **17**, No 1, 35–46 (2010).
4. Shubin V. V. "Boundary-value problems for equations of third order with a discontinuous coefficient," Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat., Mekh., Inform., **12**, No. 11, 126–138 (2012).
5. Atlasova E. I. "A conjugate problem for quasihyperbolic equations of high order," Mat. Zam. SVFU, **21**, No. 4, 3–13 (2014).
6. Ladyzhenskaya O. A. and Ural'tseva N. N., Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type, Nauka, Moscow (1973).
7. Trenogin V. A., Functional Analysis [in Russian], Nauka, Moscow (1980).

Submitted 24, January 2016

Atlasova Elena Ivanovna
Nord-East Federal University,
Kulakovskogo st., 48, Yakutsk 677000, Russia
elena.131190@mail.ru