

УДК 517.982.27

ИЗОМОРФИЗМ ПРОСТРАНСТВ СЛЕДОВ ВЕКТОРНЫХ ФУНКЦИЙ ПРОСТРАНСТВ Л. Н. СЛОБОДЕЦКОГО

В. П. Аносов

Аннотация. Доказывается изоморфизм пространств следов векторных функций пространств Л. Н. Слободецкого.

Ключевые слова: изоморфизм пространств, след векторной функции, пространство.

Вначале введем основные понятия и определим цель работы.

Действующий в банаховом пространстве E оператор A называется *сильно позитивным* (см. [1]), если он имеет плотную в E область определения $D(A)$ и для любого комплексного числа λ с $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ оператор $A + \lambda I$ имеет ограниченный обратный, для которого справедлива оценка

$$\|(A + \lambda I)^{-1}; E \rightarrow E\| \leq c(1 + |\lambda|)^{-1}. \quad (1)$$

Здесь c — положительная постоянная, не зависящая от λ . (В дальнейшем через c , C будем обозначать положительные постоянные, вообще говоря, различные в разных случаях.)

Оператор A сильно позитивен, если и только если (см. [1]) для полугруппы $T(t) = \exp\{-At\}$ ($t \geq 0$) справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\exp\{-At\}; E \rightarrow E\| &\leq c \exp\{-\delta t\} \quad (\delta > 0, t \geq 0), \\ \|A \exp\{-At\}; E \rightarrow E\| &\leq C t^{-1} \exp\{-\delta t\} \quad (t > 0), \end{aligned} \quad (2)$$

т. е. если полугруппа $\exp\{-At\}$ аналитична и ее норма экспоненциально убывает.

Пространство следов $E(\alpha, p, A)$ (см. [2–4]) введем следующим образом. Для любого $v_0 \in D(A)$ положим

$$|v_0|_{E(\alpha, p, A)}^p = \int_0^\infty t^{p-\alpha p} \|A^\gamma \exp\{-At\} v_0\|^p dt,$$

где $\gamma = 2$, если $0 < \alpha < \frac{1}{p} \leq 1$, и $\gamma = 1$, если $0 < \frac{1}{p} < \alpha < 1$.

Нетрудно показать, что функционал $|v_0|_{E(\alpha, p, A)}$ обладает всеми свойствами нормы. Замыкание $D(A)$ в этой норме образует базис банахова пространства $E(\alpha, p, A)$.

Пространство $E(\alpha + j, p, A)$ состоит из таких элементов v_0 , для которых $A^j v_0 \in E(\alpha, p, A)$, $j \in \mathbb{N}$.

Мы видим, что это определение зависит от оператора A . Наша задача состоит в установлении условий, при которых пространства $E(\alpha + j, p, A)$ и $E(\alpha + j, p, B)$, где B — сильно позитивный оператор, изоморфны.

Теорема. Пусть операторы A и B сильно позитивны и $D(A) = D(B)$. Тогда при $0 < \alpha < \frac{1}{p} \leq 1$ и $\frac{1}{p} < \alpha < 1$ с учетом ограниченности операторов $A^j B^{-j}$, $A^{j+1} B^{-j-1}$ ($j \in \mathbb{N} \cup 0$) пространства $E(\alpha + j, p, A)$ и $E(\alpha + j, p, B)$ изоморфны.

Доказательство вначале проведем для случая, когда $\alpha p > 1$. Достаточно установить эквивалентность норм $|v_0|_{E(\alpha+j,p,A)}$ и $|v_0|_{E(\alpha+j,p,B)}$. Докажем, например, что

$$|v_0|_{E(\alpha+j,p,A)} \leq C(\alpha, p) |v_0|_{E(\alpha+j,p,B)}. \quad (3)$$

Пусть $v_0 \in D(A^{j+1})$. Воспользуемся тождеством

$$\exp\{-At\}v_0 = \exp\{-Bt\}v_0 + \int_0^t \exp\{-A(t-s)\}(B-A)\exp\{-Bs\}v_0 ds. \quad (4)$$

Разбив промежуток $[0, t]$ пополам и применив ко второму интегралу формулу интегрирования по частям, приведем (4) к виду

$$\begin{aligned} \exp\{-At\}v_0 &= A^{-1}B \exp\{-Bt\}v_0 - A^{-1} \exp\left\{-A\frac{t}{2}\right\}(B-A) \exp\left\{-B\frac{t}{2}\right\}v_0 \\ &\quad + \int_0^{\frac{t}{2}} \exp\{-A(t-s)\}(B-A) \exp\{-Bs\}v_0 ds \\ &\quad + A^{-1} \int_{\frac{t}{2}}^t \exp\{-A(t-s)\}(B-A)B \exp\{-Bs\}v_0 ds. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом оценок (2) и ограниченности операторов $A^j B^{-j}$, $A^{j+1} B^{-j-1}$ следует, что

$$\|A^{j+1} \exp\{t\}v_0\|_E \leq C \left(\left\| B^{j+1} \exp\left\{-B\frac{t}{2}\right\}v_0\right\|_E + t^{-1} \int_0^t \left\| B^{j+1} \exp\left\{-B\frac{s}{2}\right\}v_0\right\|_E ds \right).$$

Из этого неравенства и неравенства Харди (9.9.10) из [5] вытекает справедливость неравенства (3).

Для случая, когда $\alpha p < 1$, воспользуемся леммой 2 из [2], согласно которой имеет место неравенство

$$c \int_0^\infty t^{-\alpha p} \|A \exp\{-At\}v_0\|_E^p dt \leq |v_0|_{E(\alpha,p,A)}^p \leq C \int_0^\infty t^{-\alpha p} \|A \exp\{-At\}v_0\|_E^p dt,$$

а затем, используя его, повторим приведенные выше рассуждения. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для случая $j = 0$ и $\alpha p < 1$ изоморфизм пространств $E(\alpha, p, A)$ и $E(\alpha, p, B)$ установлен в [3].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Результаты данной работы применялись (см. [3]) и будут применяться в дальнейшем при разрешимости краевых задач для линейных эллиптических уравнений с неограниченными операторными коэффициентами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красносельский М. А. Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.
2. Аносов В. П. О следах функций из абстрактных пространств Л. Н. Слободецкого // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 36, № 5. С. 973–989.
3. Аносов В. П., Соболевский П. Е. О коэрцитивной разрешимости параболических уравнений // Мат. заметки. 1972. Т. 11, № 4. С. 409–419.
4. Da-Prato G., Grisvard P. Sommes d'opérateurs linéaires et equations différentielles opérationnelles // J. Math. Pures Appl. 1975. V. 54. P. 305–387.
5. Харди Г., Литтлвуд Д., Поля Г. Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.

Статья поступила 15 марта 2015 г.

Аносов Виктор Петрович
Новосибирский гос. педагогический университет,
ул. Виллюйская, 32, Новосибирск 630126
averi@ngs.ru

UDC 517.982.27

ISOMORPHISM OF SPACES
OF TRACES OF VECTOR FUNCTIONS
IN SPACES OF L. N. SLOBODETSKII
V. P. Anosov

Abstract: The isomorphism of spaces of traces of vector functions in abstract spaces of L. N. Slobodetskii proved.

Keywords: isomorphism of spaces, traces of vector functions, space.

REFERENCES

1. Krasnosel'skii M. A., Zabreyko P. P., Pustyl'nik E. I., and Sobolevskii P. E. Integral Operators in Spaces of Summable Functions. Noordhoff Int. Publ., 1976.
2. Anosov V. P. "On traces of functions in abstract spaces of L. N. Slobodetskii," Sib. Math. J., **35**, No 5, 863–877 (1994).
3. Anosov V. P. and Sobolevskii P. E. "On coercive solvability of parabolic equations," Math. Notes, **11**, No 4, 251–256 (1972).
4. Da-Prato G. et Grisvard P. "Sommes d'opérateurs linéaires et equations différentielles opérationnelles," J. Math. Pures Appl., **54**, 305–387 (1975).
5. Hardy G. H., Littlewood J. E., and Polya G. Inequalities. Gambr. Univ. Press, Gambridge (1934).

Submitted March 15, 2015

Anosov Victor Petrovich
Novosibirsk State Pedagogical University,
Vil'inskaya st., 32, Novosibirsk 630126, Russia
averi@ngs.ru