

УДК 517.956

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА

А. А. Алсыкова

Аннотация. Рассматривается разрешимость нелокальных задач с интегральными условиями для уравнения Буссинеска. Доказаны теоремы существования и единственности решения рассматриваемых задач.

Ключевые слова: нелокальная краевая задача, уравнение Буссинеска, интегральное условие, существование и единственность регулярного решения.

В работе изучается разрешимость некоторых задач с пространственно-интегральными условиями для уравнения Буссинеска

$$Lu(x, t) \equiv u_{tt}(x, t) - \alpha u_{xx}(x, t) - \beta u_{xxtt}(x, t) = f(x, t). \quad (1)$$

Уравнение Буссинеска возникает при математическом моделировании длинных волн, при описании волн в плазме, при описании продольных колебаний в стержне (см. [1]). Разрешимость тех или иных краевых или начально-краевых задач для уравнения (1) изучались в [1–5], разрешимость задач с пространственно-интегральными условиями — в [6–8]. В настоящей работе продолжено исследование разрешимости задач с интегральными условиями, при этом методы исследования близки к методам из [9].

Перейдем к содержательной части работы.

Пусть Ω — интервал $(0, 1)$ оси Ox , Q — прямоугольник $\Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$, α и β — заданные положительные числа, $f(x, t)$, $K(x, t)$, $K_1(x, t)$ и $K_2(x, t)$ — заданные функции, определенные при $(x, t) \in \overline{Q}$.

Нелокальная задача I. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \quad \text{при } x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0, \quad \int_0^1 K(x, t)u(x, t) dx = 0, \quad 0 < t < T. \quad (3)$$

Нелокальная задача II. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условие (2), а также условие

$$u_x(0, t) = 0, \quad \int_0^1 K(x, t)u(x, t)dx = 0, \quad 0 < t < T. \quad (4)$$

Нелокальная задача III. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условие (2), а также условия

$$\int_0^1 K_1(x, t)u(x, t)dx = 0, \quad \int_0^1 K_2(x, t)u(x, t)dx = 0, \quad 0 < t < T. \quad (5)$$

1. Разрешимость нелокальной задачи I

Пусть H — следующее пространство функций:

$$H = \{v(x, t) : v(x, t) \in W_2^2(Q), \quad v_{tt}(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega))\}.$$

Определим функцию $v_1(x, t)$ как решение задачи

$$Lv_1(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in Q,$$

$$v_1(x, 0) = v_{1t}(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$v_1(0, t) = v_1(1, t) = 0, \quad t \in (0, T).$$

При принадлежности функции $f(x, t)$ пространству $L_2(Q)$ функция $v_1(x, t)$ определена корректно и принадлежит пространству H (см. [5]).

Пусть $w_{1,k}(x)$ и $\lambda_{1,k}$, $k = 1, 2, \dots$, суть соответственно собственные функции и собственные числа задачи

$$w''(x) = \lambda w(x) \quad \text{при } x \in \Omega,$$

$$w(0) = w(1) = 0.$$

Известно, что числа $\lambda_{1,k}$ отрицательны и имеют единственную предельную точку $-\infty$. Будем считать, что эти числа упорядочены по убыванию.

Положим $V_1(x, t) = x\varphi(t)$, где $\varphi(t) = u(1, t)$.

Решение $u(x, t)$ задачи I будем искать в виде

$$u(x, t) = v_1(x, t) + V_1(x, t) + w_1(x, t),$$

здесь функция $w_1(x, t)$ является решением задачи

$$Lw_1(x, t) = -x\varphi''(t), \quad (x, t) \in Q,$$

$$w_1(x, 0) = w_{1t}(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$w_1(0, t) = w_1(1, t) = 0, \quad t \in (0, T).$$

Будем искать ее в виде ряда Фурье

$$w_1(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{1,k}(t) w_{1,k}(x).$$

Функции $c_{1,k}(t)$, $k = 1, 2, \dots$, определим следующим образом:

$$c_{1,k}(t) = b_{1,k} \varphi(t) - b_{1,k} \mu_{1,k} \int_0^t \varphi(\tau) \sin[\mu_{1,k}(t - \tau)] d\tau,$$

где

$$\mu_{1,k} = \sqrt{\frac{\alpha \lambda_{1,k}}{\beta \lambda_{1,k} - 1}}, \quad a_{1,k} = \int_0^1 x w_{1,k}(x) dx, \quad b_{1,k} = \frac{a_{1,k}}{\beta \lambda_{1,k} - 1}.$$

Введем обозначения:

$$\gamma_{1,j,k} = b_{1,k} \mu_{1,k}^j, \quad j = \overline{1, 3}, \quad d_{1,k}(t) = \int_0^1 K(x, t) w_{1,k}(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\psi_1(t) = \int_0^1 K(x, t) v_1(x, t) dx, \quad A_1(t) = -\beta \sum_{k=1}^{\infty} b_{1,k} \lambda_{1,k} d_{1,k}(t),$$

$$G_1(t, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{1,1,k} d_{1,k}(t) \sin[\mu_{1,k}(t - \tau)].$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия:

- (а) $K(x, t) \in C^2(\overline{Q})$,
- (б) функциональные ряды

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{1,1,k} d_{1,k}(t) \sin[\mu_{1,k}(t - \tau)], \quad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{1,1,k} d'_{1,k}(t) \sin[\mu_{1,k}(t - \tau)], \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{1,2,k} d_{1,k}(t) \cos[\mu_{1,k}(t - \tau)], \quad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{1,2,k} d'_{1,k}(t) \cos[\mu_{1,k}(t - \tau)], \\ & \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_{1,1,k} d''_{1,k}(t) - \gamma_{1,3,k} d_{1,k}(t)) \sin[\mu_{1,k}(t - \tau)], \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_{1,k} \lambda_{1,k} d_{1,k}(t) \end{aligned}$$

абсолютно и равномерно сходятся при t из отрезка $[0, T]$,

- (в) $|A_1(t)| \geq \bar{a} > 0$ при $t \in [0, T]$.

Тогда для любой функции $f(x, t)$ из пространства $L_2(Q)$ нелокальная задача I разрешима в пространстве H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представления функций $u(x, t)$ и $c_{1,k}(t)$ дают равенство

$$u(x, t) = v_1(x, t) - \varphi(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{1,k} \beta \lambda_{1,k}}{1 - \beta \lambda_{1,k}} w_{1,k}(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{1,1,k} w_{1,k}(x) \int_0^t \varphi(\tau) \sin[\mu_{1,k}(t - \tau)] d\tau.$$

Учитывая условие (3), получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 K(x, t) v_1(x, t) dx - \varphi(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{1,k} \beta \lambda_{1,k}}{1 - \beta \lambda_{1,k}} \int_0^1 K(x, t) w_{1,k}(x) dx \\ - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{1,1,k} \int_0^1 K(x, t) w_{1,k}(x) dx \int_0^t \varphi(\tau) \sin[\mu_{1,k}(t - \tau)] d\tau = 0. \end{aligned}$$

Перепишем это уравнение, используя введенные обозначения:

$$\psi_1(t) = A_1(t) \varphi(t) + \int_0^t G_1(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau.$$

Полученное уравнение представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода. Известно (см., например, [10]), что при выполнении условий теоремы решением данного уравнения является функция $\varphi(t)$ из $W_2^2([0, T])$. Значит, определенная выше функция $u(x, t)$ и будет искомым решением нелокальной задачи I.

Теорема доказана.

2. Разрешимость нелокальной задачи II

Определим функцию $v_2(x, t)$ как решение задачи

$$\begin{aligned} Lv_2(x, t) &= f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \\ v_2(x, 0) &= v_{2t}(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \\ v_{2x}(0, t) &= v_2(1, t) = 0, \quad t \in (0, T). \end{aligned}$$

При принадлежности функции $f(x, t)$ пространству $L_2(Q)$ функция $v_2(x, t)$ определена корректно и принадлежит пространству H (см. [5]).

Пусть $w_{2,k}(x)$ и $\lambda_{2,k}$ суть соответственно собственные функции и собственные числа задачи

$$\begin{aligned} w''(x) &= \lambda w(x) \quad \text{при } x \in \Omega, \\ w'(0) &= w(1) = 0. \end{aligned}$$

Числа $\lambda_{2,k}$ отрицательны и имеют единственную предельную точку $-\infty$. Будем считать, что эти числа упорядочены по убыванию.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}\mu_{2,k} &= \sqrt{\frac{\alpha\lambda_{2,k}}{\beta\lambda_{2,k}-1}}, \quad a_{2,k} = \int_0^1 (2\beta - x^2)w_{2,k}(x) dx, \quad b_{2,k} = 2\alpha \int_0^1 w_{2,k}(x) dx, \\ \gamma_{2,j,k} &= \frac{a_{2,k}^2 - b_{2,k}}{(1 - \beta\lambda_{2,k})\mu_{2,k}^{j-2}}, \quad j = \overline{1,3}, \quad d_{2,k}(t) = \int_0^1 K(x,t)w_{2,k}(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots, \\ \psi_2(t) &= \int_0^1 K(x,t)v_2(x,t) dx, \quad A_2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2,k}^2 d_{2,k}(t)}{(\beta\lambda_{2,k}-1)\mu_{2,k}} - \int_0^1 x^2 K(x,t) dx, \\ G_2(t, \tau) &= \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{2,1,k} d_{2,k}(t) \sin[\mu_{2,k}(t - \tau)].\end{aligned}$$

Положим $V_2(x, t) = x^2\varphi(t)$, где $\varphi(t) = u(1, t)$. Решение $u(x, t)$ задачи II будем искать в виде

$$u(x, t) = v_2(x, t) + V_2(x, t) + w_2(x, t),$$

здесь функция

$$w_2(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{2,k}(t)w_{2,k}(x)$$

является решением задачи

$$Lw_2(x, t) = (2\beta - x^2)\varphi''(t) + 2\alpha\varphi(t), \quad (x, t) \in Q,$$

$$w_2(x, 0) = w_{2t}(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$w_{2x}(0, t) = w_2(1, t) = 0, \quad t \in (0, T).$$

Функции $c_{2,k}(t)$, $k = 1, 2, \dots$, определим следующим образом:

$$c_{2,k}(t) = \frac{a_{2,k}^2}{(1 - \beta\lambda_{2,k})\mu_{2,k}}\varphi(t) - \gamma_{2,1,k} \int_0^t \varphi(\tau) \sin[\mu_{2,k}(t - \tau)] d\tau.$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия:

(а) $K(x, t) \in C^2(\overline{Q})$,

(б) функциональные ряды

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{2,1,k} d_{2,k}(t) \sin[\mu_{1,k}(t - \tau)], \quad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{2,1,k} d'_{2,k}(t) \sin[\mu_{1,k}(t - \tau)], \\ \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{2,2,k} d_{2,k}(t) \cos[\mu_{1,k}(t - \tau)], \quad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{2,2,k} d'_{2,k}(t) \cos[\mu_{1,k}(t - \tau)], \\ \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_{2,1,k} d''_{2,k}(t) - \gamma_{2,3,k} d_{2,k}) \sin[\mu_{1,k}(t - \tau)], \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2,k}^2 d_{2,k}(t)}{(1 - \beta\lambda_{2,k})\mu_{2,k}}\end{aligned}$$

абсолютно и равномерно сходятся в каждой точке отрезка $[0, T]$,

(в) $|A_2(t)| \geq \bar{a} > 0$ при $t \in [0, T]$.

Тогда для любой функции $f(x, t)$ из пространства $L_2(Q)$ нелокальная задача II разрешима в пространстве H .

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично доказательству теоремы 1.

3. Разрешимость нелокальной задачи III

Пусть функции $v_3(x, t)$, $w_{3,k}(x)$ и числа $\mu_{3,k}$, $\lambda_{3,k}$ определены аналогично $v_1(x, t)$, $w_{1,k}(x)$, $\mu_{1,k}$ и $\lambda_{1,k}$ при $k = 1, 2, \dots$.

Введем обозначения:

$$a_{3,k} = \frac{1}{1 - \beta\lambda_{3,k}} \int_0^1 (x-1)w_{3,k}(x) dx, \quad b_{3,k} = \frac{1}{\beta\lambda_{3,k} - 1} \int_0^1 xw_{3,k}(x) dx,$$

$$\psi_{3,i}(t) = \int_0^1 K_i(x, t)v_3(x, t) dx, \quad d_{3,i,k}(t) = \int_0^1 K_i(x, t)w_{3,k}(x) dx,$$

$$\gamma_{3,j,k} = a_{3,k}\mu_{3,k}^j, \quad \gamma_{4,j,k} = b_{3,k}\mu_{3,k}^j, \quad j = \overline{1, 3}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$A_{3,i}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{3,k}\beta\lambda_{3,k}d_{3,i,k}(t), \quad A_{4,i}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{3,k}\beta\lambda_{3,k}d_{3,i,k}(t),$$

$$G_{3,i}(t, \tau) = - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{3,1,k}d_{3,i,k}(t) \sin[\mu_{3,k}(t - \tau)],$$

$$G_{4,i}(t, \tau) = - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{4,1,k}d_{3,i,k}(t) \sin[\mu_{3,k}(t - \tau)], \quad i = 1, 2.$$

Положим $V_3(x, t) = x\varphi_1(t) + (1-x)\varphi_2(t)$, где $\varphi_1(t) = u(0, t)$, $\varphi_2(t) = u(1, t)$ пока неизвестные функции такие, что

$$\varphi_1(0) = \varphi_1'(0) = 0, \quad \varphi_2(0) = \varphi_2'(0) = 0.$$

Решение $u(x, t)$ задачи III будем искать в виде

$$u(x, t) = v_3(x, t) + V_3(x, t) + w_3(x, t),$$

здесь функция

$$w_3(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{3,k}(t)w_{3,k}(x)$$

является решением задачи

$$Lw_3(x, t) = (x-1)\varphi_1''(t) - x\varphi_2''(t), \quad (x, t) \in Q,$$

$$w_3(x, 0) = w_{3t}(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$w_3(0, t) = w_3(1, t) = 0, \quad t \in (0, T).$$

Функции $c_{3,k}(t)$, $k = 1, 2, \dots$, определим следующим образом:

$$\begin{aligned} c_{3,k}(t) = & a_{3,k}\varphi_1(t) + b_{3,k}\varphi_2(t) - a_{3,k}\mu_{3,k} \int_0^t \varphi_1(\tau) \sin[\mu_{3,k}(t - \tau)] d\tau \\ & - b_{3,k}\mu_{3,k} \int_0^t \varphi_2(\tau) \sin[\mu_{3,k}(t - \tau)] d\tau. \end{aligned}$$

Теорема 3. Пусть выполняются условия

(а) $K_i(x, t) \in C^2(\overline{Q})$, $i = 1, 2$,

(б) функциональные ряды

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{m,1,k} d_{3,i,k}(t) \sin[\mu_{1,k}(t - \tau)], \quad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{m,1,k} d'_{3,i,k}(t) \sin[\mu_{1,k}(t - \tau)], \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{m,2,k} d_{3,i,k}(t) \cos[\mu_{1,k}(t - \tau)], \quad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{m,2,k} d'_{3,i,k}(t) \cos[\mu_{1,k}(t - \tau)], \\ & \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_{m,1,k} d''_{3,i,k}(t) - \gamma_{m,3,k} d_{3,i,k}(t)) \sin[\mu_{1,k}(t - \tau)], \quad i = 1, 2, \quad m = 3, 4, \\ & \sum_{k=1}^{\infty} a_{3,k} \beta \lambda_{3,k} d_{3,i,k}(t), \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_{3,k} \beta \lambda_{3,k} d_{3,i,k}(t) \end{aligned}$$

абсолютно и равномерно сходятся при t из отрезка $[0, T]$,

(в) $A_{3,1}(t)A_{4,2}(t) \neq A_{3,2}(t)A_{4,1}(t)$, $t \in [0, T]$.

Тогда для любой функции $f(x, t)$ из пространства $L_2(Q)$ нелокальная задача III разрешима в пространстве H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая, что функции $v_3(x, t)$, $V_3(x, t)$ и $w_3(x, t)$ определены, перепишем функцию $u(x, t) = v_3(x, t) + V_3(x, t) + w_3(x, t)$:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & v_3(x, t) - \varphi_1(t) \sum_{k=1}^{\infty} a_{3,k} \beta \lambda_{3,k} w_{3,k}(x) - \varphi_2(t) \sum_{k=1}^{\infty} b_{3,k} \beta \lambda_{3,k} w_{3,k}(x) \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} a_{3,k} \mu_{3,k} w_{3,k}(x) \int_0^t \varphi_1(\tau) \sin[\mu_{3,k}(t - \tau)] d\tau \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} b_{3,k} \mu_{3,k} w_{3,k}(x) \int_0^t \varphi_2(\tau) \sin[\mu_{3,k}(t - \tau)] d\tau. \end{aligned}$$

Подставляя функцию $u(x, t)$ в интегральные условия (5), получаем систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$\psi_1(t) = A_{3,1}\varphi_1(t) + A_{4,1}\varphi_2(t) + \int_0^t G_{3,1}(t, \tau)\varphi_1(\tau) d\tau + \int_0^t G_{4,1}(t, \tau)\varphi_2(\tau) d\tau,$$

$$\psi_2(t) = A_{3,2}\varphi_1(t) + A_{4,2}\varphi_2(t) + \int_0^t G_{3,2}(t, \tau)\varphi_1(\tau) d\tau + \int_0^t G_{4,2}(t, \tau)\varphi_2(\tau) d\tau.$$

Вследствие условий теоремы эта система разрешима относительно функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, принадлежащих пространству $W_2^2([0; T])$. Тогда функция $u(x, t)$ будет искомым решением нелокальной задачи III.

Комментарии

1. Условия (б) теорем 1–3 означают, что коэффициенты Фурье функций $K(x, t)$ и $K_i(x, t)$, $i = 1, 2$, в разложениях по соответствующим системам $\{w_{1,k}(x)\}$, $\{w_{2,k}(x)\}$ и $\{w_{3,k}(x)\}$ должны достаточно быстро убывать. Для этого нужно, чтобы функции $K(x, t)$ и $K_i(x, t)$ были гладкими по переменной x , а их пространственные производные в граничных точках обращались в нуль.

2. Условия (в) теорем 1–3 означают, что функция $K(x, t)$ в задачах I, II не может быть тождественно нулевой и функции $K_1(x, t)$ и $K_2(x, t)$ в задаче III линейно независимы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998.
2. Kiguradze T. On the correctness of the Dirichlet problem in a characteristic rectangle for fourth order linear hyperbolic equations // Georgian Math. J. 1999. V. 6, N 5. P. 447–470.
3. Уткина Е. А. Задача Дирихле для одного уравнения четвертого порядка // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 4. С. 400–404.
4. Уткина Е. А. Характеристические граничные задачи для линейных уравнений высокого порядка со старшими частными производными: Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. Казань, 2011.
5. Якубов С. Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985.
6. Пулькина Л. С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений. Самара: Изд. «Самарский университет», 2012.
7. Кириченко С. В. Нелокальные задачи с интегральными условиями для уравнений гиперболического, псевдогиперболического и смешанного типов: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Казань, 2015.
8. Pulkina L. S. Solution to nonlocal problems of pseudohyperbolic equations // Electron. J. Differ. Equ. 2014. N 116. P. 1–9.
9. Кожанов А. И. Задачи с условиями интегрального вида для некоторых классов нестационарных уравнений // Докл. АН. 2014. Т. 457, № 2. С. 152–156.
10. Владимиров В. С., Жаринов В. В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2004.

Статья поступила 20 февраля 2016 г.

Алсыкова Аюна Андреевна
Бурятский гос. университет,
ул. Смолина, 24а, Улан-Удэ 675000
888552@mail.ru

UDC 517.956

NONLOCAL PROBLEMS WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR BOUSSINESQ EQUATION

A. A. Alsykova

Abstract: We examine solvability of nonlocal problems with integral conditions for Boussinesq equation. The theorems of existence and uniqueness of the solution of these problems are proved.

Keywords: nonlocal boundary value problem, Boussinesq equation, integral condition, existence and uniqueness of regular solution.

REFERENCES

1. Demidenko G. V. and Uspenski S. V., Partial Differential Equations and Systems Not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative, Marcel Dekker, New York; Basel (2003).
2. Kiguradze T. "On the correctness of the Dirichlet problem in a characteristic. rectangle for fourth order linear hyperbolic equations," Georgian Math. J. **6**, No. 5, 447–470 (1999).
3. Utkina E. A. "Dirichlet problem for a fourth-order equation," Differ. Equ. **47**, No. 4. 400–404 (2011).
4. Utkina E. A. Characteristic Boundary-Value Problems for Higher-Order Linear Equations with Higher Partial Derivatives [in Russian], Diss. Dokt. Fiz.-Mat. Nauk, Kazan, 2011.
5. Yakubov S. Ya. Linear Differential-Operator Equations and Their Applications [in Russian], Elm, Baku (1985).
6. Pul'kina L. S. Some Problems with Nonclassical Conditions for Hyperbolic Equations [in Russian]. Samara: Izdat. Samarsk. Univ., 2012.
7. Kirichenko S. V. Nonlocal problem with integral conditions dlyagiperbolicheskogo, pseudo-hyperbolic and mixed types of equations: Diss. Dokt. Fiz.-Mat. Nauk, Kazan, 2015.
8. Pulkina L. S. "Solution to nonlocal problems of pseudohyperbolic equations," Electron. J. Differ. Equ. No. 116. 1–9 (2014).
9. Kozhanov A. I. "Problems with the terms of the integral type for some classes of non-stationary equations," Dokl. Akad. Nauk. **457**, No. 2, 152–156 (2014).
10. Vladimirov V. S. and Zharinov V. V., Equations of Mathematical Physics, Fizmatlit, Moscow, (2004).

Submitted February 20, 2016

Alsykova Ayuna Andreevna
Buryat State University,
Smolina st., 24a, Ulan-Ude 675000, Russia
888552@mail.ru