

ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА
ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ
ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СОСТАВНОГО ТИПА
А. Р. Хашимов

Аннотация. Рассмотрена вторая краевая задача для нестационарного уравнения третьего порядка составного типа. Исследованы асимптотические свойства фундаментальных решений уравнения, использованные при построении регулярных решений краевых задач.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.4.11318

Ключевые слова: уравнение третьего порядка, нестационарное уравнение, единственность решения, регулярное решение, краевая задача, уравнение составного типа, метод потенциалов, фундаментальное решение.

1. Введение. Целью данной работы является исследование уравнения

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

в области $\Omega = \{(x, y, z) : 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < t \leq T\}$ с краевыми условиями

$$u(x, y, 0) = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} u_x(0, y, t) &= \varphi_1(y, t), & u_{xx}(0, y, t) &= \varphi_2(y, t), & u_{xx}(1, y, t) &= \varphi_3(y, t), \\ u_y(x, 0, t) &= \psi_1(x, t), & u_{yy}(x, 0, t) &= \psi_2(x, t), & u_{yy}(x, 1, t) &= \psi_3(x, t), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1(y, t) &\in C_{y,t}^{0,2}(\overline{\Omega_1}), & \psi_1(x, t) &\in C_{x,t}^{0,2}(\overline{\Omega_3}), & \varphi_2(y, t) &\in C(\overline{\Omega_1}), \\ \varphi_3(y, t) &\in C_{y,t}^{0,1}(\overline{\Omega_2}), & \psi_2(x, t) &\in C(\overline{\Omega_3}), & \psi_3(x, t) &\in C_{x,t}^{0,1}(\overline{\Omega_4}). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \{(x, y, t) : 0 < x < 1, 0 < y < 1, t = 0\}, \\ \Omega_1 &= \{(x, y, t) : x = 0, 0 < y < 1, 0 < t \leq T\}, \\ \Omega_2 &= \{(x, y, t) : x = 1, 0 < y < 1, 0 < t \leq T\}, \\ \Omega_3 &= \{(x, y, t) : 0 < x < 1, y = 0, 0 < t \leq T\}, \\ \Omega_4 &= \{(x, y, t) : 0 < x < 1, y = 1, 0 < t \leq T\}. \end{aligned}$$

Уравнение (1) является обобщением уравнения

$$u_{xxx} - u_t = 0 \quad (5)$$

в многомерном пространстве. Уравнение (5) исследовано в [1], где было построено его фундаментальное решение и разработаны теория потенциала и методы построения регулярных решений краевых задач и задачи Коши.

Отметим, что решения уравнения (1) и линейного уравнения Захарова — Кузнецова

$$u_t + u_{xxx} + u_{xyy} = 0 \quad (6)$$

имеют аналогичные асимптотические свойства на бесконечности (см. [2–7]). Уравнение Захарова — Кузнецова (6) является одним из вариантов обобщения уравнения Кортевега — де-Фриза в многомерном пространстве и описывает ионно-акустические волновые процессы в плазме [2].

В настоящее время часто возникают задачи, связанные с исследованием уравнений в частных производных, не относящихся ни к одному из классических типов. Поэтому в последние годы уделяется большое внимание исследованию таких неклассических уравнений, которые еще мало изучены (см. [2–12]). Одними из представителей таких уравнений являются уравнения нечетного порядка. Здесь надо отметить работы [13–17], где в основном исследованы уравнения третьего порядка с кратными характеристиками вида (5). Новым этапом в развитии теории вышеуказанных уравнений были работы [1, 17]. В [1] для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками (5) построены фундаментальные решения и разработана теория потенциала. Вслед за этими исследованиями появились работы Т. Д. Джураева и его учеников (см. [5–7, 18–21], где были предложены новые корректные постановки краевых задач и даны новые подходы к построению их решения. Следует также отметить работы С. Н. Кружкова и А. В. Фаминского [22], А. Елеева [23], Н. Н. Шополова [24], Ротмана [25].

2. Основная часть. В данной работе будем исследовать корректность задачи (1)–(3).

Теорема 1. *Задача (1)–(3) может иметь не более одного решения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что существует два решения задачи (1)–(3). Тогда, вводя обозначение $v(x, y, t) = u_1(x, y, t) - u_2(x, y, t)$, имеем относительно функции $v(x, y, t)$ следующую задачу с однородным краевым условием:

$$Lv \equiv v_{xxx} + v_{yyt} - v_t = 0,$$

$$\begin{aligned} v(x, y, 0) = v_x(0, y, t) = v_{xx}(0, y, t) = v_{xx}(1, y, t) \\ = v_y(x, 0, t) = v_{yy}(x, 0, t) = v_{yy}(x, 1, t) = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим тождество

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^t L(v)v(x, y, t) dx dy dt = 0.$$

Интегрируя его по частям, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^t L(v)v(x, y, t) dx dy dt = & -\frac{1}{2} \left(\int_0^1 \int_0^t v_x^2(1, y, t) dt dy \right. \\ & \left. + \int_0^1 \int_0^t v_y^2(x, 1, t) dt dx + \int_0^1 \int_0^1 v^2(x, y, t) dx dy \right) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$v_x(1, y, t) = v_y(x, 1, t) = v(x, y, t) = 0.$$

В уравнении $L(v) = 0$ положим $v = we^{kt}$, $k > 0$. Тогда

$$L(w) = (w_{xxx} + w_{yyy} - w_t - k w)e^{kt} = 0.$$

Интегрируя тождество

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^t L(w)w(x, y, t) dx dy dt = 0$$

и учитывая однородность краевых условий, получаем

$$-k \int_0^1 \int_0^1 \int_0^t w^2 dt dx dy = 0.$$

Отсюда $w = 0$ в области Ω . В силу непрерывности функции w будет $w = 0$ в $\bar{\Omega}$. Следовательно, $v = 0$ в $\bar{\Omega}$.

Теорема 2. Пусть выполнено условие (4). Тогда задача (1)–(3) имеет единственное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование решения задачи (1)–(3) докажем методом потенциалов. Решения задачи ищем в следующем виде:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) = & \int_0^t \int_0^1 U_0(x, y, t; 0, \eta, \tau) \alpha_1(\eta, \tau) d\eta d\tau \\ & + \int_0^t \int_0^1 U_0(x, y, t; 1, \eta, \tau) \alpha_2(\eta, \tau) d\eta d\tau + \int_0^t \int_0^1 U_2(x, y, t; 0, \eta, \tau) \alpha_3(\eta, \tau) d\eta d\tau \\ & + \int_0^t \int_0^1 U_0(x, y, t; \xi, 0, \tau) \beta_1(\xi, \tau) d\xi d\tau + \int_0^t \int_0^1 U_0(x, y, t; \xi, 1, \tau) \beta_2(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ & + \int_0^t \int_0^1 U_1(x, y, t; \xi, 0, \tau) \beta_3(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (7) \end{aligned}$$

Здесь $\alpha_i(\xi, \tau)$ и $\beta_i(\xi, \tau)$, $i = 1, 2, 3$, — пока неизвестные функции, а функции $U_0(x, y, t; \xi, \eta, \tau)$, $U_1(x, y, t; \xi, \eta, \tau)$, $U_2(x, y, t; \xi, \eta, \tau)$ называются *фундаментальными решениями уравнения (1)* и имеют вид (см. [26])

$$U_0(x, y, t; \xi, \eta, \tau) = \frac{1}{(t - \tau)^{\frac{2}{3}}} f\left(\frac{x - \xi}{(t - \tau)^{\frac{1}{3}}}\right) f\left(\frac{y - \eta}{(t - \tau)^{\frac{1}{3}}}\right), \quad x \neq \xi, \quad y \neq \eta, \quad t > \tau,$$

$$U_1(x, y, t; \xi, \eta, \tau) = \frac{1}{(t - \tau)^{\frac{2}{3}}} f\left(\frac{x - \xi}{(t - \tau)^{\frac{1}{3}}}\right) \varphi\left(\frac{y - \eta}{(t - \tau)^{\frac{1}{3}}}\right), \quad x \neq \xi, \quad y > \eta, \quad t > \tau,$$

$$U_2(x, y, t; \xi, \eta, \tau) = \frac{1}{(t - \tau)^{\frac{2}{3}}} \varphi\left(\frac{x - \xi}{(t - \tau)^{\frac{1}{3}}}\right) f\left(\frac{y - \eta}{(t - \tau)^{\frac{1}{3}}}\right), \quad x > \xi, \quad y \neq \eta, \quad t > \tau,$$

Здесь функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ называются *функциями Эйри* и являются решениями уравнения

$$p''(z) + \frac{z}{3}p(z) = 0.$$

Для функций $f(z)$ и $\varphi(z)$ справедливы следующие соотношения (см. [7]):

$$p^{(n)}(z) \sim c_n^+ z^{\frac{n}{2} - \frac{1}{4}} \sin\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) \quad \text{при } z \rightarrow \infty,$$

$$p^{(n)}(z) \sim c_n^- |z|^{\frac{n}{2} - \frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{2}{3}|z|^{3/2}\right) \quad \text{при } z \rightarrow -\infty,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = \pi, \quad \int_{-\infty}^0 f(z) dz = \frac{\pi}{3}, \quad \int_0^{\infty} f(z) dz = \frac{2\pi}{3}, \quad \int_0^{\infty} \varphi(z) dz = 0.$$

Здесь c_n^+ , c_n^- — постоянные.

При построении решения задачи (1)–(3) нам понадобятся следующие леммы (см. [7, 26]).

Лемма 1. Пусть $\alpha(y, t) \in C(\overline{\Omega_2})$. Тогда

$$\lim_{(x, y, t) \rightarrow (1-0, y, t)} \int_0^t \int_0^1 U_{0\xi\xi}(x-1, y-\eta; t-\tau) \alpha(\eta, \tau) d\eta d\tau = \frac{\pi^2}{3} \alpha(y, t).$$

Лемма 2. Пусть $\beta(x, t) \in C(\overline{\Omega_4})$. Тогда

$$\lim_{(x, y, t) \rightarrow (x, 1-0, t)} \int_0^t \int_0^1 U_{0\eta\eta}(x-\xi, y-1; t-\tau) \beta(\xi, \tau) d\xi d\tau = \frac{\pi^2}{3} \beta(x, t).$$

Лемма 3. Пусть $\alpha(y, t) \in C(\overline{\Omega_1})$ удовлетворяет неравенству Гёльдера с показателем $\beta \geq \frac{1}{4}$. Тогда

$$\lim_{(x, y, t) \rightarrow (0+0, y, t)} \int_0^t \int_0^1 U_{0\xi\xi}(x-0, y-\eta; t-\tau) \alpha(\eta, \tau) d\eta d\tau = -\frac{2\pi^2}{3} \alpha(y, t),$$

$$\lim_{(x, y, t) \rightarrow (0+0, y, t)} \int_0^t \int_0^1 U_{2\xi\xi}(x-0, y-\eta; t-\tau) \alpha(\eta, \tau) d\eta d\tau = 0.$$

Лемма 4. Пусть $\beta(x, t) \in C(\overline{\Omega_3})$ удовлетворяет неравенству Гёльдера с показателем $\gamma \geq \frac{1}{4}$. Тогда

$$\lim_{(x,y,t) \rightarrow (x,0+0,t)} \int_0^t \int_0^1 U_{0\eta\eta}(x-\xi, y-0; t-\tau) \beta(\xi, \tau) d\xi d\tau = -\frac{2\pi^2}{3} \beta(x, t),$$

$$\lim_{(x,y,t) \rightarrow (x,0+0,t)} \int_0^t \int_0^1 U_{1\eta\eta}(x-\xi, y-0; t-\tau) \beta(\xi, \tau) d\xi d\tau = 0.$$

Удовлетворяя условиям (3) и учитывая леммы 1–4, имеем

$$\begin{aligned} \varphi_2(y, t) = & -\frac{2\pi^2}{3} \alpha_1(y, t) + \int_0^t \int_0^1 U_{0xx}(0, y, t; 1, \eta, \tau) \alpha_2(\eta, \tau) d\eta d\tau \\ & + \int_0^t \int_0^1 \{U_{0xx}(0, y, t; \xi, 0, \tau) \beta_1(\xi, \tau) + U_{0xx}(0, y, t; \xi, 1, \tau)\} \beta_2(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ & + \int_0^t \int_0^1 U_{1xx}(0, y, t; \xi, 0, \tau) \beta_3(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_3(y, t) = & \frac{\pi^2}{3} \alpha_2(y, t) + \int_0^t \int_0^1 U_{0xx}(1, y, t; \xi, 0, \tau) \beta_1(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ & + \int_0^t \int_0^1 \{U_{0xx}(1, y, t; 0, \eta, \tau) \alpha_1(\eta, \tau) + U_{2xx}(1, y, t; 0, \eta, \tau)\} \alpha_3(\eta, \tau) d\eta d\tau \\ & + \int_0^t \int_0^1 \{U_{0xx}(1, y, t; \xi, 1, \tau) \beta_2(\xi, \tau) + U_{1xx}(1, y, t; \xi, 0, \tau) \beta_3(\xi, \tau)\} d\xi d\tau, \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_2(x, t) = & \int_0^t \int_0^1 U_{0yy}(x, 0, t; 0, \eta, \tau) \alpha_1(\eta, \tau) d\eta d\tau \\ & + \int_0^t \int_0^1 \{U_{0yy}(x, 0, t; 1, \eta, \tau) \alpha_2(\eta, \tau) + U_{2yy}(x, 0, t; 0, \eta, \tau) \alpha_3(\eta, \tau)\} d\eta d\tau \\ & - \frac{2\pi^2}{3} \beta_1(x, t) + \int_0^t \int_0^1 U_{0yy}(x, 0, t; \xi, 1, \tau) \beta_2(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (10) \end{aligned}$$

$$\psi_3(x, t) = \frac{\pi^2}{3} \beta_2(x, t) + \int_0^t \int_0^1 U_{0yy}(x, 1, t; 0, \eta, \tau) \alpha_1(\eta, \tau) d\eta d\tau$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t \int_0^1 \{U_{0yy}(x, 1, t; 1, \eta, \tau) \alpha_2(\eta, \tau) + U_{2yy}(x, 1, t; 0, \eta, \tau) \alpha_3(\eta, \tau)\} d\eta d\tau \\
& \int_0^t \int_0^1 \{U_{0yy}(x, 1, t; \xi, 0, \tau) \beta_1(\xi, \tau) + U_{1yy}(x, 1, t; \xi, 0, \tau) \beta_3(\xi, \tau)\} d\xi d\tau, \quad (11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1(y, t) = & \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{t-\tau} f' \left(-\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}} \right) f \left(\frac{y-\eta}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}} \right) \alpha_2(\eta, \tau) d\eta d\tau \\
& + \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{t-\tau} \{f'(0) + \varphi'(0)\} f \left(\frac{y-\eta}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}} \right) \{\alpha_1(\eta, \tau) + \alpha_3(\eta, \tau)\} d\eta d\tau \\
& + \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{t-\tau} f' \left(-\frac{\xi}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}} \right) f \left(\frac{y}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}} \right) \beta_1(\xi, \tau) d\xi d\tau \\
& + \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{t-\tau} f' \left(-\frac{\xi}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}} \right) f \left(\frac{y-1}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}} \right) \beta_2(\xi, \tau) d\xi d\tau \\
& + \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{t-\tau} f' \left(-\frac{\xi}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}} \right) \varphi \left(\frac{y}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}} \right) \beta_3(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_1(x, t) = & \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{t-\tau} f \left(\frac{x}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}} \right) f' \left(-\frac{\eta}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}} \right) \alpha_1(\eta, \tau) d\eta d\tau \\
& + \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{t-\tau} f \left(\frac{x-1}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}} \right) f' \left(-\frac{\eta}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}} \right) \alpha_2(\eta, \tau) d\eta d\tau \\
& + \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{t-\tau} \varphi \left(\frac{x}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}} \right) f' \left(-\frac{\eta}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}} \right) \alpha_3(\eta, \tau) d\eta d\tau \\
& + \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{t-\tau} f \left(\frac{x-\xi}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}} \right) \{f'(0) + \varphi'(0)\} \{\beta_1(\xi, \tau) + \beta_3(\xi, \tau)\} d\xi d\tau \\
& + \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{t-\tau} f \left(\frac{x-\xi}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}} \right) f' \left(-\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}} \right) \beta_2(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (13)
\end{aligned}$$

Для того чтобы привести систему интегральных уравнений (8)–(13) к системе интегральных уравнений Вольтерра II рода, применим преобразования Абеля к интегральным уравнениям (12) и (13). Это проводится следующим образом.

Рассмотрим интеграл

$$J_2(y, t) = \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{t-\tau} f'(0) f\left(\frac{y-\eta}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\right) \alpha_1(\eta, \tau) d\eta d\tau.$$

Умножаем его на $(z-t)^{-\frac{1}{3}}$ и интегрируем от 0 до z :

$$\int_0^z dt \int_0^t \int_0^1 \frac{f'(0)}{(z-t)^{\frac{1}{3}}(t-\tau)^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}} f\left(\frac{y-\eta}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\right) \alpha_1(\eta, \tau) d\eta d\tau = \int_0^z \frac{J_2(x, y, t)}{(z-t)^{1/3}} dt.$$

Меняя порядок интегрирования и дифференцируя по z , имеем

$$\frac{\pi^2 f'(0)}{\sqrt{3}} \alpha_1(y, z) = \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{J_2(x, y, t)}{(z-t)^{1/3}} dt.$$

Тогда из (12) и (13) получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{\varphi_1(y, t)}{(z-1)^{\frac{1}{3}}} dt &= \frac{\pi^2}{\sqrt{3}} f'(0) \alpha_1(y, z) + \frac{\pi^2}{\sqrt{3}} \varphi'(0) \alpha_3(y, z) \\ &+ \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{dt}{(z-t)^{\frac{1}{3}}} \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{t-\tau} f'\left(-\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\right) f\left(\frac{y-\eta}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\right) \alpha_2(\eta, \tau) d\eta d\tau \\ &+ \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{dt}{(z-t)^{\frac{1}{3}}} \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{t-\tau} f'\left(-\frac{\xi}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\right) f\left(\frac{y}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\right) \beta_1(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ &+ \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{dt}{(z-t)^{\frac{1}{3}}} \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{t-\tau} f'\left(-\frac{\xi}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\right) f\left(\frac{y-1}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\right) \beta_2(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ &+ \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{dt}{(z-t)^{\frac{1}{3}}} \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{t-\tau} f'\left(-\frac{\xi}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\right) \varphi\left(\frac{y}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\right) \beta_3(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{\psi_1(x, t)}{(z-t)^{\frac{1}{3}}} dt &= \frac{\pi^2}{\sqrt{3}} \varphi'(0) \beta_1(x, z) + \frac{\pi^2}{\sqrt{3}} \varphi'(0) \beta_3(x, z) \\ &+ \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{dt}{(z-t)^{\frac{1}{3}}} \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{t-\tau} f\left(\frac{x}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\right) f'\left(-\frac{\eta}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\right) \alpha_1(\eta, \tau) d\eta d\tau \\ &+ \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{dt}{(z-t)^{\frac{1}{3}}} \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{t-\tau} f\left(\frac{x-1}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\right) f'\left(-\frac{\eta}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\right) \alpha_2(\eta, \tau) d\eta d\tau \\ &+ \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{dt}{(z-t)^{\frac{1}{3}}} \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{t-\tau} \varphi\left(\frac{x}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\right) f'\left(-\frac{\eta}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\right) \alpha_3(\eta, \tau) d\eta d\tau \end{aligned}$$

$$+ \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{dt}{(z-t)^{\frac{1}{3}}} \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{t-\tau} f\left(\frac{x-\xi}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\right) f'\left(-\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\right) \beta_2(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (15)$$

Уравнения (8)–(11), (14) и (15) составляют систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода, которая может быть приведена к следующему виду:

$$\gamma_i(z, t) = \int_0^t \int_0^1 K_{ij}(z, t; \varsigma, \tau) \gamma_i(\varsigma, \tau) d\varsigma d\tau + \phi(z, t),$$

$$|K(z, t; \varsigma, \tau)| \leq \frac{C}{(t-\tau)^{\frac{11}{12}}}, \quad \phi_i(z, t) \in C^1(\overline{D}).$$

Так как решение этой системы существует и единственно, задача (1)–(3) имеет единственное решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cattabriga L. Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabili a caratteristiche multiple // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1961. V. 31. P. 1–45.
2. Попов С. П. Особенности численного моделирования двухсолитонных решений уравнения Захарова — Кузнецова // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1999. Т. 39, № 10. С. 1749–1757.
3. Фаминский А. В. Задача Коши для уравнения Захарова — Кузнецова // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 6. С. 1070–1081.
4. Кожанов А. И. Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка. Новосибирск: НГУ, 1990.
5. Хашимов А. Р., Матназаров Ж. Ш. О некоторых свойствах фундаментальных решений нестационарного уравнения третьего порядка составного типа // Узб. мат. журн. 2011. № 1. С. 170–179.
6. Хашимов А. Р., Якубов С. О некоторых свойствах решений задачи Коши для нестационарного уравнения третьего порядка составного типа // Уфим. мат. журн. 2014. Т. 6, № 4. С. 139–148.
7. Khashimov A. R. Some properties of the fundamental solutions of nonstationary third order composite type equation in multidimensional domains // J. Nonlin. Evol. Equ. Appl. 2013. N 1. P. 29–38.
8. Фаминский А. В., Оприцова М. А. О задаче Коши для уравнения Кавахары // Тр. Шестой междунар. конф. по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (Москва, 14–21 августа, 2011). Ч. 1, СМФН, 45. М.: РУДН, 2012. С. 132–150.
9. Катсон В. М. Уединенные волны двумерного модифицированного уравнения Кавахары // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 6. С. 76–85.
10. Сангаре К., Фаминский А. В. Слабые решения смешанной задачи в полуполосе для обобщенного уравнения Кавахары // Мат. заметки. 2009. Т. 85, вып. 1. С. 98–109.
11. Фаминский А. В., Кувшинов Р. В. Начально-краевые задачи для обобщенного уравнения Кавахары // Успехи мат. наук. 2011. Т. 66, вып. 4. С. 187–188.
12. Фаминский А. В. О нелокальной корректности смешанной задачи для уравнения Захарова — Кузнецова // Современная математика и ее прил. 2006. Т. 38. С. 135–148.
13. Block H. Sur les équations linéaires aux dérivées partielles à caractéristiques multiples // Ark. f. Mat., Astr. och Fys. 1912. Bd. 7, No. 13. 34 S.; No. 21, 30 S.
14. Del Vecchio E. La soluzione fondamentale per $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ // Ven. Ist. Atti. 1918–19. V. 78. P. 359–382.
15. Del Vecchio E. Sur deux problèmes d'intégration pour les équations paraboliques // Ark. för Mat., Astron. och Fys. 1916. Bd. 11. 13 S.

16. *Del Vecchio E.* Sulle equazioni $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \frac{\partial z}{\partial y} + \varphi_1(x, y) = 0$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \varphi_2(x, y) = 0$ // *Torino Mem.* 1915. V. 66, N 4. P. 1–41.
17. *Cattabriga L.* Un problema al contorno per una equazione parabolica di ordine dispari // *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Sci. Fis. Mat., III. Ser.* 1959. Vol. 13. P. 163–203.
18. Абдиназаров С. О фундаментальных решениях линейных уравнений с кратными характеристиками высокого порядка // *Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук.* 1989. № 4. С. 3–8.
19. Абдиназаров С., Собиров З. А. О фундаментальных решениях уравнения с кратными характеристиками третьего порядка в многомерном пространстве // *Тр. междунар. науч. конф. «Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики».* Ташкент, 2004. С. 12–13.
20. Джураев Т. Д., Абдиназаров С. К теории уравнений нечетного порядка с кратными характеристиками // *Докл. АН СССР.* 1991. Т. 320, № 6. С. 1305–1309.
21. Джураев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1979.
22. Кружков С. Н., Фаминский А. В. Обобщенные решения задачи Коши для уравнения Кортевега — де Фриза // *Мат. сб.* 1983. Т. 120, вып. 3. С. 396–425.
23. Елеев В. А. Краевая задача для смешанного уравнения третьего порядка параболического типа // *Укр. мат. журн.* 1996. Т. 47, № 1. С. 20–29.
24. Шополов Н. Н. Об одной краевой задаче для параболического уравнения третьего порядка // *Докл. Болг. АН* 1980. Т. 1. С. 18–21.
25. Roetman E. L. Some observations about an odd order parabolic equation // *J. Differ. Equ.* 1971. V. 9, N 2. P. 335–345.
26. Хашимов А. Р. О некоторых свойствах фундаментальных решений нестационарного уравнения нечетного порядка составного типа в многомерных областях // *Докл. АН РУз.* 2010. № 5. С. 6–9.

Статья поступила 25 сентября 2017 г.

Хашимов Абдукомил Рисбекович
Ташкентский финансовый институт,
ул. Амира Тимура, 60А, Ташкент 100000, Узбекистан
abdukamil@yandex.ru

ON THE SECOND BOUNDARY VALUE PROBLEM
FOR NONSTATIONARY THIRD-ORDER
EQUATIONS OF COMPOSITE TYPE

A. R. Khashimov

Abstract: We consider the second boundary value problem for nonstationary third-order equations of mixed type. and study asymptotic characteristics of fundamental solutions of the equations, which are used for constructing of regular solutions to the boundary value problems.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.4.11318

Keywords: third order equation, nonstationary PDE, uniqueness of solution, regular solution, boundary value problem, mixed type equation, method of potentials, fundamental solution.

REFERENCES

1. Cattabriga L., "Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabili a caratteristiche multiple," *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **31**, 1–45 (1961).
2. Popov S. P., "Numerical simulation of two-soliton solutions to the Zakharov–Kuznetsov equation," *Comput. Math. Math. Phys.*, **39**, No. 10, 1749–1757 (1999).
3. Faminskij A. V., "The Cauchy problem for the Zakharov–Kuznetsov equation," *Differ. Equations*, **31**, No. 6, 1070–1081 (1995).
4. Kozhanov A. I., *Boundary Value Problems for Mathematical Physics Equations of Odd Order*, Novosibirsk (1990).
5. Khashimov A. R. and Matnazarov Zh. Sh., "On some properties of fundamental solutions of a non-stationary third-order equation of composite type," *Uzb. Mat. Zh.*, **1**, 170–179 (2011).
6. Khashimov A. R. and Yakubov S., "On some properties of solutions of the Cauchy problem for a non-stationary third-order equation of composite type," *Ufimsk. Mat. Zh.*, **6**, No. 4, 139–148 (2014).
7. Khashimov A. R., "Some properties of the fundamental solutions of nonstationary third order composite type equation in multidimensional domains," *J. Nonlin. Evol. Equ. Appl.*, 29–38 (2013).
8. Faminskii A. V. and Opritova M. A., "On the Cauchy problem for a Kawahara equation," in: *Proc. 6th Int. Conf. Differential and Functional-Differential Equations (Moscow, Aug. 14–21, 2011)*. Part 1, **45**, pp. 132–150, Moscow (2012).
9. Katson V. M., "Solitary waves of two-dimensional modified Kawahara equation," *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Prikl. Nelinejn. Din.*, **16**, No. 6, 76–85 (2008).
10. Sangare K. and Faminskii A. V., "Weak solutions of a mixed problem in a half-strip for a generalized Kawahara equation," *Math. Notes*, **85**, No. 1, 90–100 (2009).
11. Faminskii A. V. and Kuvshinov R. V., "Initial-boundary value problems for the generalized Kawahara equation," *Russ. Math. Surv.*, **66**, No. 4, 819–821 (2011).
12. Faminskii A. V., "Nonlocal well-posedness of the mixed problem for the Zakharov–Kuznetsov equation," *J. Math. Sci., New York*, **147**, No. 1, 6524–6537 (2007).

13. Block H., "Sur les équations linéaires aux dérivées partielles à caractéristiques multiples [in French]," Ark. f. Mat., Astr. och Fys., **7**, No. 13, 34 p. (1912); No. 21, 30 p. (1912).
14. Del Vecchio E., "La soluzione fondamentale per $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ [in Italian]," Ven. Ist. Atti, **78**, 359–382 (1918–19).
15. Del Vecchio E., "Sur deux problèmes d'intégration pour les équations paraboliques," Ark. för Mat., Astron. och Fys., **11**, 13 p. (1916).
16. Del Vecchio E., "Sulle equazioni $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \frac{\partial z}{\partial y} + \varphi_1(x, y) = 0$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \varphi_2(x, y) = 0$," Torino Mem., (2), **66**, No. 4, 1–41 (1915).
17. Cattabriga L., "Un problema al contorno per una equazione parabolica di ordine dispari," Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Sci. Fis. Mat., III. Ser., **13**, 163–203 (1959).
18. Abdinazarov S., "On fundamental solutions of linear equations with multiple characteristics of high order [in Russian]," Izv. Akad. Nauk UzSSR, Ser. Fiz.-Mat. Nauk, No. 4, 3–8 (1989).
19. Abdinazarov S. and Sobirov Z., "On fundamental solutions of an equation with multiple third-order characteristics in a multidimensional space," in: Proc. Int. Sci. Conf. Differential Equations with Partial Derivatives and Related Problems of Analysis and Informatics, pp. 12–13, Tashkent (2004).
20. Dzhuraev T. D. and Abdinazarov S., "On the theory of odd-order equations with multiple characteristics," Sov. Math., Dokl., **44**, No. 2, 619–623 (1992).
21. Dzhuraev T. D., Boundary Value Problems for Mixed and Mixed-Composite Type Equations [in Russian], Fan, Tashkent (1979).
22. Kruzhkov S. N. and Faminskij A. V., "Generalized solutions of the Cauchy problem for the Korteweg–de Vries equation [in Russian]," Mat. Sb., N. Ser., **120**, No. 3, 396–425 (1983).
23. Eleev V. A., "A boundary value problem for a third-order mixed equation of parabolic-hyperbolic type," Ukr. Math. J., **47**, No. 1, 20–31 (1996).
24. Shopolov N. N., "Some boundary-value problems for a parabolic equation of the third order [in Russian]," C. R. Acad. Bulg. Sci., **33**, 159–161 (1980).
25. Roetman E. L., "Some observations about an odd order parabolic equation," J. Differ. Equ., **9**, No. 2, 335–345 (1971).
26. Khashimov A. R., "On some properties of fundamental solutions of a non-stationary odd-order equation of composite type in multidimensional domains," Dokl. Akad. Nauk Resp. Uzb., No. 5, 6–9 (2010).

Submitted September 25, 2017

Abdukamil R. Khashimov
Tashkent Financial Institute
60A Amir Timur Street, Tashkent 100000, Uzbekistan
abdukamil@yandex.ru