

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА, НЕ РАЗРЕШЕННОГО ОТНОСИТЕЛЬНО СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

И. Е. Егоров, Е. С. Ефимова

Аннотация. Рассматривается краевая задача для уравнения третьего порядка, не разрешенного относительно старшей производной. Уравнения такого типа, часто называемые уравнениями соболевского типа, встречаются во многих прикладных задачах. С помощью нестационарного метода Галёркина и метода регуляризации доказана теорема существования и единственности регулярного решения краевой задачи. Также получена оценка погрешности метода Галёркина через параметр регуляризации и собственные значения спектральной задачи для оператора Лапласа.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.4.11314

Ключевые слова: псевдопараболическое уравнение, краевая задача, разрешимость, априорная оценка, приближенное решение, оценка погрешности.

Введение

Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики изучались в работах [1–10]. Уравнения с частными производными, не разрешенные относительно старшей производной, представляют возрастающий интерес, обусловленный необходимостью решения важных прикладных задач. Уравнения такого вида встречаются в математических моделях вязкоупругости, электродинамики, физики полупроводников, механики полимеров и других процессов современной физики. Отметим, что уравнения, не разрешенные относительно старшей производной, часто называют *уравнениями соболевского типа*, и им посвящено довольно много работ, в том числе [3, 4]. В работах [11, 12] проведено исследование регулярной разрешимости первой краевой задачи для уравнений соболевского типа переменного направления.

Метод Галёркина для уравнений с частными производными применялся во многих работах [13, 14], в частности, рядом авторов были установлены оценки погрешности метода Галёркина для нестационарных уравнений [14, 15].

В данной работе с помощью нестационарного метода Галёркина и метода регуляризации доказана теорема существования и единственности регулярного решения краевой задачи для уравнения третьего порядка, не разрешенного относительно старшей производной. Также получена оценка погрешности метода

Результаты были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.6069.2017/8.9).

Галёркина через параметр регуляризации и собственные значения спектральной задачи для оператора Лапласа.

1. Постановка краевой задачи и априорная оценка

Пусть Ω — ограниченная область в R^n с гладкой границей γ . Положим $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Gamma = \gamma \times (0, T)$, $\Omega_t = \Omega \times \{t\}$, $0 \leq t \leq T$.

В цилиндрической области Q рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv k(x, t)u_t - \Delta u_t - \Delta u + c(x, t)u = f(x, t). \quad (1)$$

Предположим, что коэффициенты уравнения (1) — достаточно гладкие функции в $\overline{Q}$ и

$$k(x, T) \geq -\lambda_1, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad \lambda_1 = C_\Omega^{-2}, \quad (2)$$

где C_Ω — положительная постоянная из известного неравенства Пуанкаре — Фридрихса [13].

Краевая задача. Найти решение уравнения (1) в области Q такое, что

$$u|_\Gamma = 0, \quad u|_{t=0} = 0. \quad (3)$$

Пусть $W_2^{m,s}(Q)$ — анизотропное пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_{m,s}^2 = \int_Q \left[\sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u)^2 + (D_t^s u)^2 \right] dQ, \quad u \in W_2^{m,s}(Q),$$

причем $\|u\|_{m,m} = \|u\|_m$ для $u \in W_2^{m,m} = W_2^m$. Обозначим через

$$(u, v)_0 = \int_\Omega u(x)v(x) dx, \quad u, v \in L_2(\Omega),$$

скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$ и

$$(u, v) = \int_0^T (u, v)_0 dt$$

для функций u, v из $L_2(Q)$, $\|u\|^2 = (u, u)$.

Введем класс функций

$$C_L = \{u(x, t) : u \in W_2^{2,1}(Q), u_{tx_i x_j} \in L_2(Q), i, j = \overline{1, n}, \text{ и выполнены условия (3)}\}.$$

Лемма 1. Пусть выполнены условия (2) и

$$c - \frac{1}{2}k_t \geq 0, \quad (x, t) \in \overline{Q}.$$

Тогда для любой функции $u(x, t) \in C_L$ имеет место оценка

$$(Lu, u) \geq C_1 \|u\|_{1,0}^2, \quad C_1 > 0. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим выражение (Lu, u) для $u \in C_L$. После интегрирования по частям с учетом краевых условий (3) получим

$$(Lu, u) = \int_Q \left[\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + \left(c - \frac{1}{2} k_t \right) u^2 \right] dQ + \frac{1}{2} \int_{\Omega_T} k u^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_T} \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 dx.$$

Отсюда, используя неравенство Пуанкаре — Фридрихса

$$\int_{\Omega} u^2 d\Omega \leq C_{\Omega}^2 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 d\Omega,$$

получаем утверждение леммы.

Из леммы 1 следует, что при выполнении условия леммы регулярное решение краевой задачи (1)–(3) единственно.

2. Основной результат

Теорема 1. Пусть выполнены условия (2) и

$$k(x, 0) \geq -\lambda_1, \quad c - \frac{1}{2} k_t \geq 0, \quad c + \frac{1}{2} k_t \geq \delta > 0, \quad f, f_t \in L_2(Q), \quad f(x, 0) = 0.$$

Тогда краевая задача (1)–(3) имеет единственное решение $u(x, t)$ из C_L и справедлива оценка

$$\int_Q \left[u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{tx_i}^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i x_j}^2 + (\Delta u_t)^2 \right] dQ \leq C_2 \|f\|_{0,1}^2, \quad C_2 > 0. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\varepsilon > 0$ положим $L_{\varepsilon} u = -\varepsilon u_{tt} + Lu$. В качестве базисных берем функции $\varphi_k(x)$, которые являются решением спектральной задачи

$$-\Delta \varphi_k = \lambda_k \varphi_k, \quad x \in \Omega, \quad \varphi_k|_{\gamma} = 0.$$

При этом функции $\varphi_k(x)$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$, а соответствующие собственные числа таковы, что $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ и $\lambda_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$.

Приближенные решения $u^{N,\varepsilon}(x, t)$ краевой задачи (1)–(3) будем искать в виде

$$v = u^{N,\varepsilon} \equiv \sum_{k=1}^N c_k^{N,\varepsilon}(t) \varphi_k(x),$$

в котором $c_k^{N,\varepsilon}(t)$ определяются как решения следующей краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$(L_{\varepsilon} u^{N,\varepsilon}, \varphi_l)_0 = (f, \varphi_l)_0, \quad l = \overline{1, N}, \quad (6)$$

$$c_l^{N,\varepsilon}|_{t=0} = 0, \quad D_t c_l^{N,\varepsilon}|_{t=T} = 0. \quad (7)$$

Однозначная разрешимость краевой задачи (6), (7) следует из единственности решения данной краевой задачи.

Умножим (6) на $c_l^{N,\varepsilon}$ и просуммируем полученное равенство по l от 1 до N , затем, интегрируя последнее равенство по t , получим соотношение

$$(f, v) = \varepsilon \|v_t\|^2 + (Lv, v).$$

Отсюда в силу оценки (4) следует априорная оценка

$$\varepsilon \|v_t\|^2 + \|v\|_{1,0}^2 \leq C_3 \|f\|^2, \quad C_3 > 0. \quad (8)$$

Заметим, что оценка (8) гарантирует единственность решения краевой задачи (6), (7). Следовательно, приближенные решения $u^{N,\varepsilon}$ однозначно определяются задачей (6), (7) и $c_k^{N,\varepsilon}(t) \in W_2^2(0, T)$.

Путем интегрирования по частям из (6), (7) получим, что

$$\begin{aligned} -(f, v_{tt}) = & \int_Q \left[\sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2 + \left(c + \frac{1}{2} k_t \right) v_t^2 + c_t v_t v \right] dQ + \varepsilon \|v_{tt}\|^2 \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} k v_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2 dx. \end{aligned}$$

Отсюда в силу оценки (8), неравенства Пуанкаре — Фридрихса и неравенства $|ab| \leq \gamma a^2 + \frac{1}{4\gamma} b^2$, $\gamma > 0$, следует оценка

$$\varepsilon \|v_{tt}\|^2 + \|v_t\|_{1,0}^2 \leq C_4 \|f\|_{0,1}^2, \quad C_4 > 0. \quad (9)$$

Снова интегрируя по частям, из (6), (7) получим

$$-(f, \Delta v) = \varepsilon \int_Q \sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2 dQ + \int_Q [(\Delta v)^2 - (k v_t + c v) \Delta v] dQ + \frac{1}{2} \int_{\Omega_T} (\Delta v)^2 dx. \quad (10)$$

В силу неравенства (9) из (10) вытекает априорная оценка

$$\varepsilon \int_Q \sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2 dQ + \int_Q \sum_{i,j=1}^n v_{x_i x_j}^2 dQ \leq C_5 \|f\|_{0,1}^2, \quad C_5 > 0. \quad (11)$$

Интегрируя по частям, из (6), (7) получим, что

$$-(f, \Delta v_t) = \int_Q [(\Delta v_t)^2 - (k v_t + c v) \Delta v_t] dQ + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega_0} \sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_T} (\Delta v)^2 dx.$$

Отсюда следует оценка

$$\|\Delta v_t\|^2 \leq C_6 \|f\|_{0,1}^2, \quad C_6 > 0. \quad (12)$$

Из неравенств (8), (9), (11), (12) получаем, что для приближенных решений справедлива априорная оценка

$$\int_Q \left[(u_t^{N,\varepsilon})^2 + \sum_{i=1}^n (u_{tx_i}^{N,\varepsilon})^2 + \sum_{i=1}^n (u_{x_i x_j}^{N,\varepsilon})^2 + (\Delta u_t^{N,\varepsilon})^2 \right] dQ \leq C_7 \|f\|_{0,1}^2, \quad C_7 > 0. \quad (13)$$

которая позволяет стандартным образом завершить доказательство теоремы 1 в данном случае. Теорема 1 доказана.

В силу оценок (5), (13) и леммы 1 аналогично работе [15] устанавливается оценка погрешности нестационарного метода Галёркина.

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда справедлива оценка

$$\|u - u^{N,\varepsilon}\|_{1,0} \leq C_8 \|f\|_{0,1} (\varepsilon^{1/2} + \lambda_{N+1}^{-1/2}), \quad C_8 > 0. \quad (14)$$

где $u(x, t)$ — точное решение краевой задачи (1)–(3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x, t)$ — точное решение краевой задачи (1)–(3), гарантированное теоремой 1. Заметим, что функция $u(x, t)$ представима в виде ряда Фурье

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \varphi_k(x), \quad c_k(t) = (u, \varphi_k)_0.$$

При этом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \int_0^T c_k^2(t) dt = \|\Delta u\|^2 \leq C_9 \|f\|_{0,1}^2, \quad C_9 > 0. \quad (15)$$

С другой стороны, для функции $u(x, t)$ справедливы соотношения

$$(Lu, \varphi_l) = (f, \varphi_l), \quad l = 1, 2, \dots \quad (16)$$

В пространстве $L_2(Q)$ введем линейное многообразие

$$H_N = \left\{ \eta(x, t) = \sum_{l=1}^N d_l(t) \varphi_l(x), \quad d_l \in W_2^1(0, T), \quad d_l(0) = 0 \right\}.$$

В силу (6), (16) имеем

$$(L_\varepsilon u^{N,\varepsilon}, \eta) = (f, \eta), \quad (Lu, \eta) = (f, \eta) \quad \forall \eta \in H_N.$$

Отсюда получаем

$$(L(u - u^{N,\varepsilon}), \eta) = \varepsilon (u_{tt}^{N,\varepsilon}, \eta) \quad \forall \eta \in H_N.$$

Полагая в последнем равенстве

$$\eta = w - u^{N,\varepsilon}, \quad w \in H_N,$$

будем иметь

$$(L(u - u^{N,\varepsilon}), u - u^{N,\varepsilon}) = -\varepsilon (u_{tt}^{N,\varepsilon}, w - u^{N,\varepsilon}) + (f - Lu^{N,\varepsilon}, u - w). \quad (17)$$

При

$$w = \sum_{k=1}^N c_k(t) \varphi_k(x) \in H_N$$

справедливо неравенство

$$\|u - w\|^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} \int_0^T c_k^2(t) dt \leq \lambda_{N+1}^{-2} \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_k^2 \int_0^T c_k^2(t) dt. \quad (18)$$

Из соотношения (17) с учетом неравенств (4), (13), (15), (18) получаем оценку погрешности метода Галёркина (14). Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что $\lambda_1 = C_\Omega^{-2}$ является минимальным собственным значением спектральной задачи, рассмотренной в доказательстве теоремы 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В уравнении (1) вместо оператора Δ можно рассмотреть эллиптические операторы более общего вида с переменными коэффициентами. При этом соответствующим образом изменятся условия на $k(x, 0)$ и $k(x, T)$.

ПРИМЕР 1. Пусть $\Omega = (0, l)$, $Q_1 = \Omega \times (0, 1)$. В области Q_1 рассмотрим уравнение

$$-\lambda_1(1-t)u_t - u_{xxt} - u_{xx} - 2\lambda_1 u = 0, \quad (19)$$

где $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{l^2}$.

Нетрудно показать, что функция $u(x, t) = t \sin \frac{\pi x}{l}$ является решением краевой задачи (1)–(3) для уравнения (19) с однородными краевыми условиями. Таким образом, при нарушении условия

$$c - \frac{1}{2}k_t + \lambda_1 \geq \delta_1 > 0,$$

вообще говоря, отсутствует единственность решений задачи (1)–(3).

ПРИМЕР 2. При нарушении условия $k(x, T) \geq -\lambda_1$ также отсутствует единственность решений задачи (1)–(3). В самом деле, в области Q_1 рассмотрим уравнение

$$-\lambda_1(1+t)u_t - u_{xxt} - u_{xx} = 0. \quad (20)$$

Легко проверить, что функция $u(x, t) = t \sin \frac{\pi x}{l}$ является решением краевой задачи (1)–(3) для уравнения (20) с однородными краевыми условиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Якубов С. Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Изд-во Элм, 1985.
2. Егоров И. Е., Федоров В. Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995.
3. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998.
4. Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В. Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.
5. Кожанов А. И. О краевых задачах для некоторых классов уравнений высокого порядка, неразрешенных относительно старшей производной // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 2. С. 361–376.
6. Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
7. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1973.
8. Фикера Г. К единой теории краевых задач для эллипτικο-параболических уравнений // Математика. 1963. Т. 7, № 6. С. 99–121.
9. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.
10. Beals R., Protopenescu V. Half-range completeness for the Fokker–Planck equation // J. Statist. Phys. 1983. V. 32, N 3. P. 565–584.
11. Кожанов А. И. Существование регулярных решений первой краевой задачи для одного класса уравнений соболевского типа переменного направления // Мат. заметки ЯГУ. 1997. Т. 4, вып. 2. С. 39–48.

12. Кожанов А. И., Потапова С. В. Задача Дирихле для одного класса уравнений составного типа с разрывным коэффициентом при старшей производной // Дальневост. мат. журн. 2014. Т. 14, № 1. С. 48–65.
13. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
14. Виноградова П. В., Зарубин А. Г. Оценка погрешности метода Галёркина для нестационарных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 9. С. 1643–1651.
15. Егоров И. Е. О модифицированном методе Галёркина для параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Uzbek Math. J. 2013. N 3. P. 33–40.

Статья поступила 10 октября 2017 г.

Егоров Иван Егорович, Ефимова Елена Сергеевна
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
НИИ математики,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891
IvanEgorov51@mail.ru, OslamE@mail.ru

A BOUNDARY VALUE PROBLEM
FOR THE THIRD-ORDER
EQUATION NOT SOLVABLE WITH
RESPECT TO THE HIGHEST-ORDER DERIVATIVE

I. E. Egorov and E. S. Efimova

Abstract: We consider a boundary value problem for the third-order equation not solvable with respect to the highest-order derivative. Equations of this type, often called Sobolev type equations, occur in many applied problems. The nonstationary Galerkin method and regularization method are applied to prove the existence and uniqueness theorem for a regular solution of the boundary value problem. Also we obtain an error estimate via regularization parameter and in terms of eigenvalues of the spectral problem for the Laplace operator.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.4.11314

Keywords: pseudoparabolic equation, boundary value problem, solvability, a priori estimate, approximate solution, error estimate.

REFERENCES

1. Yakubov S. Y., Linear Differential-Operator Equations and Their Applications [in Russian], Izdat. ELM, Baku (1985).
2. Egorov I. E. and Fedorov V. E., Nonclassical Higher-Order Equations in Mathematical Physics [in Russian], Izdat. Vychisl. Tsentra SO RAN, Novosibirsk (1995).
3. Demidenko G. V. and Uspenskiy S. V., Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative [in Russian], Nauchn. Kniga, Novosibirsk (1998).
4. Egorov I. E., Pyatkov S. G., and Popov S. V., Nonclassical Differential-Operator Equations [in Russian], Nauka, Novosibirsk (2000).
5. Kozhanov A. I., "Boundary value problems for some classes of higher-order equations not solvable with respect to the highest-order derivative," Sib. Math. J., **35**, No. 2, 361–376 (1994).
6. Sveshnikov A. G., Alshin A. B., Korpusov M. O., and Pletner Yu. D., Linear and Nonlinear Equations of Sobolev Type [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2007).
7. Lions J.-L., Some Methods of Solving Nonlinear Boundary Value Problems [in Russian], Mir, Moscow (1973).
8. Ficara G., "The unified theory of boundary value problems for elliptic-parabolic equations," Math., **7**, No. 6, 99–121 (1963).
9. Nakhushev A. M., Problems with Shift for the Equations in Partial Derivatives [in Russian], Nauka, Moscow (2006).
10. Beals R. and Protopopescu V., "Half-range completeness for the Fokker–Planck equation," J. Stat. Phys., **32**, No. 3, 565–584 (1983).
11. Kozhanov A. I., "The existence of regular solutions of the first boundary value Problem for one class of Sobolev type equations with alternating direction," Mat. Zamet. YaGU, **4**, No. 2, 39–48 (1997).

12. Kozhanov A. I. and Potapova S. V., "The Dirichlet problem for a class of composite type equations with a discontinuous coefficient of the highest derivative," *Dal'nevost. Mat. Zhurn.*, **14**, No. 1, 48–65 (2014).
13. Ladyzhenskaya O. A., *Boundary Value Problems of Mathematical Physics* [in Russian], Nauka, Moscow (1973).
14. Vinogradova P. V. and Zarubin A. G., "Error estimation of Galerkin method for non-stationary equations," *J. Comput. Math. Math. Phys.*, **49**, No. 9, 1643–1651 (2009).
15. Egorov I. E., "On a modified Galerkin method for a parabolic equation with alternating time direction," *Uzbek. Mat. Zhurn.*, No. 3, 33–40 (2013).

Submitted October 10, 2017

Ivan E. Egorov and Elena S. Efimova
M. K. Ammosov North-Eastern Federal University,
Institute of Mathematics,
48 Kulakovskiy Street, Yakutsk 677891, Russia
IvanEgorov51@mail.ru, OslamE@mail.ru