

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ЭФФЕКТИВНОГО КОЭФФИЦИЕНТА В ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТИ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА

П. Е. Захаров, П. В. Сивцев

Аннотация. Рассмотрен численный расчет эффективного коэффициента задачи линейной упругости композитного материала на отдельном представительном элементе, имеющем аналогичную объемную долю фибр. Полученный эффективный коэффициент используют для решения полной задачи на грубой сетке. В качестве примера рассматривается задача расчета деформации бетонного блока с включением стальных фибр под действием трехточечного изгиба. Вычислительная реализация задачи проводится методом конечных элементов с использованием вычислительной платформы FEniCS.

DOI 10.25587/SVFU.2017.2.9247

Ключевые слова: численное усреднение, линейная упругость, композитный материал, математическое моделирование, эффективный коэффициент.

1. Введение

Композитные материалы широко применяются в большинстве отраслей промышленности: автомобилестроении, судостроении, производстве авиационной и космической техники, а также в различных областях, связанных с сельским хозяйством, обороной и нефтепереработкой. Причиной тому является низкая стоимость и высокая устойчивость к различным видам воздействий, например механическим, температурным или химическим.

Рассматривается стационарная задача линейной упругости композитных материалов, состоящих из основного материала с включением случайно распределенных фибр. Ярким примером подобных композитов являются бетонные блоки и конструкции с включенными стальными и полипропиленовыми фибрами. Такое изделие обладает большой прочностью, повышенным сопротивлением к образованию трещин и имеет большой срок службы.

При расчете напряженно-деформированного состояния композита возникает необходимость учета измененных свойств материала. При решении задачи с учетом всех включений возрастает вычислительная сложность задачи за счет

Работа была выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 17-01-00732А (Захаров П. Е.) и за счет Российского научного фонда, грант № 17-71-20055 (Сивцев П. В.).

применения очень подробной сетки. Для некоторого типа подзадач вместо учета всех включений можно обойтись решением задачи на более грубой сетке с использованием эффективных коэффициентов.

Для вычисления эффективных коэффициентов могут быть использованы аналитические [1, 2] или численные [3–5] методы. Аналитические методы ограничены самыми простыми вариантами геометрий фибр и предназначены для изотропных композитных материалов.

В этой статье рассматриваем численное усреднение коэффициентов задачи на отдельном представительном элементе, имеющем аналогичную объемную долю фибр. Полученные эффективные коэффициенты используются для решения полной задачи на грубой сетке. В качестве примера рассматривается двумерная задача расчета деформации бетонного блока с включением стальных фибр под действием трехточечного изгиба [6–8]. Численная реализация задачи проводится методом конечных элементов с использованием вычислительной платформы FEniCS [9].

2. Постановка задачи

Рассмотрим математическую модель, описывающую напряженно-деформированное состояние в расчетной области, содержащей железобетонную плиту, зажатую между прессом и рельсами:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжения, ρ — плотность материала, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ — вектор объемных сил в точке $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Здесь область состоит из четырех подобластей: $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$, где Ω_1 — бетонная подобласть плиты, Ω_2 — подобласть стальных фибр в бетоне, Ω_3 — пресс, Ω_4 — рельсы. Отметим, что плотность материала ρ зависит от подобласти и определяется следующим образом:

$$\rho = \rho_i, \quad \mathbf{x} \in \Omega_i, \quad i = 1, \dots, 4.$$

Уравнение (1) дополняется соотношениями между вектором перемещений $\mathbf{u}$, тензором напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и тензором деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$. Для удобства воспользуемся записью тензоров второго порядка в виде векторов, именуемой *нотацией Фойгга*:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon},$$

где $\mathbf{C}$ — тензор упругости, который имеет вид

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2212} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1212} \end{pmatrix}.$$

В случае изотропного материала тензор упругости принимает вид

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix},$$

где λ, μ — параметры Ламе, которые в нашей задаче также зависят от подобласти и задаются как

$$\mu = \mu_i, \quad \lambda = \lambda_i, \quad \mathbf{x} \in \Omega_i, \quad i = 1, \dots, 4.$$

Для упрощения считается, что арматура, пресс и рельсы выполнены из одинаковой стали и соответственно $\rho_2 = \rho_3 = \rho_4$, $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$.

Уравнение твердого тела дополняется граничными условиями, которые связаны с фиксацией рельс и давлением прессы. Фиксация рельс определяется граничным условием первого рода:

$$\mathbf{u} = (0, 0), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D, \quad (2)$$

которое задает нулевые перемещения на нижней границе области рельс. Отметим также условие второго рода:

$$\boldsymbol{\sigma}_n = (0, -P), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_N, \quad (3)$$

закрывающееся в том, что на верхней границе прессы действует поверхностное давление P .

Для аппроксимации по пространству используется метод конечных элементов. Исходная дифференциальная задача сводится к дискретной вариационной задаче. Численная реализация выполнена с использованием вычислительной платформы FEniCS.

3. Численное усреднение коэффициентов

Для генерации геометрии используется алгоритм случайного последовательного заполнения (random sequential adsorption) однонаправленными фибрами с учетом минимального расстояния между ними и периодичного заполнения области. Ограничение с минимальным расстоянием между фибрами связано с генерацией адекватной сетки для метода конечных элементов. Фибры генерируются как одинаковые прямоугольники размером 0.04×0.004 . Для используемого алгоритма максимальная объемная доля таких фибр приблизительно равна 25%. В качестве примера приведена геометрия области с фибрами на рис. 1.

Для вычисления эффективных коэффициентов используется метод численного усреднения на представительной квадратной области. Основной идеей численного усреднения является нахождение однородной среды, эквивалентной исходному композитному материалу, т. е. нужно найти, при каких коэффициентах однородной среды она может приблизительно показывать такое же поведение,

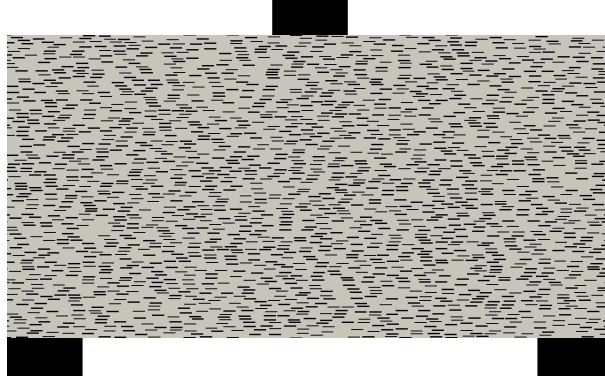


Рис. 1. Область с фибрами, объемная доля 16%

как и композитный материал. Это означает, что при одинаковых средних значениях тензора деформации получаем эквивалентные средние значения тензора напряжения.

Используются следующие обозначения для среднего значения функции ψ :

$$\langle \psi \rangle = \frac{\int_{\omega} \psi d\mathbf{x}}{\int_{\omega} d\mathbf{x}},$$

где ω — представительная область. Таким образом, ранее описанное утверждение относительно усредненного коэффициента может быть записано в следующем виде:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \langle \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{C}^* \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle,$$

где $\mathbf{C}^*$ — эффективный коэффициент. Для вычисления компонент эффективного коэффициента рассматриваются три задачи со следующими граничными условиями:

- 1) $\mathbf{u} = (x_1, 0)$, $\mathbf{x} \in \partial\omega$,
- 2) $\mathbf{u} = (0, x_2)$, $\mathbf{x} \in \partial\omega$,
- 3) $\mathbf{u} = (0.5x_1, 0.5x_2)$, $\mathbf{x} \in \partial\omega$.

При данных граничных условиях средние значения тензора напряжения определяют соответствующие компоненты эффективного коэффициента:

- 1) $C_{ij11}^* = \langle \sigma_{ij} \rangle$, $ij = 11, 22, 12$,
- 2) $C_{ij22}^* = \langle \sigma_{ij} \rangle$, $ij = 11, 22, 12$,
- 3) $C_{ij12}^* = \langle \sigma_{ij} \rangle$, $ij = 11, 22, 12$.

4. Расчеты

В качестве примера рассматривается бетонный блок с включением однопавленных стальных фибр. Параметры упругости для бетона и стали, а также давление прессы определены в табл. 1. Коэффициенты Ламе определяются через модуль Юнга и коэффициент Пуассона

$$\lambda_i = \frac{\nu_i E_i}{(1 + \nu_i)(1 - 2\nu_i)}, \quad \mu_i = \frac{E_i}{2(1 + \nu_i)}, \quad i = 1, 2.$$

Погрешность найденного эффективного коэффициента проверяется разницей решения однородной задачи на грубой сетке и решения исходной неоднородной задачи на подробной сетке

$$\mathbf{e} = \mathbf{u}_c - \mathbf{u}_f,$$

где $\mathbf{u}_c$ — решение на грубой сетке, $\mathbf{u}_f$ — решение на подробной сетке. В качестве величины относительной погрешности возьмем отношение нормы погрешности к норме решения исходной задачи

$$\epsilon = \frac{\|\mathbf{e}\|_{L_2}}{\|\mathbf{u}_f\|_{L_2}}.$$

На рис. 4 изображена величина перемещения и тензора деформации исходной мелкой задачи с фибрами. Влияние фибр визуально не отображается на решении, но на погрешности грубой задачи хорошо замечаются включения фибр (рис. 5). Основная погрешность при решении задачи с эффективным коэффициентом распределена по всей области, а в областях с большим тензором деформации локализуются максимальные значения погрешности.

Все вычислительные сетки представительных областей и исходной неоднородной задачи имеют приблизительно одинаковые размеры треугольных элементов 0.002. Размер треугольного элемента однородной задачи на грубой сетке в 10 раз больше и равен 0.02, а количество узлов в среднем в 100 раз меньше. Были рассмотрены пять различных представительных областей с размерами сторон $l = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$. Объемная доля фибр варьировалась в следующем диапазоне значений: $\varphi = 3.2\%, 6.4\%, 9.6\%, 12.8\%, 16\%, 19.2\%, 22.4\%$. В табл. 2 записаны относительные погрешности для данных значений l и φ .

Таблица 2. Относительная погрешность ϵ при различных объемных долях фибр φ и размерах представительных областей l

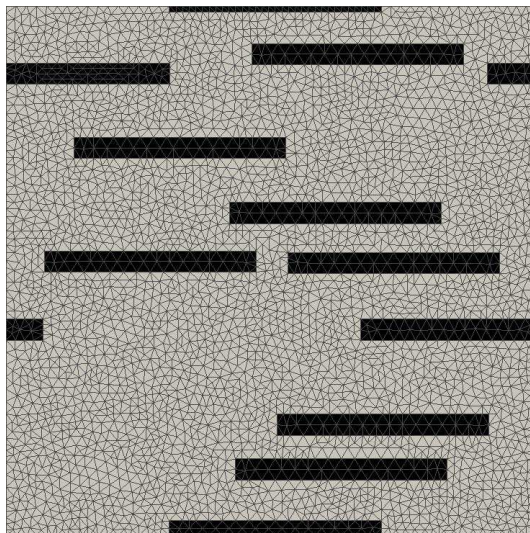
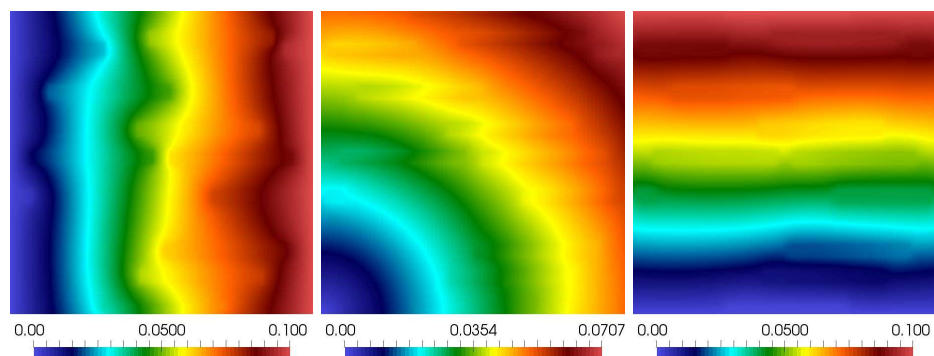
$l \setminus \varphi$	3.2%	6.4%	9.6%	12.8%	16%	19.2%	22.4%
0.1	0.0219	0.0323	0.0296	0.0324	0.0355	0.0317	0.0290
0.2	0.0233	0.0288	0.0277	0.0271	0.0321	0.0268	0.0227
0.3	0.0229	0.0288	0.0234	0.0253	0.0297	0.0229	0.0193
0.4	0.0228	0.0291	0.0228	0.0239	0.0289	0.0219	0.0176
0.5	0.0223	0.0288	0.0225	0.0229	0.0276	0.0210	0.0170

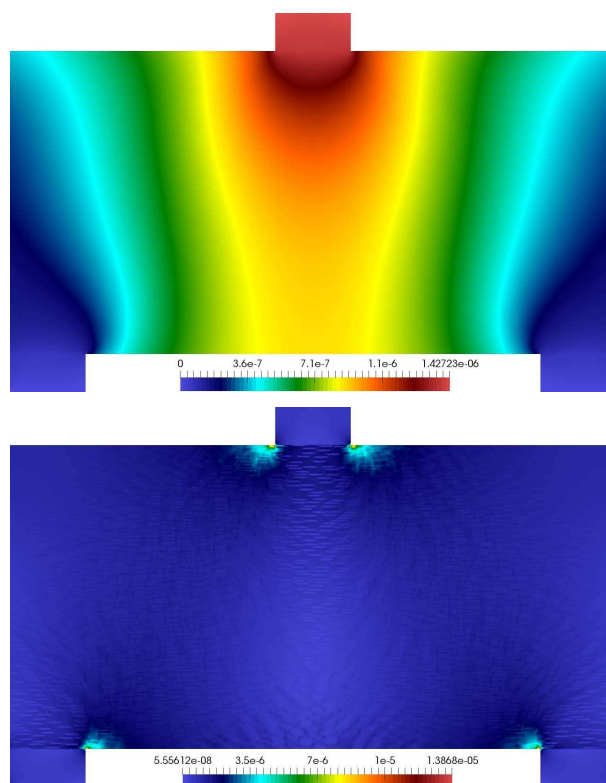
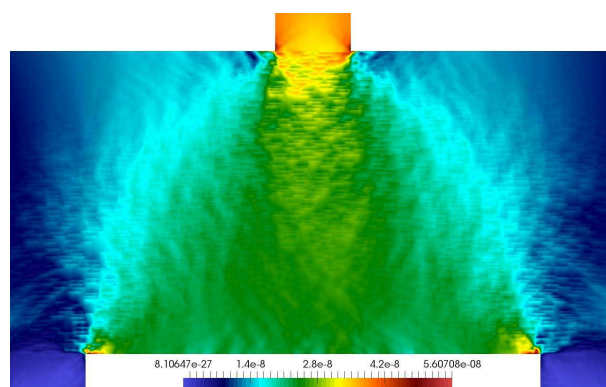
5. Заключение

В данной работе рассмотрен численный расчет эффективного коэффициента и оценка погрешности решения усредненной задачи с данным коэффициентом. Сравниваются относительные погрешности эффективного коэффициента при различных размерах представительной области и объемной доли фибр. Из проведенных расчетов можно сделать вывод, что относительная погрешность

Таблица 1. Параметры задачи

Символ	Название	Значение	Ед. изм.
E_1	модуль Юнга бетона	$4 \cdot 10^{10}$	Па
ν_1	коэффициент Пуассона бетона	0.15	-
E_2	модуль Юнга стали	$2 \cdot 10^{11}$	Па
ν_2	коэффициент Пуассона стали	0.3	-
P	давление прессы	10^5	Па

Рис. 2. Сетка представительной области с размером $l = 0.1$ и объемной долей фибр $\varphi = 16\%$ Рис. 3. Величины решений задач для определения эффективного коэффициента при $l = 0.1$ и $\varphi = 16\%$

Рис. 4. Величина перемещения и деформации при $\varphi = 16\%$ Рис. 5. Величина погрешности при $\varphi = 16\%$, $l = 0.5$

уменьшается при увеличении размера представительной области, но до определенного минимума. Влияние объемной доли фибр на погрешность усредненного решения незначительна. При численном исследовании для рассмотренного диапазона параметров относительная погрешность не превышала 4% и показывала хорошую точность эффективного коэффициента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Christensen R. M., Lo K. H. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models // J. Mechanics and Physics of Solids. 1979. V. 27, N 4. P. 315–330.
2. Li L. X., Wang T. J. A unified approach to predict overall properties of composite materials // Materials Characterization. 2005. V. 54. N 1. P. 49–62.
3. Gusev A. A. Representative volume element size for elastic composites: a numerical study // J. Mechanics and Physics of Solids. 1997. V. 45, N 9. P. 1449–1459.
4. Kari S., Berger H., Gabbert U. Numerical evaluation of effective material properties of randomly distributed short cylindrical fibre composites // Comput. Materials Sci. 2007. V. 39, N 1. P. 198–204.
5. Theocaris P. S., Stavroulakis G. E., Panagiotopoulos P. D. Calculation of effective transverse elastic moduli of fiber-reinforced composites by numerical homogenization // Composites Sci. Technol. 1997. V. 57, N 5. P. 573–586.
6. Kolesov A. E. et al. Numerical analysis of reinforced concrete deep beams // Intern. Conf. Numer. Analysis Appl. Cham: Springer-Verl., 2016. P. 414–421.
7. Smarzewski P., Porba J., Rentfleysz A. Badania doświadczalne tarcz żelbetowych z betonu wysokowartościowego z dodatkiem włókien // Budownictwo i Architektura. 2012. V. 10, N 1. P. 15–26.
8. Сивцев П. В. Численное моделирование задачи упругости железобетонных плит // Вестн. Северо-Восточ. федерал. ун-та им. М. К. Аммосова. 2015. № 4. С. 98–109.
9. Logg A., Mardal K. A., Wells G. eds. Automated solution of differential equations by the finite element method: The FEniCS book. Springer Sci. & Business Media, 2012. V. 84.

Статья поступила 10 апреля 2017 г.

Захаров Петр Егорович, Сивцев Петр Васильевич
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова
Международная научно-исследовательская лаборатория
«Многомасштабное математическое моделирование и компьютерные вычисления»
ул. Кулаковского, 42, Якутск 677891
zapetch@gmail.com, sivkapetr@mail.ru

NUMERICAL CALCULATION OF THE EFFECTIVE COEFFICIENT IN THE PROBLEM OF LINEAR ELASTICITY OF A COMPOSITE MATERIAL

P. E. Zakharov and P. V. Sivtsev

Abstract. We consider the numerical calculation of the effective coefficient of the linear elasticity problem on a representative volume element having a similar volume fraction of fibers. The obtained effective coefficient is used to solve the complete problem on a coarse grid. As an example, the problem of calculating the deformation of a concrete block with the inclusion of steel fibers under the action of a three-point bending is considered. The computational implementation of the problem is carried out by the finite element method using the FEniCS computing platform.

DOI 10.25587/SVFU.2017.2.9247

Keywords: numerical homogenization, linear elasticity, composite material, mathematical modeling, effective coefficient.

REFERENCES

1. Christensen R. M. and Lo K. H., "Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models," *J. Mech. Phys. Solids*, **27**, No. 4, 315–330 (1979).
2. Li L. X. and Wang T. J., "A unified approach to predict overall properties of composite materials," *Materials Characterization*, **54**, No. 1, 49–62 (2005).
3. Gusev A. A., "Representative volume element size for elastic composites: a numerical study," *J. Mech. Phys. Solids*, **45**, No. 9, 1449–1459 (1997).
4. Kari S., Berger H., and Gabbert U., "Numerical evaluation of effective material properties of randomly distributed short cylindrical fibre composites," *Comput. Materials Sci.*, **39**, No. 1, 198–204 (2007).
5. Theocaris P. S., Stavroulakis G. E., and Panagiotopoulos P. D., "Calculation of effective transverse elastic moduli of fiber-reinforced composites by numerical homogenization," *Composites Sci. Technology*, **57**, No. 5, 573–586 (1997).
6. Kolesov A. E. et al. "Numerical analysis of reinforced concrete deep beams," in: *Int. Conf. Numerical Analysis and Its Applications*, Springer-Verl., Cham, 414–421 (2016).
7. Smarzewski P., Poręba J., and Rentfleysz A., "Badania doświadczalne tarcz żelbetowych z betonu wysokowartościowego z dodatkiem włókien," *Budownictwo i Architektura*, **10**, No. 1, 15–26 (2012).
8. Sivtsev P. V., "Numerical simulation of the elasticity problem of reinforced concrete slabs," *Vestn. Severo-Vost. Feder. Univ.*, No. 4 (2015).

The work was supported by the grant from the Russian Foundation for Basic Research (project code 17-01-00732A) and by the grant from the Russian Scientific Foundation (code 17-71-20055).

9. Logg A., Mardal K. A., and Wells G. (eds.), Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method: The FEniCS book, **84**, Springer, Heidelberg (2012).

Submitted April 10, 2017

Petr V. Sivtsev and Petr E. Zakharov
M. K. Ammosov North-Eastern Federal University,
Institute of Mathematics and Informatics,
42, Kulakovsky St., Yakutsk 677000, Russia
sivkapetr@mail.ru, zapetch@gmail.com