

ПРОДОЛЖЕНИЕ ЧАСТИЧНОЙ ПОЛУГРУППОВОЙ ОПЕРАЦИИ

А. О. Петриков

Аннотация. Исследуется внутреннее продолжение частичных операций на частичной полугруппе. Рассматриваются продолжения частичной полугруппы внутренним образом до полной с сохранением ассоциативности. Рассмотрены возможности продолжения частичной операции на частичной полугруппе ненулевых элементов вполне 0-простой полугруппы стандартным и нестандартным способами. Получен отрицательный ответ на вопрос о том, любое ли продолжение частичной операции на частичной полугруппе ненулевых элементов вполне 0-простой полугруппы является вполне простой полугруппой, и всякое ли продолжение стандартно. Однако в некоторых случаях ответы положительные. Получены необходимые и достаточные условия продолжаемости частичной операции на частичной полугруппе ненулевых вычетов, а также частичной операции на полугруппе ненулевых (2×2) -матриц над полем. Показана единственность продолжения частичной операции на полугруппе ненулевых (2×2) -матриц над полем.

DOI 10.25587/SVFU.2017.2.9244

Ключевые слова: частичная операция, частичная полугруппа, вполне 0-простая полугруппа, полугруппа вычетов.

1. Введение

Частичные алгебраические операции, т. е. операции, определенные, возможно, не для всех значений аргументов, всегда привлекали внимание специалистов — во-первых, по причине того, что они являются обобщением обычных операций, и, во-вторых, ввиду их распространенности. Систематическое изложение теории частичных бинарных операций можно найти в монографии [1]. Попытка свести изучение частичных бинарных операций к обычным приводит к вопросу о возможности продолжения частичной операции до полной с сохранением тех или иных свойств, например ассоциативности.

В данной работе нас будут интересовать внутренние продолжения (см. [2]), т. е. такие, которые не предполагают добавления новых элементов. В. В. Розен в [3] ввел понятие сильной ассоциативности частичной бинарной операции. Частичная бинарная операция называется *сильно ассоциативной*, если для любых элементов a, b, c произведения $(ab)c$ и $a(bc)$ либо оба не существуют, либо оба существуют и в этом случае равны друг другу. Множество с сильно ассоциативной частичной бинарной операцией назовем *частичной полугруппой*. Несложно видеть, что любая частичная полугруппа может быть получена из

некоторой полугруппы с нулем, если удалить нуль и объявить неопределенными произведения, которые ранее равнялись нулю. Необходимые и достаточные условия внутренней продолжаемости полугруппы частичных преобразований с единицей были получены Е. С. Ляпиным в 1982 г. [2].

Нас будет интересовать вопрос о внутреннем продолжении частичной полугруппы до полной с сохранением ассоциативности. Существование внутренне продолжаемой частичной полугруппы очевидно. В качестве внутренне непродолжаемой частичной полугруппы можно взять полугруппу из [4], т. е. подполугруппу полугруппы частичных непустых преобразований трехэлементного множества, состоящую из элементов $1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & a & a \end{pmatrix}$, $2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & a & c \end{pmatrix}$, $3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & b & b \end{pmatrix}$, $4 = \begin{pmatrix} b & c \\ a & a \end{pmatrix}$, $5 = \begin{pmatrix} b & c \\ a & b \end{pmatrix}$, $6 = \begin{pmatrix} b & c \\ b & b \end{pmatrix}$, $7 = \begin{pmatrix} c \\ a \end{pmatrix}$, $8 = \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}$; умножение в ней описывается в табл. 1.

Таблица 1. Непродолжаемая частичная полугруппа

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	3	—	—	—	—	—
2	1	2	3	7	8	8	7	8
3	1	1	3	1	1	3	—	—
4	4	4	6	—	—	—	—	—
5	4	4	6	7	7	8	—	—
6	4	4	6	4	4	6	—	—
7	7	7	8	—	—	—	—	—
8	7	7	8	7	7	8	—	—

Полугруппой S^1 назовем полугруппу S , если S содержит единицу, иначе $S \cup \{1\}$.

Отношения Грина $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{H}, \mathcal{J}$ на полугруппе S определяются обычным образом: $\mathcal{R} = \{(a, b) \mid aS^1 = bS^1\}$, $\mathcal{L} = \{(a, b) \mid S^1a = S^1b\}$, $\mathcal{H} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L}$, $\mathcal{J} = \{(a, b) \mid S^1aS^1 = S^1bS^1\}$. Для элемента $a \in S$ через $R(a), L(a), H(a), J(a)$ обозначаются $\mathcal{R}$ -, $\mathcal{L}$ -, $\mathcal{H}$ -, $\mathcal{J}$ -классы, содержащие a . Напомним, что множества $\mathcal{R}$ -, $\mathcal{L}$ -, $\mathcal{J}$ -классов являются частично упорядоченными множествами.

Предложение 1. Если полугруппа S с нулем имеет одноэлементный минимальный ненулевой $\mathcal{J}$ -класс, то частичная операция на $S \setminus \{0\}$ может быть продолжена до полной ассоциативной операции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть минимальный ненулевой одноэлементный $\mathcal{J}$ -класс состоит из элемента a . Множество $I = \{0, a\}$ является идеалом полугруппы S . При замене всех неопределенных произведений в $S \setminus \{0\}$ на a частичная полугруппа $S \setminus \{0\}$ станет полной, и ассоциативность будет сохраняться, так как a — нуль в продолженной полугруппе. $\square$

2. Частичная полугруппа ненулевых элементов вполне 0-простой полугруппы

Простая полугруппа S — это полугруппа, не содержащая собственных идеалов. *Вполне простая полугруппа* S — это полугруппа, единственным идеалом которой является лишь S и имеющая примитивный идемпотент (т. е. минимальный относительно естественного порядка на множестве идемпотентов: $e \leq f \Leftrightarrow ef = fe = e$). *Вполне 0-простая полугруппа* S — это полугруппа с нулем, идеалами которой являются лишь $\{0\}$ и S , причем $S^2 \neq \{0\}$, имеющая минимальный ненулевой идемпотент. Хорошо известная теорема Сушкевича — Риса утверждает (см. [5, теорема 3.5]), что вполне 0-простые полугруппы — это в точности рисовские матричные полугруппы $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ над группой с нулем G^0 с сэндвич-матрицей $P = \|p_{\lambda i}\|_{\lambda \in \Lambda, i \in I}$, где $p_{\lambda i} \in G^0$, причем в каждой строке и в каждом столбце матрицы P присутствуют ненулевые элементы (см. [5]).

Элементы полугруппы $\mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ рассматриваем как $(I \times \Lambda)$ -матрицы над $G^0 = G \cup \{0\}$, где $0 \notin G$, у которых не более одного элемента отлично от 0. Ненулевые элементы из S имеют вид $(g)_{i\lambda}$, где $g \in G$, $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$. Тогда для $A = (a)_{i\lambda}$, $B = (b)_{j\mu}$ из S произведение имеет вид

$$A \circ B = APB = (a)_{i\lambda} \circ (b)_{j\mu} = \begin{cases} (ap_{\lambda j}b)_{i\mu}, & p_{\lambda j} \neq 0, \\ 0, & p_{\lambda j} = 0. \end{cases}$$

Частичную операцию на множестве ненулевых элементов вполне 0-простой полугруппы можно продолжить до полной, как показывает следующее предложение.

Предложение 2. *Частичную полугруппу ненулевых элементов вполне 0-простой полугруппы $M = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P) \setminus \{0\}$ можно продолжить внутренним образом до полной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменим все нулевые элементы сэндвич-матрицы P любыми элементами группы G , например единицей e . Получим новую сэндвич-матрицу $\tilde{P}$. Положим $A * B = A\tilde{P}B$ для $A, B \in M$. Тогда для любых матриц $A, B, C \in M$ будет выполняться равенство

$$(A * B) * C = (A\tilde{P}B)\tilde{P}C = A\tilde{P}(B\tilde{P}C) = A * (B * C)$$

в силу ассоциативности умножения матриц. При этом все ранее существовавшие произведения останутся неизменными, а не существовавшие в M произведения примут ненулевые значения. Следовательно, частичную полугруппу ненулевых элементов вполне 0-простой полугруппы можно продолжить без добавления элемента. $\square$

Назовем *стандартным* способ продолжения операции на $\mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P) \setminus \{0\}$, описанный в предложении 2. Заметим, что стандартных продолжений может быть много. Любое другое продолжение частичной полугруппы ненулевых элементов вполне 0-простой полугруппы назовем *нестандартным*.

Лемма 3. Пусть $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ — вполне 0-простая полугруппа, $M = S \setminus \{0\}$ — частичная полугруппа ненулевых элементов. Если $(M, *)$ — продолжение частичной операции $\cdot$ на M , $(M, *)$ — вполне простая полугруппа и $\mathcal{R}$ - и $\mathcal{L}$ -классы в $(M, \cdot)$ и $(M, *)$ одни и те же, то продолжение $*$ стандартное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Всякая вполне 0-простая полугруппа, очевидно, удовлетворяет следующему условию: для любых a, b, c из $ab = c \neq 0$ следует, что $c\mathcal{R}a$ и $c\mathcal{L}b$. Для вполне простой полугруппы условие упрощается: для любых a, b, c из $ab = c$ следует, что $c\mathcal{R}a$ и $c\mathcal{L}b$. Рассмотрим произвольные $i \in I$ и $\mu \in \Lambda$. Так как $\mathcal{R}$ - и $\mathcal{L}$ -классы в $(M, \cdot)$ и $(M, *)$ одни и те же и $(M, *)$ вполне проста, то элемент $(e)_{i\lambda} * (e)_{j\mu}$ лежит в том же $\mathcal{R}$ -классе, что $(e)_{i\lambda}$, и в том же $\mathcal{L}$ -классе, что $(e)_{j\mu}$. Следовательно, $(e)_{i\lambda} * (e)_{j\mu} = (g)_{i\mu}$ при некотором $g \in G$. Если $p_{\lambda j} \neq 0$, то $g = p_{\lambda j}$; в случае, когда $(e)_{i\lambda} * (e)_{j\mu} = (g)_{i\mu}$ и $p_{\lambda j} = 0$, положим $\tilde{p}_{\lambda j} = g$.

Пусть $a, b \in G$ и $p_{\lambda j} = 0$. Найдем такие $\nu \in \Lambda$ и $k \in I$, что $p_{\nu i} \neq 0$ и $p_{\mu k} \neq 0$.

Имеем $(a)_{i\lambda} * (b)_{j\mu} = ((ap_{\nu i}^{-1})_{i\nu} \cdot (e)_{i\lambda}) * ((e)_{j\mu} \cdot (p_{\mu k}^{-1}b)_{k\mu}) = (ap_{\nu i}^{-1})_{i\nu} * (e)_{i\lambda} * (e)_{j\mu} * (p_{\mu k}^{-1}b)_{k\mu} = (ap_{\nu i}^{-1})_{i\nu} * ((e)_{i\lambda} * (e)_{j\mu}) * (p_{\mu k}^{-1})_{k\mu} = (ap_{\nu i}^{-1})_{i\nu} \cdot (\tilde{p}_{\lambda i})_{i\mu} \cdot (p_{\mu k}^{-1}b)_{k\mu} = (ap_{\nu i}^{-1}p_{\nu i}\tilde{p}_{\lambda j}p_{\mu k}p_{\mu k}^{-1}b)_{i\mu} = (a\tilde{p}_{\lambda j}b)_{i\mu}$.

Таким образом, продолжение $*$ стандартно: $(M, *) = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P')$, где $P'_{\lambda i} = \begin{cases} p_{\lambda i}, & p_{\lambda i} \neq 0, \\ \tilde{p}_{\lambda i}, & p_{\lambda i} = 0. \end{cases} \quad \square$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Пусть $|I| < \infty$ или $|\Lambda| < \infty$. Ниже будет доказано (см. предложение 7), что в этом случае полугруппа вполне проста, поэтому для утверждения о том, что продолжение $*$ стандартно, достаточно требовать сохранения $\mathcal{R}$ - и $\mathcal{L}$ -классов.

Пусть $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ — вполне 0-простая полугруппа. Тогда $R_i = \{(g)_{i\lambda} \mid g \in G, \lambda \in \Lambda\}$, $L_\lambda = \{(g)_{i\lambda} \mid g \in G, i \in I\}$ — ненулевые $\mathcal{R}$ - и $\mathcal{L}$ -классы.

Теорема 5. Пусть $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ — вполне 0-простая полугруппа, $M = S \setminus \{0\}$ — частичная полугруппа ненулевых элементов из S . Если $*$ — полная ассоциативная операция, продолжающая частичную операцию $\cdot$ на M , то $\mathcal{R}$ -, $\mathcal{L}$ - и $\mathcal{H}$ -классы полугруппы $(M, *)$ являются объединениями соответственно $\mathcal{R}$ -, $\mathcal{L}$ -, $\mathcal{H}$ -классов полугруппы S , причем если $\tilde{R}$ и $\tilde{R}'$ — $\mathcal{R}$ -классы полугруппы $(M, *)$, $\tilde{R} = \bigcup_{i \in I_1} R_i$, $\tilde{R}' = \bigcup_{i \in I'_1} R_i$, где R_i — $\mathcal{R}$ -классы полугруппы S , то между множествами I_1 и I'_1 существует взаимно однозначное соответствие. Аналогичное утверждение имеет место для $\mathcal{L}$ -классов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тот факт, что при продолжении операции ненулевые классы отношений Грина могут лишь увеличиваться, очевиден. Поэтому $\mathcal{R}$ -, $\mathcal{L}$ -, $\mathcal{H}$ -классы в $(M, *)$ являются объединениями классов $(S, \cdot)$. Выберем какие-либо индексы $i_1 \in I_1$, $i'_1 \in I'_1$, $\lambda \in \Lambda$ и элементы $a \in R_{i_1} \cap L_\lambda$, $a' \in R_{i'_1} \cap L_\lambda$. Для каждого $i \in I_1$ возьмем элемент $a_i \in R_i \cap L_\lambda$. Так как $a, a_i \in \tilde{R}$, существует элемент $s_i \in M$ такой, что $a * s_i = a_i$. Так как $a, a' \in L_\lambda$, то $a' = ua$, $a = va'$

при некоторых $u, v \in S$. Положим $a'_i = ua_i$ для каждого $i \in I_1$. Так как $va'_i = vua_i = vua * s_i = a * s_i = a_i$, то $a'_i \in L_\lambda$. Пусть $a'_i \in R_j$ при некотором $j \in I$. Так как $a'_i \in \tilde{R}$, то $j \in I'_1$. Таким образом, имеем отображение $i \mapsto j$, $I_1 \rightarrow I'_1$. Осталось проверить, что отображение $i \mapsto j$ взаимно однозначно. Пусть $i, k \in I_1$ и $ua_i, ua_k \in R_j$ при некотором j . Так как $vu \neq 0$ и $ua_i \neq 0$, то $vua_i \neq 0$. Аналогично $vua_k \neq 0$. Таким образом, $(vua_i, vua_k) \in \mathcal{R}_S$, т. е. $(a_i, a_k) \in \mathcal{R}_S$, поэтому $i = k$. Этим доказано, что отображение $i \mapsto j$ инъективно. Возьмем теперь любое $j \in I'_1$ и элемент $b \in R_j \cap L_\lambda$. Так как отображения $x \mapsto ux$, $y \mapsto vy$ являются взаимно однозначными и взаимно обратными соответствиями между классами $\tilde{R}$ и $\tilde{R}'$, сохраняющими $\mathcal{L}$ -классы, то $vb \in R_i \cap L_\lambda$ для некоторого $i \in I_1$. Так как $u \cdot vb = b \in R_j \cap L_\lambda$, то $i \mapsto j$. Этим доказана сюръективность отображения $i \mapsto j$. Теорема доказана. $\square$

Естественно возникают следующие 2 вопроса:

- 1) для всякого ли продолжения частичной операции на $M = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P) \setminus \{0\}$ полугруппа будет вполне простой;
- 2) всякое ли продолжение стандартно?

Мы увидим, что на оба вопроса в общем случае ответ отрицательный. Тем не менее, в некоторых важных частных случаях ответы положительные.

Предложение 6. *При любом ассоциативном продолжении $*$ полугруппа $(M, *)$ проста.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a, b \in M$. Так как $S = M \cup \{0\}$ — 0-простая полугруппа и $a, b \neq 0$, то $b \in SaS$ и $a \in SbS$. Следовательно, $b = xay$, $a = ubv$ при некоторых $x, y, u, v \in S$. Так как $a, b \neq 0$, то $b = x * a * y$, $a = u * b * v$. Следовательно, $(M, *)$ — простая полугруппа. $\square$

Предложение 7. *Если $|I| < \infty$ или $|\Lambda| < \infty$, то при любом ассоциативном продолжении операции на M полугруппа $(M, *)$ вполне проста.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 6 знаем, что $(M, *)$ — простая полугруппа. Пусть $|I| < \infty$ (случай $|\Lambda| < \infty$ рассматривается аналогично). Тогда полугруппа $S = M \cup \{0\}$ имеет лишь конечное число $\mathcal{R}$ -классов. Ранее отмечали, что $\mathcal{R}$ -классы полугруппы $(M, *)$ являются объединением ненулевых $\mathcal{R}$ -классов полугруппы S . Следовательно, полугруппа $(M, *)$ также имеет лишь конечное число $\mathcal{R}$ -классов. Так как в одном $\mathcal{R}$ -классе идемпотенты попарно не сравнимы (в смысле естественного порядка), то $(M, *)$ не имеет бесконечно убывающих последовательностей идемпотентов. Отсюда следует, что в $(M, *)$ есть примитивный идемпотент. Наконец, так как $(M, *)$ проста и имеет примитивный идемпотент, то $(M, *)$ вполне проста. $\square$

Следующее утверждение касается вполне 0-простых полугрупп $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ с конечным числом $\mathcal{H}$ -классов. Положим $m = |I|$, $n = |\Lambda|$. При этом $m, n < \infty$, а группа G может быть бесконечной. Сэндвич-матрица P имеет размер $n \times m$. Пусть заданы разбиения множеств I и Λ : $I = \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha$, $\Lambda = \bigcup_{\beta \in B} J_\beta$.

Тогда имеем разбиение матрицы P на подматрицы $P_{\alpha\beta} = \|p_{\lambda i}\|_{\lambda \in J_\beta, i \in I_\alpha}$. Разбиение будем называть *нетривиальным*, если не все подматрицы имеют размер 1×1 . Предложение 8 дает необходимое условие наличия нестандартного продолжения частичной операции на $\mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P) \setminus \{0\}$. Напомним, что обязательным требованием к матрице P является существование в каждой строке и каждом столбце ненулевого элемента.

Предложение 8. Пусть $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ — вполне 0-простая полугруппа, $M = S \setminus \{0\}$ — частичная полугруппа ее ненулевых элементов, и пусть I и Λ конечны. Если частичная операция на M имеет нестандартное продолжение до полной ассоциативной операции, то матрица P имеет нетривиальное разбиение на подматрицы одного размера такое, что каждая подматрица содержит не более одного ненулевого элемента.

Доказательство. Если есть нестандартное продолжение $*$, то ввиду теоремы 5 $\mathcal{R}$ -классы полученной полугруппы будут являться объединениями некоторых ненулевых $\mathcal{R}$ -классов полугруппы S , и то же имеет место для $\mathcal{L}$ -классов, причем количество $\mathcal{R}$ -классов полугруппы S , входящих в один $\mathcal{R}$ -класс полугруппы $(M, *)$, одно и то же, и аналогичное верно для $\mathcal{L}$ -классов. По лемме 3 $\mathcal{R}$ - и $\mathcal{L}$ -классы полугруппы $(M, \cdot)$ не совпадают с $\mathcal{R}$ - или $\mathcal{L}$ -классами полугруппы $(M, *)$. Так как $|I|, |\Lambda| < \infty$, ввиду предложения 7 $(M, *)$ — вполне простая полугруппа. Поэтому имеем нетривиальное разбиение матрицы P на подматрицы одного размера. Если в одной подматрице будет более одного ненулевого элемента, то соответствующий $\mathcal{H}$ -класс будет содержать более одного идемпотента, что невозможно (хорошо известно, что $\mathcal{H}$ -класс, содержащий идемпотент, является группой, а в группе ровно один идемпотент.) $\square$

Замечание 9. Предложение 8 позволяет устанавливать несуществование других продолжений (за исключением стандартных). Например, конечная вполне 0-простая полугруппа с матрицей P , у которой на диагонали стоят нули, а остальные элементы ненулевые, не имеет нестандартных продолжений.

Приведем пример нестандартного продолжения.

Пример 1. Пусть $S = \mathcal{M}^0(G, \{1, 2\}, \{1, 2\}, P)$ — вполне 0-простая полугруппа. Будем считать, что G — произвольная группа, а сэндвич-матрица P имеет вид $P = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}$. Так как S вполне 0-проста, то $p_1, p_2 \neq 0$. Ясно, что рассматриваемый пример является минимальным по размерам сэндвич-матрицы, допускающей разбиение на подматрицы, удовлетворяющее требованиям предложения 8.

Элементы частичной полугруппы $M = S \setminus \{0\}$ имеют вид $(g)_{ij}$, где $g \in G$, $i, j \leq 2$. Разбиению матрицы P на подматрицы, как показано в табл. 2, соответствует в S объединение $\mathcal{R}$ -классов R_1 и R_2 в один $\mathcal{R}$ -класс; покажем, что это может быть сделано.

Ввиду леммы 3.6 из [5] можем считать, что $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Таким образом,

Таблица 2. Разбиение матрицы P на подматрицы

p_1	0
0	p_2

в частичной полугруппе M имеем

$$(g)_{i\lambda} \cdot (h)_{j\mu} = \begin{cases} (gh)_{i\mu}, & \text{если } \lambda = j, \\ \text{не существует,} & \text{если } \lambda \neq j. \end{cases}$$

Очевидно, что $S = A \cup B \cup C \cup D$, где $A = \{(g)_{11} \mid g \in G\}$, $B = \{(g)_{12} \mid g \in G\}$, $C = \{(g)_{21} \mid g \in G\}$, $D = \{(g)_{22} \mid g \in G\}$. Множества A , B , C , D — в точности ненулевые $\mathcal{H}$ -классы полугруппы S . Умножение в M этих множеств можно расположить в табл. 3.

Таблица 3. Умножение в M множеств

	A	B	C	D
A	A	B	-	-
B	-	-	A	B
C	C	D	-	-
D	-	-	C	D

Продолжим операцию $\cdot$ в M до операции $*$ согласно правилам $(g)_{i1} * (h)_{2j} = (g)_{i2} * (h)_{1j} = (gh)_{3-i,j}$. Это умножение соответствует табл. 4.

Таблица 4. Продолженное умножение в M множеств

	A	B	C	D
A	A	B	C	D
B	C	D	A	B
C	C	D	A	B
D	A	B	C	D

Полугруппа $(M, *)$ является правой группой. Здесь $A \cup C$ и $B \cup D$ — группы, изоморфные группе $G \times \mathbb{Z}_2$. Если $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ с операцией сложения по модулю 2, то $(g)_{11} \mapsto (g, 0)$, $(g)_{21} \mapsto (g, 1)$ — изоморфизм $A \cup C$ с $G \times \mathbb{Z}_2$, а $(g)_{21} \mapsto (g, 1)$, $(g)_{22} \mapsto (g, 0)$ — изоморфизм $B \cup D$ с $G \times \mathbb{Z}_2$. Очевидно, что продолжение $*$ является нестандартным.

Не всегда продолжение частичной полугруппы ненулевых элементов вполне 0-простой полугруппы определяет вполне простую полугруппу. Следующий пример является одним из таких.

ПРИМЕР 2. Пусть $I = \Lambda = \{0, 1, 2, \dots\}$, $G = \{e\}$, $p_{\lambda i} = \begin{cases} e, & \text{при } \lambda = i, \\ 0, & \text{при } \lambda \neq i, \end{cases}$
 $M = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$, $M = S \setminus \{0\}$. Продолжим частичное умножение на S

следующим образом: $(e)_{ij} * (e)_{kl} = (e)_{i+k-\min(j,k), j+l-\min(j,k)}$. Нетрудно проверить, что прежние соотношения $(e)_{ij} \cdot (e)_{jm} = (e)_{im}$ остаются выполненными. Полугруппа $(M, *)$, полученная продолжением частичной операции на M , изоморфна бициклической полугруппе (см. [5, § 1.12]). Она не является вполне простой, так как имеет сравнимые идемпотенты $(e)_{11} > (e)_{22} > (e)_{33} > \dots$.

3. Необходимые и достаточные условия продолжаемости $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \cdot)$

Для полугруппы $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$, как нетрудно проверить, $\mathcal{J}$ -классы образуют решетку, изоморфную решетке делителей числа n (или, что то же самое, прямому произведению конечного числа конечных цепей). Если n четно, то одноэлементный минимальный ненулевой $\mathcal{J}$ -класс — это $J(\frac{n}{2})$.

Следующая теорема дает полный ответ на вопрос о продолжаемости операции в частичной полугруппе $S = (\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \cdot)$.

Теорема 10. Пусть $S = (\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \cdot)$ — частичная мультипликативная полугруппа вычетов. Частичная операция на S продолжается до полной ассоциативной операции в том и только том случае, если выполнено одно из следующих условий:

- (1) n четно;
- (2) $n = p^k$, где $k \in \mathbb{N}$, а p — нечетное простое число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть операция на S продолжается, но не выполнено ни (1), ни (2). Тогда n можно представить в виде $n = uv$, где u, v — нечетные числа, $u, v > 1$ и $(u, v) = 1$.

Продолжение операции $\cdot$ умножения по модулю n будем обозначать через $*$. Очевидно, что $x * y = xy$, если $xy \nmid n$.

Обозначим $a = u * v$. Докажем, что $a \dot{:} u$ или $a \dot{:} v$. Пусть $a \not\dot{:} u$ и $a \not\dot{:} v$. Тогда $a(u+1) \not\dot{:} uv$ (иначе $a \dot{:} u$). Отсюда получаем: $a \cdot (u+1) = a * (u+1) = (u * v) * (u+1) = u * (v * (u+1)) = u * (v \cdot (u+1)) = u * v = a$. Таким образом, $(u+1)a = a$, откуда $ua = 0$, а значит, $a \dot{:} v$; противоречие тому, что $a \not\dot{:} u$ и $a \not\dot{:} v$.

Итак, $a \dot{:} u$ или $a \dot{:} v$. Далее будем считать, что $a \dot{:} u$. Имеем $a = uk$. Положим $d = (k, v)$. Тогда $k = k_1 d$, $v = v_1 d$ для некоторых k_1, v_1 таких, что $(k_1, v_1) = 1$. Заметим, что v_1 — нечетное. Докажем, что $v_1 \neq 1$. Действительно, если $v_1 = 1$, то $v = d$ и $a = uk = uk_1 d = uk_1 v \dot{:} uv$, что невозможно. Таким образом, $v_1 \geq 3$.

Найдем такое t , что $t \not\dot{:} v_1$, $(u+t) \not\dot{:} v_1$ и $t \not\dot{:} u$. Действительно, возьмем $t = 1$, если $(u+1) \not\dot{:} v_1$, и $t = 2$, если $(u+1) \dot{:} v_1$. Проверим, что $(u+t)a \not\dot{:} uv$. Действительно, если $(u+t)a \dot{:} uv$, то $(u+t)uk_1 d \dot{:} uv_1 d$, поэтому $(u+t)k_1 \dot{:} v_1$. Так как $(k_1, v_1) = 1$, то $(u+t) \dot{:} v_1$. Но это противоречит выбору числа t . Проверим,

далее, что $ta \dot{\neq} uv$. Действительно, если $ta \dot{=} uv$, то $tuk_1d \dot{=} uv_1d$, откуда $tk_1 \dot{=} v_1$, а значит, $t \dot{=} v_1$; снова противоречие с выбором t .

Отметим, что поскольку $(u+t)a \dot{\neq} uv$ и $ta \dot{\neq} uv$, выполняются $a * (u+t) = a \cdot (u+t)$ и $a * t = a \cdot t$. Далее получаем

$$\begin{aligned} a(u+t) &= a * (u+t) = (u * v) * (u+t) = u * (v * (u+t)) \\ &= u * (v \cdot (u+t)) = u * (v \cdot t) = u * (v * t) = (u * v) * t = at. \end{aligned}$$

Итак, $(u * t)a = ta$. Следовательно, $ua = 0$. Это означает, что $a \dot{=} v$. Так как $a \dot{=} u$ и $a \dot{=} v$, то $a \dot{=} uv$, что невозможно. Следовательно, выполнено условие (1) либо условие (2).

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Допустим, что выполняется условие (1), тогда полугруппа имеет два минимальных ненулевых $\mathcal{J}$ -класса, один из которых состоит из одного элемента $\frac{n}{2}$. Тогда по предложению 1 операция в частичной полугруппе продолжается до полной ассоциативной операции.

Допустим, что выполняется условие (2). Пусть $a = p^l x$, $b = p^m y$, где $(x, p) = (y, p) = 1$. Тогда определим операцию $*$, полагая $a * b = ab = p^{l+m} xy$, если $l + m < k$, и $a * b = p^{k-1} xy$, если $l + m \geq k$. Пусть $a = p^l x$, $b = p^m y$, $c = p^r z$. Покажем ассоциативность данной операции:

$$1) \ l + m + r < k$$

$$(a * b) * c = p^{l+m} xy * c = p^{l+m+r} xyz, \quad a * (b * c) = a * p^{m+r} yz = p^{l+m+r} xyz;$$

$$2) \ l + m + r \geq k$$

$$(a) \ l + m < k, \ m + r < k$$

$$(a * b) * c = p^{l+m} xy * c = p^{k-1} xyz, \quad a * (b * c) = a * p^{m+r} yz = p^{k-1} xyz;$$

$$(b) \ l + m < k, \ m + r \geq k$$

$$(a * b) * c = p^{l+m} xy * c = p^{k-1} xyz, \quad a * (b * c) = a * p^{k-1} yz = p^{k-1} xyz;$$

$$(c) \ l + m \geq k, \ m + r < k$$

$$(a * b) * c = p^{k-1} xy * c = p^{k-1} xyz, \quad a * (b * c) = a * p^{m+r} yz = p^{k-1} xyz;$$

$$(d) \ l + m \geq k, \ m + r \geq k$$

$$(a * b) * c = p^{k-1} xy * c = p^{k-1} xyz, \quad a * (b * c) = a * p^{k-1} yz = p^{k-1} xyz.$$

Таким образом, операция в частичной полугруппе может быть продолжена до полной ассоциативной. $\square$

4. Частичная полугруппа ненулевых матриц над полем

Пусть S — множество ненулевых матриц размера 2×2 над полем F . Очевидно, что относительно обычного матричного умножения S — частичная полугруппа. Обозначим через M частичную полугруппу 2×2 матриц ранга 1. Нетрудно видеть, что $M \cup \{0\}$ — вполне 0-простая полугруппа, поэтому частичная операция на M продолжается до полной ассоциативной операции. Верно ли это утверждение для частичной полугруппы S ? Оказывается, что положительный ответ имеет место лишь для поля из двух элементов. Матрицы размера 2×2 будем рассматривать как линейные операторы $a : F^2 \rightarrow F^2$, $(x, y) \mapsto (x, y) \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Ядро $\ker a$ и образ $\operatorname{im} a$ определяются обычным образом: $\ker a = \{v \in F^2 \mid va = 0\}$, $\operatorname{im} a = F^2 a$.

Теорема 11. Частичная операция на полугруппе S всех ненулевых матриц размера 2×2 над полем F продолжается до полной ассоциативной операции в том и только том случае, если $|F| = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого одномерного подпространства K пространства F^2 обозначим через t_K какую-либо матрицу, для которой $\ker t_K = \operatorname{im} t_K = K$. Так как $t_K \cdot t_K = 0$ в полугруппе всех матриц, произведение $t_K \cdot t_K$ не определено в S . Очевидно, t_K — матрица ранга 1.

Докажем НЕОБХОДИМОСТЬ условия $|F| = 2$. Предположим, что операция умножения в S продолжается до полной ассоциативной операции $*$. Рассмотрим произведения $t_K u * t_K$ и $t_K * u t_K$, где u — обратимая матрица. Пусть $p \in K \setminus \{0\}$, а q — такой вектор из $F^2 \setminus K$, что $q t_K = p$. Тогда p, q — базис пространства F^2 и в этом базисе матрица оператора t_K имеет вид $[t_K] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (здесь первая строчка — координаты вектора $p t_K$, вторая — вектора $q t_K$). Оператор u выберем так, чтобы его матрица в базисе p, q имела вид $[u] = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$, где $\alpha, \gamma \neq 0$. Тогда

$$[t_K u] = [t_K][u] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad [u t_K] = [u][t_K] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что

$$\ker(t_K u) = \ker(u t_K) = \operatorname{im}(t_K u) = \operatorname{im}(u t_K) = K.$$

Обозначая через e единичную матрицу, получим

$$t_K u * t_K = (\alpha t_K) * t_K = \alpha e \cdot t_K * t_K = \alpha(t_K * t_K),$$

$$t_K * u t_K = t_K * (\gamma t_K) = t_K * (t_K \cdot \gamma e) = (t_K * t_K) \cdot \gamma e = \gamma(t_K * t_K).$$

Следовательно, при $\alpha \neq \gamma$ операция $*$ неассоциативна. Если $|F| > 2$, то такие элементы α, γ могут быть выбраны. Таким образом, для ассоциативности условие $|F| = 2$ необходимо.

Теперь докажем достаточность условия $|F| = 2$. Имеем $F = \{0, 1\}$ — поле из двух элементов. Положим $t_K * t_K = t_K$ для каждого одномерного подпространства K . Определим другие произведения $a \cdot b$, которые ранее не были определены. Пусть $a \cdot b$ не определено. Это значит, что $ab = 0$, т. е. $\text{im } a \subseteq \ker b$. Отсюда видно, что $a, b \in M$ и $\text{im } a = \ker b = K$, где K — некоторое одномерное подпространство пространства F^2 . Так как $\text{im } a = \text{im } t_K$, то $a = ut_K$ для некоторой матрицы $u \in S$. Так как $\ker b = \ker t_K$, то $b = t_K v$ для некоторой матрицы $v \in S$. Теперь полагаем $a * b = ut_K v$. Это произведение действительно существует, так как $\text{im}(ut_K) = K$, а $\ker v \neq K$ ввиду существования произведения $t_K v$. Проверим корректность этого определения. Пусть $a = u' t_K$, $b = t_K v'$. Тогда

$$ut_K v = ut_K \cdot v = u' t_K \cdot v = u' \cdot t_K v = u' \cdot t_K v' = u' t_K v'.$$

Заметим, что матрицы u и v могут быть выбраны из $S \setminus M$.

Пусть K — одномерное подпространство пространства F^2 , а g — обратимая матрица. Докажем, что $g^{-1} t_K g = \lambda t_{K'}$, где $K' = Kg$, а $\lambda \in F \setminus \{0\}$, поле F произвольное. Действительно, нетрудно проверить, что $\ker(g^{-1} t_K g) = \text{im}(g^{-1} t_K g) = K'$. Пусть $p \in K' \setminus \{0\}$, а q — какой-либо вектор с условием $q t_{K'} = p$. Тогда p, q — базис пространства F^2 и в этом базисе имеем

$$[t_{K'}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [g^{-1} t_K g] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

для некоторого $\lambda \in F \setminus \{0\}$. Отсюда $g^{-1} t_K g = \lambda t_{K'}$. Если $|F| = 2$, то $\lambda = 1$, а значит, $g^{-1} t_K g = t_{K'}$.

Докажем ассоциативность операции

$$a * b = \begin{cases} a \cdot b, & \text{если } a \cdot b \text{ определено в } S, \\ ut_K v, & \text{если } a = ut_K, b = t_K v. \end{cases}$$

Пусть $a, b, c \in S$. Разберем ряд случаев.

СЛУЧАЙ 1: $b \in S \setminus M$. В этом случае произведения ab и bc существуют при любых a, c . Разобьем этот случай на ряд других случаев.

СЛУЧАЙ 1.1: $ab \cdot c$ существует. Тогда, так как S — частичная полугруппа, $a \cdot bc$ тоже существует и $ab \cdot c = a \cdot bc$.

СЛУЧАЙ 1.2: $ab \cdot c$ не существует. Тогда $a \cdot bc$ тоже не существует. Очевидно, $a, c \in M$. Следовательно, $\text{im } a = \ker(bc)$ и $\text{im}(ab) = \ker c$. Обозначим $K = \text{im } a$, $K' = \ker c$. Очевидно, K и K' — одномерные подпространства и $Kb = K'$. Так как $\text{im } a = K$, то $a = ut_K$ при некотором $u \in S \setminus M$. Так как $\ker c = K'$, то $c = t_{K'} v$ при некотором $v \in S \setminus M$. Так как $\ker(b^{-1} t_K b) = \text{im}(b^{-1} t_K b) = K'$, согласно сделанному ранее замечанию $b^{-1} t_K b = t_{K'}$. Теперь получаем

$$(a * b) * c = ab * c = ut_K b * c = (ub \cdot b^{-1} t_K b) * t_{K'} v = ub t_{K'} * t_{K'} v = ub t_{K'} v,$$

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a * bc = ut_K * b t_{K'} v = ut_K * (b t_{K'} b^{-1} \cdot bv) \\ &= ut_K * t_K b v = ut_K b v = ub \cdot b^{-1} t_K b \cdot v = ub t_{K'} v. \end{aligned}$$

Таким образом, $(a * b) * c = a * (b * c)$.

СЛУЧАЙ 2: $b \in M$. Разберем ряд случаев, возникающих внутри этого случая.

СЛУЧАЙ 2.1: произведения ab и bc существуют. Так как $b \in M$, то $\text{im}(ab) = \text{im } b \neq \ker c$, поэтому произведение $ab \cdot c$ существует. Но тогда произведение $a \cdot bc$ также существует и $(ab)c = a(bc)$, т. е. $(a * b) * c = a * (b * c)$.

СЛУЧАЙ 2.2: произведение ab существует, а bc нет. Тогда $\text{im } b = \ker c$. Имеем $b = gt_K$, $c = t_K v$, где g, v — обратимые матрицы. Далее получаем

$$(a * b) * c = ab * c = agt_K * t_K v = agt_K v,$$

$$a * (b * c) = a * (gt_K * t_K v) = a * gt_K v = agt_K v.$$

СЛУЧАЙ 2.3: произведение ab не существует, а bc существует. Этот случай разбирается аналогично предыдущему.

СЛУЧАЙ 2.4: произведения ab и bc не существуют. Тогда $\text{im } a = \ker b = K$, $\text{im } b = \ker c = K'$. Имеем

$$a = ut_K, \quad b = t_K v = u' t_{K'}, \quad c = t_{K'} v';$$

$$(a * b) * c = ut_K v * t_{K'} v' = uu' t_{K'} * t_{K'} v' = uu' t_{K'} v'$$

и

$$a * (b * c) = ut_K * u' t_{K'} v' = ut_K * t_K v v' = ut_K v v' = uu' t_{K'} v'.$$

Таким образом, $(a * b) * c = a * (b * c)$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Оказывается, что продолжение частичной операции на частичной полугруппе S из теоремы 11 единственно.

Матрицы ранга 1 вместе с нулевой матрицей образуют полугруппу $M \cup \{0\}$, которая вполне 0-проста, содержит $9 + 1$ элементов и, как будет видно из дальнейшего, изоморфна рисовской матричной полугруппе $\mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ над группой с нулем $\{0, e\}$, с сэндвич-матрицей $P = \begin{pmatrix} 0 & e & e \\ e & 0 & e \\ e & e & 0 \end{pmatrix}$. Действительно, имеется ровно три одномерных подпространства пространства $(\mathbb{Z}_2)^2$: это

$$K_1 = \{(0, 0), (0, 1)\}, \quad K_2 = \{(0, 0), (1, 0)\}, \quad K_3 = \{(0, 0), (1, 1)\}.$$

Для любых $i, j \in \{1, 2, 3\}$ есть ровно одна матрица ранга 1, у которой ядро равно K_i , а образ равен K_j . Изобразим это в табл. 5, где элементы в строке имеют одинаковые образы, а элементы в столбце — одинаковые ядра.

Замена диагональных элементов 0 элементом e определяет естественным образом продолжение частичной операции на M . Так как множество M конечно, ввиду предложения 7 любое ассоциативное продолжение $*$ частичной операции на M будет давать вполне простую полугруппу. Ненулевые $\mathcal{R}$ - и $\mathcal{L}$ -классы полугруппы $M \cup \{0\}$ будут совпадать с соответствующими классами полугруппы

Таблица 5. Строение частичной полугруппы матриц ранга 1

		im		
		K_1	K_2	K_3
ker	K_1	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
	K_2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
	K_3	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$(M, *)$, поскольку два $\mathcal{R}$ -класса «склеиться» в один не могут по теореме 5, а если «склеиваются» все три $\mathcal{R}$ -класса, то какой-либо $\mathcal{H}$ -класс будет содержать два идемпотента, что невозможно, так как $\mathcal{H}$ -класс, содержащий идемпотент, является группой (см. лемму 2.15 из [5]). Неопределенными в M являются произведения $(e)_{ii} \cdot (e)_{ii}$ ($i = 1, 2, 3$). Но поскольку $\mathcal{R}$ - и $\mathcal{L}$ -классы в $(M, \cdot)$ и $(M, *)$ одни и те же, то $(e)_{ii} * (e)_{ii} = (e)_{ii}$. В обозначениях теоремы 11 это означает, что мы обязаны определить $t_K * t_K = t_K$. Отсюда видно, что ассоциативное умножение $*$ распространяется на все множество S однозначно.

Достаточность в теореме 11 первоначально была установлена с помощью компьютера. А именно, было установлено, что частичная операция на частичной полугруппе ненулевых (2×2) -матриц над полем $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ продолжается, причем однозначно, до полной ассоциативной операции. Результаты компьютерных вычислений приведены в табл. 6 и 7, где

$$\begin{aligned}
 1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & 2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & 3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, & 4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\
 5 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & 6 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & 7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & 8 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 9 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, & 10 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & 11 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & 12 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 13 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & 14 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & 15 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпин Е. С., Евсеев А. Е. Частичные алгебраические действия. С-Пб.: Образование, 1991.
2. Ляпин Е. С. О внутреннем продолжении частичных действий до полных ассоциативных // Изв. вузов. Математика. 1982. № 7. С. 40–44.
3. Розен В. В. Частичные операции в упорядоченных множествах. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1973.
4. Петриков А. О. Частичные полугруппы и отношения Грина // Электрон. информ. системы. 2014. № 3. С. 65–72.

Таблица 6. Частичная полугруппа ненулевых (2×2) -матриц над полем $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	2	1	5	6	3	4	10	11	12	7	8	9	13	14	15
3	3	4	6	5	2	1	13	14	15	7	8	9	10	11	12
4	4	3	2	1	6	5	7	8	9	13	14	15	10	11	12
5	5	6	4	3	1	2	13	14	15	10	11	12	7	8	9
6	6	5	1	2	4	3	10	11	12	13	14	15	7	8	9
7	7	8	9	9	7	8	7	8	9	—	—	—	7	8	9
8	8	7	7	8	9	9	—	—	—	7	8	9	7	8	9
9	9	9	8	7	8	7	7	8	9	7	8	9	—	—	—
10	10	11	12	12	10	11	10	11	12	—	—	—	10	11	12
11	11	10	10	11	12	12	—	—	—	10	11	12	10	11	12
12	12	12	11	10	11	10	10	11	12	10	11	12	—	—	—
13	13	14	15	15	13	14	13	14	15	—	—	—	13	14	15
14	14	13	13	14	15	15	—	—	—	13	14	15	13	14	15
15	15	15	14	13	14	13	13	14	15	13	14	15	—	—	—

Таблица 7. Продолжение частичной полугруппы ненулевых (2×2) -матриц над полем $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	2	1	5	6	3	4	10	11	12	7	8	9	13	14	15
3	3	4	6	5	2	1	13	14	15	7	8	9	10	11	12
4	4	3	2	1	6	5	7	8	9	13	14	15	10	11	12
5	5	6	4	3	1	2	13	14	15	10	11	12	7	8	9
6	6	5	1	2	4	3	10	11	12	13	14	15	7	8	9
7	7	8	9	9	7	8	7	8	9	7	8	9	7	8	9
8	8	7	7	8	9	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9
9	9	9	8	7	8	7	7	8	9	7	8	9	7	8	9
10	10	11	12	12	10	11	10	11	12	10	11	12	10	11	12
11	11	10	10	11	12	12	10	11	12	10	11	12	10	11	12
12	12	12	11	10	11	10	10	11	12	10	11	12	10	11	12
13	13	14	15	15	13	14	13	14	15	13	14	15	13	14	15
14	14	13	13	14	15	15	13	14	15	13	14	15	13	14	15
15	15	15	14	13	14	13	13	14	15	13	14	15	13	14	15

5. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. М.: Мир, 1972.

Статья поступила 15 ноября 2016 г., окончательный вариант — 12 апреля 2017 г.

Петриков Александр Олегович
Национальный исследовательский университет
«Московский институт электронной техники»,
пл. Шокина, 1, Зеленоград 124498
masterpetr@mail.ru

INNER EXTENSIONS OF PARTIAL OPERATIONS ON A PARTIAL SEMIGROUP

A. O. Petrikov

Abstract: We analyse inner extensions of partial operations on a partial semigroup. The problem of extension of a partial operation internally to a full one with preservation of associativity is studied. The possibilities of continuing a partial operation on a partial semigroup of non-zero elements of a completely 0-simple semigroup by standard and non-standard methods are considered. A negative answer is obtained in relation to the question about whether any extension of a partial operation on a partial semigroup of non-zero elements is a completely simple semigroup, and whether any extension is standard. However, in certain cases the answers are positive. The article deduces the necessary and sufficient conditions of extendibility of a partial operation on a semigroup of residue modulo n , and also of a partial operation on a semigroup of non-zero elements of (2×2) -matrices over the field. The uniqueness of the extension of a partial operation on the semigroup of non-zero (2×2) -matrices over a field is shown.

DOI 10.25587/SVFU.2017.2.9244

Keywords: inner extension, partial semigroup, completely 0-simple semigroup, semigroup of residue modulo n .

REFERENCES

1. Lyapin E. S. and Evseev A. E., Partial Algebraic Actions, Obrazovanie, St. Petersburg (1991).
2. Lyapin E. S. "On the internal continuation of partial actions to complete associative," *Izv. vuzov, Mat.*, No. 7, 40–44 (1982).
3. Rozen V. V., Partial Operations in Ordered Sets, *Izd. Saratov. Univ.*, Saratov (1973).
4. Petrikov A. O. "Partial semigroups and Green's relations," *Electron. Inform. Syst.*, No. 3, 65–72 (2014).
5. Clifford A. and Preston Gh., Algebraic Theory of Semigroups, Mir, Moscow (1972).

Submitted November 15, 2016, Revised version April 12, 2017

Alexander O. Petrikov
National Research University of Electronic Technology,
1 Shokin Square, Zelenograd 124498, Russian Federation
masterpetr@mail.ru